# Chapitre VI.

—

## Problèmes. — Applications.

Plan d'études. — Problèmes fondamentaux. — Applications.

—

**100.** Dans la solution des problèmes de géométrie par les procédés de la géométrie descriptive, toutes les opérations graphiques à exécuter sur les épures, sont la répétition des opérations que nécessite la solution de quelques problèmes que l'on peut considérer comme fondamentaux.

Ces problèmes sont :

**Problème** I. *Construire le point de rencontre d'une droite et d'un plan.*

**Problème** II. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite.*

Le premier problème se subdivise suivant que le plan est . . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} \text{un plan de projection,} \\ \text{un plan bissecteur,} \\ \text{ou un plan quelconque.} \end{array} \right.$

Les deux premières subdivisions admettent des problèmes réciproques.

Nous étudierons ces problèmes fondamentaux, et nous réunirons, sous forme d'applications de chacun d'eux, toutes les questions qui peuvent être résolues par les procédés graphiques qui découlent de la solution du problème fondamental.

Ce qui précède nous dicte le plan d'études suivant :

**Premier problème**. *Construire les deux traces ordinaires ou principales d'une droite.*

**Applications**. *Construire les traces ordinaires ou principales d'un plan devant satisfaire à diverses conditions.*

**Deuxième problème**. *Connaissant les traces ordinaires ou principales d'une droite, construire les deux projections de cette droite.*

**Applications**. *Construire les projections de l'intersection de deux plans représentés de diverses matières.*

**Troisième problème**. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.*

**Applications**. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté de diverses manières.*

**Quatrième problème**. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite.*

—

**101. Premier problème fondamental.** *Construire les deux traces d'une droite.*

**Premier cas**. *Construire les traces ordinaires d'une droite.*

**Solution dans l'espace**. La première trace $a$ de la droite $d$ est un point de $d$ et de $P_1$ ; la première projection $a'$ est donc sur $d'$ et la seconde projection $a''$ est sur l'axe de projection (**24**) et sur $d''$. La seconde trace $b$ de la droite est un point de $d$ et de $P_2$ ; $b''$ est donc sur $d''$, et $b'$ sur l'axe et sur $d'$.

**Solution graphique**. (**Ep. 50**.) On prolongera la première projection $d'$ de la droite $d$ jusqu'à l'axe ; en ce point, qui est la première projection de la seconde trace de la droite, on élève une normale à l'axe ; cette normale coupera la projection $d''$ de la droite en un point qui sera la seconde projection de la trace de $d$ sur $P_2$.

Pour avoir la première trace $a$ de la droite, on prolongera la projection $d''$ de $d$ jusqu'à l'axe, pour avoir, en ce point, la projection $a''$ de la première trace. La première projection $a'$ sera le point de rencontre de la normale élevée en $a''$ à l'axe, avec la première projection $d'$ de la droite.

**Second cas.** *Construire les traces principales d'une droite.*

**Solution graphique. (Ep. 51.)** La trace de la droite sur $B_1$ est le point de $d$ qui a ses deux *projections symétriques* (**66**). Ce point s'obtient en prolongeant $d''$ jusqu'à l'axe en $m$, et en menant par $m$ une droite symétrique à $d''$ par rapport à l'axe ; cette droite auxiliaire coupera $d'$ en $\alpha'$, première projection de la trace de la droite $d$ sur $B_1$. La projection $\alpha''$ est sur $d''$ et sur $\alpha' \alpha''$, droite normale à l'axe.

La trace de la droite sur $B_2$ étant un point de la droite dont les deux projections se confondent en une *projection-double,* ce point sera le point de rencontre $\beta$ des deux projections $d'$ et $d''$ de $d$.

**Exercices.** Construire les traces principales d'une droite :

1) La droite est parallèle à $P_1$ ou $P_2$.

2) La droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

3) La droite est dans un plan normal à l'axe, un plan de profil.

**102. Applications du premier problème fondamental.**

*Construire les traces d'un plan assujetti à satisfaire à diverses conditions.*

**Solution.** La solution générale de tous les problèmes qui peuvent se ranger dans les applications du premier problème fondamental, se base sur les principes suivants :

I. *Si un plan contient une droite, les traces ordinaires ou principales de la droite se trouvent sur les traces ordinaires ou principales de même nom du plan.*

II. *Un plan qui passe par une droite d, parallèle à* $P_1$, *ou par une droite f, parallèle à* $P_2$, *aura ses traces sur* $P_1$ *ou sur* $P_2$ *respectivement parallèles à la droite d ou à la droite f.*

**103. Problème I.** *Par un point donné sur l'une des traces d'un plan, mener une droite parallèle à l'autre trace.*

**Solution. (Ep. 52.)** Le point $a''$ donné sur $t_2$ a sa première projection $a'$ sur l'axe ; la droite demandée a sa première projection $d'$ parallèle à $t_1$, et sa seconde projection $d''$ parallèle à l'axe de projection. Ces deux projections $d'$ et $d''$ passent respectivement par $a'$ et $a''$.

**104. Problème II.** *Par une droite, mener un plan perpendiculaire à* $P_1$ *ou à* $P_2$.

**Solution. (Ep. 53.)** Le plan $t$, mené par $d$ perpendiculairement à $P_1$, aura $d'$ pour trace-projection sur $P_1$; sa trace $t_2$ sera perpendiculaire à l'axe.

Le plan $p$, mené par $d$ perpendiculairement à $P_2$, aura pour trace-projeotion sur $P_2$ la seconde projection $d''$ de la droite, et pour trace sur $P_1$ la droite $p_1$ normale à l'axe,

**105. Problème III.** *Vérifier si une droite donnée est située dans un plan donné.*

**Solution.** On construit les traces de la droite; si ces traces sont sur les traces de même nom du plan, la droite est située dans ce plan.

**106. Problème IV.** *Vérifier si un point donné est situé dans un plan.*

**Solution.** Si le point donné est dans le plan, une droite parallèle à l'une des deux traces de ce plan et menée par le point, sera entièrement dans le plan; elle aura ses traces sur les traces de même nom de ce plan.

**107. Problème V.** *Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.*

**Solution. (Ep. 54.)** Par un point $a$ du plan, on mène une droite parallèle à la droite donnée; celle-ci est parallèle au plan, si cette droite auxiliaire est dans le plan, donc, si les traces de cette dernière sont sur les traces de même nom du plan.

Le point $a'$ est dans le plan, car on l'a pris sur une parallèle à l'une des traces du plan menée par un point situé sur l'autre trace (**103**).

**108. Problème VI.** *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

**Solution.** Les traces du plan doivent passer par les traces de même nom des deux droites données.

**109. Problème VII.** *Mener un plan par deux droites qui se coupent et dont l'une est parallèle à* $P_1$, *et l'autre parallèle à* $P_2$.

**Solution. (Ep. 55.)** Soit $d$ la droite parallèle à $P_1$ et soit $c$

celle qui est parallèle à $P_2$. Le plan $p$ à construire aura ses traces qui passent par les traces de même nom des deux droites.

La trace $p_2$ sera parallèle à $c''$ et la trace $p_1$ sera parallèle à $d'$, car toute droite parallèle à $P_1$ et située dans le plan $p$, aura sa projection sur $P_1$ parallèle à la trace de $p$ sur $P_1$.

**Vérification.** Les deux traces du plan se coupent sur l'axe.

**110. Problème VIII.** *Par deux droites parallèles, faire passer un plan.*

**Solution.** Les traces du plan passeront par les traces de même nom des deux droites.

**111. Problème IX.** *Par trois points non en ligne droite, faire passer un plan.*

**Première solution.** (**Ep. 56.**) Les deux points $a$ et $b$ déterminent une droite ; la parallèle à cette droite menée par le troisième point $c$ détermine avec $ab$ le plan demandé (**110**).

**Autre solution.** (**Ep. 57.**) En unissant $b$ et $a$, $b$ et $c$, on détermine deux droites $ab$ et $cb$ qui se coupent et par lesquelles on fera passer le plan demandé (**108**).

**112. Problème X.** *Par un point et une droite, faire passer un plan.*

**Première solution.** Par le point donné, on mène une parallèle à la droite donnée ; elle détermine avec celle-ci le plan demandé (**110**).

**Autre solution.** On joint le point donné à un point de la droite et l'on a deux droites qui se coupent et qui déterminent le plan demandé (**108**).

**113. Problème XI.** *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une autre droite donnée.*

**Solution.** Par un point quelconque pris sur la première droite, on mène une droite parallèle à la seconde. Le plan de ces deux droites sera le plan demandé ; il passe par la première droite et contient une droite parallèle à la seconde (**108**).

**114. Prolbème XII.** *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à l'axe de projection.*

**Solution.** Les traces du plan passent par les traces de même nom de la droite et sont parallèles, toutes les deux, à l'axe de projection.

**115. Problème XIII.** *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données.*

**Solution.** Par le point, on mène une droite parallèle à la première droite donnée et une autre droite parallèle à la seconde. Ces droites passant par un même point déterminent un plan parallèle aux deux droites données. (**108**).

**116. Problème XIV.** *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

**Solution.** (**Ep. 58**). Le plan demandé aura ces traces parallèles aux traces de même nom du plan donné. Par le point $a$ situé dans le plan à construire passera une parallèle à la première trace de ce plan, parallèle entièrement située dans ce plan et ayant sa trace sur $P_2$ sur la seconde trace du plan.

On mènera donc par $a$ une droite parallèle à $q_1$ et par $t''$, trace de cette droite sur $P_2$, passera $r_2$, seconde trace du plan et droite parallèle à $q_2$. La trace $r_2$ parallèle à $q_1$ passera par le point de rencontre de $r_2$ avec l'axe.

**117. Problème XV.** *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

**Solution.** Par un point de la droite donnée, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné (**58**). Cette perpendiculaire et la première droite déterminent le plan demandé, dont on déterminera les deux traces (**103**).

**118. Problème XVI.** *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

**Solution** (**Ep. 59**). Le plan demandé aura ses deux traces perpendiculaires aux projections de même nom de la droite donnée (**58**). La direction des deux traces étant connue, le problème est ramené à celui de mener, par le point donné, un plan parallèle à un plan donné (**116**).

**219. Problème XVII.** *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite parallèle à* $P_1$.

**Solution.** (**Ep. 60**). La droite $d$ étant parallèle à $P_1$, le plan demandé sera perpendiculaire à $P_1$. Sa trace sur $P_1$ sera perpendiculaire à $d'$ (**58**) et sa seconde trace sera perpendiculaire à l'axe. Les deux traces se déterminent comme dans le problème précédent.

**120. Problème XVIII.** *Etant donnés un plan et la première projection d'une droite située dans ce plan, déterminer la seconde projection de cette droite.*

**Solution.** (**Ep. 61.**) La première projection $d'$ de la droite rencontre l'axe en $a'$, première projection du point de la droite situé sur la seconde trace du plan. La seconde projection $a''$ est donc un point de la projection de la droite sur $P_2$.

La même première projection $d'$ rencontre $q_1$ en $b'$, point qui se projette sur $P_2$ en un point $b''$ de l'axe de projection. La droite $a''b''$ sera la seconde projection de la droite du plan $q$, dont $d'$ est la première projection.

**121. Problème XIX.** *Etant donnés un plan et la première projection d'un point situé dans ce plan, construire la seconde projection de ce point.*

**Solution.** (**Ep. 62.**). Par la première projection $a'$ du point, nous menons une droite $a'$ $b'$ parallèle à la première trace du plan. $a'b'$ sera la première projection d'une droite $ab$ parallèle à la trace $q_1$, et entièrement située dans le plan $q$. Cette droite $ab$ rencontre $P_2$ en un point $b$ dont la première projection $b'$ est sur l'axe, et la projection $b''$ sur la trace $q_2$ du plan $q$; la seconde projection $a''b''$ de $ab$ sera parallèle à l'axe et passera par $b''$. C'est sur $a''b''$ que se trouvera la projection $a''$ du point $a$.

**122. Problème XX.** *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire :*

1° *au plan bissecteur* $B_1$.

**Solution.** (**Ep. 63.**) Les traces du plan passeront par les traces de même nom de la droite et sont symétriques par rapport à l'axe de projection (**80**).

On déterminera donc un point $m$ symétrique du point $a'$ par rapport à l'axe, et les points $m$ et $b''$ détermineront la seconde trace du plan demandé. La première trace passera par $x$ et par $a'$.

2° *au plan bissecteur* $B_2$.

**Solution.** (**Ep. 64.**) Les traces du plan devront coïncider et passer par les traces de même nom de la droite (**81**).

La seconde trace du plan passe donc par $b''$ et, suffisamment prolongée, elle coïncidera avec $q_1$ et passe par $a'$.

**123. Problème XXI.** *Vérifier si une droite donnée est située dans un plan déterminé par l'axe et par un point donné.*

**Solution dans l'espace.** La droite $d$ est dans le plan donné si les traces de la droite sont sur les traces de même nom du plan. Celles-ci se confondant avec l'axe, les traces de la droite sur $P_1$ et $P_2$ se trouveront sur l'axe.

En unissant un point de $d$ au point donné $a$, on aura une deuxième droite du plan donné, droite qui aura également ses deux traces sur l'axe.

**Solution graphique.** (**Ep. 65.**) Les deux projections $d'$ et $d''$ de $d$ doivent se couper sur l'axe. Il en est de même des projections d'une droite quelconque $e$ qui unit un point quelconque $b$ de $d$ au point donné $a$.

**124. Problème XXII.** *Quelle position faut-il donner à un triangle isoscèle par rapport à* $P_1$ *pour que, sur ce plan, les côtés égaux aient des projections égales?*

**Solution.** Placer la base du triangle parallèle à $P_1$. (A démontrer à l'aide du théorème des trois perpendiculaires).

—

**125. Deuxième problème fondamental.** *Connaissant les traces ordinaires ou principales d'une droite, construire les projections de cette droite.*

**1er Cas. Traces ordinaires. Solution.** (**Ep. 66.**) La première trace $t$ de la droite $d$ est un point de $P_1$, sa première projection $t'$ sera sur $d'$ et sa seconde projection $t''$ se trouve sur l'axe (**37**).

La seconde trace $s$ de la droite $d$ est un point de $P_2$, sa projection $s''$ est dans $P_2$ et sur $d''$, et sa première projection $s'$ se trouve sur l'axe.

Les deux points $t$ et $s$ suffisent pour déterminer la droite $d$. $d'$ passera par $t'$ et $s'$ et $d''$ par $t''$ et $s''$.

**2^d Cas. Traces principales. Solution.** (**Ep. 67.**) Soient $u$ la trace de la droite sur $B_1$ et $v$ la trace sur $B_2$.

Les deux projections de $u$ sont $u''$ et $u'$, symétriques par rapport à l'axe ; les deux projections de $v$ forment une projection-double $v'$ $v''$.

La droite qui unit $u''$ et $v''$ sera la seconde projection de la droite demandée ; sa première projection passe par $u'$ et par $v'$.

—

## Applications du deuxième problème fondamental.

—

**126. Problème général.** *Construire les deux projections de l'intersection de deux plans représentés de diverses manières.*

**Cas général. Solution.** Si les deux plans sont représentés chacun par ses deux traces, le point de rencontre des premières traces est le point où la droite d'intersection rencontre $P_1$, et le point de rencontre des secondes traces des plans sera le point où la droite perce le plan $P_2$. Ces deux points, dont on construit les deux projections, sont les deux traces de la droite d'intersection des deux plans, droite qui est ainsi déterminée et que l'on construit comme au § 125.

**Cas particuliers.** I. Suivant que l'un des deux plans est parallèle à $P_1$ ou à $P_2$, la droite d'intersection sera parallèle à $P_1$ ou à $P_2$.

II. Si l'un des deux plans est perpendiculaire à l'un des plans de projection, la projection de la droite, sur ce plan, coïncidera avec la trace-projection du plan perpendiculaire.

III. Si les deux plans sont perpendiculaires à l'un des plans de projection, la droite d'intersection sera perpendiculaire à ce plan et aura, pour projection sur ce plan, un point.

**Cas embarrassants. Solution.** Si les deux traces des plans sont disposées d'une manière peu favorable, ou bien si les traces ne sont pas données, on se sert de la solution générale suivante :

*On coupe les deux plans par une série de plans auxiliaires, dont on peut construire facilement la droite d'intersection avec chacun des plans donnés. Un premier plan auxiliaire coupe chacun des plans donnés suivant une droite, et ces deux droites d'intersection se rencontrent en un point qui appartient à l'intersection commune des deux plans.*

*Un deuxième plan auxiliaire donnera un deuxième point de la droite d'intersection commune; un troisième plan fournit un troisième point, et ainsi de suite.*

*L'ensemble des points sera la droite d'intersection des deux plans.*

**127. Problème I.** *Construire l'intersection des deux plans dont l'un est parallèle à* $P_1$.

**Solution. (Ep. 68).** Soient les deux plans $r$ et $q$, $r$ étant parallèle à $P_1$.

La droite d'intersection $d$ sera parallèle à $P_1$; elle n'aura qu'une trace, sa trace sur $P_2$, et celle-ci est le point de rencontre $a''$ des traces $r_2$ et $q_2$. Comme la droite $d$ est parallèle à $q_1$ et située dans le plan $q$, il faut évidemment qu'elle soit parallèle à $q_1$, donc $d'$ est parallèle à $q_1$ et $d''$ parallèle à l'axe. $d''$ passera par $a''$ et $d'$ par $a'$, première projection de $a''$.

**128. Problème II.** *Construire l'intersection de deux plans dont l'un est parallèle à* $P_2$.

**Solution. (Ep. 69.)** La droite $d$ sera parallèle à $P_2$ et passe par le point de rencontre $a'$ des premières traces des deux plans donnés; elle a ses deux projections $d''$ et $d'$ respectivement parallèles à $q_2$ et à l'axe, première projection de $q_2$ (**127.**)

**129. Problème III.** *Construire l'intersection de deux plans dont les traces sur* $P_1$ *sont parallèles.*

**Solution. (Ep. 70.)** Les deux plans $s$ et $t$ ayant leurs traces $s_1$ et $t_1$ parallèles, sont deux plans coupés par un troisième, le plan $P_1$, suivant des droites parallèles, et doivent se couper eux-mêmes suivant une droite parallèle à $s_1$ et $t_1$, donc au plan $P_1$.

La droite $d$, intersection des deux plans, est donc parallèle à leurs premières traces et passe par le point de rencontre $a''$ des traces de ces plans sur $P_2$.

**130. Problème IV.** *Construire l'intersection de deux plans dont les traces sur* $P_2$ *sont parallèles.*

**Solution. (Ep. 71.)** L'intersection des deux plans sera parallèle à $P_2$ et aux traces parallèles des deux plans; elle passera par le point de rencontre des deux traces non parallèles.

**131. Problème V.** *Construire l'intersection de deux plans sans faire usage des points d'intersection des traces.*

**Solution. (Ep. 72.)** On coupe les deux plans donnés $s$ et $t$ par une série de plans parallèles à $P_1$. Un premier de ces plans coupe chacun des deux plans donnés suivant une droite parallèle à $P_1$ (**127**); le point $d$, intersection de ces deux droites, est un point de la droite d'intersection des deux plans.

Chacun des plans auxiliaires sécants donnera un point de l'intersection des deux plans. Tous ces points devront déterminer une droite qui, suffisamment prolongée, passera par les points de rencontre des traces de même nom des deux plans.

Au lieu de couper les deux plans par une suite de plans parallèles à $P_1$, on peut se servir avec avantage de plans parallèles à $P_2$.

**132. Problème VI.** *Construire l'intersection de deux plans dont les traces se rencontrent toutes en un même point de l'axe.*

**Solution.** On coupe les deux plans par un ou deux plans auxiliaires parallèles à $P_1$. Chacun de ces plans coupe chacun des plans donnés suivant une droite parallèle à $P_1$; la rencontre de ces droites fournies par le même plan sécant donne un point de l'intersection des deux plans donnés. (**Ep. 73.**)

**Vérification.** Les points ainsi construits forment une ligne droite passant par le point de rencontre des traces des deux plans avec l'axe de projection.

**133. Problème VII.** *Construire l'intersection de deux plans parallèles à l'axe.*

**Solution. (Ep. 74.)** La droite d'intersection est parallèle à l'axe (**61**); elle est déterminée quand on connaît un de ses points que l'on construit de la manière suivante :

On coupe les deux plans donnés par un troisième plan quelconque (**126**); on obtient deux droites dont le point d'intersection appartient à chacun des plans proposés, donc à leur intersection.

**134. Problème VIII.** *Construire l'intersection de deux plans dont chacun est représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ces plans.*

**Solution. (Ep. 75.)** On coupe les deux plans donnés par une suite de plans parallèles à $P_1$. Chacun de ces plans coupera chacune des droites qui déterminent le premier plan en un point, et ces deux points déterminent l'intersection du premier plan donné avec le plan auxiliaire. L'intersection de ce plan auxiliaire avec le second plan donné se construit de la même manière. Le point de rencontre de ces deux droites d'intersection ainsi construites, sera un point appartenant à l'intersection commune des deux plans donnés.

On déterminera un certain nombre de ces points; leur ensemble donnera la droite d'intersection des deux plans.

**135. Problème IX.** *Construire l'intersection de deux plans dont les traces de chacun sont en ligne droite.*

**Solution.** (**Ep. 76.**) On coupe les deux plans par une série de plans parallèles à $P_1$. Chacun de ces plans coupera chacun des deux plans donnés suivant une droite parallèle à $P_1$ (**127**). L'intersection de ces droites d'un même plan sécant donne un point de l'intersection commune des deux plans donnés.

Cette droite d'intersection se projette sur $P_1$ et sur $P_2$ suivant une droite perpendiculaire à l'axe.

**Autre solution.** Les deux plans, ayant leurs deux traces en ligne droite, sont deux plans perpendiculaires au plan bissecteur $B_2$. Les deux traces coïncidentes forment une **trace-double.**

Ces deux plans se rencontrent suivant une droite perpendiculaire à $B_2$, et cette droite a ses deux projections qui se confondent en une seule droite perpendiculaire à l'axe.

**136.** *La ligne de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre plan, est une droite du premier plan normale à l'intersection des deux plans.*

La ligne de plus grande pente d'un plan R par rapport à $P_1$ est donc une droite $d$ du plan R perpendiculaire à $R_1$. La première projection $d'$ d'une telle droite est normale à $R_1$ (**49**).

On appelle cette ligne $d$ ligne de plus grande pente du plan R par rapport à $P_1$, parceque c'est, de toutes les lignes de R, celle qui fait le plus grand angle avec $P_1$.

**137. Problème X.** *Construire les traces d'un plan, connaissant les projections de la ligne de plus grande pente de ce plan par rapport à* $P_1$.

**Solution.** Les traces du plan passeront par les traces de même nom de la droite, et la première trace sera normale à la première projection de la droite donnée.

**138. Problème XI.** *Même problème, les traces de la ligne de plus grande pente étant hors du cadre de l'épure.*

**Solution.** (**Ep. 77.**) Par un point $a$ de la ligne de plus grande pente $p$, on mène une droite parallèle à la première trace du plan à construire. La première projection $d'$ de cette droite sera normale à $p'$, et la seconde projection sera parallèle à l'axe.

La seconde trace de cette droite est un point de la seconde trace du plan. On fait la même construction pour un deuxième point $b$ de $p$. On aura un nouveau point de la seconde trace du plan, laquelle est par conséquent déterminée. Cette seconde trace rencontre l'axe en $x$, et la normale à $p'$, menée par $x$, sera la première trace du plan demandé.

**139. Problème XII.** *Construire la droite d'intersection de deux plans dont on ne connaît que les lignes de plus grande pente par rapport à* $P_1$.

**Solution.** (**Ep. 78.**) On coupe les deux plans par des plans auxiliaires parallèles à $P_1$. Un tel plan coupera chacune des droites de plus grande pente en un point, et le plan correspondant à cette droite suivant une droite passant par ce point, parallèle à $P_1$ et à la première trace du plan, donc ayant sa première projection normale à la première projection de la ligne de plus grande pente.

Les deux droites obtenues par chacun des plans sécants se coupent en un point, qui appartient à la droite d'intersection des deux plans.

**Vérifications.** Tous les points ainsi obtenus sont en ligne droite.

**140. Problème XIII.** *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux autres droites données non situées dans un même plan.*

**Solution.** (**Ep. 79.**) Par le point et la première droite, on fait passer un plan (**112**). Par le même point donné et la seconde droite, on fait passer un plan. Ces deux plans se coupent suivant une droite passant par le point donné et rencontrant chacune des deux droites données, à moins de leur être parallèle. Cette droite se trouve, en effet, dans un même plan séparément avec chacune des deux droites données.

Pour la construction de l'intersection des deux plans, voir § 134.

**Vérifications.** 1° La droite ainsi obtenue passe par le point; les projections de cette droite passeront donc par les projections de même nom du point.

2° La droite rencontre chacune des deux droites ; les deux projections de ces points de rencontre se trouvent sur une normale à l'axe.

**141. Problème XV.** *Parallèlement à une droite donnée f, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données d et c.*

**Solution. (Ep. 80.)** Par la droite *d*, on fait passer un plan parallèle à la droite *f* (**113**). Par la droite *c*, on fait de même passer un plan parallèle à *f*. Ces deux plans se rencontrent suivant une droite parallèle à *f* et rencontrant chacune des deux droites données *d* et *c*; cette droite est, en effet, avec chacune d'elles séparément dans un même plan.

La construction de cette droite d'intersection des deux plans auxiliaires se fait d'après le § 134.

**Vérifications.** 1° La droite obtenue est parallèle à la droite *f* (**50**).

2° Elle rencontre chacune des deux droites *d* et *c* (**140**).

**142. Problème XVI.** *Par un point donné, mener une droite parallèle à un plan donné et qui rencontre une autre droite donnée.*

**Solution. (Ep. 81.)** Par le point et la droite, on mène un plan (**112**). Ce plan coupe le plan proposé suivant une droite. Parallèlement à cette droite, on mène une droite par le point donné. Cette dernière droite est la droite demandée.

Elle est, en effet, parallèle au plan, puisqu'elle est parallèle à une droite de ce plan, et elle passe par le point.

**143. Exercices.** 1° Par la droite qui a pour projections les traces d'un plan donné, mener un plan perpendiculaire à ce plan, et déterminer l'intersection de ces deux plans.

2° Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan déterminé par l'axe de projection et un point. Construire l'intersection de ces deux plans.

3° Placer dans un plan donné une parallèle à $P_1$ ou à $P_2$, à une distance donnée de chacun de ces plans.

---

**144. Troisième problème fondamental.** *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.*

**Solution.** Par la droite donnée $d$, on mène un plan, dont on sait construire facilement la droite d'intersection $e$ avec le plan donné. La droite $d$ rencontrera $e$ en un point qui est le point de rencontre de $d$ avec le plan donné.

**Remarque.** Le problème général admet plusieurs cas particuliers.

**145. Cas faciles.** I. *Le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Dans ce cas, l'une des projections du point de rencontre se trouve à l'intersection de la trace-projection du plan avec la projection de même nom de la droite.

II. *Le plan donné est perpendiculaire à l'axe de projection.*

Le point de rencontre a ses deux projections à l'intersection des traces-projections du plan avec les projections de même nom de la droite.

III. *Le plan donné est parallèle à l'un des deux plans de projection.*

Ce cas particulier rentre dans celui du N° I. Le point de rencontre se trouve encore à l'intersection de la trace-projection du plan avec la projection de même nom de la droite.

—

## Applications du troisième problème fondamental.

—

**146. Problème I.** *Construire la droite d'intersection d'un plan perpendiculaire à* $P_1$ *avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce plan.*

**Solution. (Ep. 82.)** Le plan T coupe la première droite $d$ au point $a$, et la seconde droite $c$ au point $b$ (**145**, 1°). La droite qui unit $a$ et $b$ sera la droite d'intersection des deux plans. Cette droite se projette sur $P_1$ suivant la trace-projection $T_1$ du plan T.

**147. Problème II.** *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce plan.*

**Solution.** (**Ep. 83.**) Par la droite donnée *f*, on fait passer un plan normal à $P_1$. On construit la droite d'intersection de ce plan avec le plan proposé (**146**) ; le point de rencontre *m* de cette droite ainsi construite avec la droite donnée *f*, sera le point où *f* perce le plan donné.

**148. Problème III.** *Par un point donné, mener une droite qui s'appuie sur deux droites données.*

**Solution.** Par le point et la première droite, on fait passer un plan. On construit le point de rencontre de ce plan avec la seconde droite (**147**). La droite qui passe par ce point et par le point donné sera la droite demandée.

**149. Problème IV.** *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan déterminé par l'axe et par un point donné a.*

**Solution.** Par le point *a* et la droite, on fait passer un plan. Ce plan coupe le plan proposé suivant une droite ; le point de rencontre de cette droite avec la droite donnée sera le point où cette dernière perce le plan proposé.

**Solution graphique.** (**Ep. 84.**) Par le point *a*, on mène une droite parallèle à la droite donnée ; elle déterminera avec celle-ci un plan auxiliaire R, dont on construira les deux traces $R_2$ et $R_1$. Le point *a*, appartenant au plan proposé et au plan $R_1$, sera un point de leur droite d'intersection. Le point *m*, point de rencontre des deux traces $R_2$ et $R_1$ avec l'axe, appartient également aux deux plans, puisque les traces du plan proposé se confondent avec l'axe. *a m* est donc la droite d'intersection des deux plans. Cette droite rencontrera la droite donnée en *b*, point de rencontre de cette droite avec le plan proposé.

**150. Problème V.** *Point de rencontre d'une droite perpendiculaire à* $P_2$ *avec un plan déterminé par l'axe et par un point donné a.*

**Solution.** (**Ep. 85.**) Ce problème est un cas particulier du problème précédent.

**151. Problème VI.** *Point de rencontre d'une droite normale à* $P_2$ *avec un plan dont les deux traces sont en ligne droite.*

**Solution.** (**Ep. 86.**) Par la droite donnée, on fait passer un plan auxiliaire S, qui coupe le plan proposé suivant une droite.

Le point de rencontre $a$ de cette droite d'intersection avec la droite donnée $d$, sera le point de rencontre de $d$ avec le plan proposé R.

**152. Problème VII.** *Construire le point où trois plans se rencontrent.*

**Solution.** Soient les trois plans R, S et V. Les plans R et S se coupent suivant une droite $d$ que l'on construit comme au § 126. Le point de rencontre de $d$ avec le troisième plan V est le point qui appartient aux trois plans.

**153. Problème VIII.** *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par sa ligne de plus grande pente $p$, sans construire les traces de ce plan.*

**Solution.** (**Ep. 87**.) Par la droite donnée $d$, on fait passer un plan R normal à $P_1$; on construit l'intersection de ce plan avec le plan proposé, et le point de rencontre de cette intersection avec la droite $d$ sera le point où celle-ci perce le plan donné.

Pour obtenir la droite d'intersection du plan R avec le plan proposé, on coupe ces deux plans par une série de plans parallèles à $P_1$. Un tel plan H coupe le plan R suivant une droite $f$ parallèle à $P_1$, et la ligne de plus grande pente $p$ en un point $a$, par lequel passe la droite d'intersection du plan H avec le plan proposé. Or, cette droite est normale à $p$ qui est parallèle à $P_1$; elle se projette par suite sur $P_2$ suivant une parallèle à l'axe, et sur $P_1$ suivant une normale à $p'$ et passant par $a'$. Le point de rencontre $i$ de cette ligne $i\ a$ avec la droite $f$ donne un point $i$ de la droite d'intersection du plan proposé avec ce plan R. Un deuxième plan K parallèle à $P_1$ donne un deuxième point $l$ de cette droite; celle-ci est ainsi déterminée et coupe $p$ au point $z$ que l'on veut construire.

—

**154. Quatrième problème fondamental.** *Construire la véritable longueur d'une portion de droite limitée à deux de ses points.*

**Solution dans l'espace.** (**Fig. 89**.) La droite $ab$ peut être considérée comme étant :

1° L'hypothénuse du triangle rectangle $bam$ dont l'un des côtés de l'angle droit est égal à la première projection $a'b'$ de $ab$, et dont l'autre côté est égal à la différence des premières hauteurs ou des secondes ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 89.**)

2° L'hypothénuse du triangle rectangle *anb* dont l'un des côtés de l'angle droit est égal à la seconde projection *a'' b''* de *ab*, et dont l'autre côté est égal à la différence des premières ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 90.**)

3° L'un des deux côtés non parallèles du trapèze rectangle *baa'b'* dont l'autre côté est la première projection de *ab*, et dont les deux côtés parallèles sont les secondes ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 91.**)

4° L'un des deux côtés non parallèles du trapèze rectangle *baa''b''* dont l'autre côté est la seconde projection de *ab*, et dont les deux côtés parallèles sont les premières ordonnées des points *a* et *b*. (**Ep. 92.**)

**Cas facile.** Si la droite est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan a même longueur que la droite.

**155. Exercices.** *Construire la vraie grandeur d'une droite limitée à deux de ses points :*

1° Lorsque les deux projections de la droite ce coupent sur l'axe.

2° Lorsque la droite est située dans le quatrième angle dièdre.

3° Lorsqu'elle est située en partie dans deux dièdres différents.

4° Lorsqu'elle est située dans un plan de profil, et qu'elle est connue par deux de ses points.

**156. Problème réciproque.** *Sur une droite donnée, et à partir d'un point donné, porter une longueur donnée.*

**Solution.** (**Ep. 93.**) Sur la droite, et à partir du point donné *a*, on prend un autre point *b*, et l'on construit, par un des quatre moyens connus, la véritable longueur *ab*. Sur cette longueur, on portera *ac* égale à la longueur donnée. Dans le trapèze rectangle *aa'c'c*, *a'c'* sera la première projection de *ac* et *c'* la première projection par conséquent du point demandé ; la seconde projection *c''* s'en déduira aisément.

**Exercices.** Sur une droite limitée, donnée par ses projections, trouver un point :

1° Egalement éloigné des extrémités ;

2° Au tiers de la ligne ;

3° Dont les distances aux deux extrémités soient dans un rapport donné.

—

## Applications du quatrième problème fondamental.

—

**157. Problème I.** *Construire la distance d'un point à un plan.*

**Solution dans l'espace.** Du point donné $a$, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné. On construit le point de rencontre $i$ du plan avec cette perpendiculaire ; la vraie longueur $ai$ mesure la distance du point $a$ au plan.

**Solution graphique. (Ep. 94.)** Les projections de la perpendiculaire passeront par les projections de même nom du point, et seront perpendiculaires aux traces de même nom du plan.

Le point de rencontre $i$ de la perpendiculaire avec le plan se construit, en menant, par cette droite, un plan auxiliaire normal à $P_1$. La véritable longueur $ai$ de la distance du point au plan a été obtenue à l'aide du triangle rectangle ayant $a'i'$ pour côté de l'angle droit (**154**-1°).

**158. Exercices et cas particuliers.** *Construire la distance d'un point à un plan :*

1° Le plan est normal à $P_1$ ou à $P_2$ ;

2° Le plan est parallèle à l'axe de projection ;

3° Le plan est déterminé par l'axe et par un point ;

4° Le plan est perpendiculaire au plan bissecteur $B_2$ ; ses deux traces sont en ligne droite.

**159. Problème II.** *On donne la première trace d'un plan perpendiculaire à* $P_2$, *un point de l'espace, et la distance de ce point au plan : construire la seconde trace de ce plan.*

**Solution. (Ep. 95.)** La distance du point $a$ au plan S se projette sur $P_2$ suivant une normale à $S_2$ et suivant sa vraie longueur. Il suffira donc de décrire, de $a''$ comme centre, avec la distance du point au plan pour rayon, une circonférence de cercle, et de mener par $x$ une tangente à cette circonférence, pour avoir la trace $S_2$ du plan.

**Remarque.** Le problème admet deux solutions, une seule solution, ou devient impossible, suivant que la distance donnée du point au plan est plus petite que $a''x$, égale à cette ligne, ou plus grande que cette dernière.

Si la distance donnée est égale à la seconde ordonnée du point *a*, une des solutions se confondra avec le plan $P_1$.

**160. Problème III.** *Par un point donné, mener un plan qui passe à égale distance de deux points donnés.*

**Solution dans l'espace.** On joint, par une droite *d*, le point au milieu de la droite *e* qui unit les deux points donnés.

Tout plan qui contient *d* est à égale distance des extrémités de *e*, donc des deux points donnés. (A démontrer.)

Faire l'épure pour un plan normal à $P_1$ ou à $P_2$.

**161. Problème IV.** *Par un point donné a, mener un plan qui passe à égale distance de trois points donnés.*

**Solution dans l'espace.** Les trois points déterminent un plan T.

Le plan mené par le point *a* parallèlement à T sera le plan demandé. Il est, en effet, à égale distance de tous les points de T, donc également de chacun des trois points donnés.

**162. Problème V.** *Par trois points donnés, mener trois plans parallèles et équidistants.*

**Solution dans l'espace.** On joint le point *a* au milieu *m* de la droite qui unit *b* et *c*. Par *am*, on mène un plan T. Les deux plans menés par *b* et *c* parallèlement à T sont à égale distance de ce plan. (A démontrer.)

Faire l'épure pour le cas de trois plans normaux à $P_1$.

**163. Problème VI.** *Par deux points et une droite, faire passer trois plans parallèles équidistants.*

**Solution dans l'espace.** On unit les deux points *a* et *b* par une droite; le milieu *m* de *ab* et la droite donnée *d* déterminent un plan T également distant de *a* et de *b*. Les deux plans parallèles à T menés par *a* et par *b* constituent avec T les trois plans demandés.

**164. Problème VII.** *Construire la distance de deux plans parallèles.*

**Solution dans l'espace.** D'un point quelconque de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux plans; cette droite sera perpendiculaire sur l'autre plan, et perce les deux plans en deux points, dont la distance mesure celle des plans.

**Solution graphique.** (**Ep. 96.**) Au lieu de prendre un point quelconque de l'espace pour mener la perpendiculaire aux deux plans, on simplifiera beaucoup l'épure, en prenant, pour ce point, le point de rencontre $x$ des deux traces du plan S. Le problème est ainsi ramené à construire la distance du point $x$ au plan T (**156**). La distance $ax$ sera l'hypothénuse du triangle qui a $a''x$ pour premier côté de l'angle droit, et la différence des premières ordonnées de $a'$ et $x$, ou la longueur $am$, pour second côté de cet angle (**154-2°**).

**165. Problème VIII.** *Mener un plan parallèle à un plan donné et distant de ce plan d'une lougueur donnée.*

**Solution dans l'espace.** Par un point du plan, on mène une normale à ce dernier, et l'on porte sur cette droite, et à partir du point, une longueur égale à la longueur donnée (**156**). Par l'extrémité de cette longueur, on mènera un plan parallèle au plan proposé (**116**).

**166. Problème IX.** *Trouver, sur l'axe de projection, un point distant d'un plan donné d'une longueur donnée.*

**Solution dans l'espace.** On construira un plan parallèle au plan proposé et distant de celui-ci de la longueur donnée (**165**). Le point de rencontre de ce plan avec l'axe sera le point demandé.

**167. Problème X.** *Construire la distance de deux droites parallèles.*

**Solution dans l'espace.** On coupe les deux droites par un plan auxiliaire qui leur est perpendiculaire. La droite qui unit les deux points d'intersection $a$ et $b$ des deux droites avec ce plan, est une perpendiculaire commune aux deux droites, et en mesure la distance.

**Solution graphique.** (**Ep 97.**) Le plan auxiliaire perpendiculaire aux deux droites a ses traces perpendiculaires aux projections de même nom des deux droites. La véritable longueur $ab$ sera, dans cette épure, l'un des côtés non parallèles du trapèze rectangle dont l'autre côté est la première projection $a'b'$ de $ab$ (**154-3°**).

**168. Problème XI.** *Construire la distance d'un point à une droite.*

**Solution dans l'espace**. Par le point donné, on mène un plan perpendiculaire à la droite donnée. On construit le point de rencontre de ce plan avec la droite, et la droite qui unit ce point au point donné sera la distance du point à la droite, vu que c'est une droite du plan perpendiculaire à la droite donnée et passant par le pied de celle-ci ainsi que par le point donné.

**Solution graphique**. (**Ep. 98**.) Le plan a ses traces perpendiculaires aux projections de même nom de la droite donnée. Ces traces s'obtiennent comme au § 118. La véritable longueur *ab* a été construite comme au § 154-4.

**169**. **Exercices**. I. Construire la distance d'un point donné :

1° A l'axe ;

2° A une parallèle à l'axe ;

3° A une droite située dans $P_2$ ;

4° A une droite parallèle à $P_1$ ou à $P_2$.

II. Construire la distance d'un point de l'axe à une droite quelconque.

**170**. **Problème XII**. *Construire la plus courte distance entre deux droites qui se croisent dans l'espace.*

**Solution dans l'espace**. (**Fig. 99**.) Par un point *a* de la première droite *e*, on fait passer une droite *ah* parallèle à la deuxième droite *d*; *ah* et *e* détermineront un plan T parallèle à *d*. Par un point *b* de la droite *d*, on abaisse une perpendiculaire sur le plan T ; on en détermine le pied *c*, point par lequel on mène *cf* parallèle à *d*. La droite *cf* sera dans le plan T et rencontrera *e* en *f*; la droite *gf*, menée par *f* parallèlement à *bc*, sera la plus courte distance des deux droites *d* et *e*. (Pour la démonstration, voir Legendre, livre V.)

**Solution graphique**. (**Ep. 100**.) La solution graphique indiquée dans la solution dans l'espace se fait à l'aide des problèmes des paragraphes (**58**), (**144**) et (**154**). La véritable longueur de *fg* sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est la première projection *f'g'* de *fg*, etc. (**153—1°**.)

**Autre solution**. La droite d'intersection de deux plans R et S respectivement perpendiculaires aux droites *d* et *e*, est parallèle à leur plus courte distance. On déterminera une extrémité de cette plus courte distance, en cherchant le point de rencontre de la droite avec un plan mené par $e$ parallèlement à l'intersection des plans R et S.

**Cas particuliers.** Le problème se simplifie pour les deux cas particuliers suivants :

**1er Cas.** *Une des deux droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection.* (**Ep. 101**.)

La droite $d$ étant normale à $P_1$, la plus courte distance des deux droites sera parallèle à $P_1$ et se projettera sur ce plan suivant sa véritable grandeur en $a'g'$, perpendiculaire à $e'$ (**49**).

**2d Cas.** *Les deux droites sont parallèles à l'un des plans de projection.* (**Ep. 102**.)

Les deux droites $d$ et $e$ étant parallèles à $P_1$, leur plus courte distance sera normale à $P_1$ et se projette sur $P_1$ suivant un point, le point de rencontre de $e'$ et $d'$, et sur $P_2$ suivant sa véritable longueur $a''b''$, normale commune à $d''$ et à $e''$.

**171. Problème XIII.** *Construire l'angle de deux droites.*

**Solution dans l'espace.** Sur chacune des deux droites données, on prend un point. On unit ces deux points $b$ et $c$ par une droite, et l'on construit la véritable longueur de $bc$, ainsi que celles des distances $ba$ et $ca$ des points $b$ et $c$ au point de rencontre $a$ des deux droites données. Sur le plan de figure, on construira un triangle ayant les trois longueurs $ba$, $ca$ et $bc$ pour côtés. L'angle opposé au côté $bc$ sera égal à l'angle des deux droites.

**Solution graphique.** (**Ep. 103**.) La solution graphique se réduit à la construction de la véritable longueur de trois droites.

**Remarque.** En prenant les points $b$ et $c$ à égale hauteur au dessus du plan $P_1$, la longueur $bc$ sera parallèle à $P_1$ et s'y projette suivant sa véritable longueur.

**172. Problème XIV.** *Construire l'angle des deux traces d'un plan.*

**Solution dans l'espace.** Sur la trace $T_2$ du plan T, on prend un point $b$ que l'on unit, par une droite, au point $a$ pris sur $T_1$. Si $m$ est le point de rencontre de $T_1$ et $T_2$ sur l'axe, le triangle $mab$ aura en $m$ un angle opposé à $ba$ qui est l'angle demandé.

**Solution graphique. (Ep. 104.)** Deux des côtés du triangle *mab* se trouvent en véritable longueur dans les données de l'épure. Ce sont les deux segments $mb''$ et $ma'$ interceptés par $ab$ sur les deux traces du plan. Le troisième côté $ab$ sera l'hypothénuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $a'b'$ et $b'b''$.

**173. Problème XV.** *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

**Solution dans l'espace.** D'un point pris sur la droite, on abaisse une perpendiculaire sur le plan. L'angle que fait la droite avec cette perpendiculaire est le complément de l'angle que fait la droite avec le plan.

**Solution graphique. (Ep. 105.)** L'angle de la droite et de la normale au plan se construit comme au § 171.

**174. Problème XVI.** *Construire l'angle de deux plans.*

**Solution dans l'espace.** D'un point quelconque situé dans le dièdre des deux plans, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des deux plans donnés. L'angle de ces deux droites sera le supplément de l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

**Solution graphique. (E. 106.)** L'angle des deux perpendiculaires se construit comme au § 171.

**175. Problème XVII.** *Construire l'angle d'un plan avec les deux plans de projection.*

**Solution dans l'espace. (Fig. 107.)**

**Angle du plan avec $P_1$.** Par un point $m$ de l'axe, on mène un plan perpendiculaire à la trace $T_1$ du plan T. Ce plan coupe $P_2$ suivant $mb$ perpendiculaire à l'axe, et $P_1$ suivant $ma$ perpendiculaire à $T_1$. Dans le triangle $bma$, l'angle $a$ est le correspondant du dièdre formé par $P_1$ et T.

**Angle du plan T avec $P_2$.** Du même point $m$ de l'axe, on mène un plan auxiliaire perpendiculaire à $T_2$ ; il coupera $P_2$ suivant $cm$ perpendiculaire à $T_2$, et $P_1$ suivant $md$ perpendiculaire à l'axe. L'angle $c$ du triangle rectangle $cmd$ sera le correspondant du dièdre formé par T et $P_2$.

**Solution graphique. (Ep. 108.)** Les opérations graphiques se réduisent à la construction des deux triangles rectangles $cmd$ et $bma$ ; on construira les véritables longueurs des deux côtés de l'angle droit.

**176. Problème XVIII.** *Construire l'intersection de trois plans $p$, $q$ et $r$.*

**Solution.** On construit l'intersection des deux plans $p$ et $q$. On obtient une droite, dont on construira le point de rencontre $s$ avec le plan $r$; ce point $s$ appartient au plan $r$ ainsi qu'à chacun des deux autres plans $p$ et $q$, puisqu'il est situé sur leur droite d'intersection.

**177. Problème XIX.** *Par une droite donnée $d$, mener un plan qui fasse, avec $P_1$, le plus petit angle possible.*

**Solution.** (**Ep. 109.**) Le plan mené suivant $d$ et qui a cette droite pour ligne de plus grande pente, est celui qui répond aux conditions du problème ; sa trace sur $P_1$ sera perpendiculaire à $d'$, et son angle avec $P_1$ est égal à l'angle de la droite $d$ avec $P_1$.

En effet, par $d$ faisons passer deux nouveaux plans dont les traces $q_1$ et $r_1$, menées à droite et à gauche de $d'$, ne sont pas perpendiculaires à $d'$, et prouvons que les angles de ces plans avec $P_1$ sont plus grands que l'angle de $d$ avec $P_1$.

L'angle du plan $r$ avec $P_1$ est l'angle $m$ du triangle rectangle $a''a'm$ (**175**).

L'angle du plan $q$ avec $P_1$ est l'angle $n$ du triangle rectangle $a''a'n$.

Si l'on compare ces deux triangles rectangles au triangle rectangle qui, dans l'espace, a $a''a'$ et $a'x$ pour côtés de l'angle droit, on voit que l'angle aigu $x$ opposé à $a''a'$ est plus petit que chacun des angles $m$ et $n$. Donc, le plan qui passe par $d$ et qui a cette ligne pour ligne de plus grande pente, est celui qui fait le plus petit angle avec $P_1$.