# TRAITÉ

DE

# GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

## LIVRE PREMIER

## PROJECTIONS AXONOMÉTRIQUES

### Chapitre premier.

—

### Considérations générales. Définitions.

—

**1.** Par un point O de l'espace (**Fig. 1**), menons trois plans se coupant à l'angle droit et formant autour de ce point huit trièdres trirectangles.

Appelons le point O *origine* et les huit trièdres obtenus *trièdres des coordonnées;* les arêtes OX, OY, OZ et leurs prolongements sont les *axes coordonnés* et les faces ZOX, ZOY, XOY et leurs prolongements indéfinis les *plans coordonnés*.

Choisissons les plans coordonnés de manière que XOY soit un plan horizontal ; l'axe coordonné OZ sera *vertical*.

Le trièdre trirectangle OYXZ sera le *premier trièdre coordonné*. Une longueur mesurée sur les axes coordonnés OX, OZ ou OY est *positive;* portée sur les prolongements OX′, OZ′ ou OY′ de ces axes cette longueur devient *négative*.

**2. Détermination du point.** Soit (**Fig. 2**) un point $\alpha$ de l'espace. Par ce point, menons trois plans rectangulaires respectivement parallèles aux trois plans coordonnés.

Ces plans coupent les axes coordonnés OX, OY et OZ suivant des longueurs $O\mu$, $O\nu$ et $O\pi$ qui sont les *coordonnées rectangulaires* du point $\alpha$ et que nous représenterons respectivement par *x, y* et *z*.

$$\text{Nommons}\left\{\begin{array}{l} O\mu = x \ldots\ldots\ \text{première ordonnée} \\ O\nu = y \ldots\ldots\ \text{deuxième ordonnée} \\ O\pi = z \ldots\ldots\ \text{troisième ordonnée} \end{array}\right\}\ \text{du point } \alpha.$$

$$\text{Les distances}\left\{\begin{array}{l} \alpha a' \\ \alpha a'' \\ \alpha a''' \end{array}\right\}\ \text{du point } \alpha \text{ au}\left\{\begin{array}{l} \text{premier} \\ \text{deuxième} \\ \text{troisième} \end{array}\right\}\ \begin{array}{c} \text{plan} \\ \text{coordonné} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \text{première} \\ \text{deuxième} \\ \text{troisième} \end{array}\right\}\ \text{hauteur de } \alpha$$

$$\text{La}\left\{\begin{array}{l} \text{première} \\ \text{deuxième} \\ \text{troisième} \end{array}\right\}\begin{array}{c} \text{hauteur du} \\ \text{point } \alpha \\ \text{est égale à la} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \text{troisième} \\ \text{deuxième} \\ \text{première} \end{array}\right\}\ \text{ordonnée de ce point.}$$

*Tout point de l'espace est suffisamment déterminé par ses trois coordonnées.* .

Il suffit, en effet, de mener, par le point $\mu$, extrémité de *x,* un plan parallèle à ZOY, par $\nu$, un plan parallèle à ZOX et par $\pi$, un plan parallèle à YOX, pour qu'à leur intersection commune on retrouve le point $\alpha$ dont on avait donné les coordonnées *x, y* et *z*.

Le signe des coordonnées dépend de la position du point et réciproquement, un point, dont les coordonnées sont connues en grandeur et en direction, se trouvera dans un des huit trièdres coordonnés que l'on déterminera facilement.

Ainsi, par exemple, le point $\beta$, dont les coordonnées sont $x, -y, -z$ se trouvera dans le trièdre OXY′Z′.

**Parallélipipède des coordonnées.** Les trois plans coordonnés et les trois plans menés par le point $\alpha$ et qui leur sont respectivement parallèles, se coupent et comprennent un parallélipipède rectangle ayant l'origine O et le point $\alpha$ pour sommets opposés.

Ce parallélipipède porte le nom de *parallélipipède des coordonnées.*

Chaque côté de ce solide est égal et parallèle à une des coordonnées du point $\alpha$, et quatre de ses côtés sont chaque fois égaux et parallèles à une certaine ordonnée de ce point.

**3. Représentation du point.** Concevons actuellement un plan quelconque P inégalement incliné sur les trois plans coordonnés, sans toutefois coïncider avec un tel plan, lui être parallèle ou perpendiculaire.

Appelons ce plan *plan de figure,* et projetons, sur ce plan, l'origine O, le point $\alpha$ et tout le parallélipipède des coordonnées de la figure **2**. L'origine se projette en O (**Fig. 3**), le point $\alpha$ en $a$, les axes coordonnés suivant les lignes $ox$, $oy$ et $oz$ et qui prennent le nom d'*axes de projection,* et les coordonnées $o\mu$, $o\nu$ et $o\pi$ respectivement sur les axes $ox$, $oy$ et $oz$ suivant les longueurs $om$, $on$ et $op$, qui sont avec $o\mu$, $o\nu$ et $o\pi$ dans un certain rapport qui varie avec l'inclinaison des axes coordonnés sur le plan de figure.

Il est évident que, la *direction dex axes de projection* étant connue ainsi que les *rapports de réduction* qui lient les coordonnées de $\alpha$ aux projections de ces lignes, les trois points $n$, $p$ et $m$ sont connus également et la projection complète du parallélipipède des coordonnées sur le plan de figure s'en déduira aisément.

Il en résulte immédiatement la projection $a$ du point $\alpha$ sur P.

Nous voyons donc que *la projection a d'un point $\alpha$ sur le plan de figure* P *se déduit des projections sur ce plan des trois coordonnées de ce point.*

La projection $a$ d'un point $\alpha$ sur un plan P ainsi déduite des projections des coordonnées de ce point en est *la projection axonométrique.*

La méthode de ces projections constitue l'*axonométrie.*

La projection axonométrique est *orthogonale* ou *oblique* suivant que les projetantes sont normales ou obliques au plan de figure P.

**Remarque.** Nous nous occuperons, dans ce livre, des projections *axonométriques orthogonales* ou *projections axonométriques proprement dites.*

Nous admettons également que *le plan de figure passe par l'origine* O.

D'après ce qui précède, nous voyons que l'aspect de la projection du parallélipipède des coordonnées sur P varie avec l'inclinaison de ce plan sur les axes coordonnés.

Les éléments nécessaires à la détermination de la projection du parallélipipède, donc à la détermination de la projection axonométrique du point $\alpha$ sont :

La *position* des trois axes de projection ;

Les *angles* que ces axes forment entre eux ;

Le *rapport* ou *coefficient de réduction* qui lie une longueur portée sur un axe coordonné à sa projection sur l'axe de projection correspondant.

Ces trois éléments varient avec la position du plan de figure P par rapport aux axes coordonnés et peuvent donner, pour certains cas, des aspects plus ou moins favorables aux projections axonométriques.

On a calculé ces différents éléments pour différentes positions du plan de figure et formé un tableau avec les valeurs obtenues (**11**). De cette façon, une fois la position de P adoptée, on a immédiatement les positions relatives des axes de projection ainsi que le rapport de réduction de l'unité de longueur de chaque axe coordonné sur l'axe de projection correspondant.

La construction de la projection du parallélipipède des coordonnées, celle de la projection axonométrique d'un point, etc. deviennent des opérations graphiques des plus simples.

Nous consacrerons les paragraphes de ce chapitre à la construction graphique des éléments nécessaires aux projections axonométriques.

**4. Définitions. — Conventions.** Appelons *angles de pente des axes coordonnés* les angles que ces lignes font avec leurs projections sur P, donc avec les axes de projections correspondants.

$$\text{Nommons} \left\{ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{l'angle de pente de l'axe coordonné} \\ \text{» \quad » \quad » \quad »} \\ \text{» \quad » \quad » \quad »} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} OZ\,; \\ OY\,; \\ OX. \end{matrix}$$

Les axes de projection forment entre eux des angles.

Désignons par $r$ l'angle des axes de projection $Oz$ et $Ox$;
$s$ » » » $Oz$ et $Oy$;
$t$ » » » $Ox$ et $Oy$.

Plaçons l'origine, le sommet du parallélipipède des coordonnées, dans le plan de figure P, et supposons les trois axes coordonnés d'un même côté de ce plan, en admettant toutefois l'axe coordonné OZ parallèle à la direction de la verticale.

Le plan coordonné XOY sera horizontal.

L'axe de projection $Oz$ sera une droite à laquelle les projections axonométriques des verticales seront parallèles.

Une fois les axes coordonnés adoptés et fixés, voyons quels sont les éléments nécessaires à la détermination du plan de figure P.

**5. Détermination du plan de figure.** Le plan de figure passe par l'origine, laisse les trois axes coordonnés d'un même côté et fait, avec le plan coordonné horizontal XOY, un certain angle $i$, l'angle de pente de P sur XOY. Cet angle est nommé *angle de pente du trièdre des coordonnées.*

La trace de P sur XOY est une droite à laquelle toutes les lignes de plus grande pente de XOY sont perpendiculaires, dans l'espace aussi bien qu'en projection orthogonale sur P.

Le trièdre des axes coordonnés étant fixe, le plan P est suffisamment déterminé par rapport à ce trièdre, et réciproqnement ce dernier par rapport à P, si l'on connaît l'angle que fait l'axe coordonné OX avec la ligne de plus grande pente de XOY sur P qui passe par l'origine.

Appelons cet angle *angle de direction du trièdre des coordonnées,* et désignons le par $d$.

Les angles de pente $i$ et de direction $d$ déterminent les positions relatives qu'occupent dans l'espace le trièdre des coordonnées et le plan de figure.

Remarquons de suite que, dans l'axonométrie orthogonale, l'*angle de pente de l'axe coordonné* OZ, donc de la verticale, est le complément de l'angle de pente du trièdre des coordonnées.

C'est sous l'angle $a = 90^\circ - i$ que toutes les projetantes rencontrent les verticales.

Ces préliminaires, définitions et conventions posés, nous voyons qu'avant de pouvoir exécuter la projection axonométrique d'un objet quelconque, on doit connaître :

1° *La direction des axes de projection ;*

2° *La réduction que subit une grandeur comptée sur un axe coordonné quelconque quand elle est projetée sur l'axe de projection correspondant.*

La construction de ces éléments essentiels à l'aide d'autres éléments connus sera l'objet de trois problèmes fondamentaux.

**6. Problème I.** *Etant donnés l'angle de pente i et l'angle de direction d du trièdre trirectangle des coordonnées, construire les trois axes de projection.*

**Solution (Fig. 4).** Plaçons l'origine O dans le plan P et admettons quel'axe coordonné vertical se projette suivant O*z*, direction parallèle à celle que l'on adopte ordinairement pour la verticale dans les dessins de projection. Il reste à trouver les deux autres axes de projection.

Le plan coordonné horizontal XOY coupera P suivant une horizontale OT qui passe par O et qui est perpendiculaire en ce point à l'axe coordonné OZ, donc également à l'axe de projection O*z*. (*Géom. descript.* Ire partie § 49).

Rabattons, autour de OT sur P, le plan coordonné XOY avec les axes coordonnés OX et OY et une de ses lignes de plus grande pente OR.

La ligne de plus grande pente sera rabattue en OR ; l'axe coordonné OX sera en OX et fait avec OR un angle égal à l'angle de direction *d* du trièdre des coordonnées ; l'axe coordonné OY sera la perpendiculaire OY menée en O sur OX.

Le rabattement des axes coordonnés ainsi obtenu, il suffit, pour résoudre le problème, de trouver les projections de ces lignes, ou de passer des rabattements sur P aux projections sur ce même plan.

A cet effet, menons, par un point *n'* quelconque de OR, une droite parallèle à OT et relevons cette droite. La droite relevée étant toujours parallèle à OT il suffit, pour la déterminer, de relever un de ses points.

Relevons donc le point $n'$ et, à cet effet, rabattons la ligne de plus grande pente OR du plan coordonné XOY de l'espace autour de OR considéré comme trace-projection du plan projetant de la ligne de plus grande pente sur P. L'angle de pente $i$ du trièdre des coordonnées étant connu, le nouveau rabattement de OR sera en OR′ et le point $n'$ en $n''$, à une distance de O égale à O$n'$. Du rabattement $n''$ on passe à la projection $n$ par la considération que la projection d'un point sur un plan est unie au rabattement de ce point sur le même plan par une perpendiculaire à l'axe de rabattement.

La droite parallèle à OT menée par $n'$ sera donc relevée en $vnm$, et les points $m'$ et $v'$ appartenant respectivement aux axes coordonnés rabattus OX et OY, seront relevés en $m$ et en $v$ et détermineront les lignes O$mx$ et O$vx$, donc les axes de projection $Ox$ et O$y$ du trièdre des coordonnées.

**7. Problème II.** *Etant donnés les trois axes de projection, construire, sur chacune de ces lignes, la projection axonométrique d'une longueur donnée sur les axes coordonnés correspondants du trièdre des coordonnées.*

La solution de ce problème se base sur le théorème suivant :

**Théorème.** *Si l'on coupe un trièdre trirectangle par un plan quelconque, et si l'on projette, sur ce plan, le triangle obtenu ainsi que les arêtes du trièdre, les projections des trois arêtes du trièdre coïncident avec les hauteurs du triangle projeté.*

En effet, le plan projetant de l'arête OA (perpendiculaire à la face COB) est perpendiculaire à la face COB (**Fig. 5**) et au plan de projection P qui coupe le trièdre suivant ABC.

Les traces de ce plan projetant et de la face OCB sur le même plan de projection ABC sont donc perpendiculaires entre elles. (*Géométrie descriptive.* Ire partie § 62).

Le même raisonnement s'appliquant aux plans projetants des arêtes OB et OC on voit que les projections de ces arêtes sur ABC coïncident avec les trois hauteurs de ce triangle.

On voit aussi que les trois plans projetants se coupent suivant la projetante OO′ du sommet O du trièdre.

**Solution du problème II** (**Fig. 6**). Coupons le trièdre trirectangle des coordonnées par un plan parallèle au plan de figure. Nous obtiendrons un triangle ABC. Si, au lieu de projeter le trièdre sur le plan de figure, nous le projetons sur le triangle ABC, les projections des axes coordonnés seront parallèles aux axes de projection sur P et auront la direction des trois hauteurs du triangle ABC. Une certaine longueur portée sur un axe coordonné et projetée sur ABC sera, dans cette projection, réduite dans le même rapport qu'elle l'est dans sa projection sur P.

Les trois plans projetants des axes coordonnés se coupent suivant une normale à P, donc à ABC, et passant par l'origine O.

Coupons le trièdre des coordonnées et le plan de projection nouveau par le plan projetant de l'axe coordonné OZ. Ce plan coupera le triangle suivant la hauteur AD et le trièdre, d'un côté suivant l'axe coordonné OZ et de l'autre suivant la ligne de pente OD de la face horizontale XOY. Les trois lignes ainsi obtenues forment un triangle rectangle dont AD est l'hypothénuse et l'origine O le sommet de l'angle droit. Rabattons ce triangle dans le plan ABC autour de AD. Le triangle ADO′ peut être construit; on en donne l'hypothénuse AD et la projection, sur cette ligne, du sommet de l'angle droit.

Le plan projetant de l'axe coordonné OY contient OY, coupe ABC suivant OB et le plan projetant de l'axe coordonné OZ suivant une normale à ABC passant par O et dont la vraie longueur est OO′. Ces trois lignes, OO′, OB et l'axe OY forment un triangle rectangle dont O est le sommet. Ramenons le plan projetant qui contient ce triangle dans le plan projetant de l'axe coordonné OZ, et rabattons-le ensuite autour de OB′ sur le plan ABC. Le triangle OO′B′ sera le rabattement du triangle rectangle situé dans le plan projetant de l'axe coordonné OY.

Le plan projetant de l'axe coordonné OX donne également un triangle rectangle que nous avons rabattu comme le précédent en OO′C′.

Portons actuellement une même longueur L sur les hypothénuses O′A, O′B′ et O′C′, rabattements des axes coordonnés OZ, OY et OX. Ces longueurs O′$h$, O′$k$ et O′$m$ projetées sur le plan ABC sont égales respectivement aux longueurs $hh'$, $kk'$ et $mm'$.

Désignons la valeur $hh'$, projection d'une longueur L de l'axe coordonné OZ sur $Oz$, par $Lz$.

$\frac{Lz}{L} = Qz$ indiquera le rapport de réduction de la projection $Lz$ à la longueur L de l'axe coordonné OZ. Une longueur quelconque de OZ, projetée sur $Oz$, se trouve réduite dans le rapport $\frac{Lz}{L} = Qz$.

Pareillement, en désignant par $Lx$ et $Ly$ ce que devient la longueur L comptée sur OX ou sur OY, quand elle est projetée sur $Ox$ ou sur $Oy$, nous aurons : $\frac{Lx}{L} = Qx$ et $\frac{Ly}{L} = Qy$ pour les rapports de réduction des projections sur $Ox$ ou $Oy$ d'une longueur de OX ou de OY à cette longueur.

$Qx$, $Qy$ et $Qz$ sont donc des *rapports de réduction* propres aux axes de projection $Ox$, $Oy$ et $Oz$.

**Remarques.** I. L'angle ODO′ est l'angle de pente du trièdre des coordonnées.

II. Nous voyons, par les deux problèmes qui précèdent, qu'il suffit de donner l'angle de direction et l'angle de pente du trièdre des coordonnées pour avoir la direction des axes de projection et le rapport dans lequel varie une longueur donnée L, comptée sur chacun des trois axes coordonnés, lorsqu'elle est projetée sur les axes de projection correspondants.

III. Il est évident que, sachant ce que devient la longueur L comptée sur OZ lorsqu'elle est projetée sur l'axe $Oz$, on pourra, par une construction graphique très simple, voir ce que devient une longueur quelconque R de l'axe coordonné OZ en projection sur l'axe de projection $Oz$.

En effet, un angle quelconque (**Fig. 7**) ayant pour côtés L et $Lz$ donne immédiatement, pour la longueur OR de l'axe OZ, une valeur OR′ pour la projection de OR sur l'axe de projection $Oz$.

On a, en effet, $\frac{Lz}{L} = Qz$ et $\frac{Lz}{L} = \frac{OR'}{OR}$ d'où $OR' = OR\ Qz$.

IV. La remarque n° III sert de base à la construction des *échelles axonométriques*.

V. Les rapports $Qx$, $Qy$ et $Qz$ varient suivant les plans de figure

2.

que l'on adopte et deviennent $Qx = 1/2$, $1/3$, $3/4$, $4/5$, etc. Il en sera de même de $Qy$ et de $Qz$, et il est à remarquer qu'en général, pour un même plan de figure P, les rapports $Qx$, $Qy$ et $Qz$ sont différents.

**8. Problème III.** *Une longueur* L *portée sur les trois axes coordonnées est réduite sur les trois axes de projection dans des rapports connus, construire ces axes.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Seient | $r$ | les projections de | respectivement | $Ox$ | $c$ | sont les angles de |
| | $s$ | la longueur L | sur les axes | $Oy$ dont | $b$ | pente sur le plan |
| | $t$ | | de projection | $Oz$ | $a$ | de figure P. |

On aura : $r = L \cos c$

$s = L \cos b$

$t = L \cos a$

Si $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les angles que font les axes coordonnés (lignes se rencontrant à angle droit à l'origine O) avec la projetante passant par l'origine, on aura :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,;$$

$$\text{et } \cos^2 c + \cos^2 b + \cos^2 a = 2\,;$$

De cette dernière égalité, on tire $r^2 + s^2 + t^2 = 2\,L^2$. Cette relation nous donne la valeur de L, que l'on peut d'ailleurs construire graphiquement comme suit :

*Construction de* L. Le triangle rectangle $nfm$ (**Fig. 8**), a pour côtés de l'angle droit $s$ et $r$. Sur l'hypothénuse $nm$, et avec $no = t$ comme deuxième côté de l'angle droit $n$, on construit un nouveau triangle rectangle. Sur l'hypothénuse $om$, on décrit une demi-circonférence de cercle, et on mène le rayon $pq$ normal au diamètre $Om$. La longueur $qm$ sera égale à L.

En effet, $\overline{qm}^2 = 2\overline{pm}^2 = \frac{2}{4}\overline{om}^2 = \frac{2}{4}(t^2 + \overline{nm}^2) = \frac{1}{2}(t^2 + s^2 + p^2) = L^2$.

La valeur de L connue nous permet de construire les angles de pente des axes coordonnés sur le plan de figure.

*Construction des angles $a$, $b$ et $c$.* Sur une longueur $uv = r$ (**Fig. 9**), on construit un triangle rectangle dont $r$ est un des côtés de l'angle droit et L l'hypothénuse ; $wvn$ sera l'angle de pente $c$ de l'axe coordonné OX.

On construit de même les angles de pente $b$ et $a$ et on remarque que l'angle $a$ est en même temps le complément de l'angle de pente $i$ du trièdre des coordonnées.

*Construction des axes de projection.* Supposons l'origine en O (**Fig. 10**), et l'axe de projection $Oz$ dans la direction adoptée pour la verticale. Le plan projetant de l'axe coordonné ZO coupe le plan P et le trièdre suivant un triangle rectangle. Comme l'angle de pente de l'axe coordonné OZ est connu, le rabattement de ce triangle autour de sa base sur le plan P se trouvera en ZO'M. Le sommet M est donc un point du plan P et du plan coordonné horizontal XOY, dont OM est la projection de la ligne de plus grand pente qui passe par l'origine.

La trace de la face YOX du trièdre des coordonnées sur le plan P passera donc par M et sera normale en ce point à OM.

Le plan projetant de l'axe coordonné OY, ramené par rotation dans le plan projetant de l'axe OZ et rabattu ensuite sur P nous donne, après rabattement, le triangle rectangle OO'A', dans lequel OO' est connu ainsi que l'angle de pente $b$ de l'axe coordonné OY. Le point A' ramené en A sur MA sera la trace sur P de l'axe coordonné YO lequel axe se projette sur l'axe de projection $Oy$.

On trouvera, par une construction et un raisonnement analogues aux précédents, le point B et par suite l'axe de projection $Ox$.

*Vérifications.* En joignant les points A, B et C, on obtient le triangle ABC, section faite par le plan de figure P dans le trièdre trirectangle des coordonnées. Les axes de projection doivent coïncider avec les hauteurs de ce triangle (**7**).

*Conditions de possibilité du problème.* Nous savons que $L \cos c = r$

d'où $\cos^2 c = \dfrac{2r^2}{r^2+s^2+t^2}$

Or, pour que l'angle $c$ soit réel, il faut que la fraction $\dfrac{2r^2}{r^2+s^2+t^2}$ soit $< 1$ ou que $r^2 < t^2+s^2$.

On trouvera de même que

les angles $\left\{ \begin{array}{l} b \\ a \end{array} \right.$ sont réels si $\left\{ \begin{array}{l} s^2 < r^2 + t^2 \\ t^2 < r^2 + s^2. \end{array} \right.$

—

## Du choix du plan de figure et des trois systèmes axonométriques.

—

**9.** Le plan de figure peut être choisi de manière qu'un plan qui lui est parallèle coupe le trièdre trirectangle des coordonnées suivant un triangle équilatéral, isoscèle ou scalène.

Voyons quelles sont, pour ces trois cas, les directions des axes et les rapports de réduction $Qx$, $Qy$ et $Qz$.

**Premier cas.** *La section par un plan parallèle à* P *est un triangle équilatéral.*

Les axes de projection dirigés suivant les hauteurs du triangle équilatéral ABC (**fig. 11**) font entre eux des angles égaux valant chacun 120°.

Les longueurs OA, OC et OB étant égales, puisque le point O est le centre du triangle ABC, on en déduit que les rapports de réduction $Qx$, $Qy$ et $Qz$ sont égaux.

Le point O étant la projection du sommet du trièdre des coordonnées, les trois plans projetants des axes coordonnés se coupent suivant la normale abaissée de O sur P. Cette normale est le côté commun aux trois triangles rectangles formés par cette perpendiculaire et chaque fois par un axe coordonné et son axe de projection correspondant.

En rabattant ces trois triangles sur le plan P, on aura les angles de pente $a$, $b$ et $c$ des axes coordonnés ; ces angles sont égaux.

Donc, si la section est un triangle équilatéral :

1° Les axes de projection se coupent sous des angles de 120° ;

2° Les angles de pente des axes coordonnés sont égaux ;

3° Les rapports de réduction $Qx$, $Qy$ et $Qz$ sont égaux.

Le système de projection qui correspondant à ce cas particulier est le *système axonométrique isométrique.*

Les rapports de réduction étant égaux pour les trois axes, une même échelle, une même mesure permettra l'évaluation des grandeurs sur chacun de ces axes.

**IIme cas.** *La section faite par un plan parallèle à* P *est un triangle isoscèle.*

Puisque les axes coordonnés se projettent sur ce plan suivant les hauteurs du triangle ABC nous voyons que :

1° Deux des trois axes de projection font avec le troisième des angles égaux tels que V et V';

2° Le troisième axe de projection a la direction de la bissectrice de l'angle des deux premiers ;

3° Les angles de pente de deux axes coordonnés sont égaux et différents de l'angle de pente du troisième axe ;

4° Les rapports de réduction sont égaux pour les deux axes qui correspondent aux axes coordonnés dont les angles de pente sont égaux.

Ainsi, pour notre figure, nous aurons $Qx = Qy$ et $Qz$ différent de $Qx$ et de $Qy$.

Les rapports de réduction étant égaux pour deux axes, une même échelle conviendra pour la mesure des longueurs sur ces axes, tandis que pour le troisième il faudra se servir d'une nouvelle échelle tirée du rapport de réduction qui caractérise cet axe. Le système de projection est dit *axonométrique dimétrique*.

**III^me^ cas.** *La section faite par un plan parallèle à* P *est un triangle scalène.*

Dans ce cas, les trois axes de projection font entre eux des angles inégaux, les angles de pente des trois axes coordonnés sont inégaux ainsi que les rapports de réduction $Qx$, $Qy$ et $Qz$.

A chaque axe de projection correspondra une échelle particulière et le système correspondant est dit *axonométrique trimétrique*.

**10**. Les trois systèmes axonométriques précédents sont caractérisés par les directions des axes de projection et par les rapports de réduction.

Ces rapports $Qx$, $Qy$ et $Qz$ peuvent être égaux ou se trouver dans un certain rapport qui varie avec l'inclinaison plus ou moins grande du plan de figure. Chaque rapport entre les coefficients $Qx$, $Qy$ et $Qz$ donne des images différentes, et l'expérience a prouvé que les rapports qui donnent les dessins les plus favorables sont les suivants :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Qx = Qy = Qz$ | désigné par la not. | | | $1 : 1 : 1$ | Syst. isométrique. |
| $Qx = 1$ $Qy = 3/4$ $Qz = 1$ | » | » | » | $1 : 3/4 : 1$ | Syst. dimétrique. |
| $Qx = 1$ $Qy = 2/3$ $Qz = 1$ | » | » | » | $1 : 2/3 : 1$ | idem. |
| $Qx = 1$ $Qy = 1/2$ $Qz = 1$ | » | » | » | $1 : 1/2 : 1$ | idem. |
| $Qx = 1$ $Qy = 1/3$ $Qz = 1$ | » | » | » | $1 : 1/3 : 1$ | idem. |
| $Qx = 1$ $Qy = 1/2$ $Qz = 9/10$ | » | » | » | $1 : 1/2 : 9/10$ | Syst. trimétrique |
| $Qx = 1$ $Qy = 9/10$ $Qz = 1/2$ | » | » | » | $1 : 9/10 : 1/2$ | idem. |
| $Qx = 1$ $Qy = 10/9$ $Qz = 5/9$ | » | » | » | $1 : 10/9 : 5/9$ | idem. |

**11.** En général, on peut se donner des éléments pour n'importe quel système et en calculer ou construire graphiquement les autres, comme nous l'avons montré dans les trois problèmes principaux de l'axonométrie.

Que l'on parte des angles que font entre eux les axes de projection, des rapports de réduction, ou des angles de direction et de pente du trièdre, il nous sera toujours possible de calculer ou de construire tous les autres éléments.

Ces éléments ont été calculés, construits et mesurés exactement pour beaucoup de systèmes; on les a rangés dans des tables qui rendent des services marqués dans les constructions graphiques à exécuter dans un système donné.

Nous résumons dans le tableau ci-après quelques unes des données qui caractérisent les systèmes les plus favorables et les plus employés.

| RAPPORTS DES COEFFICIENTS DE RÉDUCTION | VALEUR DES RAPPORTS L étant l'unité | | | ANGLES DES AXES DE PROJECTION | | | ANGLE DE PENTE DU TRIÈDRE | ANGLE DE PENTE DE L'AXE COORDONNÉ VERTICAL | ANGLE DE DIRECTION DU TRIÈDRE | SYSTÈMES |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Qx$ | $Qy$ | $Qz$ | Z et X | $x$ et $y$ | $y$ et $z$ | | | | |
| 1 : 1 : 1 | 0,816 | 0,816 | 0,816 | 120° | 120° | 120° | 54°,44′ | 35°,16′ | 45° | Isométrique |
| 1 : 3/4 : 1 | 0,883 | 0,662 | 0,883 | 106°,20′ | 126°,50′ | 126°,50′ | 62°,4′ | 37°,26′ | 57°,58′ | Dimétrique |
| 1 : 2,3 : 1 | 0,904 | 0,603 | 0,904 | 102°,50′ | 128°,35′ | 128°,35′ | 64°,45′ | 25°,15′ | 61°,35′ | idem |
| 1 : 1/2 : 1 | 0,942 | 0,471 | 0,942 | 97°,11′ | 131°,24′ | 131°,24′ | 70°,32′ | 29°,28′ | 69°,18′ | idem |
| 1 : 1/3 : 1 | 0,973 | 0,324 | 0,973 | 93°,11′ | 133°,24′ | 133°,24′ | 76°,44′ | 23°,16′ | 76°,22′ | idem |
| 1 : 1,2 : 9/10 | 0,985 | 0,493 | 0,887 | 95°,11′ | 157° | 107°,49′ | 80°,10′ | 9°,50′ | 62°,42′ | Trimétrique |
| 1 9/10 : 1/2 | 0,985 | 0,887 | 0,493 | 95°,11′ | 107°,49′ | 157° | 80°,10′ | 9°,50′ | 27°,58′ | idem |