Chapitre IV.

Applications. — Problèmes.

239. Problème I. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite.*— ($\gamma = 35$; $\beta = 45^\circ$).

Solution dans l'espace. La droite donnée, terminée aux points a et c, se trouve dans un plan T normal à P_1, le plan projetant de cette droite sur P_1. On déterminera les deux traces obliques de T et l'on rabat ce plan avec la droite sur P_2, en prenant la trace T_0 pour axe de rotation.

Le rabattement de la droite représentera sa véritable longueur.

Solution graphique (Ep. 168). La trace T_{10} du plan T passe par a'_0 et c'_0.

Le rabattement $(a)(c)$, véritable longueur de la droite, s'obtient comme au § **232**.

La troisième série de droites parallèles s'obtient en construisant la trace T_1 du plan T, et en la rabattant ensuite sur P_2 ; $b'_0(b)$ sera la direction de ces parallèles.

Vérification. Le rabattement $(a)(c)$ et la projection oblique a_0c_0 suffisamment prolongés, se rencontrent en x sur l'axe de rotation T_0.

240. Problème II. *Construire les angles qu'une droite fait avec les deux plans de projection* P_1 *et* P_2.

I. *Angle de la droite avec* P_1.

Le problème précédent a fourni la véritable longueur $(a)(c)$ de la droite donnée. L'angle que $(a)(c)$ fait avec l'axe de projection, ou avec une parallèle quelconque à cet axe, sera l'angle de la droite avec P_1. L'axe de projection est, en effet, le rabattement sur P_2 de la projection orthogonale prolongée de la droite sur P_1.

II. *Angle de la droite avec le plan de figure* P_2.

Solution dans l'espace. Par la droite donnée, on fait passer un plan T perpendiculaire à P_2. L'angle que la droite fait avec la trace T_0 sera l'angle que fait, dans l'espace, la droite avec P_2.

Solution graphique (Ep. 169). — ($\gamma = 35^\circ$; $\beta = 45^\circ$).

Pour déterminer la trace T_0 du plan T, il suffit de construire la projection orthogonale $a''b''$ de la droite sur P_2; $a''b''$ prolongée sera la trace T_0. On construira également la trace T_{10}, parallèle à la fuyante, ainsi que le rabattement (m') d'un point m' de T_1. Les opérations à exécuter ensuite pour avoir $(a)(b)$ se déduisent du § **233**.

L'angle que fait la droite $(a)(b)$ prolongée avec T_0 sera l'angle demandé.

241. Problème III. *Construire la distance d'un point à une droite.* — ($\gamma = 45^\circ$; $\beta = 45^\circ$).

Solution dans l'espace. Par le point et la droite, on fait passer un plan T. On rabat ce plan avec la droite et le point sur P_2, en prenant la trace oblique T_0 pour axe de rotation.

Sur le rabattement, on construit la véritable distance du point à la droite, distance que l'on relève.

Solution graphique. (Ep. 170). Par le point $e_0e'_0$ et la droite, on fait passer un plan (**196**). Le rabattement du plan T_0T_{10} ainsi construit s'opère autour de T_0.

Dans ce rabattement, on se servira de trois séries de droites parallèles.

La première série est parallèle à T_{10}; la deuxième est parallèle à (T_1), rabattement de la trace T_1 sur P_2, et la troisième série est parallèle à la droite $m'_0(m')$, ligne qui joint la projection oblique m'_0 d'un point de T_{10} à son rabattement (m') sur P_2.

(e) (f) sera le rabattement de la distance du point à la droite donnée.

Cette distance se relève et a pour projections obliques e_0f_0 et $e'_0f'_0$.

Vérification. Le rabattement $(f)(e)$ et la projection oblique f_0e_0 concourent au point x sur T_0.

242. Problème IV. *Construire la distance de deux droites parallèles.*

Solution dans l'espace. Les deux droites parallèles déterminent un plan. On rabat ce plan avec les deux droites sur P_2, en se servant de la trace T_0 de ce plan comme axe de rotation. La distance entre les deux droites rabattues est la distance des deux droites données. Cette distance est ensuite relevée.

Solution graphique. Voir l'épure **170**.

243. Problème V. *Construire l'angle de deux droites qui se coupent ainsi que la bissectrice de cet angle.* — (γ=45°; β=45°).

Solution dans l'espace. Les deux droites déterminent un plan. On rabat ce plan avec les deux droites sur P_2 en prenant sa trace T_0 pour axe de rotation. L'angle des deux droites rabattues est l'angle des deux droites de l'espace.

On construit la bissectrice de l'angle rabattu; cette bissectrice est ensuite relevée.

Solution graphique (Ep. 171). On construit les traces T_0 et T_{10} du plan des deux droites (**192**).

Le rabattement des deux droites sur P_2 autour de T_0 s'opère comme au § **227**. L'angle $(d)(g)(f)$ est l'angle des deux droites de l'espace.

La bissectrice rabattue en $h_0(g)(f)$ se relève en $h_0 g_0 f'_0$ et $f'_0 g'_0 h'_0$.

Vérification. Les points *f, g et h* sont en ligne droite dans les deux projections obliques.

244. Problème VI. *Construire l'angle des deux traces d'un plan.*

Solution dans l'espace. On rabat la trace T_{10} du plan donné sur P_2, en se servant de la trace T_0 comme axe de rotation. L'angle formé par T_0 et (T_1) sera l'angle des deux traces du plan.

Solution graphique. La solution graphique est comprise dans l'épure **171**; α est l'angle des deux traces T_0 et T_{10}.

245. Problème VII. *Dans un plan donné, construire une droite qui soit à une distance donnée d'une autre droite également située dans ce plan.* — (γ = 45°; β = 45°).

Solution dans l'espace. On rabat le plan avec la droite sur P_2, en se servant de sa trace T_0 comme axe de rotation.

Dans le rabattement, on construit une droite parallèle à la droite rabattue, à la distance donnée de cette dernière. La droite ainsi construite est le rabattement de la droite demandée. Du rabattement on passe ensuite aux projections.

Solution graphique (**Ep. 172**). Le rabattement du plan T et de la droite donnée *ab* autour de T_0 se fait comme au § **241**.

En un point quelconque (*c*) de la droite rabattue, on élève une perpendiculaire égale à la distance donnée *r*; par l'extrémité (*d*) de *r*, on mène une parallèle f_0 (*e*) à la droite rabattue.

La droite f_0 (*e*) sera relevée en $f_0\,e_0$ et $f'_0\,e'_0$.

246. Problème VIII. *Etant donnés un point et une droite, déterminer, sur la droite, un point distant du point donné d'une longueur donnée.*

Solution dans l'espace. Par le point et la droite, on fait passer un plan. On rabat ce plan avec le point et la droite sur P_2, en se servant de la trace T_0 de ce plan comme axe de rotation. Du rabattement du point, avec la distance donnée comme rayon, on décrit un arc de cercle, qui coupe le rabattement de la droite en deux points, rabattements des points qui répondent aux conditions du problème.

Remarque. Le problème admettra deux solutions, une solution ou sera impossible, suivant que la distance donnée est plus grande que la distance du rabattement du point au rabattement de la droite, égale à cette distance ou plus petite que cette dernière.

Solution graphique. Voir l'épure **172**.

247. Problème IX. *Trois points étant donnés, construire la véritable grandeur du triangle dont ces trois points seraient les sommets.* ($\gamma=50^\circ$; $\beta=35^\circ$).

Solution dans l'espace. Par les trois points donnés, on fait passer un plan. On rabat ce plan avec les trois points sur P_2, en se servant de la trace T_0 de ce plan comme axe de rotation. Les trois points ainsi rabattus sont les sommets du triangle demandé.

Solution graphique (**Ep. 173**).

1° On construit les traces T_0 et T_{10} du plan des trois points *f*, *g* et *l* (**195**).

2° On rabat les deux droites parallèles *fg* et *lc* avec les trois points donnés sur P_2; la trace T_0 sera l'axe de rotation.

Le triangle (*l*)(*g*)(*f*) sera le rabattement du triangle *lgf* de l'espace.

1° Les trois côtés du triangle obtenu sont dans le même plan P.

2° Les prolongements des côtés rabattus du triangle doivent rencontrer la trace rabattue (T_1) en des points, qui doivent être les rabattements des traces de ces côtés prolongés sur P_1 etc.

3° Les projections f_0l_0, g_0f_0, g_0l_0 prolongées concourent sur T_0 respectivement avec les prolongements des côtés $(f)(l)$, $(g)(f)$ et $(g)(l)$ du triangle rabattu.

248. Problème X. *Etant donnés trois points, construire le triangle dont ces trois points seraient les sommets, ainsi que le centre du cercle inscrit dans ce triangle.* — ($\gamma=50°$; $\beta=35°$).

Solution graphique. Après avoir achevé l'épure du problème précédent, on construit, sur le rabattement, le centre du cercle inscrit dans le triangle rabattu $(l)(g)(f)$.

Le point (o) obtenu est le rabattement du centre du triangle. Ce point sera relevé en o'_0 et en o_0.

249. Problème XI. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre une autre droite donnée sous un angle donné* ($\gamma=45°$; $\beta=65°$).

Solution dans l'espace. Le point et la droite déterminent un plan T. On rabat ce plan avec ce qu'il contient sur P_2, en prenant la trace T_0 pour axe de rotation.

Dans le rabattement, on construit une ou deux droites qui correspondent aux conditions du problème.

Ces droites relevées constituent la solution du problème.

Solution graphique. (**Ep. 174**). Par la droite et le point, on fait passer un plan. On opère le rabattement de ce plan sur P_2 autour de T_0.

Les deux droites menées par (c) qui font avec la normale $(c)(q)$ à la droite rabattue un angle complémentaire de l'angle donné sont les rabattements $(c)(s)$ et $(c)(t)$ des droites demandées.

Ces deux droites se relèvent en c_0s_0, $c'_0s'_0$ et c_0t_0, $c'_0t'_0$.

Vérifications. Employer toutes les vérifications que le problème comporte. (Voir les problèmes précédents).

250. Problème XII. *Construire une ligne de plus grande pente d'un plan sur le plan* P_1.

Solution dans l'espace. La ligne de plus grande pente du plan T est la droite d'intersection de ce plan avec un plan S normal à la trace T_1. Un tel plan est normal à P_1 ; il a sa trace oblique S_o perpendiculaire à l'axe et sa trace oblique S_{1o} parallèle à la projection oblique d'une droite de P_1 normale à T_1.

Solution graphique (Ep. 175). On reconstruit la trace T_1 du plan T ; en un point de cette trace, on mène une normale $a'b$ à cette ligne, et l'on en détermine la projection oblique a'_0b.

Le plan S aura sa trace S_{1o} parallèle à ba'_0.

La droite d'intersection pr des plans T et S est une ligne de plus grande pente du plan S sur P_1.

251. Problème XIII. *Construire l'angle de pente sur* P_1 *d'un plan* T *donné.*

Solution dans l'espace. L'angle de pente sur P_1 du plan T est l'angle que fait la ligne de plus grande pente de ce plan sur P_1 avec la projection orthogonale de cette ligne sur P_1, projection qui se confond avec la trace S_1 du plan S normal à T_1.

Solution graphique (Ep. 175). On rabat le plan S sur P_2 avec sa trace S_{1o} et la ligne de plus grande pente pr du plan T. La trace S_o sera prise pour axe de rotation.

Le point r'_0 se rabat en (r') et $p'_0\,(r')\,p_0$ sera l'angle de pente demandé.

252. Problème XIV. *Construire le plan bissecteur de l'angle dièdre formé par un plan* T *avec le plan* P_1.

Solution dans l'espace. Le plan bissecteur est déterminé par la trace T_1 du plan et par la bissectrice de l'angle de pente de ce plan sur P_1.

Solution graphique (Ep. 175). On construit, par rabattement, l'angle de pente de T sur P_1 ainsi que la bissectrice $(r')\,m_0$ de cet angle. La bissectrice rencontre la trace oblique S_0 du plan de plus grande pente qui la contient au point m_0, trace oblique de la bissectrice sur P_2.

En unissant m_0 à y on a $ym_0 = B_{1o}$, une des traces obliques du plan bissecteur. L'autre trace coïncide avec la trace T_{1o} du plan donné.

253. Problème XV. *Construire la distance d'un point à un plan.*

Solution dans l'espace. Par le point donné, on mène une perpendiculaire au plan. On en détermine le pied; la distance de ce pied au point donné est la distance du point au plan.

Solution graphique (Ep. 176). Menons, par le point donné a, un plan i normal à la trace T_1 sur P_1 du plan donné. Un tel plan sera normal à T et contiendra la perpendiculaire abaissée du point a sur T; il coupe le plan T suivant une ligne de plus grande pente bd (**250**); la normale au plan menée par le point a, sera perpendiculaire à cette ligne.

On construit le rabattement $b_0(c)$ de la ligne de plus grande pente, le rabattement (a) du point, et $(a)(d)$ sera le rabattement de la distance du point a au plan t.

Cette distance est ensuite relevée en a_0d_0 et $a'_0d'_0$.

254. Problème XVI. *Construire la distance de deux plans parallèles.*

Solution dans l'espace. D'un point de l'espace, on abaisse une perpendiculaire aux deux plans. On construit le pied de cette perpendiculaire sur chacun des deux plans. La distance qui sépare ces deux pieds est la distance des deux plans parallèles.

En prenant, au lieu d'un point quelconque de l'espace pour abaisser la perpendiculaire sur les deux plans, le point de rencontre x des deux traces S_0 et S_{10} du plan S, ce point sera le pied de la perpendiculaire sur S et le problème est ramené au problème suivant : Construire la distance du point x au plan t (**253**).

Solution graphique. La solution graphique est la même que celle du problème précédent.

255. Problème XVII. *Construire l'angle d'une droite et d'un plan.*

Solution dans l'espace. D'un point de la droite, on abaisse une perpendiculaire sur le plan (**253**). L'angle de la droite et de cette perpendiculaire sera le complément de l'angle demandé.

256. Problème XVIII. *Construire l'angle de deux plans.*

Solution dans l'espace. D'un point de l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des deux plans. L'angle des deux droites sera le supplément de l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

257. Problème XIX. *Construire l'angle de deux plans parallèles à l'axe.*

Solution dans l'espace. On coupe les deux plans par un plan normal à leur intersection commune, donc à l'axe de projection. Ce plan coupe les deux plans proposés suivant deux droites; l'angle de ces deux droites est l'angle plan correspondant du dièdre des deux plans.

Solution graphique (Ep. 177). Le plan auxiliaire normal à l'axe a sa trace P_0 normale à l'axe et sa trace P_{10} parallèle à la fuyante. On détermine les deux droites d'intersection de P avec les deux plans proposés, et on rabat ces droites sur P_2, la trace P_0 de P étant prise pour axe de rotation.

258. Problème XX. *Construire le plan bissecteur de l'angle formé par deux plans parallèles à l'axe.*

Solution dans l'espace. Le plan bissecteur B du dièdre des deux plans contient la bissectrice de l'angle plan correspondant de ce dièdre. Les traces obliques de B sont parallèles à l'axe et passent respectivement pour les projections obliques des traces de même nom de la bissectrice.

Solution graphique (Ep. 177). On construit la bissectrice par rabattement. r_0 et r'_0 sont les projections obliques des traces de cette droite sur P_2 et P_1. Les traces obliques B_0 et B_{10} passent respectivement par r_0 et r'_0 et sont parallèles à l'axe.

259. Problème XXI. *Connaissant la trace oblique t_{10} d'un plan ainsi que son angle de pente sur* P_1, *construire sa trace oblique t_0.*

Solution dans l'espace. On coupe le plan t supposé connu, le plan P_1 et le plan P_2 par un plan auxiliaire normal à t_1. Ce plan coupera P_1 suivant $r\,a'$, droite connue après le redressement de t_1, P_2 suivant une normale à l'axe en r, et le plan t suivant une ligne de plus grande pente faisant avec $r\,a'$ l'angle de pente connu. Ces trois droites forment un triangle, rectangle en r, et situé dans un plan normal à P_1. On rabat ce plan avec ce triangle sur P_2, en se servant de la trace S_0 du plan comme axe de rotation.

Solution graphique (Ep. 178). Le rabattement opéré, le sommet b_0 est un point du plan t et du plan P_2, donc un point de la trace t_0 du plan sur P_2.

260. Problème VII. *Par un point donné, mener un plan parallèle à l'axe et qui soit distant de cette ligne d'une longueur donnée r.*

Solution dans l'espace. Si l'on coupe le plan t supposé connu par un plan i normal à l'axe et passant par le point donné ; le plan t sera coupé suivant une ligne de pente qui passe par le point et qui reste à une distance donnée du point de rencontre x de i avec l'axe. Cette ligne de pente sera donc une tangente menée par le point a à une circonférence du cercle, décrite de x comme centre avec la distance donnée r pour rayon.

Solution graphique (**Ep. 179**). Par le point a, on mène un plan normal à l'axe et on le rabat avec le point a sur P_2.

Du rabattement (a), on mène une tangente à la circonférence de cercle décrite de x comme centre avec r comme rayon. Cette tangente b^o (c) sera la ligne de plus grande pente rabattue du plan inconnu ; b_o sera la trace de cette ligne sur P_2 et (c) le rabattement de sa trace sur P_1. (c) se relève en c'_o et les deux droites t_o et t_{1o}, parallèles à l'axe et menées respectivement par b_o et c'_o, constituent les deux traces obliques du plan demandé.

Remarque. Suivant que $r=(a)x$, plus grand ou plus petit que $(a)x$, le problème admet une solution, deux solutions ou est impossible.