# Probabilistische Methoden in Analysis und Zahlentheorie
# *Probabilistic Methods in Analysis and Number Theory*

Christoph Aistleitner

**2016 wurde der Start-Preis des FWF (Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung) an das Projekt „Probabilistische Methoden in Analysis und Zahlentheorie" an der TU Graz vergeben.**

Die Hearings des Start-Preises fanden in der Österreichischen Nationalbank statt – nach längerer Wartezeit, die sich die Nominierten mit einem Spaziergang durch die umfangreiche Ausstellung vertreiben konnten, dauerte das Hearing selbst nur wenige Minuten. Ein Anruf aus dem FWF-Präsidium informierte mich dann bald, dass mein Projekt genehmigt wurde. Ich war erleichtert – nur rund zehn Prozent der Nominierten erhalten auch einen Preis.

Das Projekt spaltet sich auf recht natürliche Weise in zwei Teile: Ein Teil ist eher grundlagenorientiert und fokussiert auf Fragen aus Analysis und Zahlentheorie. Der zweite Teil ist anwendungsnäher und beschäftigt sich mit Fragen aus der numerischen Mathematik und Computermathematik.

### Grundlagen

Eines der Themen meiner Forschungsarbeit ist die metrische Zahlentheorie – eine Theorie, die sich mit „typischen" Eigenschaften reeller Zahlen beschäftigt. Dazu sollte man sagen, dass es in der Mathematik verschiedene Größenordnungen von unendlich gibt, nämlich „abzählbar unendlich" und „überabzählbar unendlich". Abzählbar unendlich sind Mengen, die man auf einer unendlichen Liste aufschreiben könnte, immer ein Element nach dem anderen – von dieser Größenordnung sind etwa die ganzen Zahlen oder (etwas überraschend) die Menge der rationalen Zahlen, also der Bruchzahlen. Die reellen Zahlen hingegen (also alle Zahlen, die sich in unendlicher Dezimalentwicklung schreiben lassen) sind überabzählbar – man könnte sie also auch auf einer unendlichen Liste nicht eine nach der anderen aufschreiben. Das alles ist vielleicht etwas irritierend, wenn man es das erste Mal >

***TU Graz's Institute of Analysis and Number Theory was awarded the FWF START Prize in 2016.***

*The hearings for the FWF START Prize took place in rooms of the Austrian National Bank. After some waiting time, during which the nominees could entertain themselves by visiting the huge exhibition, the hearings only took a few minutes. The phone call from the steering committee of the FWF soon informed me that our project had been granted. Initially I was relieved – because only ten per cent of the nominees are granted an award.*

*My project is split into two parts, one of a more fundamental nature concerning questions on analysis and number theory, and one concerning questions arising from "real-world" applications of mathematics.*

### *Basics*

*One of my research topics is metric number theory – a theory concerned with the properties of "typical" real numbers. Here one should note that in mathematics there are different sizes of "infinities", namely "countably infinite" and "uncountably infinite". A set is countably infinite if one could write down its elements on an infinite list one after another. The integers are of this cardinality, as are (somewhat surprisingly) the rational numbers, that is, fractions. In contrast, the real numbers (all numbers that can be written as an infinite decimal expansion) are uncountable – even on an infinite list one could not write all of them one after another. This might be somewhat irritating, and it probably does not come as a surprise that Georg Cantor, who developed this theory, met heavy resistance in the mathematical community at first (though his ideas are generally accepted today). To come back to metric number theory: since we now know that there are very many real numbers, it does not make sense to investigate them one after another, instead it makes sense to find properties which hold for all* >

Christoph Aistleitner ist Associate Professor am Institut für Analysis und Zahlentheorie der TU Graz.

*Christoph Aistleitner is an associate professor at the Institute of Analysis and Number Theory at TU Graz.*

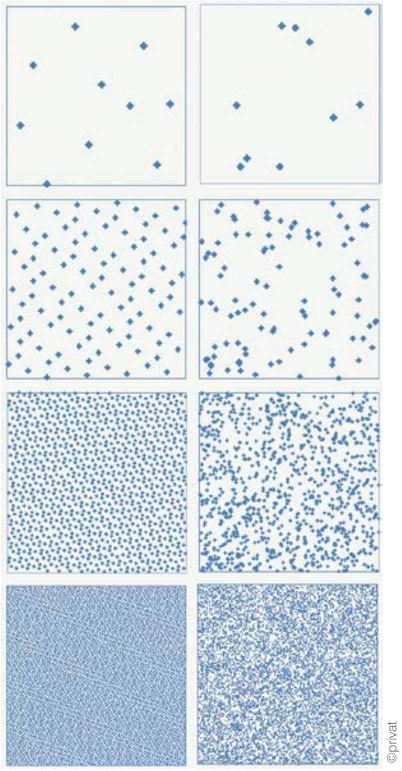



**Abbildung 1: Zufällige Punkte (rechte Spalte) und spezielle, sehr gleichmäßig verteilte Punkte (sogenannte Niedrigdiskrepanz-Punkte, linke Spalte). In der obersten Zeile 10, dann 100, 1.000 und schließlich 10.000 Punkte. Die Punkte rechts entsprechen der Monte-Carlo-Methode, die Punkte links der Quasi-Monte-Carlo-Methode. Die Niedrigdiskrepanz-Punkte füllen das Quadrat regelmäßiger als die zufälligen Punkte – sie sind zur numerischen Integration daher besser geeignet.**

*Figure 1: Random points (right column) and specially designed non-random points (so-called low-discrepancy points, left column). In the first row there are 10, then 100, 1000, and finally 10,000 points. Random points correspond to the Monte Carlo method, low-discrepancy points to the quasi-Monte Carlo method. The low-discrepancy points fill the square more evenly – accordingly they are better suited for numerical integration.*

hört, und es ist nicht überraschend, dass Georg Cantor, der Entwickler dieser (heute allgemein anerkannten) Theorie der Unendlichkeiten zunächst heftig angefeindet wurde. Um zur metrischen Zahlentheorie zurückzukommen: Da es also sehr viele reelle Zahlen gibt, kann man nicht versuchen, sie eine nach der anderen zu untersuchen. Stattdessen ist es naheliegend, Eigenschaften zu finden, die (in einem sehr genauen Sinn) für alle „typischen" reellen Zahlen gelten. So taucht etwa bei einer typischen reellen Zahl die Ziffer 0 nach dem Dezimalpunkt (asymptotisch) gleich oft auf wie die Ziffer 1. Wenn der Leserin oder dem Leser all das unbegreiflich ist, dann wird sie oder er zumindest glauben, dass es sich bei diesem Teil um den eher theoretischen Teil des Projekts handelt – von Anwendungen in der sogenannten wirklichen Welt ist all das tatsächlich recht weit weg. Für die Mathematikerin bzw. den Mathematiker ist das freilich kein Hinderungsgrund – ganz im Gegenteil, wenn, wie auf diesem Gebiet, verschiedene mathematische

*"typical" (in a very precise sense) real numbers. For example, a typical real number has as many zeros in its decimal places as it has ones. If any of this does not make any sense to the reader, then at least he will believe that such questions are of a rather fundamental nature and somewhat detached from the so-called real world. For the mathematician this is not a problem. However, if many many different mathematical areas come together in a mathematical field (such as in our case number theory, Fourier analysis, probability theory and ergodic theory) and little by little one comes to realize the hidden connections between different phenomena, then this gives the mathematician great pleasure.*

***Practical application***

*Assume you want to calculate an integral, namely the average depth of a lake (yes, that is given by an integral). You cannot obtain a precise solution, so you need an approximation method. One possibility is the Monte Carlo method. Here, you take a large number of random points on the surface of the lake and determine the depth at these points, then the average depth of the lake will be roughly as large as the average depth at these sampling points. However, the size of the error will depend on the random choice of sampling points – where it is not clear how "random" points can actually be chosen. Another method is the quasi-Monte Carlo method. Here, rather than taking random sampling points, you take carefully chosen (non-random) sampling points. One can show that this method often performs much better than the Monte Carlo method. Now imagine that rather than a two-dimensional integral (such as the average depth of the lake) you want to calculate a 1000-dimensional integral. That may sound absurd, since everybody knows that the "real world" is only three-dimensional. However, high-dimensional integrals are extremely important for applications – for example, if you want to calculate the expected loss in an insurance contract for 1000 insured persons, then mathematically this is a 1000-dimensional integral. Again, the quasi-Monte Carlo-method can give very good results – but many questions are still open, including very partial ques-*


**Abbildung 2: Christoph Aistleitner (links) mit seinem Sohn Paul und dem (damaligen) Staatssekretär Harald Mahrer bei der Verleihung des FWF-Start-Preises 2015 in Wien.**

*Figure 2: Christoph Aistleitner (left) and his son Paul together with (former Secretary of State Harald Mahrer at the "FWF Start-Preise 2015" award show in Vienna.*

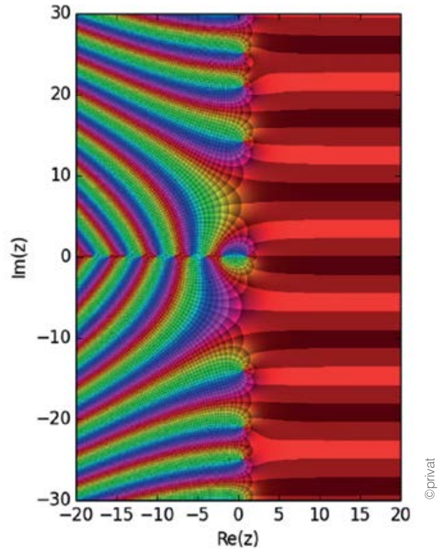
Disziplinen ineinandergreifen (zum Beispiel Zahlentheorie, Fourier-Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Ergodentheorie) und sich nach und nach die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Phänomenen offenbaren, dann ist das ein wunderbarer intellektueller Genuss.

**Praxis**

Stellen Sie sich vor, Sie wollen ein Integral berechnen, und zwar die durchschnittliche Tiefe eines Gewässers. Eine exakte Lösung zu bekommen, ist unmöglich, daher verwenden Sie eine Näherungsmethode. Eine Möglichkeit wäre die sogenannte Monte-Carlo-Methode: Sie wählen eine große Zahl von zufälligen Punkten auf der Seeoberfläche und bestimmen dort die Tiefe des Sees – die tatsächliche durchschnittliche Seetiefe wird dann ungefähr so groß sein wie der Durchschnittswert an diesen zufälligen Punkten. Der Fehler allerdings wird von der zufälligen Auswahl der Messpunkte abhängen – wobei auch nicht ganz klar ist, wie man „zufällige" Punkte überhaupt auswählt. Die sogenannte Quasi-Monte-Carlo-Methode folgt einem anderem Prinzip – statt rein zufälliger Punkte verwenden Sie sorgfältig ausgewählte (nicht-zufällige) Messpunkte. Man kann zeigen, dass diese Methode oft ein deutlich besseres Ergebnis liefert. Und jetzt stellen Sie sich vor, Sie wollen nicht ein zweidimensionales Integral (wie im Beispiel der durchschnittlichen Seetiefe) berechnen, sondern ein tausenddimensionales. Das klingt für den Laien vielleicht absurd (schließlich ist die „normale" Welt nur dreidimensional), ist aber für Anwendungen extrem wichtig – wenn Sie beispielsweise den erwarteten Schaden bei der Versicherung mit 1.000 Versicherungsnehmerinnen und -nehmern berechnen wollen, dann ist das eben ein 1.000-dimensionales Integral. Wieder kann die Quasi-Monte-Carlo-Methode gute Ergebnisse liefern – aber viele Fragen sind für solche Probleme noch offen, und zwar ganz praktische Probleme von der Sorte: Bis zu welcher Größenordnung kann ich das Ergebnis effizient am Computer berechnen lassen? Wie wirkt sich eine Erhöhung der Dimension aus? Kann ich nur einfache oder auch komplizierte Funktionen integrieren?

So weit eine kurze Beschreibung der Themen, die dem Projekt zugrunde liegen. Die tatsächlichen Forschungsfragen sind natürlich deutlich spezialisierter und deutlich komplexer. Gemeinsam mit mir arbeiten zwei Postdoc-Wissenschafter und ein Doktoratsstudent in diesem Projekt. Alle drei Stellen wurden international ausgeschrieben, und für alle drei Ausschreibungen gab es eine sehr große Zahl an (qualifizierten) Bewerbungen – für mich eine deutliche Bestätigung der Attraktivität der TU Graz für junge internationale Wissenschafterinnen und Wissenschafter. ■

*tions such as: up to which size can the quasi-Monte Carlo method be efficiently implemented on a computer? What happens when the number of dimensions is increased? Can I only integrate simple functions or also irregular ones?*




*Of course, the actual research topics in our project are much more focused, and much more complex as well. I am working in this project together with two postdoc researchers and one PhD student. All three positions were advertised internationally, and in all three cases there was a very large number of (qualified) applicants. For me this is a clear confirmation that the TU Graz is an attractive place for young international scientists.* ■

**Abbildung 3:**
**Die Riemannsche zeta-Funktion „verschlüsselt" viele Eigenschaften von zahlentheoretischem Interesse, etwa die Anzahl an Primzahlen bis zu einer gewissen Größenordnung. Die Funktion ändert zwischen Realteil 0 und 1 (untere Achse) ihr Verhalten – die Erforschung der zeta-Funktion in diesem „kritischen Bereich" gehört zu den Themen dieses Projekts, und zu den wichtigsten mathematischen Problemen überhaupt.**

***Figure 3:***
***The Riemann zeta function encodes information of number-theory interest, such as the number of primes below a given bound. The function changes its behaviour between real part 0 and 1 (bottom axis). The investigation of the zeta function in this "critical strip" is among the topics of our project, and is also one of the most important unsolved mathematical problems.***