TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

LIVRE PREMIER

PROJECTIONS ORTHOGONALES
SUR
DEUX PLANS RECTANGULAIRES.

Chapitre premier.

Représentation du point, de la ligne droite et du plan.

1. Considérations générales. — Définitions. — Projections du point. (Fig. 1.) Si, d'un point a de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur un plan P_1, *le pied a' de cette perpendiculaire est la projection de a sur* P_1.

Si, du même point a, on abaisse une perpendiculaire sur un second plan P_2, normal au premier, *le pied a'' de cette perpendiculaire est la projection de a sur* P_2.

Plans de projection. *Les deux plans* P_1 *et* P_2 *sont les deux plans de projection.*

Projetantes. *Les perpendiculaires* aa' *et* aa'' *sont les deux projetantes du point* a.

Axe de projection. *La droite d'intersection des deux plans de projection est l'axe de projection,* ou simplement *l'axe*.

Premier plan de projection. *Le plan* P_1 *est le premier plan de projection.*

Second plan de projection. *Le plan* P_2 *est le second plan de projection.*

Première projection du point. *La projection* a' *de* a *sur* P_1 *est la première projection du point* a.

Seconde projection du point. *La projection* a'' *de* a *sur* P_2 *est la seconde projection du point* a.

Distances ou hauteurs du point a. *Les longueurs des projetantes* aa' *et* aa'' *sont les distances du point* a *respectivement au premier et au second plans de projection.* Ce sont *les hauteurs* de ce point.

Première hauteur. *La longueur* aa' *est la première distance, la première hauteur du point* a.

Seconde hauteur. *La longueur* aa'' *sera la seconde distance, la seconde hauteur du point* a.

Si nous considérons la figure $aa'a_0a''$ qui est un rectangle, et dans laquelle $a'a^0$ et $a''a_0$ sont des perpendiculaires abaissées de a' et de a'' sur l'axe, perpendiculaires qui sont encore le résultat de l'intersection des deux plans de projection avec le plan $a''aa'$ normal à l'axe, nous voyons que la perpendiculaire $a'a_0$ est l'ordonnée de a', dans le plan P_1, par rapport à un point A de l'axe, pris pour origine ou centre des coordonnées.

De même, la perpendiculaire $a''a_0$ sera l'ordonnée de a, dans le plan P_2, par rapport à ce même point A.

Première ordonnée. Nous nommerons *première ordonnée du point* a, *l'ordonnée de sa première projection, la distance de cette première projection à l'axe.*

Seconde ordonnée. *La seconde ordonnée du point* a *sera la distance de la seconde projection* a'' *à l'axe.*

2. Plans de projection particuliers. Dans les applications de la Géométrie Descriptive, (Stéréotomie, Dessin industriel, etc.) P_1 est un plan horizontal et P_2 par conséquent un plan vertical.

Plan de projection horizontal. Le premier plan de projection P_1 devient alors *le plan de projection horizontal.*

Plan de projection vertical. Le plan de projection P_2 portera le nom de *plan de projection vertical.*

Ligne de terre. L'axe devient *la ligne de terre.*

Projection horizontale et projection verticale du point.

La première projection du point deviendra sa *projection horizontale*, et la seconde projection du même point en sera *la projection verticale.*

On dit, par abréviation, *projection horizontale, projection verticale*, au lieu de *projection sur le plan horizontal, projection sur le plan vertical.*

Distances et ordonnées horizontales et verticales.

La longueur aa', la première hauteur, la première distance du point, sera sa *distance horizontale; aa''* deviendra la *distance verticale* du point.

On dit, *distance horizontale, distance verticale*, pour ne pas devoir dire, *distance au plan horizontal, distance au plan vertical.*

De même, la première ordonnée $a'a_0$ sera l'*ordonnée horizontale*, et la seconde ordonnée $a''a_0$ l'*ordonnée verticale* du point a.

3. Remarques. 1. Par ce qui précède, nous voyons que, pour passer du cas général au cas particulier des plans de projection horizontal et vertical, toutes les définitions et dénominations restent les mêmes ; il suffira de remplacer les mots de *première* et *seconde* respectivement par *horizontale* et *verticale.*

2. Dans une traité de géométrie descriptive pure, science indépendante de toute application, il convient, comme en géométrie analytique, de généraliser les définitions, et de considérer les projections comme effectuées sur deux plans rectangulaires quelconques P_1 et P_2.

Ces dénominations présentent des avantages réels dans le chapitre qui traite des changements de plans de projection.

4. Loi des projections orthogonales sur deux plans rectangulaires.

Tout point de l'espace est lié à chacune de ses projections sur les deux plans P_1 *et* P_2 *par une perpendiculaire à ces plans.*

—

Représentation et détermination du point.

—

5. Convention pour représenter un point sur deux plans rectangulaires.

Si, d'un point a de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur P_1 et une autre sur P_2, les projetantes aa' et aa'' déterminent un plan perpendiculaire à l'axe. Soit a_0 le point de rencontre de l'axe avec ce plan. La figure $aa''a_0a'$ est un rectangle et donne $aa'=a''a_0$ et $aa''=a'a_0$. (**Fig. 1**.)

De ces égalités, on déduit les propriétés suivantes :

Propriété I. Un point a de l'espace ainsi que ses deux projections a' et a'' sur deux plans rectangulaires P_1 et P_2, se trouvent toujours dans un plan perpendiculaire à l'axe de projection.

Propriété II. La première hauteur du point est égale à la seconde ordonnée.

La seconde hauteur est égale à la première ordonnée.

6. Principe. *Un point de l'espace est suffisamment représenté et déterminé par ses projections orthogonales* a' *et* a'' *sur deux plans rectangulaires* P_1 *et* P_2.

Il suffira, en effet, pour retrouver le point a, d'élever en a' une perpendiculaire à P_1, et en a'' une autre perpendiculaire à P_2; ces deux perpendiculaires se coupent au point demandé a.

Ou bien, à P_1 et par a', on mène une perpendiculaire ; sur cette ligne, et à partir de a', on porte une longueur égale à la seconde ordonnée $a''a_0$; l'extrémité de cette perpendiculaire sera le point a. (**6**)

De même, par a'', on mène une perpendiculaire à P_2; sur cette ligne, à partir de a'', on porte une longueur égale à la première ordonnée pour avoir, à son extrémité, le point a.

7. Convention pour représenter la position d'un point sur un seul plan de figure.

Pour représenter le point a de l'espace sur un seul plan de figure, à l'aide de ses projections a' et a'' sur P_1 et P_2 (but de la géométrie descriptive), on fait tourner l'un des plans autour de l'axe de projection, jusqu'à ce qu'il coïncide avec le prolongement de l'autre; les deux plans de projections forment ainsi un seul plan, **le plan de figure**. Dans ce mouvement de rotation du plan P_1, par exemple, la projection a' restera toujours sur a_0a'; si P_1 coïncide avec le prolongement de P_2, a'' et a' se trouveront sur une même perpendiculaire à l'axe. (**Fig. 2.**)

De même, si l'on fait tourner P_2 autour de l'axe, jusqu'à ce que ce plan coïncide avec P_1 prolongé, a'' et a' se trouveront sur une perpendiculaire à l'axe. De ce qui précède, nous pouvons conclure :

Propriété. *Tout point a de l'espace, dont les projections sur* P_1 *et* P_2 *sont figurées sur un seul plan, le plan de figure, a ces projections toujours unies par une perpendiculaire à l'axe.* (**Epure 5.**)

8. Remarques I. La figure 1 montre que cette propriété est indépendante de l'angle dièdre des deux plans de projection.

II. Dans cette représentation des corps et des figures sur un seul plan de figure, on devra constamment se rappeler, que le plan de figure représente l'un des plans de projection dans sa véritable position, et que l'autre est rabattu sur le premier autour de leur intersection commune. Cette intersection, l'axe de projection, sera toujours figurée d'une manière visible par un trait plein et fin. L'axe divise le plan de figure en *deux nappes* dont l'une est le plan P_1, et l'autre le plan P_2.

III. Dans toutes les représentations des figures que nécessite l'exposé du cours à l'amphithéâtre, le plan du tableau sera le plan P_2; il est toujours dans sa vraie position, et le plan P_1 est supposé rabattu sur P_2 autour de l'axe.

Dans le tracé des épures sur une feuille de papier, c'est le plan P_1 que l'on suppose être fixe et coïncider avec le plan du papier; ce sera P_2 qui aura tourné autour de l'axe, jusqu'à ce qu'il soit venu dans le prolongement de P_1.

9. Principe. *Un point de l'espace est suffisamment représenté et déterminé sur un seul plan de figure par ses deux projections orthogonales sur* P_1 *et* P_2, *unies par une perpendiculaire à l'axe.*

En effet, pour retrouver le point, il suffit de ramener dans sa position primitive celui des deux plans qui aura tourné autour de l'axe, et d'élever à ce plan, et par la projection qu'il contient, une perpendiculaire égale à la distance de l'autre projection à l'axe. (**6**. Propriété II.) (**Fig. 2**.)

Ou bien, sans relever celui des plans de projection qui a changé de position, on n'a qu'à élever au plan qui est resté fixe, et par la projection du point sur ce plan, une perpendiculaire égale à la distance de l'autre projection à l'axe. Dans ces deux cas, l'extrémité de la perpendiculaire sera le point de l'espace que l'on veut retrouver.

10. Notations. — Conventions. Un point, désigné dans l'espace et dans l'énoncé d'un problème par une lettre a, aura, dans une épure, ses deux projections désignées par a' et a''.

a' marque *la projection de a sur* P_1, *la première projection du point a*, *la projection horizontale de ce point*, dans le cas où P_1 est un plan horizontal.

a'' désigne *la projection de a sur* P_2, *la seconde projection du point a*, *la projection verticale de ce point*, si P_2 est un plan vertical.

Pour simplifier un texte, on dit : a', ou mieux encore *la projection* a', au lieu de, *la première projection de a*, *la projection de a sur* P_1, etc.

De même, on dit : a'', ou encore, *la projection* a'', au lieu de, *la seconde projection de a*, *la projection verticale de a*, etc.

—

Représentation et détermination de la droite.

—

11. Projection d'une droite. Si, d'un point d'une droite d, on abaisse une perpendiculaire sur un plan P, cette perpendiculaire, avec d, déterminent un plan normal à P.

Ce plan coupe P suivant une droite, *la projection de d sur* P.

Une perpendiculaire à P, menée par un point quelconque m de d, est entièrement située dans le plan normal à P mené par d, et a son pied, la projection de m sur P, sur la trace du plan normal, trace qui est la projection de la droite. Il suit de là que :

La projection d'une droite sur un plan est une droite, et que cette projection contient les projections de tous les points de la droite.

Remarque. Si d est perpendiculaire à P, la projection de d sur P se réduit à un point, pied de la perpendiculaire d.

12. Définitions. Le plan mené par la droite d normalement à P_1 coupe ce plan suivant une droite d', la projection de d sur P_1. (**Fig. 3.**)

Le plan mené par la droite d normalement à P_2, coupe ce dernier plan suivant une droite d'', la projection de d sur P_2.

Première projection de la droite. *La projection d' de d sur* P_1 *est la première projection de la droite.*

Seconde projection de la droite. *La projection d'' de d sur* P_2 *est la seconde projection de la droite.*

Premier plan projetant. Le plan mené par d normalement à P_1 *est le premier plan projetant de la droite.*

Second plan projetant. Le plan mené par d normalement à P_2 *est le second plan projetant de la droite.*

Chacune des projections de la droite contient les projections de même nom de tous les points de cette droite.

En rabattant l'un des deux plans de projection sur l'autre, supposé fixe, les deux projections de la droite se trouveront dans un seul plan de figure, et chaque point de la droite aura ses projections sur les projections de même nom de la droite, unies par une perpendiculaire à l'axe de projection. Ces opérations conduisent à l'**Epure 6.**

13. Principe. *La droite d de l'espace est donc réprésentée sur un seul plan de figure par les deux projections orthogonales sur* P_1 *et* P_2, *et réciproquement, une droite ainsi représentée est suffisamment détermité.*

En effet, la droite, dont d' est la projection sur P_1, se trouve dans un plan normal à P_1 passant par d'.

Cette même droite, ayant d'' pour projection sur P_2, se trouvera dans un plan normal à P_2 mené suivant d''.

Devant se trouver dans deux plans différents, elle sera déterminée par leur intersection commune.

On voit, d'après ce qui précède, que pour retrouver la droite représentée sur un plan de figure par ses projections orthogonales d' et d'' sur deux plans rectangulaires P_1 et P_2, il suffit de redresser celui des plans qui n'est pas dans véritable position, et de mener, par chaque projection de la droite, un plan normal au plan de projection de même nom que cette projection.

La droite d'intersection de ces plans sera la droite de l'espace.

On peut encore retrouver la droite en reconstruisant deux de ses points (**7**).

14. Notations. Conventions. Une droite de l'espace désignée par d, e, f, etc. aura sa projection sur $\begin{cases} P_1 \text{ désignée par } d', e', f', \text{ etc.} \\ P_2 \text{ désignée par } d'', e'', f'', \text{ etc.} \end{cases}$

Au lieu de désigner la droite et ses projections par une seule lettre, on peut la distinguer en marquant deux de ses points (**3**).

Si	P_1	est un plan	horizontal	d , e', f', etc.	marquent les projections	horizontales	des droites d, e, f, etc.
	P_2		vertical	d'', e'', f'', etc.		verticales	

—

Représentation et détermination du plan.

—

15. Définitions. La droite suivant laquelle un plan de l'espace coupe le plan P_1, est la trace de ce plan sur P_1 ou sa *première trace.*

On appelle *seconde trace du plan*, trace sur P_2, la droite suivant laquelle ce plan coupe P_2. (**Fig. 4.**)

Ces deux droites sont *les deux traces du plan.*

16. Propriétés. I. Comme tout plan est parallèle à l'axe de projection on coupe cet axe en un point, les deux traces d'un plan sont parallèles ou se coupent sur l'axe.

II. La première trace, située dans P_1, a sa seconde projection sur l'axe de projection ; de même, la seconde trace du plan, qui est dans P_2, a sa première projection sur l'axe.

III. En rabattant P_1 sur P_2 avec la première trace R_1 du plan R, on aura l'**épure 7** qui représente le plan R sur le plan de figure.

17. Principe. *Les deux traces d'un plan étant deux droites de ce plan, celui-ci est représenté et déterminé par ses traces, et réciproquement, les deux traces d'un plan suffisent pour le représenter et pour le déterminer.*

En effet, pour retrouver, dans l'espace, le plan représenté sur un plan de figure par ses deux traces sur P_1 et P_2, il suffit de redresser celui des deux plans de projection qui n'est pas dans sa véritable position, avec la trace du plan qu'il contient.

Cette trace q_1 ainsi redressée détermine avec l'autre trace q_2, restée fixe, le plan q de l'espace qui les contient. (**Fig. 4**.)

18. Notations. — Conventions. Un plan de l'espace, désigné dans le texte d'un problème par une des lettres *p, q, z,* etc. aura sa trace sur P_1 désignée par p_1, q_1, z_1, etc. et sa trace sur P_2, par p_2, q_2, z_2, etc.

Dans un texte, on dira : la trace *p* un, la trace *p* deux du plan *p*.

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \\ r_1 \\ s_1 \end{array}\right\} \text{marquent} \left\{\begin{array}{l} \text{la première trace. . .} \\ \text{la trace sur } P_1 \text{ . . . .} \\ \text{la trace horizontale . .} \\ \quad\text{(si } P_1 \text{ est horizontal)} \end{array}\right\} \text{du plan} \left\{\begin{array}{l} p; \\ r; \\ s. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} p_2 \\ r_2 \\ s_2 \end{array}\right\} \text{désignent} \left\{\begin{array}{l} \text{la seconde trace . .} \\ \text{la trace sur } P_2 \text{ . . .} \\ \text{la trace verticale . .} \\ \quad\text{(si } P_2 \text{ est vertical)} \end{array}\right\} \text{du plan} \left\{\begin{array}{l} p; \\ r; \\ s. \end{array}\right.$$

On n'emploie pas les notations p', r', s', etc. ainsi que p'', q'', r'', etc. pour ne pas les confondre avec les notations données aux projections des droites *p*, *r* et *s*.

19. Les **épures 5**, **7** et **8** représentent le point *a*, la droite *d* et le plan R.
