Chapitre III.

—

Des différentes positions que le point, la droite et le plan peuvent avoir entre eux dans l'espace.

Des différentes positions que deux droites peuvent avoir entre elles.

—

47. Différentes positions de la droite.

Deux droites peuvent
- se couper
  - sous un angle quelconque (1.
  - à angle droit . . . . . (2.
- être parallèles . . . . (3.
- se croiser, ne pas être parallèles et ne pas se couper . . . . (4.

48. Droites qui se coupent. *Si deux droites se coupent dans l'espace, le point d'intersection des premières projections de ces droites et le point d'intersection des secondes projections de ces mêmes droites se trouvent sur une même perpendiculaire à l'axe de projection.* (A démontrer.) (**Epure 20-1**.)

Réciproquement. *Si les projections de même nom de deux droites se rencontrent en des points qui se trouvent sur une même perpendiculaire à l'axe, ces deux droites se coupent dans l'espace.* (A démontrer.)

Remarque. La simple inspection des projections des deux droites ne suffit pas pour juger de la valeur de l'angle sous lequel les deux droites se coupent. Cet angle peut être aigu, droit ou obtus.

49. Droites perpendiculaires. — Cas particulier. *Si deux droites sont perpendiculaires et si l'une d'elles est parallèle à l'un des deux plans de projection, les projections des deux droites sur ce plan se rencontrent à angle droit.* (**Fig. 18. Ep. 20-2.**)

Soient la droite *ab* parallèle à P_1 et la droite *cd* normale à *ab;* je dis que *c'd'*, projection de *cd* sur P_1, est perpendiculaire à *a'b'*, projeotion de *ab* sur P_1.

En effet, le premier plan projetant de *ab* est normal à P_1 et contient, comme tel, la normale *cc'* abaissée de *c* sur P_1. La figure *bb'c'c* est donc un rectangle, dans lequel *b'c'* est parallèle à *bc* et *cc'* normal à *bc* et à *b'c'*. Or, *bc* étant perpendiculaire à *cd*, par hypothèse, et à *cc'*, sera perpendiculaire au plan projetant de *cd* sur P_1. La droite *c'b'*, parallèle à *cb*, sera donc également perpendiculaire au plan *dcc'*, donc à toute droite passant par son pied *c'* dans ce plan, donc à *c'd'*, projection de *cd* sur P_1. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Le théorème des trois perpendiculaires du 5e livre de la Géométrie élémentaire fournit une autre démonstration de la propriété précédente.

Réciproquement. *Si deux droites se coupent et si l'une d'elles est parallèle à l'un des plans de projection, et que les projections des deux droites sur ce plan se coupent à angle droit, les deux droites, dans l'espace, sont perpendiculaires entre elles.*

La droite *cd* de l'espace sera située dans le plan normal à P_1 mené suivant *c'd'*. Or ce plan, déterminé par *c'd'* et par *c'c*, droites perpendiculaires à *a'b'*, sera perpendiculaire à *a'b'* et, par suite, à *ab* qui est parallèle à *a'b'*.

Or *ab*, perpendiculaire au plan *d'c'c*, sera perpendiculaire à toute droite passant par son pied *c* dans ce plan, donc aussi à *cd*. Ce qu'il fallait démontrer.

50. Droites parallèles. *Deux droites parallèles dans l'espace ont leurs projections de même nom parallèles.* (**Fig. 19. Ep. 20-3.**)

Pour avoir les premières projections *d'* et *c'* des deux droites parallèles *d* et *c* il faut, par ces droites, mener des plans perpendiculaires à P_1, et déterminer leurs droites d'intersection avec P_1. Ces plans projetants, formés respectivement par les droites d et aa', c et bb', deux-à-deux parallèles, sont parallèles et donnent d' parallèle à c'. On démontre de la même manière que les secondes projections d'' et c'' sont parallèles.

Réciproquement. *Si les projections de même nom de deux droites sont parallèles, ces droites, dans l'espace, sont parallèles.*

Les premiers plans projetants des droites d et c sont parallèles, comme plans perpendiculaires à P_1 menés suivant des droites d' et c' qui sont parallèles. Les seconds plans projetants de d et c étant également parallèles, leurs intersections avec les premiers, ou les droites d et c, sont parallèles.

Exceptions. *Deux droites parallèles perpendiculaires à l'axe, et deux droites parallèles situées dans un ou des plans perpendiculaires à l'axe, ont leurs projections de même nom parallèles, — mais la réciproque n'est pas toujours vraie.*

Le parallélisme des projections et leur perpendicularité à l'axe indiquent seulement que les droites correspondantes de l'espace sont perpendiculaires à l'axe, ou dans des plans perpendiculaires à cette ligne, mais n'autorisent nullement à affirmer que ces droites sont parallèles.

51. Droites qui se croisent. *Deux droites se croisent lorsqu'elles ne sont pas parallèles et qu'elles ne se rencontrent pas, donc lorsqu'elles ne sont pas situées dans un seul et même plan.* (**Ep. 20-4.**)

Les projections de ces droites ne jouissent pas des propriétés énoncées pour celles des droites parallèles et des droites qui se rencontrent.

Donc, les projections de même nom ne sont pas parallèles et leurs points d'intersection, dans le cas où elles se rencontrent, ne sont pas unis par une perpendiculaire à l'axe, et réciproquement.

—

Des différentes positions d'une droite à l'égard d'un plan.

—

52. Différentes positions.

Une droite peut	être située dans un plan		(1.
	être parallèle à un plan	quelconque	(2.
		perpendiculaire à l'un des plans de projection	(3.
		perpendiculaire à l'axe	(4.
	couper le plan	sous un angle quelconque	(5.
		à un angle droit	(6.

53. Droite située dans un plan. L'inspection des projections de la droite et des traces du plan ne suffit pas pour reconnaître si la droite est dans le plan.

Propriété. *Si une droite est dans un plan, les points où cette droite perce les plans de projection sont sur les traces du plan, et réciproquement.*

54. Droite parallèle à un plan quelconque. La simple inspection de l'épure ne fournit aucune propriété de laquelle on puisse déduire le parallélisme de la droite et du plan.

Propriété. *Si une droite est parallèle à un plan, elle doit être parallèle à une droite du plan.*

55. Droite parallèle à un plan perpendiculaire à P_1, ou à P_2. *Si une droite est parallèle à un plan perpendiculaire à* P_1, *ou à* P_2, *les projections de la droite et du plan sur* P_1 *ou sur* P_2 *sont parallèles, et réciproquement.* (**Fig. 21.**)

Le plan T, perpendiculaire à P_1, est parallèle au plan projetant de d. Ce dernier plan, en effet, est déterminé par d parallèle à T et par aa' perpendiculaire à P_1, donc parallèle à T. Le plan projetant de d est donc parallèle à T, par suite, sa trace d' sur P_1 est parallèle à la trace T_1 de T sur P_1. Or, d' et T_1 sont respectivement les projections de d et de T sur P_1.

On prouverait de la même manière que si d était parallèle à un plan S perpendiculaire à P_2, sa projection sur P_2 serait parallèle à la trace-projection de S sur P_2.

Réciproquement. *Si la projection d'une droite sur l'un des deux plans de projection est parallèle à la trace de même nom d'un* *plan* T *perpendiculaire à ce plan de projection, la droite de l'espace est parallèle à ce plan* T.

Cette droite est, en effet, située dans un plan projetant parallèle à T.

56. Droite parallèle à un plan perpendiculaire à l'axe. *Si une droite est parallèle à un plan perpendiculaire à l'axe, les projections de la droite sont parallèles aux traces de même nom du plan, et réciproquement.*

Cette propriété n'est qu'un corollaire de la propriété précédente.

57. Droite qui rencontre un plan sous un angle quelconque. La simple inspection des projections de la droite et des traces du plan ne suffit pas pour reconnaître si la droite rencontre le plan, et encore moins pour savoir sous quel angle cette rencontre se produit.

58. Droite perpendiculaire à un plan. *Si une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont perpendiculaires aux traces de même nom du plan.* (**Fig. 22.**)

En effet, le premier plan projetant de *d* est normal à T, comme plan mené suivant la droite *d* normale à T. Ce plan projetant étant également normal à P_1, il sera normal à T_1, intersection de T et de P_1. La trace T_1 est donc, à son tour, normale au premier plan projetant de *d*, donc à toute droite passant par son pied *m* dans ce plan, donc à *d'*, projection de *d* sur P_1. Ce qu'il fallait démontrer.

On prouvera de même que la seconde projection *d''* est perpendiculaire à la seconde trace T_2 du plan T.

Réciproquement. *Si les projections d'une droite sont perpendiculaires aux traces de même nom d'un plan, cette droite, dans l'espace, est perpendiculaire à ce plan.* (**Epure 23**).

La droite *d* de l'espace, dont les deux projections sont *d'* et *d''*, respectivement perpendiculaires à T_1 et à T_2, se trouve à l'intersection des deux plans projetants dont *d'* et *d''* sont les traces-projections.

Or, le plan projetant mené par *d'* est normal à P_1 et perpendiculaire au plan T, puisqu'il est perpendiculaire à T_1, droite de ce plan.

Le plan projetant mené par *d''* est normal à P_2 et perpendiculaire à T, comme étant perpendiculaire à T_2, droite de ce plan.

La droite *d* de l'espace, intersection de ces plans projetants, sera donc perpendiculaire à T. Ce qu'il fallait démontrer.

Exception. *La réciproque n'est pas toujours vraie, si le plan* T *a ses deux traces parallèles à l'axe.*

Les deux plans projetants se confondront et ne formeront qu'un seul plan perpendiculaire à l'axe, dans lequel la droite sera située. Toute position de cette droite dans ce plan s'accusera par des projections perpendiculaires à l'axe.

—

Des différentes positions que deux plans peuvent avoir entre eux.

—

59. Différentes positions.

Deux plans	sont parallèles	. . . .	(1.
	ou se coupent	sous un angle quelconque	(2.
		à angle droit.	(3.

—

60. Plans parallèles. *Deux plans parallèles ont leurs traces de même nom parallèles.* (**Epure 25-1**.)

Les traces sur P_1 sont parallèles ; elles résultent de l'intersection de P_1 avec les deux plans donnés qui sont parallèles. Il en est de même des traces des plans sur P_2.

Réciproquement. *Si les traces de même nom de deux plans sont parallèles, ces plans le sont également*

En effet, le plan L contient deux droites, ses traces T_1 et T_2, respectivement parallèles à deux autres droites S_1 et S_2, traces du plan S, donc droites de ce plan.

Exception. La réciproque précédente n'est pas toujours vraie, si les deux traces de chacun des deux plans sont parallèles à l'axe.

Les deux plans seront parallèles à l'axe et peuvent se couper suivant une droite parallèle à cet axe.

61. Plans qui se coupent. *Deux plans qui se coupent ont, en général, leurs traces de même nom qui se coupent, et réciproquement.* (**Epure 25-2**.)

Exceptions. *Deux plans dont les deux traces sont parallèles à l'axe peuvent se couper suivant une droite parallèle à cet axe.*

Deux plans ayant leurs traces sur l'un des plans parallèles se coupent suivant une droite parallèle à ces traces, et réciproquement.

La simple inspection des traces des deux plans dans les épures ne fournit, en général, aucun indice pour juger de la valeur de l'angle sous lequel les deux plans se rencontrent, si ce n'est dans les cas particuliers suivants :

62. Plans perpendiculaires. *Si deux plans sont perpendiculaires, et si l'un d'eux est normal à l'un des deux plans de projection, les traces des deux plans sur ce plan de projection se rencontrent à angle droit.*

Soit (**Fig. 24**) le plan r perpendiculaire au plan T, lequel est normal à P_1. Puisque P_1 et r sont perpendiculaires à T, leur intersection commune ou r_1 le sera également. r_1, perpendiculaire à T, sera perpendiculaire à toute droite passant par son pied m dans ce plan, donc à T_1.

Réciproquement. *Si de deux plans, l'un est perpendiculaire à l'un des plans de projection, et que les traces des deux plans sur ce plan de projection sont perpendiculaires, les deux plans le sont également.* (**Epure 25-3**.)

En effet, la trace R_1 de R sur P_1 est perpendiculaire à T_1, donc au plan T, car toute normale à l'arête d'un dièdre droit, située dans l'une des faces de ce dièdre, est perpendiculaire à l'autre face. Le plan R, contenant une normale au plan T, sera perpendiculaire à ce plan.

63. Plans perpendiculaires au même plan de projection. *Si deux plans sont perpendiculaires au même plan de projection, l'angle de leurs traces sur ce plan mesure l'angle dièdre des deux plans.* (**Epure 25-4**.)