Chapitre III.

—

Rabattements polaires.

363. Considérations générales. Le but des rabattements polaires est d'obtenir une figure égale ou semblable à celle de l'espace, reliée à la projection centrale de cette dernière par des opérations graphiques simples, qui permettent de passer facilement la figure projetée à son rabattement, et réciproquement.

Suivant que le rabattement se fait sur le plan de projection P_2 ou sur un plan de profil, la figure rabattue sera *égale* ou *semblable* à celle de l'espace.

Nous basons la théorie des rabattements polaires sur quelques principes relatifs aux *figures perspectives,* du domaine de la *géométrie moderne,* qui conduisent à des solutions graphiques élégantes et très-simples pouvant être d'une grande utilité dans les applications des projections centrales (Perspective linéaire).

Voici ces principes :

I. *Deux figures planes* non situées dans un même plan sont *perspectives*, si aux points A, B, C, etc. de l'une d'elles correspondent, suivant une même loi, des points A′, B′, C′, etc. de l'autre, et que les droites qui joignent les points correspondants AA′, BB′, CC′, etc. concourent en un point.

Ce point de concours est le *centre de collinéation*.

Ces figures perspectives jouissent des propriétés suivantes :

Propriété I. *Les côtés correspondants* AB *et* A′B′, BC *et* B′C′, AC *et* A′C′, *etc., de deux figures perspectives se coupent toujours sur la droite d'intersection des plans de ces figures* (*).

Cette droite est l'*axe de collinéation*.

(*) Corollaire du théorème de Désargues sur les triangles perspectifs.

Soient actuellement deux figures perspectives R et R' situées dans deux plans T et T' qui se coupent suivant l'axe de collinéation.

Propriété II. *Si l'on fait tourner la figure* R' *autour de l'axe de collinéation, et que* R *reste fixe, les deux figures restent toujours perspectives, elles ont toujours même axe de collinéation, et le centre de collinéation décrit un arc de cercle dont le plan est normal à l'axe de collinéation, et dont le centre se trouve sur la droite de la figure fixe qui correspond à la droite à l'infini de la figure mobile* (*).

L'arc décrit par le centre de collinéation à même mesure que le dièdre formé par les deux positions extrêmes de la figure R', et la rotation se fait dans le même sens.

Cette propriété est encore vraie lorsque les deux plans de figure viennent à se superposer.

Appliquons ces propriétés aux projections centrales.

On a une figure plane de P_1 et sa projection centrale sur P_2. Ces deux figures dépendent l'une de l'autre suivant une certaine loi (La loi des projections centrales) et sont perspectives. Par suite :

1° *Les côtés correspondants doivent se couper sur l'axe de projection, intersection de* P_2 *et de* P_1, *axe de collinéation des deux figures perspectives.*

2° *Si l'on rabat* P_1 *sur* P_2, *la propriété précédente reste vraie, et de plus le centre de projection, centre de collinéation décrit un arc de cercle dont le plan est normal à l'axe de projection, axe de collinéation, et dont le centre se trouve sur la ligne d'horizon en* p'', *le rayon de cet arc sera la distance de* p *à* P_2.

La ligne d'horizon est, en effet, la ligne qui, dans P_2, correspond à la ligne à l'infini dans P_1 (**290** et **291**).

Donc, après le rabattement de P_1 sur P_2, le nouveau centre de collinéation sera dans P_2, sur une normale élevée à la ligne d'horizon en p'', et distant de p'' d'une longueur égale à pp''.

Il faut donc aussi que ce nouveau point soit le point de concours de toutes les droites qui unissent les points correspondants des deux figures perspectives, c'est-à-dire, de la figure de P_1 *et de sa projection centrale sur* P_2

—

364. La théorie des rabattements polaires comporte quatre cas distincts, suivant la position des figures planes à rabattre par rapport aux deux plans P_2 et P_1.

(*) Möbius *(Calcul barycentrique)*.— Steiner. — Baltzer *(Stéréométrie*, § 5) — Chasles *(Aperçu hist.)*.

I. Cas général. La figure plane est dans un plan oblique à P_1 et à P_2.

II. Le plan de la figure à rabattre est normal à P_1 ;

III. Ce plan est normal à P_2 ;

IV. Ce plan est parallèle au plan P_1.

Notations. Un point a, b, c... de l'espace projeté centralement en a_c, b_c, c_c... aura son rabattement marqué par (a), (b), (c)...

365. Problème général. *Etant donnée la projection centrale d'une figure plane située dans un plan oblique à* P_1 *et à* P_2, *opérer son rabattement sur* P_2, *la trace de ce plan sur* P_2 *étant prise pour axe de rabattement.*

Solution (**Ep. 272**). Soit $a_c b_c$ la projection centrale d'une droite ab située dans le plan T. Dans le plan T et par les extrémités de ab, menons des droites parallèles à T_1, et prolongeons ab et ces parallèles jusqu'à la trace T_c, axe de rabattement. Ces parallèles se projettent centralement suivant des droites qui concourent en F.

Nommons S la figure formée par la droite ab et les parallèles à T_1 menées par a et b, et soit S_c la projection centrale de cette figure.

S et S_c sont deux figures perspectives ayant le pôle p pour centre de collinéation et la trace T_c pour axe de collinéation. Le rabattement opéré, S sera en (S) sur P_2. (S) et S_c sont encore deux figures perspectives dont les côtés correspondants se coupent sur l'axe de collinéation T_c. Les parallèles à T_1 menées par a et b passeront dans (S) par m et n et sont parallèles à (T_1), rabattement ordinaire de la trace T_1 sur P_2.

Le centre de collinéation p aura décrit un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à T_c et dont le centre se trouve en c sur L, droite de la figure fixe qui correspond à la droite à l'infini de la figure mobile. Le rayon de ce cercle est la distance $c(p)$, vraie distance du centre c au pôle p.

Unissons donc la nouvelle position cl du centre de collinéation aux points a_c, b_c de S_c par des droites qui coupent les parallèles à (T_1) menées par m et n aux points (a) et (b), rabattements des points a et b de la figure S.

$(a)(b)$ est donc le rabattement sur P_2 de la droite ab située dans le plan T et projetée centralement en $a_c b_c$.

Pour avoir le *rabattement ordinaire* (T_1), on reconstruit d'abord T_1. A cet effet, on considère T_{1c} comme projection centrale de T_1, figure dans P_1 qu'il s'agit de rabattre sur P_2.

Dans ce nouveau *rabattement polaire, p* est le centre de collinéation et l'axe de projection devient axe de collinéation.

Après le rabattement, le nouveau centre de collinéation sera en (p). Un point x de T_1 qui se projette en x_c aura donc son rabattement sur le prolongement de $(p)x_c$ ainsi que sur $x''(x)$, rabattement de la normale à l'axe menée par x et se projetant en $x''x_c p''$.

Ayant T_1, on en construit le rabattement ordinaire (T_1) (voir les projections diédriques).

Remarques I. Les côtés correspondants tels que $a_c b_c$... $(a)(b)$ de la figure projetée et de la figure rabattue se coupent sur l'axe de rabattement (**363**-II).

II. Le rabattement $(a)(b)$ est une *figure égale* à celle de l'espace.

366. Problème réciproque. *On donne le rabattement sur* P_2 *d'une figure plane située dans un plan* T *dont on a les deux traces* T_c *et* T_{1c}; *construire la projection centrale de la figure plane.*

Solution (Ep. 272). A déduire de la solution du problème général.

367. Cas particulier. *Etant donnée la projection centrale d'une figure plane située dans un plan oblique par rapport à* P_2 *et à* P_1, *opérer son rabattement sur un plan de front, une ligne de front du plan de la figure étant prise pour axe de rabattement.*

Solution (Ep. 273). Le rabattement se fait autour de la ligne de front M d'après les principes développées au problème général (**265**).

Remarque. Le rabattement obtenu $(a)(b)$ n'est pas une figure égale à celle de l'espace mais bien une *figure semblable* à celle-ci.

Si l'on rabattait $\alpha\beta$ autour de T_c, on obtiendrait $(\alpha)(\beta)$, vraie longueur de $\alpha\beta$. Comme $(\alpha)(\beta)$ est parallèle à $(a)(b)$, on prouvera que $\frac{(a)(b)}{(\alpha)(\beta)} = \frac{mn}{sv}$. C'est ce rapport qui sert à déduire, du rabattement $(a)(b)$ obtenu, la vraie longueur de la figure $\alpha\beta$ de l'espace.

Si la figure à rabattre a plus de deux sommets, ce rapport $\frac{mn}{sv}$ est celui des segments déterminés sur T_c et M_c par les fuyantes qui unissent F à deux sommets quelconques de la figure projetée.

368. *Réciproque du problème précédent.*

Solution. Les opérations sont l'inverse de celles du cas particulier du problème précédent.

369. Exercices et applications. Les cas n° II et n° III du problème des rabattements polaires peuvent être considérés comme des corollaires du problème général (**265**). Le raisonnement est le même et les constructions graphiques qui en découlent diffèrent peu.

II Cas. Problème I. *Etant donnée la projection centrale d'une figure plane située dans un plan* T *normal à* P_1, *en construire le rabattement sur* P_2, *la trace* T_c *étant prise pour axe de rabattement.*

Solution. La solution de ce problème est comprise dans l'épure **275**.

Cas particulier. Le rabattement devant se faire autour d'une ligne de ront du plan T.

Problèmes réciproques. A. Du problème I.

B. Du cas particulier précédent.

III Cas. Problème II. *Etant donnée la projection centrale d'une figure plane située dans un plan* T *normal à* P_2, *en construire son rabattement sur* P_2, *la trace* T_c *étant prise pour axe de rabattement.*

Solution. Elle est comprise dans l'épure **277**.

Cas particulier. Le rabattement devant se faire autour d'une ligne de front du plan T.

Problèmes réciproques. A. Du problème II.

B. Du cas particulier précédent.

370. IV Cas. *Etant donnée la projection centrale d'une figure plane située dans un plan parallèle à* P_1, *en construire le rabattement sur* P_2 ; *sa trace* T_c *étant prise pour axe de rotation.*

Solution. La solution de ce problème diffère peu de celle du problème général. Nous traiterons ce problème dans tous ses détails dans les applications (**371**).