LIVRE III

PROJECTIONS CENTRALES

Chapitre premier.

Représentation et détermination du point, de la droite et du plan.

261. Considérations générales. Définitions. En unissant un point p de l'espace à un point quelconque a (**Fig. 180**) par une ligne droite ap, la trace a_c de cette droite sur un plan P_2 est la *projection centrale* de a sur P_2. Le point p est le *pôle* ou le *centre de projection.*

Les droites telles que pb, pa, pm, etc... sont des *projetantes* ou des *rayons projetants* des points b, a, p, etc...

Le plan sur lequel on projette les points b, a, m, etc. est le *plan de figure*, le *tableau.*

On peut prendre pour plan de figure le plan P_2 ou le plan P_1.

262. Lois des projections centrales. D'après ce qui précède nous voyons : I° *Qu'un point a, sa projection centrale a_c ainsi que le pôle p sont trois points en ligne droite.*

II° *Que tous les rayons projetants concourent au pôle et forment, par leur ensemble, une surface conique dont p est le sommet ou le centre.*

263. Remarques I. L'ensemble des rayons projetants qui relient les différents sommets et côtés d'une figure quelconque F de l'espace au centre de projection p constitue une *gerbe,* dont p est le *centre.*

La projection centrale de la figure F sur le plan de figure forme un *système plan,* résultat de l'intersection de la gerbe formée par l'ensemble des rayons projetants de la figure F de l'espace avec le plan de figure ou plan de projection (*).

II. Le problème fondamental des projections centrales revient à construire la projection centrale d'un point quelconque *donné* dans l'espace.

Il suffira évidemment d'unir ce point au pôle, également *donné,* et de déterminer le point de rencontre du rayon projetant avec le tableau.

(*) En *Géométrie supérieure synthétique,* (*Géométrie projective — Géométrie de position* (Géométrie der Lage), on nomme :

I. *Droite ponctuelle* ou *Ponctuelle* (Punktreihe), une figure formée de points allignés en une ligne droite ;

II. *Faisceau de plans* (Ebenenbüschel), une figure formée de plans passant par une droite, l'*axe du faisceau* (Axe, Träger, Scheitel des Büschels) ;

III. *Faisceau de rayons* (Strahlenbüschel), une figure formée de droites situées dans un même plan et qui passent par un point, le *centre du faisceau* (Mittelpunkt, Träger, Scheitel des Büschels) ;

IV. *Système plan*, *Plan ponctuel* ou *plan réglé* (Ebenes System), une figure formée de points et de droites, de points seuls ou de droites seules, situés dans un plan (Träger des Systems) ;

V. *Gerbe* (Strahlenbündel), une figure formée de plans et de droites passant par un point, le *centre de la gerbe* (Centrum, Träger, Scheitel des Bündels) ;

VI. L'*espace à trois dimensions* (das räumliche System) avec tous les points, droites et plans y situés est considéré également comme une *figure géométrique.*

La *ponctuelle,* le *faisceau de plans* et le *faisceau de rayons* forment la classe des *Figures géométriques fondamentales de première espèce.*

Les Figures géométriques fondamentales de deuxième espèce sont le *système plan* et la *gerbe.*

L'*espace à trois dimensions,* limité ou infini, constitue la *figure géométrique fondamentale de troisième espèce.*

Voir von Staudt, Steiner, Reye, Crémona, etc.

Cette solution, fort simple dans l'espace, exige une solution graphique plus ou moins compliquée suivant la méthode employée pour *donner* ou *représenter* les éléments desquels on part pour arriver au résultat.

Nous prendrons pour *plan de figure* le plan de projection P_2, pour *centre de projection* un point du dièdre $+P_2-P_1$, et nous fixons la position de ce centre ainsi que celle du point, de la droite ou du plan à représenter, à l'aide des projections orthogonales diédriques sur P_1 et P_2.

Cette méthode, que nous avons déjà suivie dans l'étude des projections obliques, facilite l'étude des projections centrales, en ce qu'elle nous permet, dans certains cas, de raisonner comme dans les projections obliques, lesquelles, en définitif, ne sont que des projections centrales dont *le pôle est à l'infini*. Elle convient très-bien pour la représentation des figures en projections centrales (perspective linéaire) ainsi que pour les questions relatives à la solution des problèmes de géométrie pure, et permet la reconstruction des figures de l'espace projetées centralement.

Toutefois, lorsqu'il s'agit uniquement de la représentation des contours des objets (perspective linéaire) le pôle (*point de vue*), au lieu d'être déterminé par ses projections orthogonales sur P_2 et P_1, sera représenté et déterminé d'une manière particulière par sa projection orthogonale sur P_2 (*point principal*) et par la longueur de sa distance à P_2 portée sur une horizontale, la *ligne d'horizon*, menée par le point principal et déterminant, sur cette ligne, deux points particuliers, les *points de distance*.

—

Représentation et détermination du point.

—

264. Problème. *Construire la projection centrale d'un point.*

Solution (Ep. 181). Par le point donné a et par le pôle p, on fait passer une projetante. La trace a_c de cette ligne sur P_2 sera la projection centrale de a sur P_2.

Le point a_c ainsi obtenu représente bien le point a de l'espace, mais il ne le détermine pas, vu que a_c est la projection centrale d'un point quelconque de la projetante ap.

Pour *représenter* et *déterminer* le point a de manière à ne pouvoir le confondre avec un point quelconque de ap, nous construirons la projection centrale a'_c de la première projection orthogonale de a.

Ces deux projections centrales représentent et déterminent le seul point a de l'espace.

265. Problème réciproque. En effet, pour retrouver les projections orthogonales a'' et a' et par suite a, étant données les projections centrales a_c et a'_c, il suffit d'unir p'' à a'_c, de prolonger cette droite jusqu'à l'axe de projection en n, et d'élever, en ce point, une normale à cet axe.

Les points a'' et a' où cette normale rencontre les lignes a_cp'' et mp' sont les deux projections orthogonales du point a.

Ce point est donc reconstruit, donc il a été bien représenté et défini par les projections centrales a_c et a'_c.

266. Définitions. Notations. Les traces a_c et a'_c sur P_2 sont *les deux projections centrales* du point a sur le plan P_2; a_c est la *projection centrale proprement dite* de a, a'_c la projection centrale sur P_2 du pied de la normale abaissée de a sur P_1.

La ligne $a_c\, a'_c$ est la *projection centrale de la première hauteur* du point a, hauteur dont a et a' sont les deux extrémités.

Nous marquerons la projection centrale d'un point quelconque a, b, c, etc. par la lettre qui caractérise ce point, accompagnée de la lettre c, initiale du mot central, placée comme indice.

Propriété. *Les deux projections centrales a_c et a'_c d'un point a sont toujours unies par une normale à l'axe.*

Cette normale $a_c\, a'_c$ est la projection centrale de la perpendiculaire aa' abaissée du point a de l'espace sur P_1.

—

Des différentes positions du point par rapport aux deux plans de projection P_2 et P_1.

---

267. Les neuf positions qu'un point peut occuper par rapport aux deux plans de projection P_1 et P_2 se trouvent représentées en projections centrales sur P_2 dans les épures **181** à **189**.

268. Propriétés. D'après ces épures :

I. *Suivant qu'un point a est situé au-dessus ou au-dessous de* P_1, *sa projection centrale a_c est au-dessus ou au-dessous de a'_c, et réciproquement.*

II. *Si le point a est situé dans* P_1, *les deux projections a_c et a'_c coïncident, et réciproquement.*

III. *Tout point a situé dans* P_2 *est lui-même sa projection centrale a_c, et sa projection a'_c se trouve sur l'axe, et réciproquement.*

269. Positions particulières du point. Le plan parallèle à P_1 mené par le pôle porte le nom de *plan d'horizon.*

La droite d'intersection de ce plan avec P_2 est une droite parallèle à l'axe et passe par p''. Cette droite est la *ligne d'horizon.*

I. *Tout point a situé dans le plan d'horizon a sa projection centrale a_c sur la ligne d'horizon, et réciproquement.*

II. *A mesure que le point a du plan d'horizon s'écarte de* P_2, *donc du pôle, sa projection a'_c se rapproche de la ligne d'horizon. Si le point a est à l'infini, a_c et a'_c coïncident sur la ligne d'horizon, et réciproquement.*

En effet, a', projection de a sur P_1, sera à une distance infinie de P_2 et du pôle, par suite le rayon projetant $a'p$ sera parallèle à P_1 et aura sa trace sur P_2, la projection centrale a'_c de a', sur la ligne d'horizon.

Réciproquement, si la projection double $a_c a'_c$ d'un point a est située sur la ligne d'horizon, ce point sera sur P_1 *à une distance infinie de l'axe.*

III. *Un point de* P_1 *situé sur l'axe ayant sa projection-double sur cet axe, et un point b de* P_1 *à une distance infinie de* P_2 *ayant sa projection $b_c b'_c$ sur la ligne d'horizon, nous voyons qu'un point quelconque x*

de P_1 *a une projection double* $x_c x'_c$ *située entre la ligne d'horizon et l'axe de projection, et réciproquement.*

IV. *La partie de* P_2 *comprise entre la ligne d'horizon et l'axe de projection est le lieu géométrique des projections centrales de tous les points des plans infinis* $+ P_1$ *et* $- P_1$.

Dans les applications des projections centrales (*Perspective linéaire*) on donne à cette partie de P_2 (*tableau*) le nom de *terrain perspectif*.

Représentation et détermination de la droite.

---

270. Projection centrale de la droite. Si, par le pôle et par la droite, on mène un plan, la trace de ce plan sur P_2 est la *projection centrale de la droite* sur ce plan.

Le plan mené par la droite et par le pôle est le *plan projetant* de la droite.

La projection centrale de la droite est une droite.

La droite est suffisamment représentée et déterminée en projections centrales, si deux de ses points sont représentés et déterminés.

271. Problème I. *Construire la projection centrale d'une droite sur* P_2, *étant données les projections orthogonales de cette droite et du pôle sur* P_2 *et* P_1.

Solution (Ep. 190). Par la droite et par le pôle, on fait passer un plan. La trace d_c de ce plan sur P_2 est la projection centrale de la droite d sur P_2.

Cette projection d_c passe par b'', trace de d sur P_2, et par suite projection centrale b_c d'un premier point b de d, et par a_c, projection centrale de la trace a de d sur P_1.

La projection centrale d_c représente bien la droite d de l'espace, mais elle ne la détermine pas. d_c est, en effet, la trace-projection du plan projetant sur P_2, donc la projection centrale d'une droite quelconque de ce plan.

Pour déterminer la droite d on devra, comme pour le point, joindre à d_c la projection centrale d'_c de la projection orthogonale d' de d sur P_1.

Ces deux droites d_c et d'_c sont *les projections centrales de la droite d;* celle-ci est suffisamment représentée et déterminée par les deux premières.

272. Problème réciproque. Il suffira, en effet, pour reconstruire la droite d de l'espace, de reproduire deux points de cette droite (**265**).

273. Traces de la droite. Nous voyons (**Ep. 190**) que la projection centrale a_c de la première trace a de la droite se trouve au point de rencontre des deux projections centrales d_c et d'_c.

La projection centrale b_c de la seconde trace se trouve au point de rencontre de d_c avec la perpendiculaire à l'axe de projection élevée au point de rencontre de cet axe avec d'_c.

Ces propriétés renferment la solution du problème suivant.

274. Problème II. *Etant données les projections centrales d_c et d'_c d'une droite, construire les projections centrales des traces de cette droite sur* P_1 *et* P_2.

Les projections obliques étant des projections centrales dont le pôle est à l'infini, la recherche des traces de la droite conduit à des constructions identiques dans les deux méthodes de projection.

275. Autre solution du problème I. (**Ep. 191**). Pour déterminer le plan projetant de la droite d, menons, par le pôle p, une droite parallèle à d. La trace F de cette droite auxiliaire sur P_2 et la trace b de la droite d sur P_2 déterminent la trace du plan projetant, la projection centrale d_c de cette droite. Cette projection d_c avec ses deux points b_c et F représentent et déterminent suffisamment la droite d de l'espace.

En effet, pour retrouver les deux projections d' et d'', il suffit de mener, par b_c, une droite parallèle à pF, donc par b'', une droite parallèle à p''F, et par b', une autre droite parallèle à $p'm$. Comme p''F et $p'm$ sont les projections orthogonales sur P_2 et P_1 de la droite pF, on aura, par la construction précédente, les deux projections d'' et d de la droite d.

Cette droite est donc suffisamment représentée et déterminée, mais, pour déterminer chacun de ses points en particulier, il faut joindre à d_c la projection centrale d'_c de d'.

A cet effet, on mène, par p, une parallèle à d', dont on détermine la trace F' sur P_2 ; la droite qui passera par F' et b' sera la projection centrale d'_c de d'. Si nous nommons *rayons de fuite* ou *lignes de fuite* des droites d et d' les droites menées par p parallèlement à d et d', et *points de fuite* de d et d' les traces F et F' sur P_2 de ces lignes de fuite, nous voyons que :

Pour avoir la projection centrale d_c d'une droite d, il suffit de construire le point de fuite F *de cette droite et d'unir ce point à la trace de d sur* P_2.

276. Remarques. I. *Les deux points de fuite* F *et* F' *sont situés sur une même normale à l'axe de projection, donc sur une normale à la ligne d'horizon.*

En effet, le plan déterminé par les deux lignes de fuite de d et d' est parallèle au plan déterminé par d et d', donc parallèle au premier plan projetant de d.

II. *Le point de fuite* F' *de d' est situé sur la ligne d'horizon.*

En effet, d' étant parallèle à P_1, sa ligne de fuite sera également parallèle à P_1 et ne peut rencontrer P_2 qu'en un point de la ligne d'horizon.

III. La figure **192** nous montre que le segment fini bF de la projection centrale d_c de la droite infinie MN, segment compris entre la trace b de MN sur P_2 et le point de fuite F, correspond à la droite infinie bM.

Réciproquement, la projection centrale de la partie infinie bM de la droite sera le segment fini bF.

Si, par le pôle p, nous menons une droite pe parallèle à d_c, le segment fini be aura pour projection centrale sur P_2 la ligne infinie bx.

Enfin le segment infini eN aura pour projection centrale le segment infini Fy.

De ce qui précède, nous voyons que le point F limite la projection centrale de bM et de Ne.

En ne considérant que la droite infinie bM, nous voyons que la projection centrale de cette droite est limitée aux points b et F. Ces deux points sont les *limites de la projection centrale de la droite.*

Ce nom de *limite* ou *point limite* s'applique principalement au point F.

IV. Le point F est la limite de la projection centrale bF de la droite MN et de même de la projection centrale d'une droite quelconque parallèle à MN.

F est donc le point où concourent les projections centrales de toutes les droites parallèles à MN, ou encore le point, à partir duquel les projections centrales de toutes les droites parallèles s'écartent, se fuient.

Ces considérations ont valu au point F le nom de *point de fuite* ou *point de concours*.

V. Dans la construction des projections centrales d_c et d'_c d'une droite d, il est bon de réunir les deux méthodes de construction. L'épure présente alors plusieurs vérifications :

1° La projection d_c passe par les points b_c, a_c et F (**Ep. 191**);

2° La projection d'_c passera par b', a_c et F';

3° Les points F, m et F' sont sur une normale à l'axe de projection.

VI. En donnant les deux limites b_c et F de la projection centrale d_c d'une droite d, on peut construire les projections d_c et d'_c de cette droite ainsi que ses projections orthogonales d' et d'' sur P_1 et P_2.

En effet, d'après ce qui précède, il suffira de procéder comme suit (**Epure 191**) :

Unir b_c et F pour avoir d_c. Abaisser de F une normale à l'axe et en marquer les pieds m sur cet axe et F sur la ligne d'horizon.

Projeter b_c sur l'axe en b' et unir b'F' pour avoir d'_c. Le point de rencontre a_c de d_c et d'_c sera reconstruit (**265**) et donnera a' et a'' qui déterminent $a''b_c = d''$ et $a'b' = d'$.

Vérifications. d' et d'' sont parallèles respectivement à $p'm$ et p''F.

—

Des différentes positions de la droite par rapport au plan de figure, au pôle, au plan d'horizon et à P_1.

Une droite d de l'espace peut	être	parallèle	au plan de figure P_2		I.
		normale			II
		parallèle	au plan de projection P_1		III.
		normale			IV.
		parallèle	à l'axe de projection		V.
		normale			VI.
		située dans	le plan de projection P_1		VII.
			le plan de figure P_2 .		VIII.
		située sur l'axe de projection. . .			IX.
		dans le plan d'horizon et être	normale à . . . P_2	I	X.
			parallèle à . . . P_2	II	
			inclinée de 45° sur P_2	III	
			quelconque . . .	IV	
	passer par le pôle et être	normale à P_2		I	XI.
		parallèle à P_2		II	
		normale à P_1		III	
		parallèle à P_1		IV	
		quelconque		V	

277. Droite parallèle au plan de figure P_2 (Ep. 197). *Une droite d parallèle à P_2, une* **droite de front**, *a sa projection centrale d_c parallèle à d'', et sa projection d'_c parallèle à l'axe. Les deux points de fuite* F *et* F' *sont situés à l'infini.*

En effet, les deux plans projetants de d et de d' coupent P_2 suivant d_c, parallèle à d et à d'', et d'_c, parallèle à d'. Les droites d et d étant parallèles à P_2, les rayons de fuite de ces droites rencontrent P_2 aux points F et F' situés à l'infini.

Réciproquement. *Si des deux projections centrales d'une droite d'_c est parallèle à l'axe de projection, la droite d est parallèle à* P_2.

En effet, le plan projetant mené par p et par d'_c coupe P_1 suivant d' parallèle à l'axe. La droite d est donc parallèle à P_2.

278. Droite normale au plan de figure (Ep. 198). *Une droite d normale à P_2 a ses deux projections centrales d_c et d'_c qui concourent en p''. Les points de fuite F et F' coïncident avec p''.*

En effet, les plans projetants de d et de d' contiennent la normale abaissée de p sur P_2. Le pied p'' de cette normale appartient donc à d'_c et à d_c.

Remarque. Ce point p'' est également le point de fuite F et F' de d_c et d'_c.

Réciproquement. *Si les deux projections centrales d_c et d'_c d'une droite concourent en p'', cette droite d est normale à P_2.*

Les deux points de fuite F et F' de la droite étant en p'', cela prouve que la droite menée par le pôle parallèlement à d passe par p'' et est normale à P_2. d est donc normale également à P_2.

279. Droite parallèle à P_1 (Ep. 193). *Une droite parallèle à P_1 a ses deux projections centrales d_c et d'_c qui concourent en un point de la ligne d'horizon.*

En effet, d et d' étant parallèles entre elles et à P_1 ces droites ne peuvent avoir qu'un seul et même point de fuite situé sur la ligne d'horizon. Ce point sera le point de concours de d_c et d'_c.

Réciproquement. *Si les deux projections centrales d_c et d'_c d'une droite concourent en un point de la ligne d'horizon, cette droite est parallèle à P_1.*

280. Droite normale à P_1 (Ep. 199). *Une droite normale à P_1 a sa projection centrale d_c parallèle à d'', donc normale à l'axe, et sa projection d'_c réduite à un point, et réciproquement.*

Une telle droite est, en effet, parallèle à P_2.

281. Droite parallèle à l'axe de projection (Ep. 200). *Une droite parallèle à l'axe de projection a ses deux projections centrales parallèles à cet axe, et réciproquement.*

Une telle droite est parallèle à P_2 ; d'_c sera parallèle à l'axe et d_c parallèle à d'', donc également à l'axe.

282. Droite normale à l'axe de projection (Ep. 194). *Une droite normale à l'axe de projection a ses deux projections centrales qui concourent en un point de cet axe, la projection d'_c passe par p'' et, si la droite est située dans le premier dièdre, la projection d_c est dans l'angle complémentaire de celui que fait d'_c avec l'axe.*

En effet, la droite d rencontre l'axe en un point m qui est la trace sur P_2 de d et de d'. Ce point appartient donc à d_c et à d'_c.

Comme d' est normale à P_2, d'_c passera par p''. La projection centrale a_c d'un point quelconque de d montre que d_c est dans l'angle $d''d'_c$, d'' et d'_c sont d'ailleurs les projections centrales des limites entre lesquelles la droite est comprise dans le premier dièdre.

Réciproquement. *Si les deux projections centrales d'une droite d se coupent sur l'axe, et si d'_c passe par p'', cette droite d sera normale à l'axe de projection.*

En effet, le point de rencontre des projections d_c et d'_c sur l'axe sera la projection-double de la trace de d sur P_1, donc d coupe l'axe.

Puisque d'_c passe par p'', d' est normale à l'axe. La droite d est donc dans un plan normal à l'axe et rencontre cette ligne, donc elle lui est perpendiculaire.

283. Droite située dans P_1 (Ep. 201). *Une droite située dans P_1 a ses deux projections centrales qui se confondent en une projection double. Le point de fuite F de cette droite est situé sur la ligne d'horizon, et réciproquement.*

Chaque point de la droite a une projection-double (**268**) donc la droite également. Les points de fuite F et F' coïncident sur la ligne d'horizon.

284. Droite située dans P_2 (Ep. 202). *Une droite située dans P_2 est elle-même sa projection centrale d_c; la projection d'_c est située sur l'axe de projection, et réciproquement.*

Cas particulier du § **277**.

285. Droite située sur l'axe de projection. *Les deux projections centrales se confondent en une seule qui est située sur l'axe de projection, et réciproquement.*

286. Droite située dans le plan d'horizon (Ep. 203). *Une droite d située dans le plan d'horizon a sa projection centrale d_c sur la ligne d'horizon; le point de concours de d_c et d'_c est sur la ligne d'horizon et coïncide avec les deux points de fuite F et F', et réciproquement.*

En effet, la droite d est parallèle P_1, donc d_c et d'_c concourent sur la ligne d'horizon en un point qui sera F et F' de la droite. Comme la droite d est située dans le plan d'horizon, ce dernier plan deviendra le plan projetant de la droite et la ligne d'horizon sera la projection centrale d_c de d.

Réciproquement. *Si les deux projections centrales d_c et d'_c d'une droite d concourent en un point de la ligne d'horizon, et si d_c se confond avec cette ligne, la droite d sera dans le plan d'horizon.*

287. Remarque I. Nommons *points de distance principaux* les points D et D′ obtenus en décrivant, de p'' comme centre, avec la distance de p à P_2 comme rayon, un axe de cercle qui coupe la ligne d'horizon en ces points.

Si P_1 est un plan horizontal, ces points D et D′ sont les traces de deux lignes horizontales menées par p et rencontrant P_2 sous un angle de 45°. D et D′ sont donc les points de concours ou les points de fuite des horizontales à 45° sur P_2; D pour les droites inclinées à gauche, D′ pour celles inclinées à droite de pp'' sur P_2.

II. Une droite du plan d'horizon peut avoir différentes positions relativement à P_2, lesquelles sont caractérisées par des positions particulières des points F et F′.

Nous résumons ces cas particuliers dans le tableau suivant :

Suivant qu'une droite du plan d'horizon est	normale à P_2,		sa projection centrale d_c est toujours sur la ligne d'horizon, mais les points de fuite F et F′ coïncident sur cette ligne avec	. . . p'';
	parallèle à P_2,			un point à l'infini;
	inclinée de 45 sur P_2,	à gauche		. . . D′;
		à droite		. . . D;
	quelconque,			un point quelconque;

et réciproquement.

288. Droite qui passe par le pôle. *Une droite d qui passe par le pôle a pour projection centrale d_c un point, et pour projection d'_c une normale à l'axe passant par le point d_c.*

En effet (**Ep. 195** et **196**) le plan projetant de d se réduit à la droite d, et la trace de d sur P_2 sera la projection centrale d_c de cette droite.

Le plan projetant de d' est normal à P_1 et coupera P_2 suivant d_c perpendiculaire à l'axe et passant par d_c.

Réciproquement. *Si la projection d_c d'une droite est un point, cette droite passe par le pôle.*

Le plan projetant de la droite est indéterminé mais la droite est déterminée ; elle passe, en effet, par le pôle $(p''p')$ et aura le point d_c pour trace sur P_2.

Une droite qui passe par le pôle peut avoir différentes positions par rapport à P_1 et à P_2.

La droite d qui passe par le pôle peut être :	parallèle normale	à P_2	La projection d'_c est toujours normale à l'axe, La projection d_c un point qui sera situé :	à l'infini, ainsi que d'_c ; sur p'', point de concours de d'_c ;
	parallèle normale	à P_1		sur la ligne d'horizon ; à l'infini, ainsi que d'_c qui est un point ;
	parallèle normale	à l'axe		à l'infini, ainsi que d'_c ; sur l'axe.

Dans le cas particulier où la droite d est parallèle à P_1, elle peut être inclinée de 45° sur P_2. Sa projection centrale sera dans ce cas D ou D'.

Remarque. Le lieu géométrique des projections centrales d_c de toutes les droites également inclinées sur P_2 et qui passent par le pôle est une circonférence de cercle dont p'' est le centre.

Cette circonférence aura DD' pour diamètre, si la droite d rencontre P_2 sous un angle de 45°.

Représentation et détermination du plan.

---

289. Problème. *Un plan représenté par ses deux traces* T_1 *et* T_2 *sur deux plans rectangulaires* P_2 *et* P_1, *trouver sa représentation sur le plan de figure* P_2 *à l'aide des projections centrales.*

Solution (Ep. 204). Le plan T sera suffisamment représenté et déterminé par les projections centrales de deux de ses droites.

Au lieu de représenter deux droites quelconques du plan T, construisons les projections centrales des deux traces T_2 et T_1.

T_2 est sa propre projection centrale ; celle de la trace T_1 passe par m et sera déterminée par la projection centrale a'_c d'un de ses points a'.

Nommons T_c et T_{1c} les *deux traces centrales* du plan T.

Tout plan T *est donc suffisamment représenté et déterminé par ses deux traces centrales* T_c *et* T_{1c}.

Ces deux traces concourent sur l'axe de projection au point où cet axe est coupé par le plan T.

290. Limite du plan. Un plan T peut être considéré comme engendré par une droite parallèle à T_2 qui se déplace sur T_1. La position limite de cette génératrice passe par le point de T_1 qui est situé à l'infini. Ce point a pour projection centrale le point limite F de T_1 et, comme la génératrice reste parallèle à T_2, donc à P_2, elle aura partout pour projection centrale d_c une droite T_2 parallèle à sa projection orthogonale d'', donc à T.

Cette droite L parallèle à T_c menée par F, la projection centrale sur P_2 de la position extrême de la génératrice du plan, sera *la limite* ou *la ligne limite* du plan T.

Si nous ne considérons du plan T que la partie comprise dans le dièdre $+P_1+P_2$ nous voyons que tout point, toute ligne, toute figure de ce plan doivent se projeter centralement dans l'espace de P_2 limité par les lignes T_c, T_{1c} et FL.

Ces lignes forment *les limites de la projection centrale du plan donné* T.

Des différentes positions du plan par rapport aux plans de projection P_1 et P_2 et au pôle.

Un plan peut
- être
  - parallèle à
    - P_1 . . . . I ;
    - P_2 . . . . II ;
    - l'axe . . . . III ;
  - normal à
    - P_1 . . . . IV ;
    - P_2 . . . . V ;
    - l'axe . . . . VI ;
- passer
  - par l'axe . . . . VII ;
  - par le pôle et être
    - parallèle à
      - P_1 . . VIII ;
      - P_2 . . IX ;
      - l'axe . . X ;
    - normal à
      - P_1 . . XI ;
      - P_2 . . XII ;
      - l'axe . . XIII ;
    - quelconque . . . . XIV.

291. Plan parallèle à P_1. *Un plan parallèle à* P_1 *n'a qu'une seule trace centrale* T_c *parallèle à l'axe. La trace* T_{1c} *et la limite* L *du plan se confondent avec la ligne d'horizon, et réciproquement.*

En effet, le plan n'a qu'une trace T_2 et sa trace T_1 sur P_1 est parallèle à T_2 et située à l'infini dans P_1. Les projections centrales de T_2 et T_1 sont donc T_c et T_{1c} parallèle à l'axe (**281**). T_{1c} sera sur la ligne d'horizon.

292. Plan parallèle à P_2 (**Ep. 206**). *Un plan parallèle à* P_2 *n'a qu'une trace centrale* T_{1c} *parallèle à l'axe de projection, et réciproquement.*

293. Plan parallèle à l'axe de projection (**Ep. 207**). *Un plan parallèle à l'axe de projection a ses deux traces centrales* T_c *et* T_{1c} *parallèles à l'axe.*

Ces deux traces forment également les limites de la projection centrale du plan.

294. Plan normal à P_1 (**Ep. 208**). *Un plan normal à* P_1 *a sa trace* T_c *normale à l'axe, et réciproquement.*

295. Plan normal à P_2 (**Ep. 209**). *Un plan normal à* P_2 *a sa trace* T_c *quelconque et sa trace* T_{1c} *qui passe par* p'', *et réciproquement.*

La trace T_1, en effet, est normale à P_2 et se projette par suite centralement suivant une ligne qui passe par p''.

Exception. Le plan normal à P_2 peut être parallèle à P_1 (**292**).

296. Plan normal à l'axe (**Ep. 210**). *Un plan normal à l'axe a sa trace* T_c *normale à l'axe et sa trace* T_{1c} *qui passe par* p'', *et réciproquement.*

Ces propriétés sont des corollaires des deux §§ précédents.

297. Plan passant par l'axe (**Ep. 211**). *Un plan qui passe par l'axe a ses deux traces centrales* T_c *et* T_{1c} *situées sur l'axe, et réciproquement.*

Un tel plan est suffisamment représenté si, à ses deux traces, on joint les projections centrales d'un quelconque de ses points non situé sur l'axe.

298. Plan quelconque passant par le pôle. *Un plan qui passe par le pôle a ses deux traces* T_c *et* T_{1c} *qui se confondent en une seule trace-double, et réciproquement.*

En effet, la trace T_1 aura sa projection centrale T_{1c} située sur T_c, trace de T sur le plan de figure. Un tel plan est déterminé par sa trace-double et par le pôle.

299. Plan passant par le pôle et parallèle à P_1 (Ep. 212). *Un tel plan devient plan d'horizon. Il a ses deux traces* T_c *et* T_{1c} *qui se confondent avec la ligne d'horizon, et réciproquement.*

Cas particulier d'un plan parallèle à P_1.

300. Plan passant par le pôle et parallèle à P_2 (Ep. 213). *Un tel plan n'a pas de trace* T_c *et sa trace* T_{1c} *est située à l'infini.*

Ce plan ne peut pas être représenté en projections centrales.

301. Plan passant par le pôle et parallèle à l'axe de projection (Ep. 214). *Les deux traces* T_c *et* T_{1c} *se confondent en une trace-double parallèle à l'axe de projection, et réciproquement.*

Cette trace-double est au-dessous ou au-dessus de la ligne d'horizon, suivant que le plan est considéré dans le premier ou dans le deuxième angle-dièdre.

La trace-double est éloignée de la ligne d'horizon d'une longueur égale à la distance de p à P_2, si le plan est incliné de 45° sur P_2 et P_1.

Elle est sur l'axe ou sur la ligne d'horizon, suivant que le plan passe par l'axe ou qu'il est parallèle à P_1.

302. Plan passant par le pôle et normal à P_1 (Ep. 215). *Tout plan normal à* P_1 *et qui passe par le pôle a sa trace-double normale à l'axe de projection, et réciproquement.*

En effet, tout rayon projetant d'un point quelconque de T_1 doit rencontrer P_2 en un point de T_c, laquelle se confond avec T_2 normale à l'axe.

Suivant qu'un plan normal à P_1 et qui passe par le pôle est	normal à P_2		La trace-double normale à l'axe de projection passe par	. . . p''
	incliné sur P_2 d'un angle de	45° à droite		D de gauche ;
		45° à gauche		D′ de droite.

et réciproquement.

303. Plan passant par le pôle et normal à P_2. *La trace-double d'un tel plan se confond avec* T_{1c} *qui passe par* p'', *et réciproquement.*

—

Des différentes positions que deux droites peuvent avoir entre elles.

—

Deux droites peuvent	être parallèles		. . . .	I.
	se couper	à angle droit	. . . .	II.
		sous un angle quelconque	. .	III.
	se croiser		. . . .	IV.

—

304. Droites parallèles (**Ep. 216**). *Si des droites a, b, d, etc... sont parallèles, les projections centrales* a_c, b_c, d_c... *ainsi que les projections centrales* a'_c, b'_c, d'_c... *de ces droites forment deux faisceaux de rayons qui ont pour centres respectivement les points* F *et* F′, *points de fuite d'une quelconque des droites données. Ces centres sont sur une normale à la ligne d'horizon, et* F′ *est sur cette ligne.*

En effet (**275** et **276**), si l'on mène, par le pôle, une droite parallèle aux droites proposées, les points de fuite F et F′ de cette droite et de sa projection orthogonale sur P_1 sont les points de fuite respectivement de toutes les droites du système et de leurs projections orthogonales sur P_1.

Les projections a_c, b_c, d_c... concourent donc au point F et forment un faisceau de rayons dont F est le centre.

Les projections a'_c, b'_c, d'_c, etc. formeront un autre faisceau de rayons dont F′ est le centre.

Comme F et F′ sont les deux points de fuite d'une seule droite et de sa projection orthogonale sur P_1, ces points sont sur une normale à la ligne d'horizon et F′ est sur cette ligne.

Réciproquement. *Si les projections centrales* a_c, b_c, d_c... *ainsi que les projections* a'_c, b'_c d'_c... *de plusieurs droites a, b, d... et de leurs projections normales sur* P_1 *forment deux faisceaux de rayons, ayant respectivemeut pour centres les points* F *et* F′, *si la droite* FF′ *est normale à la ligne d'horizon et le point* F′ *sur cette ligne, les droites a, b, d... sont parallèles.*

On encore.

Deux faisceaux de rayons a_c, b_c, d_c... a'_c, b'_c, d'_c... *qui ont leurs* *centres* F *et* F′ *sur une normale à la ligne d'horizon et le centre* F′ *sur cette ligne, peuvent être considérés comme les projections centrales d'une série de droites parallèles a, b, d... et des projections orthogonales de ces droites sur* P_1.

En effet, les centres F et F′ étant sur une normale à la ligne d'horizon et F′ sur cette ligne, ces points sont les points de fuite d'une certaine droite menée par le pôle. Comme toutes les droites données *a, b, d...* ont les points F et F′ pour points de fuite, il faut qu'elles soient parallèles à la droite menée par le pôle qui a donné ces points.

305. Remarque I. Les projections centrales m_c, n_c et m'_c, n'_c de deux droites parallèles *m* et *n* se coupent aux quatre points A,B,C,D (**Ep. 217**).

Si, sur ces quatre points, on construit un *quadrangle complet* (*), la ligne FF′ sera coupée par les côtés AC et BD aux points H et G qui, avec F et F′, forment la *figure harmonique* FF′GH (*). Les deux points F et F′ de cette figure sont séparés harmoniquement par les points G et H, et le rapport *anharmonique* de ces éléments est constant et égal à—1.

(*) Quatre points A,B,C,D, dont trois ne sont pas en ligne droite, constituent un *quadrangle complet*. Les points A,B,C et D sont les sommets, et les côtés du quadrangle sont les six droites qui joignent les sommets deux à deux.

(*) D'après le *Théorème de Staudt* (*Géométrie der Lage*), si l'on unit les points de concours F et F′ des côtés opposés du quadrangle par une droite, cette droite sera coupée par les côtés AC et DC en des points G et H tels, que trois de ces points déterminent toujours le quatrième. De quelque manière que l'on fasse varier le quadrangle ABCD, pourvu que AD et BC concourent en F, AB et DC en F′, et que AC passe par G, le quatrième côté DB passera toujours par H.

Ces quatre points F,F′,G et H sont nommés *harmoniques* et constituent une *forme harmonique*.

La droite qui passe par ces points est *divisé harmoniquement en ces points*.

On appelle *rapport anharmonique* de quatre points en ligne droite A,B,C,D le double rapport $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$.

D'après un corollaire du *Théorème de Pappus*, on établit que *le rapport anharmonique de quatre éléments harmoniques est égal à l'unité négative*. Ce rapport est désigné par le symbole (ABCD).

On aura : $\frac{FG}{F'G} : \frac{FH}{F'H} = -1 = (FF'GH)$.

Remarques II. Un système de droites parallèles peut occuper différentes positions par rapport à P_1 et P_2. Pour chacune d'elles les positions des points F et F' varient.

Un système de droites parallèles peut être :

I. *Parallèle à* P_1 (**Ep. 218**). Les points de fuite F et F' coïncident sur la ligne d'horizon.

II. *Parallèle à* P_1 *et incliné de* 45° *sur* P_2 (**Ep. 219**). Les points F et F' coïncident sur la ligne d'horizon avec D ou avec D', suivant que les droites sont inclinées de gauche et de droite sur P_2.

III. *Parallèle à* P_2. Les projections centrales a_c, b_c, d_c... sont parallèles entre elles et les projections a'_c, b'_c, d'_c parallèles à l'axe de projection (**277**).

IV. *Parallèle à l'axe* (**Ep. 220**). Les projections centrales a_c, b_c... et a'_c, b'_c... sont parallèles à l'axe.

V. *Normal à* P_1 (**Ep. 221**). Les projections centrales a_c, b_c... sont normales à l'axe, et les projections a'_c, b'_c sont des points situés sur les prolongements des projections a_c, b_c...

VI. *Normal à* P_2 (**Ep. 222**). Les points de fuite F et F' coïncident avec p''.

VII. *Normal à l'axe* (**Ep. 223**). Le point de concours F' des projections a'_c, b'_c... sera le point p'', et le point de concours des projections a_c, b_c... un point F de la normale abaissée de p'' sur l'axe.

Remarque. Si les droites *a, b, d,* etc... normales à l'axe sont prolongées jusqu'à cet axe, les projections centrales a_c, b_c, d_c... et a'_c, b'_c, d'_c... forment deux *faisceaux de rayons perspectifs* (*).

La ligne F'F sera un *rayon uni* de ces faisceaux.

En effet, ces deux faisceaux projettent la même ponctuelle *m, n, r, z* de deux centres différents, et les rayons correspondants F'_s et F_s coïncident.

(*) En *géométrie de position*, deux faisceaux de rayons sont *perspectifs* lorsqu'ils projettent une même ponctuelle de deux centres différents.

Les *rayons correspondants* de ces faisceaux sont les droites qui partent des mêmes points de la ponctuelle et aboutissent aux deux centres.

Les rayons correspondants en ligne droite sont les rayons *unis du système*.

306. Droites qui se coupent (Ep. 224). *Si deux droites se coupent, leurs projections centrales de même nom se coupent en des points qui se trouvent unis par une normale à l'axe de projection, et réciproquement.*

En effet, le point de rencontre i des deux droites a et b de l'espace doit avoir sa projection centrale i_c sur a_c et b_c, et sa projection centrale i'_c sur a'_c et b'_c.

i_c et i'_c, projections centrales d'un seul et même point de l'espace, doivent se trouver sur une normale à l'axe de projection.

307. Droites perpendiculaires entre elles. La simple inspection de l'épure ne suffit pas pour juger de la valeur de l'angle sous lequel deux droites se coupent.

Si les deux droites d et f sont situées dans un plan parallèle à P_2, dans un plan de front, les projections d'_c et f'_c se confondent en une parallèle à l'axe et les projections d_c et f'_c se coupent sous un angle droit.

308. Droites qui se croisent (Ep. 225). Si deux droites se croisent, les projections centrales de ces droites ne jouissent pas des propriétés qui caractérisent des droites parallèles ou des droites qui se coupent.

Les projections centrales de même nom de ces droites se coupent donc en des points qui ne sont pas situés sur une même normale à l'axe de projection.

—

Des différentes positions d'une droite à l'égard d'un plan.

—

Une droite peut être	située dans		I.
	parallèle à	un plan	II.
	normale à		III.

—

309. Droite située dans un plan (Ep. 226). *Une droite située dans un plan a les projections centrales de ses traces sur les traces de même nom du plan, et son point limite* F *sur la droite limite* L *du plan.*

Il est évident que les projections centrales des traces de la droite *d* ne peuvent être situées que sur les traces de même nom du plan.

Si l'on prolonge la droite d'indéfiniment, on peut considérer le plan T comme engendré par une droite parallèle à T_c se mouvant sur *d*. La position limite de la génératrice T_c passera par le point à l'infini sur *d*, et par suite, la projection centrale de cette génératrice limite, la droite limite L du plan, passera par la projection centrale du point limite de *d*, le point de fuite F de la droite *d*.

Cas particuliers. I. *La droite d du plan* T *est parallèle à* P_2 (**Ep. 227**).

La projection centrale d_c sera parallèle à T_c et la projection d'_c parallèle à l'axe de projection. La seule trace a_c de la droite est sur T_{1c} et sera le point de rencontre de d_c et d'_c.

II. *La droite d du plan* T *est parallèle à* P_1 (**Ep. 228**).

Une droite *d* du plan T et parallèle à P_1 sera parallèle à T_1; elle aura ses deux projections centrales d_c et d'_c qui concourent avec T_{1c} sur la ligne d'horizon. La trace b_c de la droite sera située sur la trace T_c du plan.

310. Droite parallèle à un plan. La simple inspection de l'épure ne suffit pas pour reconnaître si une droite est parallèle à un plan. Il faut vérifier si la droite donnée est parallèle à une droite du plan. Nous prouverons (**319**) que si une droite est parallèle à un plan son point de fuite F sera sur la ligne limite du plan.

311. Droite normale à un plan. L'épure ne fournit aucun indice pour reconnaître, à la simple inspection, si une droite donnée est normale à un plan donné.

—

Des différentes positions que deux plans peuvent avoir entre eux.

—

Deux plans	sont parallèles		I.
	ou se coupent sous un angle	quelconque	II.
		droit	III

—

312. Plans parallèles (**Ep. 229**). *Deux plans parallèles* T *et* S *ont même ligne limite, leurs traces* T_c *et* S_c *parallèles, et leurs traces* T_{1c} *et* S_{1c} *qui concourent avec la ligne limite en un point de la ligne d'horizon, et réciproquement.*

En effet, les deux plans parallèles T et S coupent P_2 suivant T_c et S_c parallèles. Les traces T_1 et S_1 sur P_1 étant parallèles, les projections centrales T_{1c} et S_{1c} concourent en un point F′ de la ligne d'horizon, point par lequel passe la ligne L de T et L′ de S. Or les lignes L et L′ se confondent comme étant parallèles à T_c et S_c qui le sont également.

313. Plans non parallèles. *Si deux plans se coupent, les traces centrales de même nom, en général, se coupent.*

Cas particuliers. I. *Si les traces sur* P_2 *sont parallèles et si les traces centrales* T_{1c} *et* S_{1c} *se coupent en un point non situé sur la ligne d'horizon, les deux plans se coupent suivant une droite parallèle à* P_2 (**Ep. 230**).

La projection i_c de cette droite est parallèle aux traces T_c et S_c, la projection i'_c est parallèle à l'axe, et les deux projections i_c et i'_c se coupent en un point a'_c, projection centrale de la trace i sur P_1 et point de rencontre des deux traces T_{1c} et S_{1c} des deux plans S et T.

II. *Si les traces* T_{1c} *et* S_{1c} *concourent sur la ligne d'horizon et que les traces* T_c *et* S_c *se coupent, les deux plans se coupent suivant une droite parallèle à* P_1 (**Ep. 231**).

Les deux projections i_c et i'_c de la droite d'intersection concourent au point de concours F′ des traces T_{1c} et S_{1c} des deux plans. i_c passe par b_c et i'_c par b'_c, projections centrales de la trace de i sur P_2.

314. Plans perpendiculaires. On ne peut reconnaître, à la simple inspection des traces de deux plans, la valeur de l'angle sous lequel deux plans se coupent.

Nous distinguons toutefois les deux cas particuliers suivants :

I Cas. *Les deux plans sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au plan de figure* P_2 (**Ep. 232**).

Les traces T_{1c} et S_{1c} concourent au point p'' et les traces T_c et S_c se coupent à angle droit.

L'angle des traces T_c et S_c est, en effet, l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans donnés.

II Cas. *Les deux plans sont perpendiculaires entre eux et l'un des deux est normal à* P_2 (**Ep. 233**).

Si des deux plans T et S perpendiculaires entre eux, le plan T est normal à P_2, les traces T_c et S_c se couperont à angle droit, la trace T_{1c} passe par p'' et la trace S_{1c} a une direction quelconque.