

Chapitre III.

--

Problèmes. — Applications.

59. Premier problème fondamental. *Construire les traces axonométriques d'une droite. Voir le paragraphe 33.*

Construire la trace ordinaire d'une droite. Voir, pour la solution, le § 34.

—

Applications.

60. Problème I. *Un plan étant représenté par ses traces axonométriques, construire sa trace ordinaire (37).*

61. Problème II. *Un plan passant par l'origine est représenté par deux de ses traces axonométriques, construire la troisième trace axonométrique de ce plan ainsi que sa trace ordinaire (44).*

62. Problème III. *Vérifier si une droite donnée est parallèle au plan de figure P (30).*

63. Problème IV. *Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné (54).*

64. Problème V. *Vérifier si une droite donnée est perpendiculaire à un plan donné.*

Solution. On construit la trace ordinaire du plan. La droite est perpendiculaire au plan si sa projection axonométrique est perpendiculaire à la trace ordinaire ainsi construite (56).

65. Problème VI. *Construire, dans un plan donné, une droite parallèle à P.*

Solution. Par un point de l'une des traces axonométriques du plan, on mène une droite parallèle à la trace ordinaire. Cette droite est la droite demandée.

66. Problème VII. *Vérifier si une droite donnée est située dans un plan donné.*

Solution. On construit les traces ordinaire et axonométriques de la droite; celle-ci est dans le plan si ses traces sont sur les traces de même nom du plan.

67. Problème VIII. *Vérifier si un point donné est situé dans un plan donné.*

Solution. Par le point donné, on mène une droite parallèle à l'une des quatre traces du plan. Le point est dans le plan si la droite ainsi construite est dans le plan (54).

68. Problème IX. *Par un point donné sur une des traces d'un plan, mener une droite parallèle à une des trois autres traces.*

Solution (Ep. 36). Le point α est donné sur T_3 ; on demande de mener, par ce point, une droite parallèle à T_1 . Les projections de la droite demandée sur les trois plans coordonnés de l'espace, ainsi que les projections axonométriques sur P de ces projections, sont parallèles respectivement aux mêmes projections de T_1 . Donc, si ε est la droite demandée on aura :

$$\left. \begin{array}{l} d \\ d' \end{array} \right\} \text{ parallèles à } T_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} d''' \text{ parallèle à } Oy, \\ d'' \text{ parallèle à } Ox. \end{array} \right.$$

Remarque. Les traces axonométriques et ordinaires de ces droites sont situées sur les traces de même nom du plan donné.

69. Problème X. *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à l'un des trois plans coordonnés.*

Solution (Ep. 37). On donne la droite ε par ses projections d, d', d'' et d''' . Faire passer, par cette droite, un plan perpendiculaire à P_1 .

Un tel plan aura sa première trace axonométrique T_1 qui se projette sur d' . Les traces T_3 et T_2 sont parallèles à Oz et passeront par r et s , points de rencontre de T_1 avec les axes de projection Oy et Ox .

La trace ordinaire de ce plan passera par t , trace ordinaire de la droite.

70. Problème XI. *Par deux droites qui se coupent, faire passer un plan.*

Solution (Ep. 38). Les traces axonométriques et ordinaire du plan passeront par les traces de même nom des deux droites données d et e .

Les trois traces ainsi obtenues doivent se couper deux-à-deux sur un axe de projection.

71. Problème XII. *Même problème, l'une des deux droites est parallèle à l'un des trois plans P_1, P_2, P_3 .*

Solution (Ep. 39). La droite δ étant parallèle à P_3 , d''' sera parallèle à d ; la troisième trace axonométrique du plan demandé se projette suivant T_3 parallèle à d et à d''' . Les autres traces du plan passeront par ces traces de même nom des deux droites, etc.

72. Problème XIII. *Par deux droites parallèles, faire passer un plan.*

Les traces du plan passeront encore par les traces de même nom des droites.

73. Problème XIV. *Par trois points non en ligne droite, faire passer un plan.*

1^{re} Solution. On joint le point α au point β et au point γ . Les deux droites $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ se coupent au point α et déterminent le plan demandé (70).

2^{me} Solution. On joint les points α et β et par le point γ , on mène une droite parallèle à $\alpha\beta$. Les deux droites parallèles ainsi obtenues déterminent le plan (72).

74. Problème XV. *Par un point et une droite, faire passer un plan.*

I. Solution. Par le point, on mène une droite parallèle à la droite donnée. Les deux droites parallèles déterminent le plan.

II. Solution. On unit le point α à un point β de la droite δ . Les deux droites δ et $\alpha\beta$ se coupent au point α et déterminent le plan demandé.

75. Problème XVI. *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à une droite donnée γ .*

Solution. Par un point de la droite δ , on mène une droite parallèle à γ laquelle, avec la première, déterminent le plan demandé.

76. Problème XVII. *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données δ et ξ .*

Solution Par le point α , on mène une droite parallèle à δ et une autre parallèle à ξ . Ces deux droites déterminent le plan demandé.

77. Problème XVIII. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

1^{re} Solution (Ep. 40). Les traces du plan demandé étant parallèles aux traces de même nom du plan donné, on mènera, par le point donné α , une parallèle à l'une des traces, par ex. à la trace T_1 . La droite ainsi tracée *man* aura sa trace *m* sur T'_3 , et sa trace *n* sur T'_2 du plan demandé. On n'a qu'à mener, par *m* et *n*, des droites parallèles respectivement à T_3 et T_2 et achever le triangle ABC pour avoir les traces axonométriques du plan demandé.

2^{me} Solution. Au lieu de se contenter d'une droite parallèle à l'une des traces menée par le point α , on pourrait mener, par ce point, des droites parallèles à toutes les traces du plan donné. Le plan sera mieux déterminé.

3^{me} Solution. Au lieu de mener, par α , des droites parallèles aux traces axonométriques et ordinaire du plan donné, on pourrait se servir de droites parallèles à des droites quelconques situées dans le plan donné.

78. Problème XIX. *Etant donné un plan par ses traces axonométriques, et la projection axonométrique a' de la première projection d'un point α de ce plan, construire les autres projections de ce point.*

Solution (Ep. 41). Par a' , menons une droite $m'n'$ parallèle à T_1 ; $m'n'$ sera la projection axonométrique de la première projection d'une horizontale $\mu\nu$ du plan passant par le point α .

L'horizontale $\mu\nu$ étant dans le plan donné, sa deuxième et sa troisième traces axonométriques auront leurs premières projections qui se projettent en n' et m' sur le plan de figure. Les projections axonométriques de ces traces se trouvent par suite en n et m ; mn est la projection axonométrique de l'horizontale $\mu\nu$ du plan.

Cette horizontale contient le point α et celui-ci a pour projection axonométrique le point a , point de rencontre de mn avec la verticale $\alpha\alpha'$ projetée en $a'a$.

Deux projections a' et a du point étant connues, les autres s'en déduisent aisément.

2^{me} Solution (Ep. 42). Au lieu de construire une horizontale du plan qui doit passer par le point α , on peut se servir d'une droite quelconque de ce plan.

Par a' , menons une droite quelconque $m'n'$. Cette droite sera, par hypothèse, la projection axonométrique de la projection horizontale d'une droite $\mu\nu$ du plan.

Les traces axonométriques sur P_1 et sur P_2 ont leurs projections horizontales qui se projettent sur le plan de figure P en m' et n' . n est donc la projection sur P de la deuxième trace axonométrique de $\mu\nu$; la projection axonométrique de cette droite sera en $m'n$. Le point α se projette en a , point de rencontre de nm' avec la verticale $\alpha\alpha'$.

La deuxième solution du problème précédent résout le problème suivant :

79. Problème XX. *Etant donné un plan par ses traces axonométriques, et la projection sur P de la première projection d'une droite de ce plan, construire les autres projections de cette droite.*

80. Problème XXI. *Construire les traces d'un plan parallèle à P_3 et distant de P_3 d'une longueur donnée l .*

Solution. Le plan demandé n'aura que deux traces axonométriques. T_2 sera parallèle à l'axe de projection Oz , et T_1 sera parallèle à Oy . Comme, dans l'espace, l'axe coordonné OX est normal à P_3 et, par suite, au plan demandé, le point α où cet axe est rencontré par ce plan sera distant de O d'une longueur de $O\alpha=l$.

Il suffit donc, pour avoir a , de prendre $Oa=Q\alpha$. OA .

Si nous adoptons le système $1 : 1/2 : 1$, pour lequel $Q\alpha = 0,942$, nous aurons $Oa = 0,942. l$.

81. Deuxième problème fondamental. — A. — *Connaissant les traces axonométriques d'une droite, construire les projections de cette droite.*

Solution (Ep. 44). Soient α , β et γ les traces axonométriques de la droite δ sur P_1 , P_2 et P_3 . Ces traces, projetées sur P, donnent les

points a , b et c qui appartiennent à la projection axonométrique d de la droite.

d' passera par a' et b' ; d'' par b et a'' , et d''' est déterminé par c , a''' et b''' .

82. Problème fondamental.— B.— *Etant données la trace ordinaire et une des traces axonométriques de la droite, retrouver les projections de cette droite.*

Premier cas. *On donne la trace ordinaire et la deuxième ou la troisième trace axonométrique.*

Solution (Ep. 45). Soient f et b les projections axonométriques respectivement de la trace ordinaire et de la deuxième trace axonométrique de la droite ε de l'espace. Déterminons la trace ordinaire du plan projetant vertical de la droite ε . Cette trace passe par f et par t , trace ordinaire de la verticale menée par β (34); ft rencontre la trace OH du plan horizontal sur P en H. En unissant Hb' on a la projection axonométrique de d' , car cette projection a sa trace ordinaire en H (34).

Le point a sera la trace axonométrique de ε sur P_1 .

Deux des trois traces axonométriques étant connues, le problème est ramené au précédent.

2^{me} cas. Une solution identique donnera la trace a si l'on donne la troisième trace axonométrique ainsi que la trace ordinaire f .

3^{me} cas. On donne la trace ordinaire f et la première trace axonométrique a .

Solution (Ep. 46). On déterminera, comme pour les deux cas précédents, la trace ordinaire du plan vertical mené par ε . Cette trace passe par f et par la trace ordinaire d'une verticale menée par le point a de ε .

Pour construire la trace ordinaire de cette verticale, menons, par cette droite, un plan vertical parallèle à la trace ordinaire de XOY sur P. Un tel plan coupera XOY suivant une droite $a\mu$ parallèle à OH, et la trace ordinaire de ce plan sera parallèle à OH et passera par les traces ordinaires de toutes les verticales menées successivement par les différents points de $a\mu$, donc aussi par la trace s de la verticale du plan ZOY menée par m . La trace ordinaire de la

verticale menée par α sera donc en r , par suite fH sera la trace ordinaire du plan vertical qui passe par δ .

aH sera la projection axonométrique d' ; b' sera la projection sur P' de β' , deuxième trace axonométrique de δ , laquelle se projette en b .

Vérification. Les trois points b , b' et t sont en ligne droite. t est le point de rencontre de fH avec la trace ordinaire ot du plan P_2 .

Applications.

Problème général. *Construire les projections de la droite d'intersection de deux plans représentés de différentes manières.*

83. Problème XXIII. *Construire la droite d'intersection de deux plans représentés chacun par ses traces axonométriques.*

Solution (Ep. 47). Les traces axonométriques de même nom des deux plans se rencontrent en des points qui appartiennent à la droite d'intersection et qui en sont les traces axonométriques. a , b et c sont donc les projections axonométriques des traces axonométriques de la droite d'intersection sur P_1 , P_2 et P_3 .

Les traces axonométriques de la droite étant connues, le problème est ramené au problème fondamental (82).

Remarque. Les points a , b et c sont en ligne droite.

Les projections de ces points sur P_1 , P_2 et P_3 sont également en ligne droite et déterminent les projections de la droite d'intersection des deux plans sur P_1 , P_2 , et P_3 .

84. Problème XXIII. *Construire la droite d'intersection de deux plans dont l'un est parallèle à P_1 , à P_2 ou à P_3 .*

Solution. Voir problème précédent.

Suivant que l'un des deux plans est parallèle à P_1 , à P_2 ou à P_3 , la droite d'intersection des deux plans sera parallèle à P_1 , à P_2 ou à P_3 , et, par suite, parallèle à T_1 , à T_2 ou à T_3 de l'autre plan.

Dans les épures **48**, **49** et **50**, la droite d'intersection des deux plans est parallèle respectivement à P_1 , P_2 et P_3 .

85. Problème XXIV. *Construire l'intersection de deux plans dont deux traces axonométriques de même nom, soit sur P_1 , sur P_2 ou sur P_3 sont parallèles.*

Solution. Si, comme dans l'épure **51** les deux traces sur P_3 sont parallèles, les deux plans sont menés chacun par une droite parallèle à T_3 et T'_3 , et se coupent par conséquent suivant ε parallèle à ces droites.

86. Problème XXV. *Construire l'intersection de deux plans sans faire usage des points d'intersection des traces.*

Solution (Ep. 52). On coupe les deux plans par des plans auxiliaires parallèles à P_1 , à P_2 ou à P_3 . Chacun de ces plans donnera, avec chacun des plans proposés, une droite d'intersection. Les droites fournies par le même plan auxiliaire se coupent en un point qui appartient à la droite d'intersection des deux plans donnés.

Nous avons coupé les deux plans par un plan parallèle à P_1 et par un autre parallèle à P_3 .

Vérifications. Les points obtenus sont en ligne droite.

Cette droite passe par les points d'intersection des traces de même nom des plans proposés.

87. Problème XXVI. *Construire la droite d'intersection de deux plans qui passent par l'origine.*

Solution (Ep. 53). On coupe les deux plans par un plan auxiliaire parallèle à P_3 . Chacun des plans proposés sera coupé suivant une droite; le point de rencontre de ces droites et l'origine O déterminent la droite d'intersection des deux plans.

Nous coupons par un plan parallèle à P_3 parce que, dans notre épure, les deux plans sont représentés par leurs traces axonométriques sur P_1 et P_2 .

88. Problème XXVII. *Construire la droite d'intersection de deux plans parallèles à l'un des trois axes coordonnés.*

Solution (Ep. 54). Les traces des deux plans parallèles à OX sur P_1 et P_2 sont parallèles à OX , et les deux plans se coupent suivant une droite ε parallèle à cet axe coordonné et se projetant sur P suivant une parallèle à Ox .

Les traces sur P_3 se coupent au point α , point qui appartient à la droite ε .

Remarque. La droite ε est parallèle à OX, OY ou OZ, suivant que les plans en question sont parallèles à ces axes coordonnés.

89. Problème XXVIII. *Construire la droite d'intersection de deux plans représentés chacun par deux droites qui se coupent, sans construire les traces axonométriques de ces plans.*

Solution dans l'espace. On coupe par une série de plans auxiliaires horizontaux. Un tel plan H coupe les plans projetants verticaux des droites ε , ε_1 , ε_2 et ε_3 suivant des horizontales parallèles à ε' , ε'_1 , ε''_2 , ε''_3 . Ces horizontales rencontrent ensuite les droites proposées en des points où celles-ci sont coupées par le plan auxiliaire H. Les plans déterminés par ces droites sont donc coupés suivant des horizontales qui se coupent en m , point appartenant à la droite d'intersection des deux plans.

Un autre plan horizontal nous donne le point n et enfin le plan XOY nous donne le point l . Tous ces points sont en ligne droite et déterminent la droite d'intersection des deux plans.

Solution graphique (Ep. 55). Elle est entièrement indiquée dans la solution dans l'espace.

90. Problème XXIX. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux autres droites données non situées dans un plan.*

Solution dans l'espace. Par le point et la première droite, on fait passer un plan.

Par le point et la deuxième droite, on fait passer un plan.

La droite d'intersection de ces deux plans passe par le point et rencontre les deux droites proposées.

Solution graphique (Ep. 56). Par le point α , on mène une droite parallèle à ξ et une autre parallèle à ε . On détermine l'intersection des deux plans sans se servir de leurs traces (89). A cet effet, on coupe par le plan XOY et par un plan parallèle à XOY mené par p . Ces deux plans donnent les points m et n de la droite. Cette droite est déterminée; elle passera par α .

Vérifications. La droite trouvée passera par le point α et doit rencontrer chacune des droites d et e .

91. Problème XXX. *Parallèlement à une droite donnée, mener une droite qui rencontre deux autres droites données.*

Solution dans l'espace. Par la première droite, on mène un plan parallèle à la droite donnée δ . Par la deuxième droite, on mène un plan parallèle à δ . La droite d'intersection de ces deux plans sera parallèle à δ et rencontrera les deux droites, à moins de leur être parallèle.

—

92. Troisième problème fondamental. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.*

Solution. Par la droite donnée, on fait passer un plan, qui coupe le plan donné suivant une droite. Le point de rencontre de cette droite avec la droite proposée sera le point où celle-ci perce le plan donné.

Solution graphique. Par la droite δ , on peut faire passer un plan quelconque (Ep. 57) ou un plan vertical (Ep. 58). Dans chacun des deux cas, la droite d'intersection du plan proposé avec le plan auxiliaire aura ses traces aux points de rencontre des traces de même nom des deux plans.

Vérifications. Le point de rencontre γ doit être situé dans le plan donné (67).

—

Applications.

—

93. Problème XXXI. *Construire la droite de rencontre d'un plan vertical avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce plan.*

Solution. On détermine le point de rencontre de chacune des deux droites avec le plan vertical. La droite qui unira les deux points trouvés sera la droite demandée.

Solution graphique (Ep. 59). Le plan vertical auxiliaire mené par δ aura sa trace T'_2 parallèle à la trace T_2 du plan proposé et coupe ce dernier suivant une verticale passant par v' , point de ren-

contre de d' avec T_1 . b sera la projection axonométrique du point de rencontre de δ avec le plan proposé.

On trouvera de même que c est la projection axonométrique du point de rencontre de δ_1 avec le plan proposé. bc sera donc la projection axonométrique de la droite demandée.

94. Problème XXXII. *Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce plan.*

Solution (Ep. 60). Par la droite donnée μ , on fait passer un plan vertical. Ce plan coupe la droite δ au point β et la droite ξ au point γ (93). La droite qui unit β et γ sera la droite d'intersection du plan vertical mené par μ avec le plan proposé. Le point de rencontre ν de $\alpha\beta$ avec la droite μ sera le point où cette droite perce le plan proposé.

95. Problème XXXIII. *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux droites données non situées dans un plan.*

Solution. Par le point et la première droite, on fait passer un plan; on construit le point de rencontre de ce plan avec la deuxième droite (94). Ce point et le point donné déterminent la droite demandée.

96. Remarque. Les problèmes qui nécessitent la construction de la véritable grandeur, soit de distances ou d'angles, ne peuvent, en axonométrie, être convenablement résolus qu'à l'aide des ressources qu'offre la théorie des rabattements axonométriques.
