Chapitre IV.

—

Applications. — Problèmes.

---

371. Problème I. *Etant donnée la projection centrale d'un triangle située dans* P_1, *construire son rabattement sur* P_2.

Solution (Ep. 274). Joignons les sommets du triangle au point p'', nous aurons un faisceau de droites qui, avec $a_c b_c d_c$, forment une figure S_c, projection centrale d'une figure S située dans P_1 et formée du triangle *abc* et de normales abaissées des sommets *a, b* et *c* sur l'axe de projection.

Les deux figures S et S_c qui sont perspectives ont le pôle *p* pour centre de collinéation et l'axe de projection pour axe de collinéation.

Le rabattement opéré, le nouveau centre de collinéation sera en (p), les normales $p''m$, $p''n$ et $p''s$ en $m(b)$, $n(a)$ et $n(c)$ et dirigées suivant des normales à l'axe.

Les points de rencontre de ces normales avec les rayons $(p)a_c$ $(p)b_c$ et $(p)d_c$ donnent les sommets (a), (b) et (c) du triangle rabattu.

Remarque. Cette solution est celle du IV cas des rabattements polaires : *Opérer le rabattement, le plan de la figure plane est sur* P_1 *ou parallèle à* P_1.

372. Problème II. *Un triangle est situé dans le géométral, en construire sa perspective.*

Solution (Ep. 274). Ce problème important des applications des projections centrales est le problème réciproque du précédent.

L'épure (**274**) nous donne immédiatement la solution simple et facile qui dispense des horizontales à 45° et de l'emploi des points de distance, comme on a l'habitude de le faire dans la pratique de la perspective.

373. Problème III. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite.*

Solution dans l'espace. Par la droite donnée, on fait passer un plan normal à P_1 (**316**). On rabat ce plan avec la droite y contenue sur P_2, en se servant de la trace T_c comme axe de rotation. Le rabattement obtenu sera la véritable longueur de la droite.

Solution graphique (**Ep. 275**). La trace T_c du plan auxiliaire sera prise pour axe de rotation. On unit les deux extrémités a_c et b_c de $a_c b_c$ au point F par des droites. Ce faisceau de droites et $a_c b_c$ forment une figure S_c qui est la projection centrale d'une figure S située dans T et dans laquelle les rayons a_cF et b_cF deviennent des normales à T_c. Ces deux figures sont perspectives, avant et après le rabattement et, celui-ci opéré, le centre de collinéation sera en M, l'axe de collinéation étant T_c et la ligne limite du plan T, la droite FL parallèle à T_c.

Vérifications. $(a)(b)$ et $a_c b_c$ se coupent en x sur T_c.

Les points $x,(a),(b)$ et (g) sont en ligne droite.

Remarques I. Ce problème donne la solution du II cas des rabattement polaires : Opérer le rabattement, la figure plane étant située dans un plan normal à P_1.

II. En perspective, un plan normal à P_1 devient un *plan fuyant;* celui-ci est un *plan fuyant principal*, s'il passe par le pôle, le *point de vue*.

Le problème précédent nous donne une solution très-simple d'un problème de perspective.

374. Problème IV. *Une figure plane est située dans un* **plan fuyant,** *en construire la perspective.*

Solution (**Ep. 276**). Ce problème est la réciproque du précédent. Soit $(a)(b)(c)$ la figure (f) à mettre en perspective. Elle est rabattue sur P_2 (le tableau) autour de T_c, trace du plan qui la contient et dont T_{1c} est l'autre trace.

On construit le centre de collinéation (p) pour la figure rabattue et sa projection centrale. Ce point est sur la ligne d'horizon, la ligne limite L du plan T étant parallèle à T_c donc normale à la ligne d'horizon.

La simple inspection de l'épure donne la description de la solution.

Remarque. En perspective, le point (p) se nomme *point de distance accidentel.*

375. Problème V. *Construire l'angle qu'une droite fait avec chacun des deux plans de projection.*

I. **Angle de la droite avec** P_1. Dans l'épure du problème III (**Ep. 275**), l'angle que fait la droite rabattue $(a)(b)$ avec l'axe de projection est l'angle de la droite avec P_1.

L'axe de projection est, en effet, le rabattement de la première trace T_1 du plan projetant de la droite.

II. **Angle de la droite avec** P_2. Par la droite, on fait passer un plan normal à P_2. L'angle que fait la droite d avec la trace de ce plan sur P_2 sera l'angle de la droite et de P_2. Cette angle se détermine par le rabattement de d sur P_2 autour de la trace T_c.

Solution graphique (**Ep. 277**). La trace T_{1c} du plan auxiliaire passe par p'' et par le point de rencontre b_c des deux projections centrales de la droite. Le rabattement de d sur P_2 s'obtient en unissant deux points a_c et b_c de d_c à p'' par des droites qui coupent T_c en m et n, et qui se rabattent sur P_2 suivant les normales $m(a)$ et $n(b)$ à T_c. Le centre de collinéation M de $a_c b_c$ et de $(a)(b)$ sera sur la normale à L menée par p'', et sur cette normale à une distance de $p''=pp''$. Ce point M unira (a) et a_c, (b) et b_c. L'angle de $(a)(b)$ avec T_c sera l'angle β de d avec P_2.

Vérifications. $a_c b_c$ et $(a)(b)$ se coupent sur l'axe de collinéation T_c.

376. Problème VI. *Construire la distance d'un point à une droite.*

Solution dans l'espace. Par le point a et la droite d, on fait passer un plan T. On rabat ce plan avec la droite et le point sur P_2, en se servant de la trace T_c comme axe de rabattement. On construit la distance de (a) à (d) et on relève cette distance.

Solution graphique (**Ep. 278**). Par le point a, on mène une droite parallèle à d. Cette droite avec d déterminent le plan T. On reconstruit la trace T_1 à l'aide d'un rabattement polaire auxiliaire, puis son rabattement ordinaire (T_1) sur P_2.

Les rabattements polaires du point a et de la droite d s'obtiennent en (a) et (d), à l'aide de la solution donnée pour le problème général (**365**). $(a)(g)$ sera la distance cherchée qui se relève en $a_c g_c$ et $a'_c g'_c$.

Vérifications I. $(a)(g)$ et $a_c g_c$ se coupent sur l'axe de collinéation.

II. ag est une droite du plan T. Par suite son point F est sur la ligne d'horizon et son point F' sur L.

377. Problème VII. *Construire la distance de deux droites parallèles.*

Solution dans l'espace. Les deux droites déterminent un plan T. On rabat ce plan avec les deux droites sur P_2, en se servant de la trace T_c comme axe de rabattement.

La distance des deux droites rabattues sera la distance des deux droites données.

Cette distance sera ensuite relevée en projections.

Solution graphique (Ep. 278). La solution graphique ainsi que les vérifications sont exécutées dans l'épure du problème précédent.

378. Problème VIII. *Construire l'angle de deux droites qui se coupent ainsi que la bissectrice de cet angle.*

Solution dans l'espace. Les deux droites déterminent un plan T que l'on rabat sur P_2 avec les deux droites y situées, en se servant de la trace T_c comme axe de rabattement.

L'angle des deux droites rabattues sera l'angle demandé.

On construira la bissectrice de l'angle ainsi obtenu et on relève cette droite.

Solution graphique (Ep. 279). Les deux traces T_c et T_{1c} du plan des deux droites passent par les traces polaires de même nom des deux droites données.

La trace T_{1c} sera redressée en T_1 et rabattue en T_1 sur P_2 (**365**).

Pour construire le rabattement des deux droites d et c, il suffit de construire le rabattement (a) du point de rencontre a (**365**).

Vérifications I. Les rabattements (d) et (e) des deux droites données rencontrent la trace rabattue (T_1) en deux points (t) et (w) qui sont les rabattements des points t'_c et w'_c, et qui se trouvent par conséquent unis à ces points par des droites qui passent par M.

II. La bissectrice rabattue rencontre (T_1) en (q), point situé également avec q'_c sur la droite (q)M.

III. La bissectrice est dans le plan T, ses traces sont sur les traces de même nom de ce plan.

379. Problème IX. *Un plan étant donné par ses deux traces* T_c *et* T_{1c}, *construire l'angle des deux traces* T_1 *et* T_2.

Solution (Ep. 279). On rabat la trace T_{1c} sur P_2 en se servant de la trace T_c comme axe de rabattement. L'angle de T_c avec (T_1) sera l'angle demandé.

380. Problème X. *Dans un plan donné, construire une droite qui soit à une distance donnée r d'une autre droite également située dans ce plan.*

Solution dans l'espace. On rabat le plan T avec la droite *d* qu'il contient sur P_2, en se servant de la trace T_c comme axe de rabattement. Dans P_2, on construira une droite parallèle à *d* rabattue et à la distance voulue de celle-ci. Cette droite ainsi construite est le rabattement de la droite demandée, que l'on n'a qu'à relever en projections.

Solution graphique (Ep. 280). On redresse la trace T_1 (**365**) que l'on rabat ensuite en (T_1) sur P_2. Le problème s'achève ensuite d'après les considérations du problème général (**365**).

Vérifications I. La droite *e* sera parallèle à *d*, donc les points de fuite F et F' de *d* appartiennent également à *e*.

II. Les trois points z', n'_c et F' sont en ligne droite.

III. Il en est de même des points (n), n'_c et M.

IV. Les deux projections e_c et e'_c se coupent en n'_c sur T_{1c}, la droite *e* devant se trouver dans le plan T.

381. Problème XI. *Etant donnés un point et une droite, déterminer, sur la droite, un point distant du point donné d'une longueur donnée v.*

Solution dans l'espace. Par le point et la droite, on fait passer un plan T. On rabat ce plan avec le point et la droite sur P_2, en se servant de la trace T_c comme axe de rabattement. Du rabattement du point, comme centre, avec un rayon égal à la distance donnée *v* on décrit un arc de cercle, qui peut couper le rabattement de la droite en deux points qui seront les rabattements des points demandés.

Remarque. Le problème admettra deux solutions, une solution, ou sera impossible, suivant que la distance *v* est plus grande que la distance du rabattement du point à celui de la droite, égale à cette distance ou plus petite que cette dernière.

Solution graphique (**Ep. 280**). Une partie de la solution est comprise dans l'épure du problème précédent. Le point (f) et la droite (d) sont les rabattements du point et de la droite. Le lecteur achèvera l'épure.

382. Problème XII. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre une autre droite d sous un angle donné* α.

Solution dans l'espace. Par le point et la droite, on fait passer un plan T que l'on rabat avec le point et la droite sur P_2, en se servant de la trace T_c comme axe de rotation.

Par le rabattement du point, on mène une droite (g) qui rencontre (d) sous l'angle donné α. (g) sera la droite demandée que l'on relèvera en projections.

Solution graphique (**Ep. 280**). Une partie de la solution est comprise dans l'épure **280**. Ce sont les rabattements des données.

383. Problème XIII. *Trois points étant donnés, construire la véritable forme du triangle dont ces trois points seraient les sommets.*

Solution dans l'espace. Par les trois points, on fait passer un plan. On rabat ce plan avec les trois points sur P_2 en se servant de la trace T_c comme axe de rabattement. Le triangle dont les sommets sont les trois points rabattus sera le véritable triangle de l'espace.

Solution graphique (**Ep. 281**). On détermine les traces du plan des trois points (**323**). On construira la trace T_1 de ce plan et son rabattement (T_1) sur P_2 (**365**).

Les rabattements (a), (b), (e) des sommets a, b et e du triangle donné se construisent à l'aide du problème général (**366**).

Vérifications. Les côtés correspondants $(a)(e)$ et $a_c e_c$, $(e)(b)$ et $e_c b_c$, $(a)(b)$ et $a_c b_c$ de $(a)(b)(e)$ et $a_c b_c e_c$ se coupent sur l'axe de collinéation T_c.

384. Problème XIV. *Trois points étant donnés, construire le triangle dont ces trois points seraient les sommets ainsi que le centre du cercle inscrit dans ce triangle.*

Solution. Après avoir construit, comme au problème précédent, le rabattement $(a)(b)(e)$ du triangle, on construira le centre (o) du cercle inscrit à ce triangle et l'on reconstruira les projections centrales o_c et o'_c de ce point (**366**).

385. Problème XV. *Construire une ligne de plus grande pente d'un plan sur le plan* P_1.

Solution dans l'espace. La ligne de plus grande pente d'un plan S sur P_1 est la droite d'intersection de S avec un plan normal à la trace S_1. Un tel plan T sera normal à P_1 ; sa trace T_c est normal à l'axe de projection et sa trace T_{1c} aura pour point de fuite le point F′, trace sur P_2 d'une parallèle à P_1 menée par p normalement à une parallèle à S_1 menée également par p.

Solution graphique (Ep. 282). On redresse S_1 (**365**).

Pour construire F′, rabattons le centre de projection sur P_2 autour de la ligne d'horizon prise pour axe de rotation. Le centre sera rabattu en (p) et (p)R sera le rabattement d'une parallèle à S_1. Une normale à (p)R menée par (p) coupera la ligne d'horizon au point F′.

La droite d'intersection d'un plan T normal à S_1 avec le plan proposé S sera une ligne de plus grande pente de S sur P_1.

386. Problème XVI. *Construire l'angle de pente d'un plan* T *sur* P_1.

Solution dans l'espace. On coupe le plan T par un plan S normal à la trace T_1. On obtiendra une ligne de plus grande pente de T sur P_1. L'angle que fait cette ligne avec la trace T_1 du plan T sera l'angle demandé.

Cet angle se construit en rabattant le plan S sur P_2 autour de S_c comme axe de rotation.

Solution graphique (Ep. 283). Après avoir construit le plan S et la ligne de plus grande pente r de T sur P_1 (**385**), on rabat cette ligne r avec le plan S sur P_2 autour de S_c.

Le rabattement $m(o)$ de la ligne de plus grande pente fait avec l'axe, rabattement de la trace S_1 du plan S un angle et qui est l'angle de pente du plan S.

387. Problème XVII. *Construire le plan bissecteur du dièdre formé par un plan donné* T *avec le plan* P_1.

Solution dans l'espace. On construit, par rabattement, comme au problème précédent, l'angle de pente de T sur P_1. Le plan bissecteur divisera cet angle en deux parties égales et contiendra la bissectrice de cet angle. La trace de cette bissectrice sur P_2 sera un point de la trace B_c du plan bissecteur. La trace B_{1c} se confondra évidemment avec la trace T_{1c} du plan donné.

Solution graphique (Ep. 283). Soit α l'angle de pente du plan T sur P_1. Le rabattement $(o)n$ de la bissectrice de cet angle rencontre S_c, l'axe de rotation, donc le plan P_2 au point n, trace de la bissectrice sur P_2. En unissant n à X, on aura la trace B_c du plan bissecteur dont T_{1c} est la trace B_{1c}.

388. Problème XVIII. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution dans l'espace. Par le point donné, on abaisse une perpendiculaire sur le plan. On construit le pied de cette perpendiculaire. La véritable longueur de la distance de ce pied au point donné sera la distance de ce point au plan.

Solution graphique (Ep. 284). Pour abaisser du point donné une normale sur le plan T, on coupe le plan T par un plan S qui passe par le point a et qui est normal à la trace T_1. Ce plan sera normal à T ; il contiendra donc la normale demandée et coupera T suivant une ligne de plus grande pente de ce plan sur P_1.

On construit le plan S, la ligne de plus grande pente r ainsi que son rabattement (r) (**386**).

On construit de même le rabattement (a) du point a situé également dans le plan S.

La distance $(a)(b)$ de (a) au rabattement (r) est la distance du point a au plan donné T; elle se relève en $a_c b_c$, $a'_c b'_c$, en relevant le point (b) en b_c et b'_c.

389. Problème XIX. *Construire la distance de deux plans parallèles.*

Solution dans l'espace. On détermine, comme au problème précédent, la distance du point de rencontre a du plan v avec l'axe de projection au second plan S. Cette distance est celle des plans v et S.

390. Problème XX. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

Solution dans l'espace. D'un point de la droite, on abaisse une perpendiculaire sur le plan (**388**). L'angle que fait la droite avec cette perpendiculaire sera le complément de l'angle de la droite et du plan. Cet angle se construit par rabattement.

391. Problème XXI. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. D'un point quelconque de l'espace, on abaisse une normale sur chacun des deux plans (**388**). L'angle de ces deux droites (**378**) sera le supplément de l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

392. Problème XXII. *Construire l'angle de deux plans parallèles à l'axe de projection.*

Solution dans l'espace. On coupe les deux plans par un plan normal à leur intersection commune, à l'axe de projection.

Ce plan coupe chacun des deux plans donnés suivant une droite. L'angle de ces deux droites sera l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

Solution graphique (**Ep. 285**). Le plan auxiliaire V normal à l'axe a sa trace V_c normale à l'axe et sa trace V_{1c} qui passe par p''. Ce plan coupe les deux plans proposés suivant les droites mn et qr.

L'angle de ces deux droites se construit par rabattement. C'est l'angle $(r)(s)(n)$.

Vérifications. Les côtés de l'angle rabattu passeront par (r) et (n), rabattements des points r et n. Les points (r) et r_c, (n) et n_c doivent donc se trouver sur des droites qui passent par le centre de collinéation M.

393. Problème XXIII. *Construire le plan bissecteur de l'angle formé par deux plans parallèles à l'axe de projection.*

Solution dans l'espace. Le plan bissecteur contiendra la bissectrice de l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans. Les traces du plan bissecteur sont parallèles à l'axe et passent respectivement par les traces de même nom de la bissectrice.

Solution graphique (**Ep. 285**). On construit, d'après le théorème précédent, l'angle plan correspondant des deux plans.

La bissectrice de cet angle rencontre V_c en y et l'axe ou (V_1) en (x), point qui se relève en x_c. Les traces B_c et B_{1c} du plan bissecteur passeront donc respectivement par y et x_c.

394. Problème XXIV. *Connaissant la projection centrale* T_{1c} *de* *la trace* T_1 *d'un plan, ainsi que son angle de pente sur* P_1, *construire la trace* T_c *de ce plan sur* P_2.

Solution dans l'espace. Ce problème est l'inverse de celui du § **386**. On coupe le plan, supposé connu, par un plan normal à la trace T_1, dont on connait la projection centrale T_{1c}.

Ce plan coupera le plan T suivant une ligne de plus grande pente, dont l'angle de pente α est donné.

La trace de cette ligne sur P_2 sera un point de la trace T_c du plan T.

Solution graphique (Ep. 286). Le plan auxiliaire S normal à T_1 a sa trace S_c normale à l'axe et sa trace S_{1c} qui passe par F', point de fuite des horizontales normales à T_1.

On opère le rabattement de ce plan S sur P_2 en se servant de S_c comme axe de rotation. Le point m'_c, trace de la ligne de plus grande pente p du plan T, se rabat sur l'axe de projection en (m). L'angle α étant connu, $(m)(n)$ sera le rabattement (p) de la ligne de plus grand pente p et (n) sa trace sur P_2. La trace T_c du plan passera donc par (n) et par v, point de concours sur l'axe des deux traces T_c et T_{1c} du plan T.

Vérifications. La trace T_c ainsi construite doit être parallèle à FR qui est la ligne limite L du plan T. Le point F est le point de fuite de la ligne de plus grande pente p du plan T.

395. Problème XXV. *Par un point donné, mener un plan parallèle à l'axe de projection, et qui soit distant de cette ligne d'une longueur donnée r.*

Solution dans l'espace. Par le point donné a, on mène un plan normal à l'axe de projection. Ce plan coupe l'axe en un point o et le plan demandé suivant une droite. Cette droite d passera par le point a et sera tangente à la circonférence de cercle décrite de o comme centre avec la longueur donnée v comme rayon.

Solution graphique (Ep. 287). Le plan auxiliaire S mené par a normalement à l'axe aura sa trace S_{1c} qui passe par p'' et a'_c, et sa trace S_c normale à l'axe.

Ce plan et le point a seront rabattus sur P_2 en se servant de de S_c comme axe de rotation. Du rabattement (a), on mène une tangente $(a)(m)n$ à la circonférence de cercle décrite de o comme centre avec r comme rayon.

Cette tangente rencontre l'axe en (m) et S_c en n. n sera la trace de la droite sur P_2 et (m) le rabattement sur P_2 de la trace de d sur P_1. Cette trace sera relevée en m_c.

La trace T_{1c} passera par m_c, la trace T_c par le point n, et les deux traces T_{1c} et T_c sont parallèles à l'axe de projection.

FIN.