Chapitre II.

Problèmes. — Applications.

314. Premier problème fondamental. *Etant données les projections centrales d'une droite, construire les projections centrales des traces de cette droite sur* P_1 *et* P_2.

Pour la solution, voir les §§ **273** et **274**.

Applications.

315. Problème I. *Par un point donné sur la trace* T_c *d'un plan, mener une droite parallèle à la trace* T_{1c} *de ce plan.*

Solution (**Ep. 234**). Le point donné a est situé dans P_2, donc a_c est sur T_c et a'_c sur l'axe de projection.

La droite d à mener par a parallèlement à T_{1c} aura ses deux projections qui concourent avec T_{1c} et L au point F′ de la ligne d'horizon.

316. Problème II. *Par une droite donnée, mener un plan normal à* P_1, *puis un plan normal à* P_2.

I. *Plan normal à* P_1 (**Ep. 235**). Tout plan normal à P_1 a sa trace T_c normale à l'axe. La trace T_c du plan demandé passera donc par la trace b_c de la droite et sera normale à l'axe. La trace T_{1c} coupe T_c sur l'axe et passe par la trace a'_c de la droite.

Les deux points F et F′ de la droite doivent se trouver sur la ligne limite L du plan, laquelle droite est normale à l'axe.

II. *Plan normal à* P_2 (**Ep. 236**). La trace T_{1c} du plan demandé doit passer par la trace de même nom a'_c de la droite et par p'', elle est donc déterminée. La trace T_c passe par la trace b_c de la droite et doit rencontrer T_{1c} sur l'axe de projection.

Vérifications. Le point limite F de la droite doit se trouver sur la droite limite L du plan.

317. Problème III. *Vérifier si une droite donnée est située dans un plan donné.*

Solution. Les projections centrales des traces de la droite sont sur les traces centrales de même nom du plan. Le point de fuite F de la droite sera sur la ligne de fuite L du plan et le point F' sur la ligne d'horizon.

318. Problème IV. *Vérifier si un point donné est situé dans un plan donné.*

Solution. I Cas (Ep. 237). Par le point donné *m,* on mène une droite parallèle à la trace T_c du plan. Si cette droite est dans le plan, le point *m* l'est également. La droite est dans le plan, si sa trace a'_c est sur la trace T_{1c} du plan.

2^{me} Cas (Ep. 238). Par le point *m,* on mène une droite parallèle à la trace T_{1c} du plan. Les deux projections de cette droite concourent avec T_{1c} en F' sur la ligne d'horizon. Si la seule trace b_c de cette droite est sur la trace de même nom T_c du plan, la droite et par suite le point donné, sont dans le plan.

319. Problème V. *Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.*

Solution (Ep. 239). Sur T_c du plan, on prend un point *b,* par lequel on mène une droite *e* parallèle à la droite donnée *d*. Les projections de même nom de ces droites passeront par les points F et F' de la droite donnée.

Si le point de concours a'_c des deux projections centrales de *e* se trouve sur la trace T_{1c} du plan, la droite *e* est dans le plan et la droite *d* lui est parallèle.

Remarque. Si *e* se trouve dans le plan donné, le point limite F sera sur la ligne limite L du plan. Comme le point F appartient également à la droite *d* nous voyons :

2^{me} Solution. *Qu'une droite quelconque est parallèle à un plan donné, si son point de fuite* F *est sur la ligne limite* L *de ce plan.*

320. Problème VI. *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

Solution (**Ep. 240**). On construit les projections centrales des traces des deux droites sur P_2 et P_1. Les traces centrales du plan passeront par les projections centrales des traces de même nom de la droite.

Vérifications. Les traces centrales du plan se couperont sur l'axe de projection. Le point limite F de chacune des deux droites se trouvera sur la ligne limite L du plan.

321. Problème VII. *Mener un plan par deux droites qui se coupent et dont l'une est parallèle à* P_1 *et l'autre au plan de figure* P_2.

Solution (**Ep. 241**). La droite e étant parallèle à P_1, la trace T_{1c} du plan passera par a'_c de d et par le point de fuite F' de e. La trace T_c coupe T_{1c} sur l'axe et sera parallèle à d_c, puisque d est parallèle à P_2.

322. Problème VIII. *Par deux droites parallèles, faire passer un plan.*

Solution (**Ep. 242**). On détermine les projections centrales des traces des deux droites sur P_2 et P_1. Les traces centrales du plan passeront par les traces de même nom des deux droites.

Vérifications. Les traces T_c et T_{1c} du plan se coupent sur l'axe de projection. La ligne limite L du plan passera par le point de fuite F de chacune des deux droites et sera parallèle à T_c.

323. Problème IX. *Par trois points non en ligne droite, faire passer un plan.*

Solution (**Ep. 243**). Par les points n et r, on fait passer une droite. Par le point m, on mène une droite parallèle à nr. Ces deux droites parallèles déterminent le plan.

2^me^ Solution. On unit n et r par une droite ; par m et r on fera passer une deuxième droite. Ces deux droites qui se coupent déterminent le plan.

324. Problème X. *Par un point et une droite, faire passer un plan.*

Solution. Par le point m on mène une droite parallèle à la droite donnée nr. Ces deux droites déterminent le plan.

325. Problème XI. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une autre droite donnée.*

Solution. Par un point de la première droite, on mène une droite parallèle à l'autre. Ces deux droites déterminent le plan demandé.

Vérification. La ligne limite du plan passera par le point de fuite F de la droite à laquelle le plan doit être parallèle.

326. Problème XII. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à l'axe de projection.*

Solution (Ep. 244). Les traces du plan sont parallèles à l'axe de projection et passeront par les projections centrales des traces de même nom de la droite donnée.

327. Problème XIII. *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données f et d.*

Solution. Par le point, on mène une droite parallèle à f et une autre droite parallèle à d. Ces deux droites déterminent le plan demandé.

328. Problème XIV. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Solution (Ep. 245). Par le point donné, on mène une droite parallèle à une droite du plan donné. Le plan demandé contiendra cette droite et ses traces centrales passeront par les traces de même nom de la droite. Comme les deux plans sont parallèles, les deux traces T_c et S_c sont parallèles et les traces T_{1c} et S_{1c} concourent sur la ligne d'horizon.

Nous avons pris pour ligne auxiliaire une droite parallèle à la trace T_c du plan donné.

329. Problème XV. *Etant donnés un plan et l'une des projections centrales d'une droite située dans ce plan, construire l'autre projection de cette droite.*

1° *On donne la projection d_c de la droite.*

Solntion (Ep. 246). La trace b_c de la droite se trouve au point de rencontre de d_c avec T_c. La trace a'_c au point de rencontre de d_c avec T_{1c}.

La projection d'_c de la droite passera par a'_c et par le pied de la normale abaissée de la trace b_c sur l'axe. Le point de rencontre de d_c avec L est le point de fuite F de la droite d.

2° *On donne la projection* d'_c *de la droite, construire la projection* d_c.

Solution (**Ep. 247**). Le point de rencontre de T_{1c} avec la projection d'_c de la droite est un premier point de la projection d_c. La normale à la ligne d'horizon menée par F′ rencontre la ligne limite L du plan en F qui est le point limite de la droite, donc un deuxième point de d_c. La droite d_c ainsi déterminée rencontre T_c en b_c, point qui sera sur une normale à l'axe élevée au point de rencontre de d'_c avec l'axe de projection.

330. Problème XVI. *Etant donnés un plan et la projection* m_c *d'un point* m *situé dans ce plan, construire la projection* m'_c *de ce point.*

Solution (**Ep. 248**). Par la projection m_c du point, on mène une parallèle à la trace T_c. Cette parallèle sera la projection centrale d_c d'une droite du plan. La projection d'_c de cette droite sera parallèle à l'axe et passera par le point de rencontre a'_c de d_c avec T_{1c}.

—

331. Deuxième problème fondamental. *Etant données les projections centrales des traces d'une droite sur* P_2 *et* P_1, *construire les projections centrales de cette droite.*

Solution (**Ep. 249**). La projection d'_c de la droite passe par la projection centrale a'_c de la trace de la droite sur P_1 et par la trace b_c de la droite sur P_2. La projection d_c est déterminée par a'_c et par b'_c.

—

332. Troisième problème fondamental. *Construire les projections centrales de la droite d'intersection de deux plans.*

Solution (**Ep. 250**). Le point de rencontre des traces S_c et T_c des deux plans est la projection centrale b_c de la trace de la droite d'intersection des deux plans sur P_2. Le point de rencontre des deux traces S_{1c} et T_{1c} est la projection centrale a'_c de la trace de la droite sur P_1.

Connaissant les projections centrales des traces de la droite sur P_2 et P_1, cette droite est déterminée.

Vérification. La droite étant dans le plan T, son point de fuite F sera sur la ligne limite L de ce plan. Ce même point sera sur la ligne limite L′ du plan S, puisque la droite est également dans ce dernier plan.

Donc : *Si deux plans se coupent, les lignes limites de ces plans concourent avec la droite d'intersection au point de fuite* F *de cette droite.*

Cas facile. Si l'un des plans passe par le pôle, il n'a qu'une *trace-double* qui sera en même temps la projection centrale d_c de la droite d'intersection des deux plans.

Cas embarrassants. La solution du problème devient embarrassante, si l'on ne possède pas les traces des deux plans ou de l'un d'eux, ou bien si, tout en les possédant, on ne peut s'en servir.

Dans un tel cas, on emploie la solution générale du § **204**.

—

Applications.

—

333. Problème XVII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan qui passe par le centre de projection.*

Solution (Ep. 251). Le plan T qui passe par le pôle n'a qu'une trace-double T_{1c} T_c. La projection d_c de la droite d'intersection des deux plans T et S coïncide avec cette trace-double. La projection d'_c passera par a'_c et par le pied de la normale abaissée de b_c sur l'axe.

Vérification. Le point de fuite F de la droite est situé sur la ligne limite L de S, sur d_c et sur la trace-double du plan T, laquelle est également sa limite.

334. Problème XVIII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un autre plan qui passe par le pôle et qui est normal à* P_1.

Solution (Ep. 252). Un plan qui passe par le pôle et qui est normal à P_1 a sa trace-double normale à l'axe de projection.

La droite d'intersection des deux plans aura ses deux projections qui se confondent sur la trace-double du plan T.

335. Problème XIX. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan qui passe par le pôle et qui est normal à* P_2.

Solution. La trace-double du plan normal à P_2 et passant par le pôle passe par p''.

336. Problème XX. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan* T *qui passe par le pôle et qui est normal à l'axe.*

Voir la solution du § (**334**). La trace-double du plan T passe par p'' et est normale à l'axe de projection.

337. Problème XXI. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan* T *qui passe par le pôle et qui est parallèle à* P_1.

Solution (Ep. 254). La trace-double du plan T sera la ligne d'horizon, sur laquelle se trouvera la projection centrale d_c de la droite d'intersection. La projection d'_c passe par b'_c et par le point de rencontre a'_c de S_{1c} avec la ligne d'horizon.

338. Problème XXII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan* T *qui passe par le pôle et qui est parallèle à l'axe de projection.*

Solution (Ep. 255). La trace-double T_c T_{1c} sera parallèle à l'axe de projection. Elle se confondra avec la projection d_c de la droite d'intersection. Le point de fuite F de cette droite sera sur T_c et sur la ligne L du plan S. La projection d'_c de la droite d'intersection se construit comme au § **332**.

339. Problème XXIII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan parallèle à* P_1.

Solution (Ep. 256). Le plan parallèle à P_1 coupera le plan S suivant une droite d parallèle à P_1 et à la trace S_1 de ce plan. Les deux projections centrales de d auront même point de fuite F' que S_{1c} et passent, l'une par b_c, l'autre par b'_c.

340. Problème XXIV. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan parallèle à* P_2.

Solution (Ep. 257). Le plan parallèle à P_2, un plan de front, n'a qu'une trace S_{1c}. Ce plan S coupera le plan T suivant une droite parallèle à P_2 et à la trace T_c. Les deux projections centrales de cette droite passent par a'_c et sont respectivement parallèles aux projections de même nom de la trace T_2. d_c sera donc parallèle à T_c et d'_c parallèle à l'axe.

341. Problème XXV. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan parallèle à l'axe de projection.*

Solution (**Ep. 258**). Les deux traces T_c et T_{1c} du plan T parallèle à l'axe sont parallèles à cette ligne.

Pour la construction de la droite d'intersection d, et les vérifications, voir le § **333**.

342. Problème XXVI. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan normal à* P_1.

Solution (**Ep. 259**). Voir la solution et les vérifications du problème fondamental.

343. Problème XXVII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan normal à* P_2.

Solution. Voir solution générale.

344. Problème XXVIII. *Construire la droite d'intersection d'un plan avec un plan normal à l'axe de projection.*

Solution (**Ep. 260**). Le plan T normal à l'axe a sa trace T_c normale à l'axe et sa trace T_{1c} qui passe par p''.

La projection centrale d'_c de la droite d'intersection des deux plans se trouve sur T_{1c}.

345. Problème XXIX. *Construire la droite d'intersection de deux plans dont les traces sur* P_2 *sont parallèles.*

Voir la solution générale.

346. Problème XXX. *Construire la droite d'intersection de deux plans dont les traces* T_{1c} *et* S_{1c} *concourent sur la ligne d'horizon.*

Solution. Voir la solution générale.

347. Problème XXXI. *Construire la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires à* P_1.

Solution. Cas particulier du problème XXIX.

348. Problème XXXII. *Construire la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires à* P_2.

Solution. Cas particulier du problème XXX.

349. Problème XXXIII. *Construire la droite d'intersection de deux plans sans faire usage des points de rencontre des traces.*

Solution (**Ep. 261**). On coupe les deux plans S et T par une série de plans parallèles à P_1. Chacun de ces plans coupera les deux plans l'un suivant une droite parallèle à S_1, l'autre suivant une parallèle à T_1. Les points de rencontre fournis par les droites obtenues par un seul et même plan auxiliaire appartiennent à la droite d'intersection des deux plans S et T.

Vérifications. 1) Chaque point obtenu par la solution précédente aura ses deux projections centrales unies par une normale à l'axe de projection.

2) Les projections de même nom de tous ces points sont en ligne droite.

3) La droite d'intersection, suffisamment prolongée, a ses deux projections centrales qui concourent au point de rencontre des traces S_{1c} et T_{1c} des deux plans.

4) Le point de fuite F de la droite se trouve avec F′ sur une normale à la ligne d'horizon, et coïncidera avec le point de rencontre des deux lignes de limites des deux plans.

Deuxième solution. On coupe les deux plans par une série de plans auxiliaires parallèles à P_2.

350. Problème XXXIV. *Construire la droite d'intersection de deux plans dont les traces se coupent tous en un même point de l'axe de projection.*

Solution dans l'espace. On coupe les deux plans par une série de plans de front. Chacun de ces plans auxiliaires coupera chacun des deux plans proposés suivant une droite parallèle à P_2, une ligne de front. Le point de rencontre de deux lignes de front données par le même plan sécant sera un point de la droite d'intersection des deux plans.

Solution graphique (Ep. 262). Un plan de front M coupera le plan T suivant une ligne de front parallèle à T_c; l'une des projections de cette ligne est parallèle à T_c, l'autre à l'axe et se confond avec M_{1c}.

Le même plan coupera le plan S également suivant une ligne de front parallèle à S_{1c}.

Les deux droites ainsi données par le plan M se coupent au point *a* qui appartient à la droite d'intersection des deux plans.

Le plan auxiliaire N donnera pareillement le point *b*.

Vérifications. Voir celles du problème XXXIII.

351. Problème XXXV. *Construire la droite d'intersection de deux plans parallèles à l'axe de projection.*

Solution (Ep. 262). Les deux plans ont leurs traces parallèles à l'axe de projection et se coupent suivant une droite parallèle à cet axe. On coupe les deux plans par un plan quelconque M, qui coupera chacun des deux plans proposés suivant une droite. Le point de rencontre x de ces deux droites appartient à la droite d'intersection d des deux plans.

352. Problème XXXVI. *Construire la droite d'intersection de deux plans qui passent par le pôle.*

Solution (Ep. 264). La droite d'intersection x passera par le pôle. Elle aura pour projection x_c le point de rencontre des deux traces-doubles des plans, et pour projection x'_c une normale à l'axe passant par x_c.

---

353. Quatrième problème fondamental. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.*

Solution dans l'espace. Par la droite donnée d, on fait passer un plan qui coupe le plan proposé suivant une droite. Le point de rencontre de cette droite avec d sera le point demandé.

Solution graphique (Ep. 265). Le plan auxiliaire T a ses traces qui passent par les projections centrales des traces de même nom de la droite, et la ligne-limite L de ce plan passe par le point de fuite F de la droite.

Vérifications. Les deux projections centrales i_c et i'_c du point de rencontre obtenu se trouvent sur une normale à l'axe de projection.

Remarque. Le problème se simplifie si le plan auxiliaire est normal à P_1 ou à P_2.

354. Premier cas. *Le plan auxiliaire mené par la droite est normal à* P_1 **(Ep. 266).**

Les traces T_c et T_{1c} du plan auxiliaire passeront par les traces de même nom de la droite. La trace T_c est normal à l'axe et la trace T_{1c} se confond avec la projection d'_c de la droite donnée. Une des projections centrales de la droite d'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan proposé se confond également avec d'_c.

355. 2^me^ cas. *Le plan auxiliaire est normal à* P_2 **(Ep. 267).**

La trace centrale T_{1c} du plan auxiliaire passera par p'' et par la trace a'_c de la droite donnée. La trace T_c du plan auxiliaire est par suite également déterminée. La droite d'intersection des deux plans S et T rencontre la droite proposée d au point i, point de rencontre de d et du plan S.

—

Applications.

—

356. Problème XXXVII. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan normal à* P_1.

Solution. Par la droite d, on mène un plan normal à P_1. On construit la droite d'intersection de ces deux plans; cette droite rencontre la droite donnée à son point de rencontre avec le plan proposé S.

Remarque. La solution graphique de ce problème nous montre qu'il suffit, pour obtenir le point de rencontre i de la droite et du plan, de prolonger la projection centrale d'_c de d jusqu'à la rencontre de la trace S_{1c} du plan, pour avoir en ce point la projection i'_c du point demandé.

357. Problème XXXVIII. *Construire l'intersection d'un plan perpendiculaire à* P_1 *avec un plan représenté par deux droites qui se coupent sans construire les traces de ce plan.*

Solution (Ep. 269). On construit le point de rencontre de chacune des deux droites avec le plan donné (**356**). Les deux points m et n ainsi obtenus déterminent la droite d'intersection des deux plans.

358. Problème XXXIX. *Construire le point de rencontre d'une droite d avec un plan représenté par deux droites qui se coupent sans chercher les traces de ce plan.*

Solution (Ep. 270). Par la droite d, on fait passer un plan auxiliaire normal à P_1. On construit, à l'aide du problème précédent, les points de rencontre m et n de ce plan avec les droites f et e. Ces deux points déterminent la droite suivant laquelle le plan auxiliaire coupe le plan des deux droites.

Le point de rencontre i de cette droite avec la droite d sera le point où cette dernière coupe le plan donné.

359. Problème XL. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan de front.*

Solution (Ep. 271). Un plan de front n'a qu'une trace centrale F_{1c} parallèle à l'axe. Le point de rencontre a'_c de F_{1c} avec la projection d'_c de la droite sera l'une des projections centrales du point de rencontre de a avec F.

Remarque. La solution graphique de ce problème est la même que celle du même problème résolu par les projections obliques. Le mode de représentation sur P_2 du point, de la droite et du plan de front étant le même pour ces deux projections.

360. Problème XLI. *Construire la droite d'intersection de deux plans représentés chacun par deux droites qui se coupent sans construire les traces de ces plans.*

Solution. On coupe les deux plans par une série de plans de front. Un tel plan coupe chacune des droites du premier plan en un point, donc le premier plan suivant une droite. Le même plan coupera le deuxième plan également suivant une droite. Le point de rencontre de ces deux droites sera un point de la droite d'intersection des deux plans.

Solution graphique. D'après le problème précédent, on voit que la solution graphique de ce problème est la même que celle du même problème traité par les projections obliques.

361. Problème XLII. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux autres droites non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Par le point et par l'une des droites, on mène un plan. Par le point et l'autre droite, on mène un plan.

Ces deux plans se coupent suivant une droite qui est la droite demandée.

Solution graphique. Après avoir déterminé les deux plans auxiliaires, on en construit la droite d'intersection à l'aide du problème précédent en coupant par une série de plans de front.

Pour l'épure et les vérifications, voir l'épure du même problème traité par les projections obliques.

362. Problème XLIII. *Parallèlement à une droite donnée, mener une droite qui rencontre deux droites quelconques non situées dans un même plan.*

Solution dans l'espace. Par la première droite, on mène un plan parallèle à la droite donnée *d*. Par la deuxième droite, on mène également un plan parallèle à *d*. Ces deux plans se coupent suivant la droite demandée.

Solution graphique. On détermine les deux plans sans en construire les traces ; on construit la droite d'intersection de ces deux plans en les coupant par une série de plans de front (**360**).