Chapitre IV.

—

Rabattements axonométriques.

97. Considérations générales. Le but des rabattements, dans la méthode des projections diédriques ainsi que dans celle des projections côtées, consistait à obtenir une figure plane sous sa véritable forme et ses dimensions vraies, en la faisant tourner autour de l'une des traces de son plan ou autour d'une parallèle à cette trace, jusqu'à ce qu'elle était amenée sur un plan de projection ou dans une position parallèle à ce plan.

Il devenait ainsi possible d'exécuter, sur ce rabattement, des opérations graphiques nécessaires à la recherche de la solution d'un problème.

Les opérations que nécessitaient ces rabattements étaient de simples rotations autour d'une droite située dans un plan de projection ou parallèle à ce plan.

Les rabattements axonométriques diffèrent des premiers ; ils ne donnent pas la vraie forme et les vraies dimensions des figures à rabattre, mais des figures qui sont avec les premières dans un certain rapport.

Le rabattement axonométrique d'une figure plane est donc une figure semblable à la première, et celle-ci se déduit du rabattement à l'aide d'échelles de réduction particulières.

Nous prendrons le plan de figure P pour plan de rabattement, et nous distinguons quatre cas particuliers suivant la position qu'occupe la figure à rabattre par rapport aux plans coordonnés.

La figure à rabattre est dans un plan	coordonné	dans	P_1 P_2 P_3	*Premier cas ;*
	parallèle à un axe coordonné	à l'axe	OX OY OZ	*Deuxième cas ;*
	passant par un axe coordonné	par	OX OY OZ	*Troisième cas ;*
	quelconque			*Cas général.*

Premier cas. *La figure à rabattre est située dans un des trois plans coordonnés.*

—

98. Problème. *Une figure étant située dans le plan coordonné* XOY, *construire le rabattement de cette figure sur* P.

A. *L'axe de projection* Ox *étant pris pour axe de rabattement.*

Système dimétrique 1 : 1/2 : 1.

Solution dans l'espace (Ep. 61). Soit *abc* la projection axonométrique d'un triangle situé dans le plan coordonné P_1.

Si, dans l'espace, nous abaissons, des sommets de α, β et γ, des normales sur l'axe coordonné OX, ces normales sont les ordonnées de ces sommets; elles interceptent, sur OX, les abscisses de ces points et se projettent suivant des parallèles à Oy en *am, bn* et *cr*, longueurs égales aux vraies ordonnées réduites dans le rapport Qy. Les abscisses sont projetées en *om, on* et *or* et se trouvent réduites dans le rapport Qx.

Si l'on avait les ordonnées réduites dans le rapport Qx au lieu de les avoir dans celui de Qy, il est évident, qu'en élevant en *m*, *n* et *r* des normales à Qx, et en portant, sur ces normales, les ordonnées respectives ainsi réduites, les extrémités de ces ordonnées seraient les sommets d'une figure plane qui serait égale à celle de l'espace réduite dans le rapport Qx. On aurait, sur le plan de figure P, le *rabattement axonométrique* de $\alpha\beta\gamma$ autour de Qx.

Or, dans le système dimétrique adopté, Qx vaut 2 Qy; il faut donc doubler les longueurs *am, bn* et *cr* pour avoir les ordonnées réduites dans ce rapport Qx.

Le triangle $(a)(b)(c)$ est donc le rabattement axonométrique sur P et autour de Ox du triangle de l'espace.

Solution graphique. D'après ce qui précède, nous voyons que, *pour avoir le rabattement axonométrique d'une figure plane de* P_1 *autour de l'axe* OX, *on mène, par tous les points importants de la figure, des parallèles à l'axe de projection* Oy *que l'on arrête à l'axe* Ox. *Par les points ainsi obtenus* m, n, p, *etc., on mène des normales à l'axe* Ox *et l'on porte, sur ces normales, des longueurs égales à autant de fois les longueurs* am, bn, cn, *etc., que le rapport* Qx *qui caractérise l'axe de projection qui correspond à l'axe de rabattement contient de fois le rapport de réduction qui caractérise l'autre axe. Les extrémités de ces longueurs sont des points du rabattement demandé.*

Notations. Un point α qui se projette axonométriquement en a aura son rabattement marqué par (a).

99. Corollaires. I. Les droites $a(a)$, $b(b)$, $c(c)$, etc. qui unissent les projections des points aux rabattements de ces derniers forment une première série de droites parallèles.

Les parallèles à Oy et les normales à Ox forment deux autres séries de droites parallèles et montrent que, de la projection axonométrique, l'on arrive au rabattement des différents points d'une figure plane à l'aide de trois séries de droites parallèles.

Il suffira donc de construire le rabattement de l'un des points par la méthode ordinaire ci-dessus indiquée.

II. Les projections ab, bc, etc. des côtés de la figure se coupent sur l'axe de rabattement avec les rabattements $(a)(b)$, $(b)(c)$, etc. de ces côtés.

100. *Vraie forme et véritables dimensions de la figure dans l'espace.*

Pour déduire, du rabattement $(a)(b)(c)$, la véritable forme de la figure $\alpha\beta\gamma$ de l'espace, il suffit d'augmenter les abscisses et ordonnées du rabattement dans le rapport $1/Qx$, inverse de celui qui caractérise l'axe de projection correspondant à l'axe de rabattement, et de construire, avec ces coordonnées, la figure voulue, en prenant une droite quelconque pour axe des abscisses.

Ces réductions s'obtiennent graphiquement à l'aide *d'échelles de réductions particulières.*

Soient (**Fig. 62**) les deux côtés OV et VT d'un angle droit, ou autre, et OV$=$ une unité quelconque, un décimètre, réduite dans le rapport $Qx=0{,}942$ (**11**). Soit le côté VT égal à cette unité non réduite. On aura $OV=942/1000$ et $VT=1000/1000$. Une longueur du rabattement portée en OM donne, à l'aide de la parallèle MM′ à OT, la longueur $TM'=1000/942$. $OM=OM\ 1/Qx$.

101. Remarque. La solution dans l'espace et la solution graphique données pour le cas d'une figure plane de P_1 à rabattre autour de l'axe de projection Ox, s'appliquent aisément au cas particulier où le rabattement doit se faire autour de Oy, et aux cas où la figure est située dans P_2 ou P_3 et que le rabattement doit s'opérer autour de l'un des deux axes de projections correspondants à ces plans.

102. Problème réciproque. *Etant donné le rabattement axonométrique d'une figure plane de* P_1 *autour de l'axe* Ox, *retrouver la projection axonométrique de cette figure* $(1 : 1/2 : 1)$.

Pour relever la figure (a) (b) (c) (**Ep. 61**), nous devons construire sur Ox, à l'aide d'ordonnées parallèles à Oy, une figure semblable à (a) (b) (c), dont les abscisses sont les mêmes, mais dont les ordonnées sont à celles de (a) (b) (c) comme le rapport Qy est au rapport Qx.

Il suffira, pour arriver à ce résultat, de mener, par les sommets (a) (b) (c), des perpendiculaires à l'axe Ox, et de faire passer, par les pieds m, n et r de ces perpendiculaires, des parallèles à l'axe Oy. Sur ces lignes am, bn, cr, on porte des longueurs respectivement égales à $\frac{(a)\,m}{2}$, $\frac{(b)\,n}{2}$ et $\frac{(c)\,r}{2}$ longueurs qui sont respectivement à $(a)\,m$, $(b)\,n$ et $(c)\,r$, comme le coefficient de réduction Qy est au coefficient Qx, c'est-à-dire, dans notre exemple, comme $1/2 : 1$.

La figure abc obtenue sera la projection axonométrique du triangle de l'espace $\alpha\beta\gamma$ situé dans P_1.

C'est, en effet, ce triangle qui, rabattu par le procédé connu, donnera la figure (a) (b) (c).

Remarque I. Les opérations précédentes ne sont que les opérations réciproques de celles exécutées sur la projection pour arriver au rabattement.

Remarque II. Les sommets du rabattement sont liés aux sommets en projection par une série de droites parallèles. Les différentes opérations graphiques du relèvement se résument par suite dans trois séries de droites parallèles.

Remarque III. La solution donnée pour le problème réciproque précédent s'applique aux différents cas qui peuvent se présenter dans le rabattement axonométrique d'une figure plane située dans un des trois plans coordonnés.

Exercices et applications. Nous donnerons, comme exercices et applications, les différents cas du rabattement axonométrique d'une figure plane située dans un plan coordonné.

103. Problème I. *Construire le rabattement axonométrique d'un triangle situé dans* XOY. O*n donne la projection du triangle et l'on prend l'axe* O*y* *pour axe de rabattement.*

(*Système dimétrique* 1 : 1/2 : 1).

Problème réciproque.

104. Problème II. *On donne la projection axonométrique d'une figure plane située dans* XOZ ; *construire son rabattement, l'axe* OX *étant pris pour axe de rabattement.*

(*Système dimétrique* 1 : 1/3 : 1).

Problème réciproque.

105. Problème. III. *Même problème que le problème II, l'axe* O*z* *étant pris pour axe de rabattement.*

(*Système dimétrique* 1 : 1/3 : 1).

Problème réciproque.

106. Problème IV. *On donne la projection axonométrique d'une figure plane située dans* ZOY, *en construire le rabattement*, *l'axe* O*z* *étant pris pour axe de rabattement.*

(*Système trimétrique* 1 : 1/2 : 9/10).

Problème réciproque.

107. Problème V. *Même problème que le problème IV, l'axe* OY *est pris pour axe de rabattement.*

(*Système trimétrique* 1 : 1/2 : 9/10).

Problème réciproque.

Deuxième cas. *La figure à rabattre est située dans un plan parallèle à un axe coordonné.*

---

108. Problème. *Une figure est située dans un plan parallèle à l'axe coordonné* OZ, *construire le rabattement de cette figure.*

(*Système trimétrique* 1 : 9/10 : 5/10).

Solution. Prenons pour axe de rabattement la trace-projection du plan de la figure sur P_1, donc la première trace axonométrique de ce plan T (**Ep. 63**).

Si, dans le plan T, nous abaissons, des sommets α, β et γ de la figure $\alpha\beta\gamma$ à rabattre, des perpendiculaires sur la trace-projection de ce plan sur P_1, et si nous prenons le point N pour origine des coordonnées, nous voyons qu'en projections sur P, les abscisses se comptent sur MN et que les ordonnées de l'espace $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ sont réduites dans le rapport Qz et deviennent aa', bb' et cc'.

Evidemment, pour avoir le rabattement de $\alpha\beta\gamma$, il faudrait réduire les abscisses et les ordonnées de cette figure dans le même rapport.

Comme les abscisses sont situées dans le plan coordonné XOY, nous commencerons par opérer le rabattement de MN autour de l'un des deux axes de ce plan, soit autour de l'axe Ox (**98**).

Ce rabattement nous donne N (M) et les abscisses N (c'), N (b'), N (a') et nous avons $N(c') = 10/9\ N\gamma'$, $N(b') = 10/9\ N\beta'$ et $N(a') = 10/9\ N\alpha'$.

Les abscisses se trouvent ainsi réduites dans le rapport Qx.

Aux points (a'), (b'), (c'), élevons des perpendiculaires sur N (M) et prenons $(a')\,(a) = aa'.\dfrac{Qx}{Qz} = 2\ aa'$, $(b')\,(b) = 2\ bb'$ et $(c')(c) = 2\ cc'$. Nous aurons ainsi les ordonnées de l'espace réduites dans le rapport Qx; la figure (a) (b) (c) sera semblable à la figure $\alpha\beta\gamma$ de l'espace et en est le rabattement.

Le rapport de similitude entre $\alpha\beta\gamma$ et son rabattement est le rapport Qx.

Remarque. Au lieu d'opérer le rabattement de la trace-projection autour de l'axe de projection Ox, on aurait pu opérer ce rabattement autour de l'autre axe Oy du plan XOX qui contient MN.

Vraies dimensions et véritable forme de la figure de l'espace. Il suffira (**98**) d'agrandir le rabattement (a) (b) (c) dans le rapport inverse $\dfrac{1}{Qx}$ ou $\dfrac{1}{Qy}$ suivant que l'un des deux axes Ox ou Oy a servi d'axe dans le rabattement de MN.

Règle générale. De ce qui précède, nous voyons que, *pour opérer le rabattement d'une figure située dans un plan parallèle à l'un des axes coordonnés, on prend la trace axonométrique de ce plan sur le plan coordonné normal à cet axe coordonné pour axe des abscisses de la figure, et ce même axe pour direction des ordonnées. On rabat l'axe des abscisses autour de l'un des axes de projection du plan coordonné qui la contient, et, sur ces abscisses ainsi réduites, avec les ordonnées réduites dans le même rapport, on construit une figure plane qui sera le rabattement demandé.*

109. Problème réciproque. *Le rabattement d'une figure située dans un plan parallèle à l'axe* OZ *étant opéré autour de la première trace axonométrique de ce plan prise pour axe de rabattement, relever cette figure.*

Système trimétrique 1 : 9/10 : 5/10.

Solution (Ep. 63). Le rabattement N(M) de la trace axonométrique T_1, axe de rabattement et axe des abscisses de la figure à relever étant donné, on procède au relèvement de cette ligne (**100**). Le rabattement N(M) ayant eu lieu autour de OX, OM = O(M). $\frac{Qy}{Qx} = O(M)\ 9/10$.

Par les points a', b' et c', relèvements des rabattements (a') (b'), et (c'), on mène des parallèles à OZ, et l'on porte, sur ces lignes, des longueurs $a'a = (a')(a)$. $\frac{Qz}{Qx} = (a')\ (a)\ 5/10$; $b'b = (b')\ (b)\ 5/10$ et $c'c = (c')\ (c)\ 5/10$.

abc sera la projection axonométrique de la figure $\alpha\beta\gamma$ du plan T, laquelle est rabattue en $(a)\ (b)\ (c)$.

—

Troisième cas. *La figure à rabattre se trouve dans un plan qui passe par un axe coordonné sans toutefois se confondre avec un plan coordonné.*

—

110. Ce cas particulier est un corollaire de celui où le plan de la figure à rabattre est parallèle à un axe coordonné.

Nous pouvons donc poser, comme exercices du second cas, les différents problèmes que le troisième cas peut comporter.

111. Exercices et applications.

Problème I. *Rabattement axonométrique d'un triangle dont le plan passe par l'axe coordonné* OX.

Système trimétrique 1 : 1/2 : 9/10.

Problème réciproque.

Problème II. *Rabattement axonométrique d'une figure plane dont le plan passe par l'axe* OY.

Système dimétrique 1 : 1/2 : 1.

Problème réciproque.

Problème III. *Rabattement axonométrique d'un triangle situé dans un plan passant par l'axe* OZ.

Système isométrique 1 : 1 : 1.

Problème réciproque.

—

Quatrième cas. — Cas général. *Construire le rabattement sur* P *d'une figure située dans un plan quelconque.*

—

112. Problème. *Une droite est située dans un plan* T *incliné sur les trois axes coordonnés, en opérer le rabattement sur* P.

Système trimétrique 1 : 5/10 : 9/10.

Solution (Ep. 64). Soit le plan donné par ses traces axonométriques T_1, T_2 et T_3. Soient deux points α et β de ce plan, ils déterminent la droite $\alpha\beta$ dont il s'agit d'opérer le rabattement sur P, en prenant la trace axonométrique T_1 pour axe de rabattement.

Menons, par ces deux points, des droites parallèles aux traces T_2 et T_3.

Ces droites coupent T_1 et déterminent des triangles ayant α et β pour sommets.

Rabattons ces triangles.

Le triangle $\beta\nu\rho$ rabattu donne un triangle semblable au premier et supposons que le rapport de similitude soit Qx.

Pour réduire les trois côtés $\nu\rho$, $\beta\nu$ et $\beta\rho$ à l'échelle Qx, commençons par rabattre AC sur P autour de l'axe Ox. Ce rabattement sera en C (A) et (n) (r) sera le rabattement de la base $\nu\rho$ du triangle $\beta\nu\rho$.

Dans ce rabattement, $O(A) = OA. \dfrac{Qx}{Qy} = OA. 2$.

Pour obtenir le rabattement de $\beta\rho$, c'est-à-dire la réduction de $\beta\rho$ à l'échelle Qx, observons que cette ligne est située dans un plan parallèle à l'axe OZ.

Rapporté à l'échelle Qx, $\beta\rho$ se rabat en $(b')\,r$ et dans ce rabattement $(b')\,b' = bb'\,\dfrac{Qx}{Qz} = bb'.\ 10/9$.

Le rabattement ou la réduction de $\beta\nu$ à l'échelle de Qx s'obtiendra en opérant d'abord sa réduction à l'échelle Qy et en rapportant ensuite la longueur ainsi réduite à l'échelle Qx.

Dans la réduction de $\beta\nu$ à l'échelle Qy on a $b'(b) = bb'.\ \dfrac{Qy}{Qz} = bb'\,5/9$.

La longueur réduite à l'échelle Qx deviendra $(n)(b_2) = n(b).\ \dfrac{Qx}{Qy} = n(b)\ 2$.

Les deux côtés $\beta\nu$ et $\beta\rho$ actuellement réduits à l'échelle Qx seront portés en (n) et (r) et donnent avec $(n)(r)$ le triangle $(n)(r)(b)$ rabattement sur P du triangle $\beta\nu\rho$.

Pour avoir le rabattement du triangle $\alpha\mu\pi$, il suffit de mener, par (m) et (p), des droites respectivement parallèles aux côtés $(n)(b)$ et $(r)(b)$ du triangle rabattu $(n)(b)(r)$. On obtiendra ainsi le triangle $(m)(a)(p)$.

La ligne $(b)(a)$ qui joint les deux sommets (a) et (b) des deux triangles rabattus sera le rabattement de la droite $\alpha\beta$ du plan donné.

Vérification. Le prolongement de $(a)(b)$ coupera la trace rabattue (T_1) au point (D), rabattement du point de rencontre D de la droite $\alpha\beta$ avec la trace axonométrique T_1 du plan proposé.

Vraies forme et grandeur de la figure de l'espace. Voir le paragraphe **98**.

113. Problème réciproque. Les opérations à exécuter sont la réciproque des opérations que nécessitait le rabattement.

—

Applications. — Problèmes.

—

114. Problème I. *Construire la véritable longueur d'une portion de droite* (1 : 1 : 1).