



Julia Resch, BSc

Analyse eines hochdimensionalen Portfolios unter Verwendung von Faktor-Copulas

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuerin:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Eranda Dragoti-Cela

Institut für Diskrete Mathematik

Graz, Juli 2017

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wortlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRA-Zonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum/Date

Unterschrift/Signature

Kurzfassung

Einen unerlässlichen Bestandteil der Portfolioanalyse bildet die Beschreibung der Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Portfoliobestandteilen. Ein nützliches und weitverbreitetes Konzept hierfür sind Copulas. Da Portfolios in der Regel eine große Anzahl an Vermögenswerten umfassen, die meisten in der einschlägigen Literatur zu findenden Standard-Copulas jedoch für höhere Dimensionen nicht ausreichend flexibel sind, beschäftigt sich diese Arbeit mit sogenannten Faktor-Copulas. Diese basieren auf einer einfachen Faktorstruktur und weisen im Speziellen für hochdimensionale Anwendungen trotz einer nicht allzu großen Anzahl an Parametern ein ausreichendes Maß an Flexibilität auf. Darüber hinaus können Faktor-Copulas derart konstruiert werden, dass sie eine Modellierung von Abhängigkeiten, die sich im Zeitverlauf verändern, ermöglichen. Anhand eines Portfolios bestehend aus Aktien, die allesamt an der Frankfurter Börse gehandelt werden, folgt schließlich ein Vergleich von verschiedenen Copulamodellen hinsichtlich des geschätzten Value-at-Risk. Hier wird neben einigen wenigen Standard-Copulas eine Vielzahl an Faktor-Copulas betrachtet. Die empirischen Tests zeigen auf, dass den Faktor-Copula Modellen gegenüber den Standard-Copulas stets der Vorzug zu geben ist.

Abstract

An essential part of the portfolio analysis is the description of the dependence structure between the individual portfolio components. For this purpose the useful and widespread concept of copulas is considered. Taking into account that portfolios usually comprise a large number of assets but most standard copulas found in the relevant literature are not sufficiently flexible for higher dimensions, a different approach needs to be pursued. Therefore, this thesis deals with so-called factor copulas. These are based on a simple factor structure and ensure a sufficient degree of flexibility with a not too high number of parameters, so that they are particularly attractive for high dimensional applications. In addition, factor copulas can be constructed in a way that allows one to model time-varying dependence structures. Finally, we apply various copula models to a portfolio consisting of shares, which are all traded on the Frankfurt Stock Exchange, and compare them with respect to the estimated Value-at-Risk. In this context, a few standard copulas as well as a number of factor copulas are considered. The empirical tests show that factor copulas should always be preferred to standard copulas.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	v
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der Copula-Theorie	3
2.1 Definition einer Copula	3
2.2 Der Satz von Sklar	8
2.3 Eigenschaften von Copulas	12
2.3.1 Copulas und Zufallsvariablen	12
2.3.2 Fréchet-Hoeffding-Schranken	13
2.3.3 Dichte einer Copula	16
2.4 Abhängigkeitsmaße	19
2.4.1 Kendall's Tau und Spearman's Rho	19
2.4.2 Tail-Abhängigkeit	24
2.5 Ausgewählte Familien parametrischer Copulas	25
2.5.1 Elliptische Copulas	26
2.5.2 Archimedische Copulas	32
2.6 Bedingte Copulas	36
3 Faktor-Copulas	41
3.1 Faktormodelle	41
3.2 Ein-Faktor-Copula Modell	45
3.3 Multi-Faktor-Copula Modell	50
3.4 Nicht-lineares Faktor-Copula Modell	52
3.5 Zeitvariierendes Ein-Faktor-Copula Modell	53
4 Ein dynamisches Copulamodell für hochdimensionale Datensätze	57
4.1 Beschreibung des Modells für die bedingte gemeinsame Verteilung	57
4.2 GAS-Dynamik	59
4.2.1 GAS-Dynamik für hochdimensionale Daten	62
4.2.2 Ein alternativer Ansatz: "variance targeting"-Methode	63

5	Empirische Analyse	67
5.1	Beschreibung der Daten	67
5.2	Verfahren zur Schätzung der Parameter	71
5.3	Modellierung der Randverteilungen	73
5.4	Copulas	75
5.4.1	Standard-Copulas	76
5.4.2	Faktor-Copulas	77
5.5	Das Risikomaß „Value-at-Risk“	82
5.5.1	Value-at-Risk: Theoretische Grundlagen	82
5.5.2	Value-at-Risk: Portfolioanalyse	83
6	Zusammenfassung und Ausblick	89
	Literaturverzeichnis	91

Abbildungsverzeichnis

2.1	Eine monoton wachsende Funktion T (links) und ihre verallgemeinerte Inverse T^{\leftarrow} (rechts).	9
2.2	Funktionsgraph und Höhenlinien der Copulas $W^2(u_1, u_2)$ (links), $\Pi^2(u_1, u_2)$ (Mitte) sowie $M^2(u_1, u_2)$ (rechts).	14
2.3	Spearman's ρ_S , als Funktion von Kendall's τ , für eine gegebene Copula.	23
2.4	Dichtefunktion und Höhenlinien der elliptischen Verteilung $E_2(\mathbf{0}, \Sigma, \psi)$ mit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}$ und $\psi(x) = \exp(-x/2)$.	28
2.5	Höhenlinien der durch die Clayton Copula, die Gumbel Copula sowie die Frank Copula festgelegten bivariaten Dichtefunktionen, wobei alle Ränder standardnormalverteilt sind.	37
3.1	Scatterplots von vier bivariaten Verteilungen, alle mit standardnormalverteilten Rändern und einer linearen Korrelation von 0.5, konstruiert mit vier verschiedenen Copulas (vgl. Oh und Patton [36]).	48
3.2	Quantil-Abhängigkeit für vier Faktor-Copulas, alle mit einer linearen Korrelation von 0.5 (vgl. Oh und Patton [36]).	49
5.1	Log>Returns des Portfolios im Zeitraum vom 5. Januar 2010 bis 30. Dezember 2015.	69
5.2	Log>Returns der einzelnen Aktien im Zeitraum vom 5. Januar 2010 bis 30. Dezember 2015.	70
5.3	Geschätzte Faktorladungen $\{\beta_t\}_{1 \leq t \leq T}$ der dynamischen als auch der statischen schiefen t - Student-t Faktor-Copula mit homogener Abhängigkeit.	81
5.4	Geschätzte Faktorladungen $\{\beta_{g(i),t}\}_{1 \leq t \leq T}$, $1 \leq g(i) \leq 4$ der dynamischen als auch der statischen schiefen t - Student-t Faktor-Copula mit Blockabhängigkeit für Firmen aus demselben Industriezweig.	81
5.5	Geschätzte Faktorladungen $\{\beta_{i,t}\}_{1 \leq t \leq T}$, $1 \leq i \leq 5$, (für alle 5 Aktien des Teilportfolios) der schiefen t - Student-t Faktor-Copula mit heterogener Abhängigkeit.	87

Tabellenverzeichnis

2.1	Generator $\varphi(u)$, Parameter α und Verteilungsfunktion $C(u_1, \dots, u_n)$ ausgewählter archimedischer Copulas.	34
2.2	Kendall's Tau sowie die Koeffizienten der unteren und oberen Tail-Abhängigkeit für ausgewählte archimedische Copulas.	36
3.1	Beispiele für nicht-lineare Faktor-Copula Modelle.	52
5.1	In der empirischen Analyse verwendete Aktien inklusive deren Einteilung in die verschiedenen Blöcke.	68
5.2	Statistische Kennwerte des betrachteten Datensatzes.	69
5.3	Geschätzte Parameter der bedingten Erwartungswerte, der bedingten Varianzen sowie der schiefen t-Verteilung für alle betrachteten Aktien.	74
5.4	Simulationsbasierte p -Werte des Kolmogorov-Smirnov-Tests als auch des Cramér-von Mises-Tests für die Modelle der bedingten Randverteilungen, jeweils mit 500 Simulationen.	75
5.5	Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium der Standard-Copulas der standardisierten Residuen.	76
5.6	Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 6 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit homogener Abhängigkeit zwischen den Variablen.	79
5.7	Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 6 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit Blockabhängigkeit für Firmen aus demselben Industriezweig.	79
5.8	Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 3 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit heterogener Abhängigkeit zwischen den Variablen.	80
5.9	Anteil an Überschreitungen des simulierten Portfolio-VaR zum Konfidenzniveau α sowie die dazugehörigen p -Werte des Christoffersen-Tests für die verschiedenen Modelle.	84

5.10	Aktien des Teilportfolios zur detaillierten Untersuchung des heterogenen Faktor-Copula Modells.	86
5.11	Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 3 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit heterogener Abhängigkeit zwischen den Variablen (für das aus 5 Aktien bestehende Teilportfolio).	86
5.12	Anteil an Überschreitungen des simulierten Portfolio-VaR (für das aus 5 Aktien bestehende Teilportfolio) zum Konfidenzniveau α sowie die dazugehörigen p -Werte des Christoffersen-Tests für die verschiedenen Modelle. .	88

1 Einleitung

Ein Aufgabenbereich, dem in der Finanzwelt eine entscheidende Bedeutung zukommt, ist die Schätzung des Risikos eines Portfolios, da dieses die potentiellen zukünftigen Verluste zum Ausdruck bringt. Ein bewährter Ansatz hierfür ist die Verwendung von Risikomaßen wie dem Value-at-Risk. Deren Schätzung erfordert jedoch, dass man die gemeinsame Verteilungsfunktion der Returns kennt, was mit wachsender Größe des Portfolios durchaus eine Herausforderung darstellen kann. Obwohl allgemein bekannt ist, dass die logarithmierten Returns von Finanzzeitreihen im Allgemeinen nicht normalverteilt sind und daher deren gemeinsame Verteilung nicht der multivariaten Normalverteilung entspricht, wird oftmals gerade diese zur Modellierung der Verteilung multivariater Finanzzeitreihen herangezogen. Anwendung findet dieser Ansatz vor allem im hochdimensionalen Bereich, da bei anderen Verteilungsfunktionen die große Anzahl an zu schätzenden Parametern mit einem hohen Rechenaufwand einhergeht, sodass sich deren Verwendung in der Praxis als nicht sinnvoll erweist. Da die multivariate Normalverteilung allerdings weder Asymmetrien, heavy Tails noch Tail-Abhängigkeiten erfassen kann, diese Charakteristiken jedoch häufig bei Variablen im Finanzbereich zu beobachten sind, ist es notwendig, andere multivariate Verteilungen zu finden. In diesem Zusammenhang kommen sogenannte *Copulas* zur Anwendung. Diese „koppeln“ die eindimensionalen Randverteilungen zu einer multivariaten Verteilungsfunktion und enthalten somit die gesamte Information über die Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Variablen.

Obwohl erste Ansätze für das Copula-Konzept bereits auf Hoeffding [25] zurückzuführen sind, tauchte das Wort Copula im mathematischen Sinn erstmals in einer von Abe Sklar verfassten Arbeit von 1959 auf (vgl. [45, Seite 229]). Während Copulas in der Folge jedoch für längere Zeit in Vergessenheit gerieten, begann das Interesse an diesem Thema erst ab Ende der 1990er Jahre stark anzusteigen, was sich auch in der Vielzahl an Publikationen widerspiegelt. Im Jahr 1999 veröffentlichte Roger B. Nelsen das Buch „An Introduction to Copulas“, das sich zu einem Standardwerk auf diesem Gebiet entwickelte. Einer der Hauptgründe für das bis heute ungebrochene Interesse an Copulas liegt in den zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten im Wirtschafts- und Finanzsektor, insbesondere in der Abhängigkeitsmodellierung von Finanzzeitreihen. Einen Überblick über copulabasierte Modelle für Finanzzeitreihen gibt Patton [41, 42]. Die Anwendung von Copulas auf multivariate Zeitreihen stellt hingegen ein noch junges Forschungsgebiet dar, dementsprechend fällt die dazu vorhandene Literatur gering aus. Einen allgemeinen Überblick zu diesem Thema gibt Patton [43].

In dieser Arbeit verwenden wir die relativ neue Klasse der zeitvariierenden Faktor-Copula Modelle, vorgestellt von Oh und Patton [37]. Diese Modellklasse, die eine dynamische Modellierung hochdimensionaler bedingter Verteilungen erlaubt, ist das Resultat aus der Kombination zweier bereits bestehender Modelle: Einerseits des Faktor-Copula Modells von Oh und Patton [38], das die Arbeit mit hochdimensionalen Daten ermöglicht und andererseits des Generalized Autoregressive Score Modells von Creal et al. [9], dessen Struktur eine dynamische Modellierung ermöglicht. Unter Verwendung des resultierenden Modells, das trotz einer nicht allzu großen Anzahl an Parametern ein hohes Maß an Flexibilität aufweist, erfolgt schließlich die Schätzung der Risikomaße.

Die vorliegende Masterarbeit ist wie folgt gegliedert: Kapitel 2 beschäftigt sich ausführlich mit den theoretischen Grundlagen der Copula-Theorie. Im Anschluss daran wird in Kapitel 3 die Klasse der Faktor-Copulas vorgestellt. Dabei wird zunächst im Detail auf das Ein-Faktor-Copula Modell eingegangen, bevor einige Erweiterungen davon besprochen werden. Eine mögliche Erweiterung stellt das dynamische Ein-Faktor-Copula Modell dar, welches Gegenstand der Diskussion in Kapitel 4 ist. Neben der Beschreibung zur Vorgehensweise der Dynamikerfassung wird das Copulamodell dahingehend spezifiziert, dass ein auch für hochdimensionale Daten leicht handhabbares Modell daraus resultiert. Schließlich werden in Kapitel 5 verschiedene Faktor-Copula Modelle anhand eines auf realen Marktdaten basierenden Aktienportfolios miteinander verglichen. Im abschließenden Kapitel 6 werden die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und ein Resümee wird gezogen.

2 Grundlagen der Copula-Theorie

Der Begriff *Copula* ist lateinischen Ursprungs und heißt soviel wie „Band, Bindemittel, Verbindung“ (vgl. Nelsen [35]). Im mathematischen Sinn werden damit jene Funktionen beschrieben, die die gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen mit den entsprechenden Randverteilungen verbinden. Denkt man etwa an die Modellierung multivariater Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen, so bietet einem das Copula-Konzept die Möglichkeit, die univariaten Randverteilungen, die das Verhalten der jeweiligen Zufallsvariable widerspiegeln, von der Abhängigkeitsstruktur zwischen diesen Variablen, welche mittels der Copula auf elegante Art und Weise modelliert werden kann, zu trennen.

Das Kapitel ist wie folgt gegliedert: Zunächst wird die mathematische Definition einer Copula präsentiert. Im Anschluss daran wird mit dem Satz von Sklar ein für die Copula-Theorie zentraler Satz eingeführt, der als Grundlage für die meisten Anwendungen des Copula-Konzepts dient. Nachfolgend werden einige wichtige Eigenschaften von Copulas besprochen sowie copulabasierte Abhängigkeitsmaße und ausgewählte parametrische Copulafamilien vorgestellt. Abgeschlossen wird das Kapitel mit der Erweiterung des Copula-Konzepts auf bedingte Verteilungsfunktionen. Als Grundlage dieses Kapitels dienen die Arbeiten von Nelsen [35], Cherubini et al. [5] und McNeil et al. [34], wobei im ersten Werk Lemmata und Sätze ausschließlich für den zweidimensionalen Fall bewiesen werden.

2.1 Definition einer Copula

Eine n -dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^n$ mit standard gleichverteilten Rändern. Um jedoch eine präzise mathematische Definition anführen zu können, werden zunächst einige grundlegende Begriffe und Notationen eingeführt.

Unter $\overline{\mathbb{R}}$ verstehen wir die erweiterte reelle Zahlengerade $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und unter $\overline{\mathbb{R}}^n$ entsprechend das kartesische Produkt $\overline{\mathbb{R}} \times \dots \times \overline{\mathbb{R}}$. Für beliebige Punkte $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)' \in \overline{\mathbb{R}}^n$ schreiben wir $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, falls $a_i \leq b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Weiters ist eine reellwertige Funktion F in n Variablen eine Funktion mit Definitionsbereich $Dom(F) \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n$ und Bildbereich $Ran(F) \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 2.1 (n -Quader). Seien $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)' \in \overline{\mathbb{R}}^n$ mit $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Ein n -dimensionaler Quader B (im Folgenden kurz als n -Quader bezeichnet) ist definiert als

das kartesische Produkt über n abgeschlossene Intervalle:

$$B := [\mathbf{a}, \mathbf{b}] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Die Eckpunkte des n -Quaders B sind die Punkte $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)'$ mit $c_i \in \{a_i, b_i\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definition 2.2 (F -Volumen). Seien S_1, \dots, S_n jeweils nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei F eine reellwertige Funktion in n Variablen mit $\text{Dom}(F) = S_1 \times \cdots \times S_n$. Weiters sei $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ein n -Quader, dessen Eckpunkte in $\text{Dom}(F)$ liegen. Dann ist das F -Volumen von B definiert durch

$$V_F(B) := \sum_{\substack{\mathbf{c} \text{ ist Eckpunkt} \\ \text{von } B}} \text{sgn}(\mathbf{c})F(\mathbf{c}).$$

Die Funktion $\text{sgn}(\mathbf{c})$ ist definiert durch

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } c_i = a_i \text{ für eine gerade Anzahl von } i\text{'s,} \\ -1, & \text{wenn } c_i = a_i \text{ für eine ungerade Anzahl von } i\text{'s.} \end{cases}$$

Äquivalent dazu kann das F -Volumens des n -Quaders $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ geschrieben werden als

$$V_F(B) = \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\cdots+i_n} F(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}),$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definition 2.3 (n -wachsend). Eine reellwertige Funktion F in n Variablen, die $V_F(B) \geq 0$ für alle n -Quader B , dessen Eckpunkte in $\text{Dom}(F)$ liegen, erfüllt, wird als n -wachsend bezeichnet.

An dieser Stelle sei festgehalten, dass eine n -wachsende Funktion nicht monoton wachsend in jeder Variable sein muss. Ebenso wenig gilt die Umkehrung, dass eine in jedem Argument monoton wachsende Funktion n -wachsend ist, wie die folgenden beiden Beispiele verdeutlichen.

Beispiel 2.4. Die Funktion

$$F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1], \quad (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$$

ist monoton wachsend in jeder Variable, da $\max\{x_1, y\} \leq \max\{x_2, y\}$ für alle $x_1, x_2, y \in [0, 1]$ mit $x_1 \leq x_2$ als auch $\max\{x, y_1\} \leq \max\{x, y_2\}$ für alle $x, y_1, y_2 \in [0, 1]$ mit $y_1 \leq y_2$. Allerdings ist F nicht 2-wachsend, da

$$V_F([0, 1]^2) = F(0, 0) - F(0, 1) - F(1, 0) + F(1, 1) = -1.$$

Beispiel 2.5. Betrachte die Funktion

$$F : [0, 1]^2 \rightarrow [-1, 1], \quad (x, y) \mapsto (2x - 1)(2y - 1).$$

Diese Funktion ist 2-wachsend, denn für beliebigen 2-dimensionalen Quader $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq [0, 1]^2$ gilt

$$\begin{aligned} V_F(B) &= F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(b_1, b_2) \\ &= 4a_1a_2 - 2a_1 - 2a_2 + 1 - 4a_1b_2 + 2a_1 + 2b_2 - 1 \\ &\quad - 4b_1a_2 + 2b_1 + 2a_2 - 1 + 4b_1b_2 - 2b_1 - 2b_2 + 1 \\ &= 4(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Jedoch ist F monoton fallend sowohl in x für jedes $y \in (\frac{1}{2}, 1)$ als auch in y für jedes $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Um zu garantieren, dass eine n -wachsende Funktion auch monoton wachsend in jeder Variable ist, bedarf es einer zusätzlichen Voraussetzung, die in der folgenden Definition festgehalten wird.

Definition 2.6 (geerdet). Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ sei α_i das jeweils kleinste Element der nicht leeren Teilmenge $S_i \subseteq \mathbb{R}$. Man nennt eine reellwertige Funktion F in n Variablen mit $\text{Dom}(F) = S_1 \times \dots \times S_n$ geerdet, falls $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ gilt, wobei die Bedingung $x_i = \alpha_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt sein muss.

Lemma 2.7. Seien S_1, \dots, S_n nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$, wobei jedes S_i sein kleinstes Element α_i enthält. Ist F eine geerdete, n -wachsende Funktion mit $\text{Dom}(F) = S_1 \times \dots \times S_n$, dann ist F monoton wachsend in jeder Variable.

Beweis. Für alle $(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \text{Dom}(F)$ mit $r \leq s$ ist zu zeigen, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq F(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (2.1)$$

Betrachte dazu den n -Quader

$$B = [\alpha_1, x_1] \times \dots \times [\alpha_{i-1}, x_{i-1}] \times [r, s] \times [\alpha_{i+1}, x_{i+1}] \times \dots \times [\alpha_n, x_n],$$

wobei mit α_i das kleinste Element von S_i bezeichnet wird. Da F geerdet ist, vereinfacht sich das F -Volumen von B zu

$$V_F(B) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Aufgrund der Voraussetzung, dass F eine n -wachsende Funktion ist, folgt schließlich, dass das Volumen nicht negativ ist, sodass Ungleichung (2.1) erfüllt ist. \square

Definition 2.8 (Ränder). Seien S_1, \dots, S_n nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und bezeichne mit β_i das jeweils größte Element von S_i . Weiters sei F eine reellwertige Funktion in n Variablen mit $\text{Dom}(F) = S_1 \times \dots \times S_n$. Dann bezeichnen die Funktionen F_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, mit $\text{Dom}(F_i) = S_i$ und $F_i(x) = F(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$ für alle $x \in S_i$ die (eindimensionalen) Ränder von F . Mehrdimensionale Ränder werden in ähnlicher Weise definiert, wobei weniger Variablen fixiert werden.

Lemma 2.9. Seien S_1, \dots, S_n nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und bezeichne mit α_i das jeweils kleinste Element und mit β_i das jeweils größte Element von S_i . Weiters sei F eine geordnete, n -wachsende Funktion mit Definitionsbereich $S_1 \times \dots \times S_n$ und Rändern F_1, \dots, F_n . Dann gilt für beliebige Punkte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)' \in \text{Dom}(F)$

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| \leq \sum_{i=1}^n |F_i(x_i) - F_i(y_i)|. \quad (2.2)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| &\leq \sum_{i=1}^n |F(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_n)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |F_i(x_i) - F_i(y_i)|, \end{aligned}$$

wobei die Gültigkeit der ersten Ungleichung durch Bilden einer Teleskopsumme und anschließender Anwendung der Dreiecksungleichung folgt. Die zweite Ungleichung folgt aufgrund der folgenden Argumentation: O.B.d.A. sei $x_i \geq y_i$. Aufgrund von Lemma 2.7 folgt, dass F monoton wachsend in jeder Variable ist, sodass

$$0 \leq F(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_n) \leq F_i(x_i) - F_i(y_i)$$

gilt. Zum Nachweis der rechten Ungleichung geht man wie folgt vor: Betrachte den n -Quader $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ mit

$$\mathbf{a} = (x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, y_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)', \quad \mathbf{b} = (\beta_1, x_2, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)',$$

wobei mit α_i das jeweils kleinste und mit β_i das jeweils größte Element von S_i bezeichnet wird. Da F n -wachsend ist, folgt $V_F(B) \geq 0$. Zusammen mit der Voraussetzung, dass F geordnet ist, erhält man schließlich

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_n) \\ \leq F(\beta_1, x_2, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) - F(\beta_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Durch analoges Anwenden dieser Iteration für die verbleibenden Komponenten folgt das gewünschte Resultat. □

Definition 2.10 (*n*-dimensionale Verteilungsfunktion). Eine *n*-dimensionale Verteilungsfunktion ist eine Funktion F mit Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}^n$, die geerdet und *n*-wachsend ist und für die $F(\infty, \dots, \infty) = 1$ gilt.

Es folgt sofort aus Lemma 2.7, dass die Ränder einer *n*-dimensionalen Verteilungsfunktion F wieder Verteilungsfunktionen sind. Diese werden in weiterer Folge mit F_1, \dots, F_n bezeichnet. Aufbauend auf den bisher definierten Begriffen kann nun eine formale Definition der Copula angeführt werden.

Definition 2.11 (Copula). Eine *n*-dimensionale Copula (kurz: Copula) ist eine Funktion C mit Definitionsbereich $[0, 1]^n$, für die folgendes gilt:

- (a) C ist geerdet und *n*-wachsend.
- (b) C hat Ränder C_i , $i = 1, \dots, n$, welche folgendes erfüllen:

$$C_i(u) = u \text{ für alle } u \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Äquivalent dazu: Eine *n*-dimensionale Copula ist eine Funktion $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (a) $C(u_1, \dots, u_n) = 0$, wenn $u_i = 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$.
- (b) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in [0, 1]$.
- (c) Für alle $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)' \in [0, 1]^n$ mit $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ gilt

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Aus Definition 2.11 folgt, dass eine Copula C eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^n$ ist, deren Randverteilungen jeweils standard gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind. Daher induziert jede Copula C durch

$$V_C([0, u_1] \times \dots \times [0, u_n]) = C(u_1, \dots, u_n)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, 1]^n$. Darüber hinaus sei an dieser Stelle angemerkt, dass für $2 \leq k < n$ die *k*-dimensionalen Ränder einer *n*-dimensionalen Copula wiederum (*k*-dimensionale) Copulas sind.

Beispiel 2.12. Betrachte die Funktion

$$\Pi^n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1], \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 u_2 \dots u_n.$$

Wir wollen nun zeigen, dass gegebene Funktion eine Copula ist. Offensichtlich ist Π^n geerdet als auch Eigenschaft (b) aus Definition 2.11 erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass Π^n *n*-wachsend

ist. Betrachte dazu den n -Quader $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq [0, 1]^n$ mit $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ und setze $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} V_{\Pi^n}(B) &= \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} u_{1i_1} \cdots u_{ni_n} \\ &= \sum_{i_1=1}^2 (-1)^{i_1} u_{1i_1} \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_2} u_{2i_2} \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_n} u_{ni_n} \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Funktion Π^n erfüllt demnach alle Eigenschaften einer Copula und wird auch als Unabhängigkeits- oder Produktcopula bezeichnet.

2.2 Der Satz von Sklar

Der im Jahr 1959 von Abe Sklar veröffentlichte Satz von Sklar ist das wohl bedeutendste Resultat in Bezug auf Copulas, da er die Grundlage für nahezu alle copulabasierten Anwendungen bildet. Um jedoch eine formelle Beschreibung des Zusammenhangs von Copulas und Verteilungsfunktionen angeben zu können, muss zunächst die verallgemeinerte inverse Funktion definiert werden. Diese Definition ist notwendig, da für nicht stetige oder nicht streng monoton wachsende Randverteilungen deren Inverse im üblichen Sinn nicht existiert.

Definition 2.13 (verallgemeinerte inverse Funktion). Sei $T : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, d.h. es gilt $T(x) \leq T(y)$ für alle $x \leq y$. Die verallgemeinerte inverse Funktion $T^\leftarrow : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ von T ist definiert durch

$$T^\leftarrow(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\}$$

mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$. Ist $T : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion, dann wird $T^\leftarrow : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ auch Quantilsfunktion von T genannt.

Ist T stetig und streng monoton wachsend, dann stimmt T^\leftarrow auf $\text{Ran}(T)$ mit T^{-1} , der gewöhnlichen Inversen von T , überein. Dabei bezeichnet $\text{Ran}(T) := \{T(x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ den Bildbereich von T .

Der Begriff der verallgemeinerten inversen Funktion wird nun beispielhaft anhand von Abbildung 2.1 veranschaulicht, welche die zwei wesentlichen Unterschiede zur gewöhnlichen Inversen verdeutlicht. Einerseits wird erlaubt, dass T konstante Teilstücke enthalten kann. Diese konstanten Abschnitte von T bewirken Sprünge in T^\leftarrow . Andererseits kann T eine nicht stetige Funktion sein und die entsprechenden Sprungstellen in T führen zu konstanten Teilstücken in T^\leftarrow .

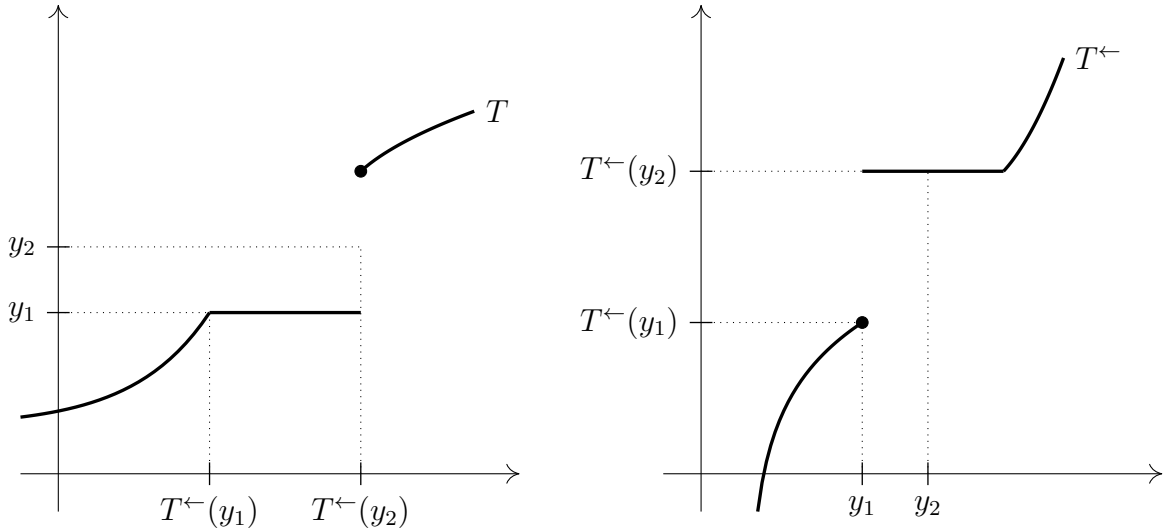


Abbildung 2.1: Eine monoton wachsende Funktion T (links) und ihre verallgemeinerte Inverse T^{\leftarrow} (rechts).

Arbeitet man mit der verallgemeinerten inversen Funktion, dann sind die folgenden Eigenschaften oft sehr nützlich.

Lemma 2.14. Sei $T : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann gelten für $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen:

- (a) T^{\leftarrow} ist monoton wachsend und für $T^{\leftarrow}(y) \in (-\infty, \infty)$ ist T^{\leftarrow} linksseitig stetig in y .
- (b) $T^{\leftarrow}(T(x)) \leq x$. Ist T streng monoton wachsend, dann gilt $T^{\leftarrow}(T(x)) = x$.
- (c) Sei T rechtsseitig stetig. Ist $T^{\leftarrow}(y) < \infty$, dann folgt $T(T^{\leftarrow}(y)) \geq y$. Weiters impliziert $y \in \text{Ran}(T) \cup \{\inf \text{Ran}(T), \sup \text{Ran}(T)\}$ die Gleichheit $T(T^{\leftarrow}(y)) = y$.
- (d) $T(x) \geq y$ impliziert $x \geq T^{\leftarrow}(y)$. Die Umkehrung gilt, wenn T rechtsseitig stetig ist.
- (e) T ist stetig $\iff T^{\leftarrow}$ ist streng monoton wachsend auf $[\inf \text{Ran}(T), \sup \text{Ran}(T)]$.
- (f) T ist streng monoton wachsend $\iff T^{\leftarrow}$ ist stetig auf $\text{Ran}(T)$.

Der Beweis dieses Lemmas findet sich bei Embrechts und Hofert [14]. Betrachtet man nun den Spezialfall einer Verteilungsfunktion F , dann hat die Implikation

$$F \text{ ist stetig} \implies F(F^{\leftarrow}(y)) = y, \quad y \in [0, 1], \quad (2.4)$$

Gültigkeit, was man wie folgt einsieht: Aufgrund der Stetigkeit von F folgt $\text{Ran}(F) \supseteq (0, 1)$, sodass $\text{Ran}(F) \cup \{\inf \text{Ran}(F), \sup \text{Ran}(F)\} = [0, 1]$. Der zweite Teil von Lemma 2.14(c)

impliziert daher $F(F^\leftarrow(y)) = y$ für alle $y \in [0, 1]$. Man beachte jedoch, dass diese Implikation nur für Verteilungsfunktionen, jedoch nicht für beliebige monoton wachsende und stetige Funktionen korrekt ist. Als Gegenbeispiel betrachte man die logistische Funktion

$$T : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = 1/(1 + \exp(-x)).$$

Für $y = 2 \notin \text{Ran}(T) = [0, 1]$ gilt dann: $T(T^\leftarrow(2)) = T(\infty) = 1 \neq 2$. Von diesem Gegenbeispiel lässt sich erkennen, dass $T(T^\leftarrow(y)) = y$ nicht gelten muss, falls $T^\leftarrow(y) = \infty$, d.h. falls $T(x) < y$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was im Speziellen $y \notin \text{Ran}(T)$ impliziert.

Der nun folgende Satz zeigt einen interessanten Zusammenhang zwischen Zufallsvariablen und ihren Verteilungsfunktionen auf. Während sich der zweite Teil bei der Generierung von Zufallsvariablen als nützlich erweist, erlaubt der dritte Teil die Aussage, dass man durch die Transformation einer Zufallsvariable mit ihrer stetigen Verteilungsfunktion stets eine standard gleichverteilte Zufallsvariable erhält.

Satz 2.15. *Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und verallgemeinerter inverser Funktion F^\leftarrow . Dann gilt:*

- (a) $\mathbb{P}(F^\leftarrow(F(X)) = X) = 1$.
- (b) *Quantil-Transformation.* Für eine auf dem Intervall $[0, 1]$ standard gleichverteilte Zufallsvariable $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ gilt $\mathbb{P}(F^\leftarrow(U) \leq x) = F(x)$.
- (c) *Wahrscheinlichkeits-Transformation.* Sei X eine Zufallsvariable mit stetiger univariater Verteilungsfunktion F , so gilt $F(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $u \in [0, 1]$.

- (a) Aufgrund von Lemma 2.14(b) gilt $F^\leftarrow(F(x)) \leq x$. Ist $F^\leftarrow(F(x)) < x$, dann ist F konstant auf dem Intervall $[F^\leftarrow(F(x)), x]$. Die Wahrscheinlichkeit, dass X aus einem Intervall mit konstanter Verteilungsfunktion F ist, ist jedoch Null. Daher gilt $F^\leftarrow(F(X)) = X$ \mathbb{P} -fast sicher.
- (b) Wir verwenden die in Lemma 2.14(d) angeführte Eigenschaft, dass

$$F(x) \geq u \iff F^\leftarrow(u) \leq x.$$

Somit gilt

$$\mathbb{P}(F^\leftarrow(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

- (c) $\mathbb{P}(F(X) \leq u) = \mathbb{P}(F^\leftarrow(F(X)) \leq F^\leftarrow(u)) = \mathbb{P}(X \leq F^\leftarrow(u)) = F(F^\leftarrow(u)) = u$.

Die erste Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass F^\leftarrow streng monoton wachsend ist (Lemma 2.14(e)), die zweite Gleichheit hat aufgrund von Punkt (a) Gültigkeit und die letzte Gleichheit ergibt sich aus der Implikation (2.4).

□

Kommen wir nun zum wohl bedeutendsten Satz in der Copula-Theorie, dem Satz von Sklar. Dieser erlaubt einerseits die Konstruktion einer Copula unter Verwendung einer beliebigen multivariaten Verteilungsfunktion in Verbindung mit ihren univariaten Randverteilungen. Andererseits besagt er, dass jede multivariate Verteilungsfunktion in eine Copula sowie ihre eindimensionalen Randverteilungen aufgespalten werden kann.

Satz 2.16 (Satz von Sklar). *Sei F eine multivariate Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n . Dann existiert eine Copula $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, sodass für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.5)$$

gilt. Falls die Randverteilungen F_1, \dots, F_n stetig sind, ist C eindeutig. Ansonsten ist C auf $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_n)$ eindeutig bestimmt, wobei $\text{Ran}(F_i) := F_i(\overline{\mathbb{R}})$ ist.

Seien nun umgekehrt eine Copula C sowie die eindimensionalen Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n gegeben, dann ist die in (2.5) definierte Funktion F eine multivariate Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n .

Beweis. Es wird im Folgenden die Existenz und die Eindeutigkeit einer Copula nur für stetige F_1, \dots, F_n bewiesen, die Umkehraussage allerdings in der allgemeinen Form. Für den vollständigen Beweis sei auf Nelsen [35] verwiesen.

Sei $(X_1, \dots, X_n)'$ ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion F und stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n . Setze $U_i := F_i(X_i)$ für $i = 1, \dots, n$ und bezeichne mit C die Verteilungsfunktion des Vektors $(U_1, \dots, U_n)'$. Nach Satz 2.15(c) ist $U_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$, somit ist C per Definition eine Copula. Für beliebige $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ erhält man nun

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_n(X_n) \leq F_n(x_n)) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_n \leq F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \end{aligned}$$

was Gleichung (2.5) entspricht. Somit ist die Existenz bewiesen. Zum Beweis der Eindeutigkeit wertet man Formel (2.5) für die Argumente $x_i = F_i^{\leftarrow}(u_i)$, $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, aus. Unter Verwendung der Implikation (2.4) erhält man

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(u_n)),$$

was einer eindeutigen Darstellung von C in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion F und der Randverteilungen F_1, \dots, F_n entspricht.

Für die Umkehrung sei C eine Copula und F_1, \dots, F_n seien beliebige univariate Verteilungsfunktionen. Wir konstruieren einen Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion (2.5), indem wir einen beliebigen Zufallsvektor $(U_1, \dots, U_n)'$ mit Verteilungsfunktion C nehmen

und $X_i := F_i^{\leftarrow}(U_i)$, $i = 1, \dots, n$, setzen. Unter Verwendung von Lemma 2.14(d) folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) &= \mathbb{P}(F_1^{\leftarrow}(U_1) \leq x_1, \dots, F_n^{\leftarrow}(U_n) \leq x_n) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_n \leq F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).\end{aligned}$$

□

Ausgehend von einer multivariaten Verteilungsfunktion liefert das folgende Korollar eine Methode zur Konstruktion einer multivariaten Copula.

Korollar 2.17. *Sei F eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n und Copula C , wobei C definiert ist wie in Satz 2.16. Dann gilt für jeden beliebigen Vektor $(u_1, \dots, u_n)' \in [0, 1]^n$*

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(u_n)).$$

2.3 Eigenschaften von Copulas

In weiterer Folge sollen einige wesentliche Eigenschaften von Copulas dargestellt werden. Neben dem Zusammenhang von Copulas und Zufallsvariablen soll auch auf die sogenannten Fréchet-Hoeffding-Schranken, durch die jede Copula nach oben und nach unten abgeschätzt werden kann, sowie auf die Dichtefunktion einer Copula näher eingegangen werden.

2.3.1 Copulas und Zufallsvariablen

Definition 2.18 (Copula von F). *Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F und stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n , dann ist die Copula von F (oder \mathbf{X}) die Verteilungsfunktion C von $(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))'$. Die Copula der Verteilungsfunktion des Zufallsvektors \mathbf{X} hat daher die Darstellung*

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Der folgende Satz zeigt, dass durch die Produktcopula Π^n unabhängige Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktionen charakterisiert werden.

Satz 2.19. *Für $n \geq 2$ seien X_1, \dots, X_n stetige Zufallsvariablen. X_1, \dots, X_n sind genau dann unabhängig, wenn die n -dimensionale Copula von X_1, \dots, X_n gleich Π^n ist.*

Beweis. Sei C die Copula der stetigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n . Da X_1, \dots, X_n genau dann unabhängig sind, wenn $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, folgt

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n) = \Pi^n(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Somit folgt $C = \Pi^n$. □

Eine weitere nützliche Eigenschaft von Copulas ist die Invarianz unter streng monotonen Transformationen der Zufallsvariablen. Man beachte dazu: Ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X stetig und ist T eine streng monoton wachsende Funktion, deren Definitionsbereich $\text{Ran}(X)$ enthält, dann ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $T(X)$ ebenfalls stetig.

Satz 2.20. *Sei $(X_1, \dots, X_n)'$ ein Vektor von stetigen Zufallsvariablen mit Copula C . Seien T_1, \dots, T_n streng monoton wachsende Funktionen auf $\text{Ran}(X_1), \dots, \text{Ran}(X_n)$, dann verfügt der transformierte Zufallsvektor $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))'$ ebenfalls über die Copula C .*

Beweis. Bezeichne mit F_1, \dots, F_n die Randverteilungen von X_1, \dots, X_n und mit G_1, \dots, G_n jene von $T_1(X_1), \dots, T_n(X_n)$. Der Vektor $(X_1, \dots, X_n)'$ besitze die Copula C und der Vektor $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))'$ besitze die Copula \tilde{C} . Da die Funktion T_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, streng monoton wachsend ist, folgt für beliebiges $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$G_i(x) = \mathbb{P}(T_i(X_i) \leq x) = \mathbb{P}(X_i \leq T_i^{-1}(x)) = F_i(T_i^{-1}(x)),$$

und daher

$$\begin{aligned} \tilde{C}(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= \mathbb{P}(T_1(X_1) \leq x_1, \dots, T_n(X_n) \leq x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq T_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq T_n^{-1}(x_n)) \\ &= C(F_1(T_1^{-1}(x_1)), \dots, F_n(T_n^{-1}(x_n))) \\ &= C(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)). \end{aligned}$$

Da X_1, \dots, X_n stetige Zufallsvariablen sind, gilt $\text{Ran}(G_1) = \dots = \text{Ran}(G_n) = [0, 1]$. Daher folgt $\tilde{C} = C$ auf $[0, 1]^n$. \square

2.3.2 Fréchet-Hoeffding-Schranken

Betrachte die Funktionen W^n und M^n , welche auf $[0, 1]^n$ folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} W^n(\mathbf{u}) &:= \max \left\{ \sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0 \right\}, \\ M^n(\mathbf{u}) &:= \min \{u_1, \dots, u_n\}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung im folgenden Satz, welche auch als Fréchet-Hoeffding-Ungleichung bezeichnet wird, verdeutlicht, dass jede Copula beschränkt ist.

Satz 2.21 (Fréchet-Hoeffding-Schranken). *Sei C eine n -dimensionale Copula. Dann gilt für jedes $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$*

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u}).$$

Beweis. Die zweite Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$C(\mathbf{u}) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq j \leq n} \{U_j \leq u_j\}\right) \leq \mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i.$$

Somit folgt

$$C(\mathbf{u}) \leq \min\{u_1, \dots, u_n\} = M^n(\mathbf{u}).$$

Zum Beweis der ersten Ungleichung beobachte, dass

$$\begin{aligned} C(\mathbf{u}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{U_i \leq u_i\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{U_i > u_i\}\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U_i > u_i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n (1 - u_i) = 1 - n + \sum_{i=1}^n u_i. \end{aligned}$$

In Kombination mit $C(\mathbf{u}) \geq 0$ folgt die behauptete Ungleichung. \square

In Abbildung 2.2 werden die beiden Fréchet-Hoeffding-Schranken W^2 und M^2 sowie die Unabhängigkeitscopula Π^2 aus Beispiel 2.12 für den bivariaten Fall illustriert. Dabei verdeutlicht das Konturdiagramm die Aussage aus Satz 2.21, dass die Unabhängigkeitscopula zwischen der unteren und der oberen Fréchet-Schranke liegt.

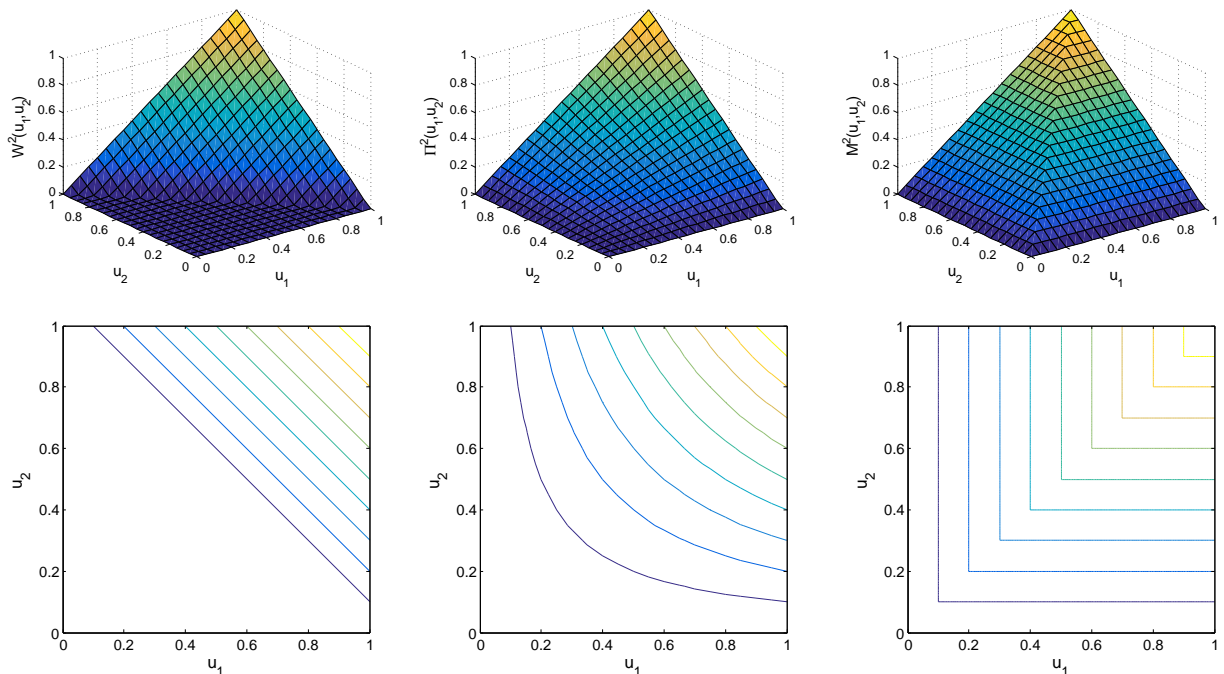


Abbildung 2.2: Funktionsgraph und Höhenlinien der Copulas $W^2(u_1, u_2)$ (links), $\Pi^2(u_1, u_2)$ (Mitte) sowie $M^2(u_1, u_2)$ (rechts).

Satz 2.22. Für die Fréchet-Hoeffding-Schranken gilt:

- (a) Die obere Schranke M^n ist für $n \geq 2$ eine Copula.
- (b) Die untere Schranke W^n ist für $n = 2$ eine Copula, für $n \geq 3$ allerdings nicht.

Beweis. Sei U eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable.

- (a) Betrachte den n -dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{U} = (U, \dots, U)'$, dessen Komponenten vollständig voneinander abhängen. Da \mathbf{U} gleichverteilte Ränder hat, ist dessen Verteilungsfunktion eine Copula. Die behauptete Aussage folgt für jedes $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ schließlich durch

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) = \mathbb{P}(U \leq u_1, \dots, U \leq u_n) = \mathbb{P}(U \leq \min\{u_1, \dots, u_n\}) = \min\{u_1, \dots, u_n\}.$$

- (b) Die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\mathbf{U} = (U, 1 - U)'$ ist unter Verwendung desselben Arguments wie in Punkt (a) eine Copula. Für jedes $\mathbf{u} \in [0, 1]^2$ folgt nun aufgrund der Gleichheit

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) = \mathbb{P}(U \leq u_1, 1 - U \leq u_2) = \mathbb{P}(1 - u_2 \leq U \leq u_1) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\},$$

dass W^2 eine Copula ist. Um zu zeigen, dass W^n für $n \geq 3$ keine Copula ist, betrachte das W^n -Volumen des n -Quaders $B = [1/2, 1]^n \subset [0, 1]^n$:

$$\begin{aligned} V_{W^n}(B) &= \max\{1 + \dots + 1 - n + 1, 0\} - n \max\{1/2 + 1 + \dots + 1 - n + 1, 0\} \\ &\quad + \binom{n}{2} \max\{1/2 + 1/2 + 1 + \dots + 1 - n + 1, 0\} + \dots \\ &\quad + \max\{1/2 + \dots + 1/2 - n + 1, 0\} \\ &= 1 - n/2 + 0 + \dots + 0 \\ &< 0. \end{aligned}$$

Da das Volumen negativ ist, ist W^n nicht n -wachsend. Daher ist die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W^n für $n \geq 3$ keine Copula. □

Obwohl die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W^n für $n \geq 3$ keine Copula ist, ist sie die bestmögliche Schranke in folgendem Sinn:

Satz 2.23. Für jedes $n \geq 3$ und beliebiges $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ existiert eine (von \mathbf{u} abhängige) n -dimensionale Copula C , sodass folgende Gleichung gilt:

$$C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u}).$$

Der Beweis dieses Satzes findet sich bei Nelsen [35].

2.3.3 Dichte einer Copula

Ein für den weiteren Verlauf der Arbeit wesentlicher Begriff ist jener der Copuladichte, welcher etwa bei der Formulierung der Maximum-Likelihood-Funktion unverzichtbar ist. Zunächst soll allerdings noch ein Satz angeführt werden, der die Stetigkeit von n -dimensionalen Copulas durch eine Lipschitz-Bedingung auf $[0, 1]^n$ begründet. Darüber hinaus bildet er die Basis für die partiellen Ableitungen einer Copula.

Satz 2.24. *Sei C eine n -dimensionale Copula. Dann gilt folgende Ungleichung für alle $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)'$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)' \in [0, 1]^n$:*

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{i=1}^n |v_i - u_i|.$$

Folglich ist C gleichmäßig stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Beweis. Die Gleichungen (2.2) und (2.3) implizieren

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{i=1}^n |C_i(v_i) - C_i(u_i)| = \sum_{i=1}^n |v_i - u_i|.$$

□

Bevor nun der nächste Satz folgt, soll eine für den Beweis notwendige Notation eingeführt werden. Ausgehend vom Vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)'$, bezeichne jenen Vektor, bei dem die i -te Komponente u_i durch r und die j -te Komponente u_j durch s ersetzt wird, mit

$$\mathbf{u}_{ij}(r, s) := (u_1, \dots, u_{i-1}, r, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, s, u_{j+1}, \dots, u_n)'$$

Satz 2.25. *Sei C eine n -dimensionale Copula. Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:*

- (a) *Für beliebige, aber feste $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n \in [0, 1]$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial u_i} C(u_1, \dots, u_n)$ für fast alle $u_i \in [0, 1]$ und für diese u_1, \dots, u_n gilt*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u_i} C(u_1, \dots, u_n) \leq 1.$$

- (b) *Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Für jedes $j \neq i$ ist die Funktion*

$$t \mapsto \frac{\partial}{\partial u_j} C(u_1, \dots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

definiert und monoton wachsend fast überall auf $[0, 1]$.

Beweis.

- (a) Die Existenz der partiellen Ableitungen folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass monotone Funktionen fast überall differenzierbar sind. Zum Nachweis der oberen Schranke betrachte den Differenzenquotienten

$$\frac{C(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + h, u_{i+1}, \dots, u_n) - C(u_1, \dots, u_n)}{h}.$$

Unter Verwendung von Satz 2.24 folgt, dass dieser betragsmäßig nicht größer als 1 ist. Somit gilt $\frac{\partial}{\partial u_i} C(\mathbf{u}) \leq 1$. Darüber hinaus sind die partiellen Ableitungen größer oder gleich Null, da C monoton wachsend in jeder Variable ist. Somit wurde die behauptete Ungleichung bewiesen.

- (b) Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Für $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)' \in [0, 1]^n$ und $r, s, \tilde{r}, \tilde{s} \in [0, 1]$ mit $r \leq \tilde{r}$, $s \leq \tilde{s}$ betrachte den n -Quader

$$B = [\mathbf{0}_{ij}(r, s), \mathbf{u}_{ij}(\tilde{r}, \tilde{s})] \subseteq [0, 1]^n.$$

Da C eine Copula ist, erhält man die Ungleichung

$$0 \leq V_C(B) = C(\mathbf{u}_{ij}(\tilde{r}, \tilde{s})) - C(\mathbf{u}_{ij}(\tilde{r}, s)) - C(\mathbf{u}_{ij}(r, \tilde{s})) + C(\mathbf{u}_{ij}(r, s)),$$

welche äquivalent ist zu

$$C(\mathbf{u}_{ij}(r, \tilde{s})) - C(\mathbf{u}_{ij}(r, s)) \leq C(\mathbf{u}_{ij}(\tilde{r}, \tilde{s})) - C(\mathbf{u}_{ij}(\tilde{r}, s)).$$

Das bedeutet, dass für alle $s \leq \tilde{s}$ die Funktion $t \mapsto C(\mathbf{u}_{ij}(t, \tilde{s})) - C(\mathbf{u}_{ij}(t, s))$ monoton wachsend ist. Somit folgt, dass

$$\frac{\partial (C(u_1, \dots, u_{i-1}, \tilde{r}, u_{i+1}, \dots, u_n) - C(u_1, \dots, u_{i-1}, r, u_{i+1}, \dots, u_n))}{\partial u_j}$$

fast überall definiert ist und auf $[0, 1]$ nicht negativ ist. Dies impliziert schließlich, dass die Funktion

$$t \mapsto \frac{\partial}{\partial u_j} C(u_1, \dots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

fast überall definiert ist und auf $[0, 1]$ monoton wachsend ist. □

Jede n -dimensionale Copula C lässt sich schreiben als

$$C(u_1, \dots, u_n) = A_C(u_1, \dots, u_n) + S_C(u_1, \dots, u_n),$$

wobei

$$A_C(u_1, \dots, u_n) := \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n}{\partial s_1 \cdots \partial s_n} C(s_1, \dots, s_n) ds_1 \cdots ds_n, \quad (2.6)$$

$$S_C(u_1, \dots, u_n) := C(u_1, \dots, u_n) - A_C(u_1, \dots, u_n).$$

Da die Randverteilungen einer Copula stetig sind (wohingegen diese Tatsache für multivariate Verteilungsfunktionen im Allgemeinen nicht zutreffend ist), existieren keine individuellen Punkte $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$, für die $V_C(\mathbf{u}) := V_C([0, u_1] \times \cdots \times [0, u_n]) > 0$ gilt. Falls $C = A_C$ auf $[0, 1]^n$, dann wird die Copula als absolut stetig bezeichnet und die Dichtefunktion c ist der Integrand aus (2.6):

$$c(u_1, \dots, u_n) := \frac{\partial^n}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n).$$

Ist hingegen $C = S_C$ auf $[0, 1]^n$, dann wird die Copula C als singulär bezeichnet und $\frac{\partial^n}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n) = 0$ fast überall auf $[0, 1]^n$. Ist C singulär, dann hat der Träger der Copula Lebesgue-Maß Null (und umgekehrt). Dabei ist der Träger einer Copula C definiert als das Komplement der Vereinigung aller offenen Teilmengen B von $[0, 1]^n$ mit $V_C(B) = 0$.

Beispiel 2.26. Die Unabhängigkeitscopula $\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 \cdots u_n$ ist absolut stetig, denn für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ gilt:

$$\begin{aligned} A_{\Pi^n}(\mathbf{u}) &= \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n}{\partial s_1 \cdots \partial s_n} \Pi^n(\mathbf{s}) ds_1 \cdots ds_n = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} ds_1 \cdots ds_n \\ &= u_1 \cdots u_n = \Pi^n(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Die Copuladichte von Π^n ist also gleich 1 auf $[0, 1]^n$.

Dass nicht jede Copula eine Dichtefunktion besitzt, verdeutlicht das folgende Beispiel.

Beispiel 2.27. Betrachte die bivariate obere Fréchet-Schranke $M^2(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}$ auf $[0, 1]^2$. Dann ist $\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} M^2(u_1, u_2) = 0$ fast überall auf $[0, 1]^2$ außer auf der Hauptdiagonale $\{(u, u) | u \in [0, 1]\}$ (welche Lebesgue-Maß Null hat) und $V_{M^2}(B) = 0$ für jeden offenen 2-dimensionalen Quader B , der gänzlich unterhalb oder oberhalb der Hauptdiagonale liegt. Folglich ist M^2 singulär.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch der Zusammenhang zwischen der Copuladichte c und der Dichte der Verteilungsfunktion F erläutert werden. Sei dazu C die Copula einer absolut stetigen multivariaten Verteilungsfunktion F mit streng monoton wachsenden stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n . Differenziert man die aus dem Satz von Sklar stammende Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)),$$

so erhält man für die gemeinsame Dichtefunktion f die kanonische Repräsentation

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

wobei mit f_1, \dots, f_n die univariaten Randdichten von F_1, \dots, F_n bezeichnet werden. Setzt man in obiger Gleichung schließlich $u_i := F_i(x_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$, so ergibt sich durch Umformen für die Copuladichte die Darstellung

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdots f_n(F_n^{-1}(u_n))},$$

wobei mit $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ die gewöhnlichen Inversen der Randverteilungsfunktionen bezeichnet werden.

2.4 Abhängigkeitsmaße

Oftmals ist es wünschenswert, den Grad der Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen durch eine geeignete Kennzahl anzugeben. Da solche Abhängigkeitsmaße in der Literatur ursprünglich für den bivariaten Fall eingeführt wurden und auch heute noch trotz einer möglichen multivariaten Verallgemeinerung weit verbreiteter sind, behandeln wir in weiterer Folge nur die bivariaten Abhängigkeitsmaße und legen dabei den Fokus auf die beiden Konkordanzmaße Kendall's Tau und Spearman's Rho sowie auf die Koeffizienten der Tail-Abhängigkeit.

2.4.1 Kendall's Tau und Spearman's Rho

Die in diesem Abschnitt präsentierten Abhängigkeitsmaße basieren auf dem Konzept der Konkordanz, welches wie folgt definiert ist:

Definition 2.28 (konkordant, diskordant). *Zwei Beobachtungen $(x, y)'$ und $(\tilde{x}, \tilde{y})'$ eines stetigen Zufallsvektors $(X, Y)'$ heißen konkordant, wenn $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0$ und diskordant, wenn $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0$.*

Zwei allseits bekannte Abhängigkeitsmaße, die auf dem Konkordanz-Konzept basieren, sind die Kovarianz und die lineare Korrelation. Nachfolgend sollen zwei weitere auf diesem Konzept basierende Abhängigkeitsmaße besprochen werden: Der Rangkorrelationskoeffizient von Kendall und der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman. Insbesondere werden wir zeigen, dass diese als Funktionale von Copulas betrachtet werden können.

Definition 2.29 (Kendall's Tau). *Betrachte einen Zufallsvektor $(X_1, X_2)'$ und eine unabhängige Kopie $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)'$ (d.h. einen zweiten Vektor mit derselben Verteilung, der aber unabhängig vom ersten ist). Dann wird durch*

$$\tau := \tau(X_1, X_2) := \mathbb{P}\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0\right) - \mathbb{P}\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0\right) \quad (2.7)$$

der Rangkorrelationskoeffizient von Kendall (oder Kendall's Tau) definiert.

Kendall's Tau ist also die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz abzüglich der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz. Der nun folgende Satz gibt die bereits erwähnte Repräsentation von τ als Funktional der Copula an.

Satz 2.30. *Angenommen X_1 und X_2 haben stetige Randverteilungen und eine eindeutige Copula C . Dann gilt:*

$$\tau = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1. \quad (2.8)$$

Beweis. Bezeichne mit F_1 und F_2 jeweils die Randverteilungen von X_1 und X_2 . Ausgehend von Gleichung (2.7) erhält man

$$\begin{aligned}\tau &= 2 \mathbb{P} \left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0 \right) - 1 \\ &= 4 \mathbb{P} \left(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2 \right) - 1 \\ &= 4 \mathbb{P} \left(F_1(X_1) < F_1(\tilde{X}_1), F_2(X_2) < F_2(\tilde{X}_2) \right) - 1,\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aufgrund der Austauschbarkeit der Paare (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ und die letzte Gleichheit aufgrund der Stetigkeit von F_1 und F_2 folgt. Beachte, dass durch Einführen der Variablen $U_i := F_i(X_i)$ und $V_i := F_i(\tilde{X}_i)$, $i = 1, 2$, die Verteilung von $(U_1, U_2)'$ sowie von $(V_1, V_2)'$ gleich C ist, sodass

$$\begin{aligned}\tau &= 4 \mathbb{E} \left(\mathbb{P}(U_1 < V_1, U_2 < V_2 \mid V_1, V_2) \right) - 1 \\ &= 4 \iint_{[0,1]^2} \mathbb{P}(U_1 < u_1, U_2 < u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ &= 4 \iint_{[0,1]^2} C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1.\end{aligned}$$

□

Die Stichprobenversion des Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall ist für den bivariaten Stichprobenvektor $\{(x_i, \tilde{x}_i) : i = 1, \dots, n\}$ gegeben durch

$$\hat{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \operatorname{sgn}((x_i - x_j)(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)).$$

Ein weiteres Zusammenhangsmaß, welches wie schon Kendall's Tau auf dem Konzept der Konkordanz basiert, ist der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman. Dieser ist wie folgt definiert:

Definition 2.31 (Spearman's Rho). *Für den Zufallsvektor $(X_1, X_2)'$ ist der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman (oder Spearman's Rho) definiert durch*

$$\rho_S := \rho_S(X_1, X_2) := 3 \left(\mathbb{P} \left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) > 0 \right) - \mathbb{P} \left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) < 0 \right) \right),$$

wobei $(X_1, X_2)'$, $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)'$ und $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)'$ unabhängige Kopien sind.

Satz 2.32. *Sind X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit stetigen Randverteilungen F_1 und F_2 , dann gilt*

$$\rho_S = \operatorname{Corr}(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

Beweis. Haben die Zufallsvektoren $(X_1, X_2)'$ und $(\tilde{X}_1, \bar{X}_2)'$ stetige Randverteilungen, so folgt

$$\begin{aligned}\rho_S &= 6 \mathbb{P} \left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) > 0 \right) - 3 \\ &= 6 \mathbb{P} \left((F_1(X_1) - F_1(\tilde{X}_1))(F_2(X_2) - F_2(\bar{X}_2)) > 0 \right) - 3 \\ &= 6 \mathbb{P} \left((U_1 - \tilde{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2) > 0 \right) - 3,\end{aligned}$$

wobei $(U_1, U_2)' := (F_1(X_1), F_2(X_2))'$, $\tilde{U}_1 := F_1(\tilde{X}_1)$ und $\bar{U}_2 := F_2(\bar{X}_2)$. Man beachte, dass U_1, U_2, \tilde{U}_1 und \bar{U}_2 alle standard gleichverteilt sind. Durch Bedingen auf U_1 und U_2 erhält man

$$\begin{aligned}\rho_S &= 6 \mathbb{E} \left(\mathbb{P} \left((U_1 - \tilde{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2) > 0 \mid U_1, U_2 \right) \right) - 3 \\ &= 6 \mathbb{E} \left(\mathbb{P} \left(\tilde{U}_1 < U_1, \bar{U}_2 < U_2 \right) + \mathbb{P} \left(\tilde{U}_1 > U_1, \bar{U}_2 > U_2 \right) \right) - 3 \\ &= 6 \mathbb{E}(U_1 U_2 + (1 - U_1)(1 - U_2)) - 3 \\ &= 12 \mathbb{E}(U_1 U_2) - 6 \mathbb{E}(U_1) - 6 \mathbb{E}(U_2) + 3.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Tatsache, dass $\mathbb{E}(U_1) = \mathbb{E}(U_2) = 1/2$ und $Var(U_1) = Var(U_2) = 1/12$, folgt schließlich

$$\begin{aligned}\rho_S &= 12 \mathbb{E}(U_1 U_2) - 3 = \frac{\mathbb{E}(U_1 U_2) - 1/4}{1/12} = \frac{Cov(U_1, U_2)}{\sqrt{Var(U_1)Var(U_2)}} \\ &= Corr(F_1(X_1), F_1(X_2)).\end{aligned}\tag{2.9}$$

□

Somit wurde bewiesen, dass Spearman's Rho für stetige Variablen die lineare Korrelation ihrer eindeutigen Copula ist. Der nachfolgende Satz stellt nun sicher, dass auch Spearman's Rho als Funktional der Copula dargestellt werden kann.

Satz 2.33. *Haben X_1 und X_2 stetige Randverteilungen und eine eindeutige Copula C , dann gilt*

$$\rho_S = 12 \iint_{[0,1]^2} (C(u, v) - uv) dudv = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3.$$

Beweis. Zum Nachweis dieses Satzes verwenden wir die folgende in McNeil et al. [34] bewiesene Formel von Hoeffding: Sind Y_1 und Y_2 zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion G und Randverteilungen G_1 und G_2 , dann ist die Kovarianz von Y_1 und Y_2 , sofern diese endlich ist, gegeben durch

$$Cov(Y_1, Y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (G(y_1, y_2) - G_1(y_1)G_2(y_2)) dy_1 dy_2.$$

Wendet man diese Formel auf $Y_1 := F_1(X_1)$ und $Y_2 := F_2(X_2)$ an, so folgt unter Verwendung von Gleichung (2.9) die behauptete erste Gleichheit, während die zweite Gleichheit wegen $\iint_{[0,1]^2} uv dudv = 1/4$ gilt. □

Die Stichprobenversion des Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman kann mit Hilfe der Ränge der Daten bestimmt werden. Diese sind wie folgt definiert: In einer Reihe von Beobachtungen x_1, \dots, x_n , in der kein beobachteter Wert mehrfach auftritt, gibt man dem kleinsten x_i den Rang 1, dem nächstgrößeren Rang 2, usw. Formal ist der Rang R_i von x_i definiert durch

$$R_i := \#\{j \leq n : x_j \leq x_i\}.$$

Sind nicht alle x_i verschieden, so gibt es unterschiedliche Verfahren, um eine eindeutige Rangordnung zu finden. Eine Möglichkeit besteht darin, den ranggleichen Beobachtungen das arithmetische Mittel der auf sie fallenden Ränge zuzuordnen (für nähere Details siehe Krenzel [31]).

Für den bivariaten Stichprobenvektor $\{(x_i, \tilde{x}_i) : i = 1, \dots, n\}$ seien R_i und S_i jeweils die Ränge von x_i und \tilde{x}_i . Die Stichprobenversion von ρ_S ist gegeben durch

$$\hat{\rho}_S = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}}.$$

Da mit R_i und S_i die Ränge bezeichnet werden, gilt $\bar{R} = \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}$. Dadurch vereinfacht sich obige Darstellung zu

$$\hat{\rho}_S = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \left(\sum_{i=1}^n R_i S_i - \frac{n(n+1)^2}{4} \right) = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2.$$

Mit Kendall's Tau und Spearman's Rho wurden nun zwei Rangkorrelationskoeffizienten definiert, die einige gemeinsame Eigenschaften aufweisen: Zum einen handelt es sich um symmetrische Abhängigkeitsmaße mit Wertebereich $[-1, 1]$. Sie sind, da sie sich als Funktionale von Copulas darstellen lassen, invariant unter streng monotonen Transformationen der Zufallsvariablen X_1 und X_2 . Zudem nehmen τ und ρ_S für unabhängige Zufallsvariablen den Wert Null an (wogegen eine Rangkorrelation von Null nicht notwendigerweise Unabhängigkeit impliziert). Darüber hinaus gilt der folgende Satz:

Satz 2.34. *Seien X_1 und X_2 stetige Zufallsvariablen mit Copula C und bezeichne mit M^2 die obere und mit W^2 die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke sowie mit κ entweder Kendall's Tau oder Spearman's Rho. Dann gilt:*

(a) $\kappa = 1 \iff C = M^2$.

(b) $\kappa = -1 \iff C = W^2$.

Für den Beweis sei auf Embrechts et al. [15] verwiesen. Unter Verwendung dieses Resultats zeigen wir nun, dass es für jede Wahl von stetigen Randverteilungen möglich ist, eine bivariate Copula zu konstruieren, für die τ und ρ_S jeden gewünschten Wert in $[-1, 1]$

annehmen können: Da jede Konvexkombination von Copulas wiederum eine Copula ist (vgl. Nelsen [35]), wird durch

$$C(u_1, u_2) := \lambda W^2(u_1, u_2) + (1 - \lambda)M^2(u_1, u_2)$$

eine Copula definiert (W^2 und M^2 sind beide Copulas (siehe Satz 2.22)). Ein Zufallsvektor $(X_1, X_2)'$ mit der soeben definierten Copula C hat aufgrund von Satz 2.34 Rangkorrelation

$$\tau = \rho_S = 1 - 2\lambda,$$

sodass für ein passendes $\lambda \in [0, 1]$ jeder gewünschte Wert in $[-1, 1]$ erreicht werden kann.

Nachdem mit Kendall's Tau und Spearman's Rho zwei verschiedene Rangkorrelationskoeffizienten definiert wurden, stellt sich nun die Frage, ob es einen funktionellen Zusammenhang zwischen diesen beiden Maßen gibt. In der Tat kann der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten durch die von Durbin und Stuart [12] hergeleiteten Schranken angegeben werden:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\tau - \frac{1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1}{2} + \tau - \frac{1}{2}\tau^2, & \tau \geq 0, \\ -\frac{1}{2} + \tau + \frac{1}{2}\tau^2 \leq \rho_S \leq \frac{3}{2}\tau + \frac{1}{2}, & \tau < 0. \end{cases}$$

Diese Schranken sind für Werte von τ und ρ_S in Abbildung 2.3 grafisch dargestellt. Für jedes Paar von stetigen Zufallsvariablen müssen sowohl die Werte von Kendall's Tau als auch jene von Spearman's Rho in der grau eingefärbten Fläche, der sogenannten τ - ρ_S -Region, liegen.

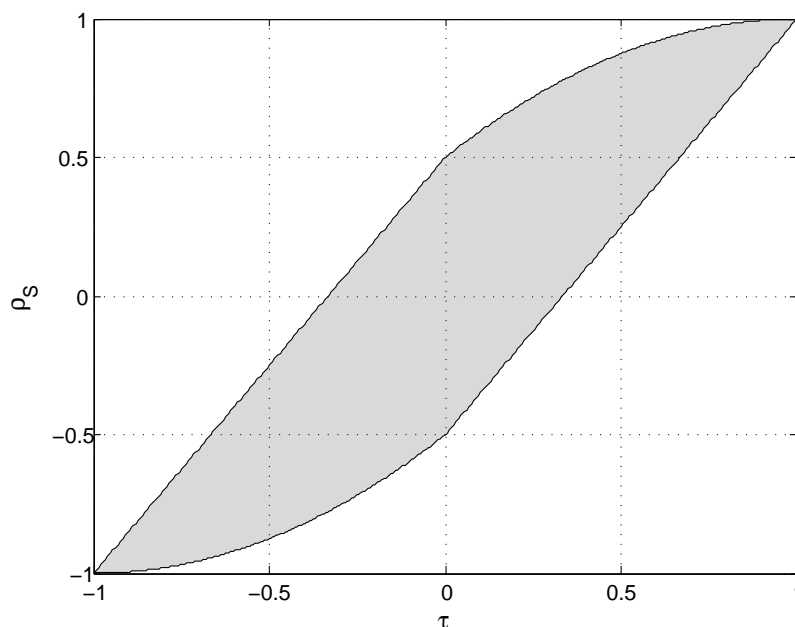


Abbildung 2.3: Spearman's ρ_S , als Funktion von Kendall's τ , für eine gegebene Copula.

2.4.2 Tail-Abhängigkeit

Eine Fragestellung, die im Risikomanagement von besonderem Interesse ist, beschäftigt sich damit, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das simultane Eintreten von Extremsituationen ist. Eine Möglichkeit, diesen Zusammenhang zwischen Extremereignissen darzustellen, liefert das Konzept der Tail-Abhängigkeit.

Definition 2.35 (Tail-Abhängigkeitskoeffizienten). *Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 . Dann ist durch*

$$\lambda_U := \lambda_U(X_1, X_2) := \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von X_1 und X_2 und durch

$$\lambda_L := \lambda_L(X_1, X_2) := \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u)),$$

der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von X_1 und X_2 definiert, vorausgesetzt die Limiten existieren. Ist $\lambda_U = 0$, dann sind X_1 und X_2 asymptotisch unabhängig im oberen Tail, wohingegen X_1 und X_2 für $\lambda_L = 0$ asymptotisch unabhängig im unteren Tail sind.

Sind die Randverteilungen der Zufallsvariablen stetig, dann kann der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit auch wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) \mid X_1 > F_1^{\leftarrow}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\mathbb{P}(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u), X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))}{\mathbb{P}(X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u)) - \mathbb{P}(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u)) + \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u), X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u))}{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass der Tail-Abhängigkeitskoeffizient ausschließlich von der Copula abhängt. Daher überträgt sich die Eigenschaft der Invarianz unter streng monotonen Transformationen genau wie im Fall der Rangkorrelation von der Copula auf die Tail-Abhängigkeit.

Für Copulas, die nicht in geschlossener Form darstellbar sind, wie etwa die Gauss'sche Copula (vgl. Kapitel 2.5.1.1), ist eine alternative Formel für λ_U wünschenswert, die in weiterer Folge hergeleitet werden soll. Betrachte dazu ein Paar von standard gleichverteilten Zufallsvariablen $(U, V)'$ mit Copula C . Bemerke zunächst, dass $\mathbb{P}(V \leq v \mid U = u) = \partial C(u, v) / \partial u$ und $\mathbb{P}(V > v \mid U = u) = 1 - \partial C(u, v) / \partial u$ (ähnliches gilt, wenn auf die Variable V bedingt wird). Unter Verwendung von $\bar{C}(u, v) := \mathbb{P}(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v)$

folgt daher:

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u} = - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{d\bar{C}(u, u)}{du} \\
&= \lim_{u \rightarrow 1^-} \left(2 - \frac{\partial C(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=t=u} - \frac{\partial C(s, t)}{\partial t} \Big|_{s=t=u} \right) \\
&= \lim_{u \rightarrow 1^-} \left(\mathbb{P}(V > u \mid U = u) + \mathbb{P}(U > u \mid V = u) \right).
\end{aligned}$$

Darüber hinaus vereinfacht sich obiger Ausdruck für austauschbare Copulas C , d.h. es gilt $C(u, v) = C(v, u)$, zu

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(V > u \mid U = u). \quad (2.10)$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass die stetigen Zufallsvariablen X und Y mit austauschbarer Copula C identisch verteilt sind, wobei deren Verteilungsfunktion F stetig und streng monoton wachsend ist und einen infiniten rechten Endpunkt hat, vereinfacht sich Formel (2.10) zudem zu

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(F^{-1}(V) > x \mid F^{-1}(U) = x) \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y > x \mid X = x).
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Obige Überlegungen lassen sich gleichermaßen auf den Koeffizienten der unter Tail-Abhängigkeit übertragen:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\mathbb{P}(V < u \mid U = u) + \mathbb{P}(U < u \mid V = u) \right)$$

bzw. im Falle von identisch verteilten stetigen Zufallsvariablen X und Y mit einer stetigen und streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion mit infinitem linkem Endpunkt und austauschbarer Copula gilt

$$\lambda_L = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(Y < x \mid X = x). \quad (2.12)$$

2.5 Ausgewählte Familien parametrischer Copulas

Nachdem in den bisherigen Kapiteln eine fundierte Einführung in die Theorie der Copulas erfolgte, werden nun mehrere Familien parametrischer Copulas präsentiert. Dabei wird eine Copula als parametrisch bezeichnet, wenn sie durch einen endlich-dimensionalen Parametervektor charakterisiert wird. Während sich in der Literatur eine Vielzahl zweidimensionaler Copulas findet, fällt im Gegensatz dazu die Anzahl an multivariaten Copulas eher gering aus. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass sich viele Verfahren zur Konstruktion bivariater Copulas nicht auf eine beliebige Anzahl an Dimensionen erweitern lassen. Da Portfolios grundsätzlich aber mehr als zwei Vermögenswerte umfassen, werden nachfolgend nur Familien von Copulas vorgestellt, die über eine n -dimensionale Erweiterung verfügen.

2.5.1 Elliptische Copulas

Bei der Klasse der elliptischen Copulas handelt es sich um Copulas, die über multivariate elliptische Verteilungen hergeleitet werden. Ein umfassender Überblick über diese Klasse von Verteilungen, welche viele nützliche Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung aufweisen, findet sich bei Fang et al. [20]. Elliptische Copulas werden mit Hilfe des Satzes von Sklar konstruiert und weisen in der Regel keine explizite analytische Form auf. Bevor wir nun die zwei bekanntesten Vertreter der elliptischen Copulas im Detail betrachten, soll zunächst näher auf sphärische und elliptische Verteilungen eingegangen werden, da diese in diesem Zusammenhang von wesentlicher Bedeutung sind.

Definition 2.36 (Sphärische Verteilung). *Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ hat eine sphärische Verteilung, wenn für jede orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (d.h. die Matrix U erfüllt $UU' = U'U = I_n$, wobei mit I_n die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix bezeichnet wird) folgendes gilt:*

$$U\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}.^1$$

Die Aussage, dass der n -dimensionale Zufallsvektor \mathbf{X} einer sphärischen Verteilung folgt, ist äquivalent dazu, dass eine Funktion $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass die charakteristische Funktion $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}})$ von \mathbf{X} die Form

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}'\mathbf{t}) = \psi(t_1^2 + \dots + t_n^2) = \psi(\|\mathbf{t}\|^2), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.13)$$

aufweist. Diese Äquivalenz zeigt, dass die charakteristische Funktion eines sphärisch verteilten Zufallsvektors vollständig durch die Funktion ψ beschrieben wird. Daher wird ψ auch als charakteristischer Generator bezeichnet und die Notation

$$\mathbf{X} \sim S_n(\psi)$$

wird verwendet, um einen n -dimensionalen sphärisch verteilten Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion (2.13) zu beschreiben. Die sphärische Verteilung erlaubt zudem eine alternative stochastische Repräsentation, die in erster Linie zur Simulation dieser Verteilung verwendet wird. Es gilt: $\mathbf{X} \sim S_n(\psi)$ dann und nur dann wenn

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{S}.$$

Dabei ist \mathbf{S} ein auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}_{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$ gleichverteilter Zufallsvektor und $R \geq 0$ ist eine Zufallsvariable, die unabhängig von \mathbf{S} ist.

Die Klasse der elliptischen Verteilungen ist eine Verallgemeinerung der Familie der sphärischen Verteilungen, denn jede elliptische Verteilung ist eine affine Transformation einer sphärischen Verteilung. Formal sind sie wie folgt definiert:

¹Mit der Notation $\stackrel{d}{=}$ wird die Gleichheit in der Verteilung bezeichnet.

Definition 2.37 (Elliptische Verteilung). *Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ hat eine elliptische Verteilung, wenn*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + AR\mathbf{S}, \quad (2.14)$$

wobei \mathbf{Y} eine sphärische Verteilung auf \mathbb{R}^k hat, $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit $\Sigma := AA' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $\text{rang}(\Sigma) = k \leq n$ und $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$. Die zweite Gleichheit spiegelt die stochastische Darstellung $\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} R\mathbf{S}$ einer sphärischen Verteilung wider.

Für elliptische Verteilungen wird die Notation

$$\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi)$$

verwendet, wobei Σ als Dispersionsmatrix bezeichnet wird und ψ ist jene Funktion, die die sphärische Verteilung von \mathbf{Y} charakterisiert. Es sollte jedoch erwähnt werden, dass Σ und ψ in dieser Notation nur bis auf eine positive Konstante eindeutig bestimmt sind, d.h. für beliebiges $c > 0$ liefern $E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi(\cdot))$ und $E_n(\boldsymbol{\mu}, c\Sigma, \psi(\cdot/c))$ dieselbe Verteilung, was aus der Darstellung der charakteristischen Funktion einer elliptisch verteilten Zufallsvariable \mathbf{X} eindeutig hervorgeht:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}(\exp(it'\mathbf{X})) = \mathbb{E}(\exp(it'(\boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Y}))) = \exp(it'\boldsymbol{\mu}) \mathbb{E}(\exp(i(A'\mathbf{t})'\mathbf{Y})) \\ &= \exp(it'\boldsymbol{\mu}) \phi_{\mathbf{Y}}(A'\mathbf{t}) = \exp(it'\boldsymbol{\mu}) \psi((A'\mathbf{t})'(A'\mathbf{t})) = \exp(it'\boldsymbol{\mu}) \psi(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Vorausgesetzt die Dichte existiert, dann sind die Höhenlinien der Dichtefunktion einer elliptischen Verteilung Ellipsoide (im bivariaten Fall spricht man von Ellipsen), wodurch sich auch der Name erklären lässt. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 2.4 als Beispiel einer elliptischen Verteilung die bivariate Normalverteilung $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, (\begin{smallmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{smallmatrix}))$, die, wie im nächsten Abschnitt zu sehen ist, tatsächlich der Familie der elliptischen Copulas zugehörig ist. Während auf der linken Seite die dreidimensionale Dichtefunktion zu sehen ist, sind rechts die entsprechenden ellipsenförmigen Höhenlinien der Dichte abgebildet.

Elliptische Verteilungen haben einige wichtige Eigenschaften, welche in der Folge zusammengefasst werden (vgl. McNeil et al. [34]):

- Jede affine Transformation einer elliptisch verteilten Zufallsvariable ist wieder elliptisch verteilt mit demselben charakteristischen Generator ψ : Ist $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi)$, dann gilt für jedes $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$

$$B\mathbf{X} + \mathbf{b} \sim E_k(B\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, B\Sigma B', \psi).$$

- Die Randverteilungen einer elliptischen Verteilung sind wieder elliptisch verteilt mit demselben charakteristischen Generator: Sei $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)' \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi)$, wobei $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^q$ mit $p + q = n$ und

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

mit $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathbb{R}^p$ und $\boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^q$. Dann gilt

$$\mathbf{X}_1 \sim E_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11}, \psi), \quad \mathbf{X}_2 \sim E_q(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{22}, \psi).$$

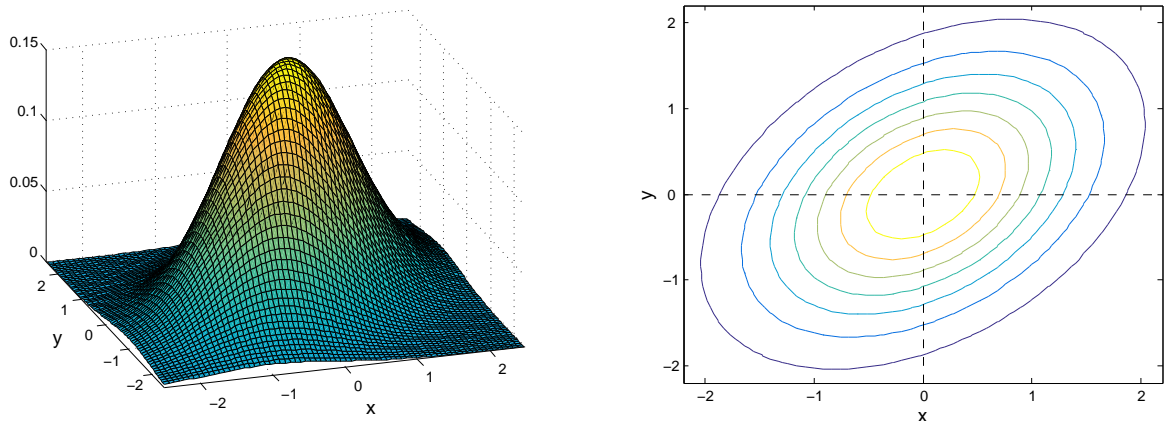


Abbildung 2.4: Dichtefunktion und Höhenlinien der elliptischen Verteilung $E_2(\mathbf{0}, \Sigma, \psi)$ mit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{pmatrix}$ und $\psi(x) = \exp(-x/2)$.

- Unter der Annahme, dass Σ positiv definit ist, ist die bedingte Verteilung von \mathbf{X}_1 gegeben \mathbf{X}_2 ebenfalls elliptisch verteilt, obwohl sich der Generator im Allgemeinen von ψ unterscheidet:

$$\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 \sim E_p(\boldsymbol{\mu}_{1,2}, \Sigma_{11,2}, \tilde{\psi}),$$

wobei $\boldsymbol{\mu}_{1,2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$ und $\Sigma_{11,2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$.

- Ist $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi)$ mit positiv definiter Dispersionsmatrix Σ , dann folgt

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \stackrel{d}{=} R^2,$$

wobei R die Zufallsvariable in der stochastischen Darstellung (2.14) ist.

Definition 2.38 (Elliptische Copula). *Eine elliptische Copula ist definiert als die Copula der elliptischen Verteilung F . Ihre analytische Form erhält man aus Korollar 2.17 zum Satz von Sklar für die Verteilungsfunktion F , d.h. für $(u_1, \dots, u_n)' \in [0, 1]^n$ gilt*

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)),$$

wobei mit $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ die univariaten Quantilsfunktionen bezeichnet werden.

Satz 2.20 besagt, dass sich die Copula von \mathbf{X} durch Anwendung von streng monoton wachsenden Transformationen auf X_1, \dots, X_n nicht verändert. Durch Standardisieren der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n folgt somit, dass die Copula von $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi)$ dieselbe ist wie von $\tilde{\mathbf{X}} \sim E_n(\mathbf{0}, R, \psi)$, wobei R die Korrelationsmatrix von \mathbf{X} bezeichnet. Aufgrund der einfacheren Handhabung wird daher im Zusammenhang mit Copulas nachfolgend stets mit letzterer Verteilung gearbeitet.

2.5.1.1 Gauss'sche Copula

Definition 2.39 (Multivariate Normalverteilung). *Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ folgt einer multivariaten Normalverteilung (oder multivariaten Gauss'schen Verteilung), kurz $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, wenn*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Z} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + AR\mathbf{S}.$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ den Erwartungswertvektor, $\Sigma = AA' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die positiv definite Kovarianzmatrix, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit $\text{rang}(A) = k \leq n$ und $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)'$ einen k -dimensionalen Zufallsvektor, dessen Komponenten Z_1, \dots, Z_k iid $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind.

Die Dichtefunktion einer multivariat normalverteilten Zufallsvariable $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ hat die Gestalt

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.15)$$

Hier bezeichnet $|\Sigma|$ die Determinante der Matrix Σ . Die Form der Dichtefunktion zeigt, dass sich Punkte mit gleicher Dichte auf demselben Ellipsoid befinden. Dabei ist die Ellipsoidengleichung für eine Konstante $c > 0$ gegeben durch $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c$. Die multivariate Normalverteilung gehört somit zur Klasse der elliptischen Verteilungen. Zum formalen Beweis dieser Behauptung betrachte den multivariat normalverteilten Vektor $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Nach Definition 2.39 weist er die Darstellung

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Z}$$

auf mit \mathbf{Z} wie in der Definition. Kann gezeigt werden, dass \mathbf{Z} einer sphärischen Verteilung folgt, so folgt die Behauptung. Es ist allgemein bekannt, dass für jedes $Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$ die charakteristische Funktion von der Form $\phi_{Z_j}(t) = \mathbb{E}(\exp(itZ_j)) = \exp(-t^2/2)$ ist (vgl. Billingsley [2, Seite 344]). Aus der Unabhängigkeit der Komponenten folgt schließlich

$$\phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(\exp(i\mathbf{t}'\mathbf{Z})) = \exp(-\|\mathbf{t}\|^2/2) = \psi(\|\mathbf{t}\|^2)$$

mit $\psi(x) = \exp(-x/2)$. Demnach hat \mathbf{Z} eine sphärische Verteilung.

Die Copula der multivariaten Normalverteilung, welche auch als Gauss'sche Copula bezeichnet wird, gehört somit zur Klasse der elliptischen Copulas.

Definition 2.40 (Gauss'sche Copula). *Die Gauss'sche Copula (oder Normal-Copula) C_R^{Ga} ist die Copula eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, R)$, wobei mit R die Korrelationsmatrix bezeichnet wird. Die funktionelle Form erhält man durch*

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

wobei $(u_1, \dots, u_n)' \in [0, 1]^n$. Hier bezeichnet Φ_R die gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors \mathbf{X} mit Korrelationsmatrix R und Φ^{-1} die Quantilsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung.

Mittels der Dichtefunktion (2.15) der multivariaten Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix R kann die Gauss'sche Copula explizit als

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|R|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'R^{-1}\mathbf{x}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

geschrieben werden.

In weiterer Folge sollen die Tail-Abhängigkeitskoeffizienten der Gauss'schen Copula hergeleitet werden. Sei dazu $(X, Y)'$ ein Zufallsvektor, der einer bivariaten Standardnormalverteilung mit linearem Korrelationskoeffizienten ρ folgt, d.h. $(X, Y)' \sim C_R^{Ga}(\Phi(x), \Phi(y))$ mit $R = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Diese Vorgaben erfüllen die in Kapitel 2.4.2 genannten Bedingungen zur Berechnung von λ_U gemäß

$$\lambda_U = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y > x \mid X = x). \quad (2.16)$$

Unter Verwendung von $Y|X = x \sim \mathcal{N}(\rho x, 1 - \rho^2)$ (vgl. Hogg und Craig [26, Seite 149]) erhalten wir für (2.16) die Darstellung

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi\left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi\left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right) \right). \end{aligned}$$

Ausgehend von Gleichung (2.12) findet man für λ_L durch analoge Herleitung die Darstellung

$$\lambda_L = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi\left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right).$$

Da offensichtlich $\lambda_U = \lambda_L$ gilt, impliziert die Gauss'sche Copula stets gleiche asymptotische obere und untere Tail-Abhängigkeit. Insbesondere sind zwei Zufallsvariablen X und Y mit zugehöriger Gauss'scher Copula asymptotisch unabhängig im oberen und unteren Tail für $-1 < \rho < 1$ und asymptotisch abhängig im oberen und unteren Tail für $\rho = 1$.

2.5.1.2 Student-t Copula

Definition 2.41 (Multivariate Student-t Verteilung). *Der n -dimensionale Zufallsvektor \mathbf{X} sei konstruiert als*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z},$$

wobei $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, I_k)$ und $\Sigma := \mathbf{A}\mathbf{A}'$ ist positiv definit. Die Zufallsvariable W und der Zufallsvektor \mathbf{Z} sind unabhängig und die Mischvariable $W \geq 0$ ist invers gammaverteilt² $W \sim \text{Ig}(\nu/2, \nu/2)$. Dann folgt \mathbf{X} einer multivariaten Student-t Verteilung mit ν Freiheitsgraden und Lokalisierungsparameter $\boldsymbol{\mu}$, kurz $\mathbf{X} \sim t_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu)$.

Man beachte, dass in dieser Definition Σ nicht die Kovarianzmatrix von \mathbf{X} ist, denn da $\mathbb{E}(W) = \frac{\nu}{\nu-2}$ folgt $Cov(\mathbf{X}) = \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$. Daher ist die Student-t Verteilung nur für $\nu > 2$ definiert.

Die Dichtefunktion der n -dimensionalen Student-t Verteilung lautet

$$t_{\Sigma, \nu}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{(\nu\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\nu}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

Die multivariate Student-t Verteilung gehört ebenso wie die multivariate Normalverteilung zur Klasse der elliptischen Verteilungen. Zum Beweis dieser Behauptung genügt es, ähnlich wie im Fall der Normalverteilung, nachzuweisen, dass $\sqrt{W}\mathbf{Z}$ einer sphärischen Verteilung folgt. Für die charakteristische Funktion erhält man unter Verwendung der Glättungseigenschaft der bedingten Erwartung die Darstellung

$$\begin{aligned} \phi_{\sqrt{W}\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i\mathbf{t}' \sqrt{W}\mathbf{Z} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(i\mathbf{t}' \sqrt{W}\mathbf{Z} \right) \mid W \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-W \|\mathbf{t}\|^2 / 2 \right) \right] \\ &= \int_{[0, \infty)} \exp \left(-w \|\mathbf{t}\|^2 / 2 \right) d\mathbb{P}(W \leq w) \\ &= \psi \left(\|\mathbf{t}\|^2 \right) \end{aligned}$$

mit $\psi(x) = \int_{[0, \infty)} \exp(-wx/2) d\mathbb{P}(W \leq w)$. Folglich ist die Zufallsvariable $\sqrt{W}\mathbf{Z}$ sphärisch verteilt.

Definition 2.42 (Student-t Copula). *Die Student-t Copula $C_{R, \nu}^t$ ist die Copula von $\mathbf{X} \sim t_n(\mathbf{0}, R, \nu)$, wobei mit R die Korrelationsmatrix und mit ν die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet wird. Die funktionelle Form erhält man durch*

$$C_{R, \nu}^t(u_1, \dots, u_n) = T_{R, \nu}(T_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, T_{\nu}^{-1}(u_n))$$

wobei $(u_1, \dots, u_n)' \in [0, 1]^n$. Dabei bezeichnet $T_{R, \nu}$ die gemeinsame Verteilungsfunktion von \mathbf{X} und T_{ν}^{-1} ist die Quantilsfunktion der univariaten Student-t Verteilung mit ν Freiheitsgraden.

Mittels der Dichtefunktion (2.17) der multivariaten t-Verteilung kann die Student-t Copula explizit als

$$C_{R, \nu}^t(\mathbf{u}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{(\nu\pi)^{n/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |R|^{1/2}} \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_n)} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}' R^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} dx_1 \cdots dx_n$$

²Eine Zufallsvariable X heißt invers gammaverteilt, kurz $X \sim Ig(\alpha, \beta)$, wenn ihre Dichtefunktion folgende Gestalt hat:

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x), \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

geschrieben werden.

Zur Herleitung der Tail-Abhängigkeitskoeffizienten der Student-t Copula betrachte den Zufallsvektor $(X, Y)'$ mit standardisierter bivariater Student-t Verteilung mit ν Freiheitsgraden und Korrelationsmatrix $R = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ und zugehöriger Copula $C_{R, \nu}^t$. Unter Verwendung der Tatsache, dass Y gegeben $X = x$ einer Student-t Verteilung mit $\nu + 1$ Freiheitsgraden folgt mit

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \rho x \quad \text{und} \quad \text{Var}(Y|X = x) = \left(\frac{\nu + x^2}{\nu + 1} \right) (1 - \rho^2)$$

(vgl. Embrechts et al. [15, Seite 19]), kann (2.11) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - T_{\nu+1} \left(\left(\frac{\nu + 1}{\nu + x^2} \right)^{1/2} \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \right) \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - T_{\nu+1} \left(\left(\frac{\nu + 1}{\frac{\nu}{x^2} + 1} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) \right) \\ &= 2 \left(1 - T_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu + 1} \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) \right). \end{aligned}$$

Ausgehend von Gleichung (2.12) kann der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit λ_L analog hergeleitet werden. Wie schon bei der Gauss'schen Copula gilt auch bei der Student-t Copula $\lambda_U = \lambda_L$. Damit sind zwei Zufallsvariablen mit zugehöriger Student-t Copula für $\rho > -1$ asymptotisch abhängig sowohl im oberen als auch im unteren Tail.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Symmetrieeigenschaft $\lambda_U = \lambda_L$ für alle elliptischen Copulas Gültigkeit hat (vgl. McNeil et al. [34, Seite 233 und Seite 247]).

2.5.2 Archimedische Copulas

Die im vorherigen Abschnitt vorgestellten Copulas weisen jeweils gleiche asymptotische obere und untere Tail-Abhängigkeit auf. Doch gerade im Finanzbereich lässt sich beobachten, dass große Verluste stärker voneinander abhängen als große Gewinne. Solche Asymmetrien lassen sich sehr einfach mit Hilfe sogenannter archimedischer Copulas modellieren. Ein Nachteil dieser Copulafamilie ist jedoch, dass in höheren Dimensionen nur ein oder zwei Parameter zur Erfassung der Abhängigkeitsstruktur zur Verfügung stehen.

Definition 2.43 (Generator, pseudo-inverse Funktion). *Sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(1) = 0$. So eine Funktion φ wird Generator genannt. Man spricht von einem strikten Generator, wenn zusätzlich $\varphi(0) = \infty$.*

Die pseudo-inverse Funktion von φ ist die Funktion $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$, die folgendermaßen definiert ist:

$$\varphi^{[-1]}(v) := \begin{cases} \varphi^{-1}(v), & \text{falls } 0 \leq v \leq \varphi(0), \\ 0, & \text{falls } \varphi(0) \leq v \leq \infty. \end{cases}$$

Die pseudo-inverse Funktion ist stetig, monoton fallend auf $[0, \infty]$ sowie streng monoton fallend auf $[0, \varphi(0)]$. Weiters gilt $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ für jedes $u \in [0, 1]$ und

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(v)) = \begin{cases} v, & \text{falls } 0 \leq v \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \text{falls } \varphi(0) \leq v \leq \infty. \end{cases}$$

Zusätzlich stimmt die pseudo-Inverse mit der gewöhnlichen Inversen überein, d.h. $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, wenn φ ein strikter Generator ist.

Definition 2.44 (vollständig monotone Funktion). *Eine Funktion $f(t)$ heißt vollständig monoton auf dem Intervall $[a, b]$, wenn sie stetig sowie beliebig oft differenzierbar ist und die Vorzeichen der Ableitungen aller Ordnungen alternieren, d.h.*

$$(-1)^k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \geq 0, \quad t \in (a, b), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Der nun folgende Satz liefert notwendige und hinreichende Bedingungen für einen strikten Generator φ zur Generierung von n -dimensionalen Copulas für $n \geq 2$.

Satz 2.45. *Sei φ ein strikter Generator. Die Funktion $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ mit*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \quad (2.18)$$

ist eine n -dimensionale Copula für $n \geq 2$, dann und nur dann, wenn φ^{-1} vollständig monoton auf $[0, \infty)$ ist.

Für den Beweis sei auf Kimberling [30] verwiesen. Mit Hilfe des vorangegangenen Satzes sind wir nun in der Lage, archimedische Copulas zu definieren.

Definition 2.46 (archimedische Copula). *Man spricht von einer archimedischen Copula, falls sie von der Form (2.18) ist. Die Funktion φ nennt man in diesem Fall den Generator der Copula.*

Offensichtlich erzeugen verschiedene Generatoren unterschiedliche Familien archimedischer Copulas. In der Literatur finden sich zahlreiche verschiedene Familien, insbesondere für den bivariaten Fall. Eine Auswahl ist sowohl bei Nelsen [35] als auch bei Joe [27] gelistet. Exemplarisch wollen wir hier die sogenannte Clayton Copula herleiten, deren Generator für $\alpha > 0$ durch $\varphi(u) = u^{-\alpha} - 1$ gegeben ist. Daher ist $\varphi^{-1}(t) = (1 + t)^{-1/\alpha}$. Durch Einsetzen in Formel (2.18) erhält man dann die n -dimensionale Clayton Copula:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n + 1 \right)^{-1/\alpha}.$$

Alternativ kann die Clayton Copula für $n \geq 2$ auch mit Hilfe von speziell verteilten Zufallsvariablen charakterisiert werden (vgl. Cook und Johnson [8]). Da diese Darstellung in

Kapitel 3.4 benötigt wird, soll sie nun ebenfalls präsentiert werden: Seien die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n iid $\Gamma(1, 1)$ -verteilt³ und die Zufallsvariable $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ sei unabhängig von Y_i für alle $i = 1, \dots, n$. Dann ist die gemeinsame Verteilungsfunktion von

$$U_i := \left(1 + \frac{Y_i}{X}\right)^{-\alpha}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gegeben durch

$$F(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-1/\alpha} - n + 1\right)^{-\alpha}$$

für $0 < u_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$, und Parameter $\alpha > 0$. Für $\alpha \in (0, \infty)$ entspricht diese Verteilungsfunktion der Clayton Copula mit Parameter $1/\alpha$. Neben der Clayton Copula existieren noch weitere n -dimensionale archimedische Copulafamilien. Die drei wichtigsten sind in Tabelle 2.1 aufgelistet.

Familie	Generator $\varphi(u)$	Parameter α	$C(u_1, \dots, u_n)$
Clayton	$u^{-\alpha} - 1$	$\alpha > 0$	$\left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n + 1\right)^{-1/\alpha}$
Gumbel	$(-\ln u)^\alpha$	$\alpha > 1$	$\exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\alpha\right)^{1/\alpha}\right)$
Frank	$-\ln\left(\frac{\exp(-\alpha u)-1}{\exp(-\alpha)-1}\right)$	$\alpha > 0$	$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\prod_{i=1}^n (\exp(-\alpha u_i)-1)}{(\exp(-\alpha)-1)^{n-1}}\right)$

Tabelle 2.1: Generator $\varphi(u)$, Parameter α und Verteilungsfunktion $C(u_1, \dots, u_n)$ ausgewählter archimedischer Copulas.

Abhängigkeitsmaße für archimedische Copulas

Im Allgemeinen erfordert die Ermittlung von Kendall's Tau die Berechnung des Doppelintegrals in (2.8). Für archimedische Copulas vereinfacht sich die Situation dahingehend, da Kendall's Tau aus dem Generator abgeleitet werden kann, der im Gegensatz zur Copula nur über ein Argument verfügt. Man beachte dazu folgende Tatsache (vgl. Nelsen [35]):

³Eine Zufallsvariable X heißt gammaverteilt, kurz $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, wenn ihre Dichtefunktion folgende Gestalt hat:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Dabei bezeichnet $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ die Gammafunktion.

Seien U und V zwei standard gleichverteilte Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilungsfunktion die archimedische Copula C mit Generator φ ist. Dann ist die Funktion

$$K_C(t) := t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $C(U, V)$.

Satz 2.47. *Für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y bezeichne mit C deren archimedische Copula mit Generator φ . Dann ist Kendall's Tau von der Form*

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (2.19)$$

Beweis. Sei C die gemeinsame Verteilungsfunktion der auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen U und V und bezeichne mit K_C die Verteilungsfunktion von $C(U, V)$. Unter Verwendung der Integralformel (2.8) folgt

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \mathbb{E}(C(U, V)) - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1 = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt \\ &= 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $\varphi'(t^+)$ durch $\varphi'(t)$ ersetzt wurde, da der Nenner des Integranden als konkave Funktion fast überall differenzierbar ist. \square

Wir wollen nun unter Verwendung von Gleichung (2.19) Kendall's Tau für zwei stetige Zufallsvariablen herleiten, deren Abhängigkeit durch eine bivariate Clayton Copula beschrieben wird. Für den Generator $\varphi(t) = t^{-\alpha} - 1$ der Clayton Copula lautet der Quotient $\varphi(t)/\varphi'(t) = (t^{\alpha+1} - t)/\alpha$. Somit erhält man für Kendall's Tau den Ausdruck

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\alpha+1} - t}{\alpha} dt = 1 + \frac{4}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha + 1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

Neben Kendall's Tau lassen sich auch die Tail-Abhängigkeitskoeffizienten archimedischer Copulas mit Hilfe der jeweiligen Generatoren beschreiben. Dies wird im folgenden Satz festgehalten:

Satz 2.48. *Für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y sei φ der strikte Generator der zugehörigen archimedischen Copula. Dann gilt:*

- (a) *Ist $(\varphi^{-1})'(0)$ endlich, dann sind X und Y asymptotisch unabhängig im oberen Tail. Sind X und Y asymptotisch abhängig im oberen Tail, dann gilt $(\varphi^{-1})'(0) = -\infty$ und der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit kann geschrieben werden als*

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\varphi^{-1})'(2t)}{(\varphi^{-1})'(t)}.$$

(b) Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit ist gleich

$$\lambda_L = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\varphi^{-1})'(2t)}{(\varphi^{-1})'(t)}.$$

Für den Beweis sei auf Joe [27] verwiesen. Für die Clayton Copula lautet die erste Ableitung der Inversen des Generators

$$(\varphi^{-1})'(t) = -\frac{(1+t)^{-1/\alpha-1}}{\alpha}.$$

Da $(\varphi^{-1})'(0) = -1/\alpha$, folgt aufgrund von Satz 2.48, dass die Zufallsvariablen mit zugehöriger bivariater Clayton Copula asymptotisch unabhängig im oberen Tail sind, d.h. $\lambda_U = 0$. Für den Koeffizienten der unter Tail-Abhängigkeit erhält man

$$\lambda_L = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2t}{1+t} \right)^{-1/\alpha-1} = 2^{-1/\alpha}.$$

Für die drei ausgewählten archimedischen Copulafamilien sind sowohl Kendall's Tau als auch die Tail-Abhängigkeitskoeffizienten in Tabelle 2.2 zusammengefasst (für Details zur Berechnung siehe Nelsen [35]).

Familie	τ	λ_L	λ_U
Clayton	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$	$2^{-1/\alpha}$	0
Gumbel	$1 - \frac{1}{\alpha}$	0	$2 - 2^{1/\alpha}$
Frank	$1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{t}{e^t-1} dt$	0	0

Tabelle 2.2: Kendall's Tau sowie die Koeffizienten der unteren und oberen Tail-Abhängigkeit für ausgewählte archimedische Copulas.

Abbildung 2.5 zeigt, wie die Höhenlinien der gemeinsamen Dichtefunktion der in Tabelle 2.1 genannten Copulas aussehen können, wenn die Randverteilungen jeweils standardnormalverteilt sind. Anhand dieser Grafik lässt sich gut erkennen, dass die Clayton Copula asymptotische untere, jedoch keine asymptotische obere Tail-Abhängigkeit impliziert, während die Gumbel Copula genau umgekehrt zwar asymptotische obere, nicht aber asymptotische untere Tail-Abhängigkeit erfasst und dass die Frank Copula weder asymptotische obere noch untere Tail-Abhängigkeit einschließt.

2.6 Bedingte Copulas

Häufig findet man in der Finanzwelt Situationen vor, in denen die gesamte bedingte Verteilung von Zufallsvariablen benötigt wird, wie etwa bei der Bepreisung von Optionen

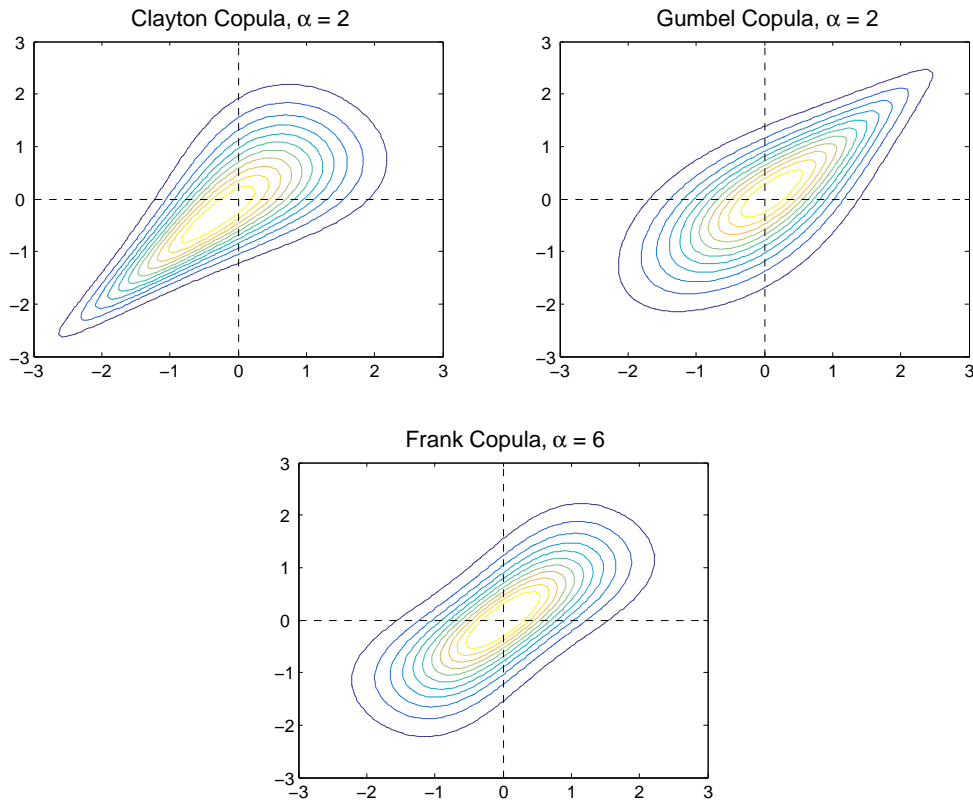


Abbildung 2.5: Höhenlinien der durch die Clayton Copula, die Gumbel Copula sowie die Frank Copula festgelegten bivariaten Dichtefunktionen, wobei alle Ränder standardnormalverteilt sind.

mit mehreren zugrundeliegenden Aktien oder auch bei der Value-at-Risk-Berechnung eines Portfolios. Aus diesem Grund führen wir hier das Konzept der bedingten Copula ein. Dieses stellt eine Erweiterung der bereits betrachteten Theorie der (unbedingten) Copulas dar und erlaubt, dass Copulas auch zur Modellierung von zeitvariierenden bedingten Abhängigkeiten herangezogen werden können. Als Grundlage für diesen Abschnitt dienen zwei Werke von Patton [39, 40], wobei der Fokus in diesen Arbeiten auf dem bivariaten Fall liegt.

Zum Zwecke der einfachen Darstellung nehmen wir nachfolgend an, dass die Dimension der bedingenden Variable W gleich 1 ist und dass sowohl die gemeinsame Verteilungsfunktion F als auch die Randverteilungen F_1, \dots, F_n stetig sind. Dann lässt sich die bedingte multivariate Verteilung von (X_1, \dots, X_n) gegeben W mit Hilfe der unbedingten gemeinsamen Verteilung von (X_1, \dots, X_n, W) herleiten. Bezeichne mit $F_{\mathbf{X}, W}$ die gemeinsame Verteilung von (X_1, \dots, X_n, W) , mit f_W die unbedingte Dichte von W sowie mit \mathcal{W} den Träger von W ⁴. Die bedingte n -dimensionale Verteilung von $(X_1, \dots, X_n)|W$ kann dann definiert wer-

⁴Der Träger \mathcal{W} einer n -dimensionalen Zufallsvariable X ist definiert als die Menge aller Realisationen x , die eine positive Dichte besitzen, d.h. $\mathcal{W} := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}$.

den durch

$$F(x_1, \dots, x_n|w) := f_W(w)^{-1} \frac{\partial F_{\mathbf{X}, W}(x_1, x_2, \dots, x_n, w)}{\partial w}$$

und erfüllt die folgenden Bedingungen (vgl. Patton [39]):

- (a) Für alle $(x_1, \dots, x_n)' \in \overline{\mathbb{R}}^n$ und jedes $w \in \mathcal{W}$ gilt $F(x_1, \dots, x_n|w) = 0$, wenn $x_i = -\infty$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Darüber hinaus gilt $F(\infty, \dots, \infty|w) = 1$.
- (b) Für alle $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)', \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)' \in \overline{\mathbb{R}}^n$ mit $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ und jedes $w \in \mathcal{W}$ gilt

$$V_F([\mathbf{a}, \mathbf{b}]|w) := \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} F(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}|w) \geq 0,$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Die bedingten Randverteilungen von X_1, \dots, X_n sind definiert durch

$$F_i(x_i|w) = F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty|w), \quad i = 1, \dots, n.$$

Darüber hinaus lässt sich, analog zu Definition 2.13, die verallgemeinerte inverse Funktion für bedingte Verteilungsfunktionen definieren.

Definition 2.49 (verallgemeinerte inverse Funktion für bedingte Verteilungsfunktionen). *Für eine bedingte Verteilungsfunktion F kann die verallgemeinerte inverse Funktion bezüglich dem ersten Argument definiert werden als*

$$F^{\leftarrow}(y|w) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x|w) \geq y\}, \quad y \in [0, 1], \quad w \in \mathcal{W}.$$

Obwohl, wie oben erwähnt, die bedingte multivariate Verteilung von $(X_1, \dots, X_n)|W$ mit Hilfe der unbedingten gemeinsamen Verteilung von (X_1, \dots, X_n, W) hergeleitet werden kann, so lässt sich diese Vorgehensweise nicht auf die Herleitung bedingter Copulas übertragen. Daher wird nachfolgend die Definition der bedingten Copula von $(X_1, \dots, X_n)|W$ angeführt.

Definition 2.50 (bedingte Copula). *Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gelte $X_i|W \sim F_i$. Die bedingte Copula von $(X_1, \dots, X_n)|W$ ist definiert als die bedingte gemeinsame Verteilungsfunktion von (U_1, \dots, U_n) gegeben W , wobei $U_i := F_i(X_i|W)$.*

Die Variablen U_1, \dots, U_n werden auch als bedingte Wahrscheinlichkeitstransformationen von X_1, \dots, X_n gegeben W bezeichnet. Durch analoges Vorgehen wie im unbedingten Fall kann man zeigen, dass diese Variablen einer $\mathcal{U}(0, 1)$ -Verteilung folgen, ungeachtet deren ursprünglicher Verteilungen (vgl. Patton [39]). Eine bedingte n -dimensionale Copula ist daher die bedingte gemeinsame Verteilungsfunktion von n bedingten $\mathcal{U}(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen.

Unter Verwendung der Resultate der (unbedingten) Copula-Theorie lässt sich zeigen, dass die bedingte Copula für jedes $w \in \mathcal{W}$ die gleichen Eigenschaften wie die unbedingte Copula erfüllt (vgl. Patton [39]). Diese werden der Vollständigkeit halber in der folgenden Proposition festgehalten.

Proposition 2.51. *Eine bedingte Copula C ist eine Funktion $C : [0, 1]^n \times \mathcal{W} \rightarrow [0, 1]$, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

- (a) $C(u_1, \dots, u_n | w) = 0$, wenn $u_i = 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in [0, 1]$ und $w \in \mathcal{W}$.
- (b) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1 | w) = u_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in [0, 1]$ und $w \in \mathcal{W}$.
- (c) Für alle $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)' \in [0, 1]^n$ mit $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ und jedes $w \in \mathcal{W}$ gilt

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}] | w) := \sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n} | w) \geq 0,$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Während die erste Eigenschaft in Proposition 2.51 eine untere Schranke für die Verteilungsfunktion liefert, stellt die zweite Eigenschaft sicher, dass die bedingten Randverteilungen $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1 | w)$ jeweils gleichverteilt sind. Die Bedingung, dass V_C nicht negativ ist, kann wie für gewöhnliche Verteilungsfunktionen interpretiert werden, d.h. sie stellt sicher, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq U_n \leq b_n | w)$ nicht negativ ist, falls der Zufallsvektor $(U_1, \dots, U_n | W)'$ die bedingte Verteilungsfunktion C hat.

Kommen wir nun zur Erweiterung des bedeutendsten Satzes in der Copula-Theorie, dem Satz von Sklar. Für den Beweis dieses Satzes sowie des nachfolgenden Korollars wollen wir an dieser Stelle auf Patton [39] verweisen.

Satz 2.52 (Satz von Sklar für stetige bedingte Verteilungen). *Sei F die bedingte multivariate Verteilungsfunktion von $(X_1, \dots, X_n) | W$, F_i die bedingte Verteilungsfunktion von $X_i | W$, $i = 1, \dots, n$, und \mathcal{W} bezeichne den Träger von W . Weiters seien F_1, \dots, F_n stetig in x_i für alle $i = 1, \dots, n$ und $w \in \mathcal{W}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte bedingte Copula $C : [0, 1]^n \times \mathcal{W} \rightarrow [0, 1]$, sodass für alle $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und $w \in \mathcal{W}$*

$$F(x_1, \dots, x_n | w) = C(F_1(x_1 | w), \dots, F_n(x_n | w) | w) \quad (2.20)$$

gilt.

Seien nun umgekehrt eine bedingte Copula C sowie die bedingten eindimensionalen Verteilungsfunktionen F_i von $X_i | W$, $i = 1, \dots, n$, gegeben, dann ist die in (2.20) definierte Funktion F eine bedingte multivariate Verteilungsfunktion mit bedingten Randverteilungen F_1, \dots, F_n .

Die einzige Einschränkung, die mit der Erweiterung des Satzes von Sklar auf bedingte Verteilungen einhergeht, ist, dass die bedingende(n) Variable(n) W für alle Randverteilungen als auch für die Copula dieselbe sein muss. Würde man diese erforderliche Restriktion vernachlässigen, so würde das im Allgemeinen dazu führen, dass F nicht die Bedingungen einer bedingten gemeinsamen Verteilungsfunktion erfüllt.

Korollar 2.53. Sei F eine bedingte n -dimensionale Verteilungsfunktion mit bedingten Randverteilungen F_1, \dots, F_n , die jeweils im ersten Argument stetig sind. Bezeichne mit $F_1^{\leftarrow}, \dots, F_n^{\leftarrow}$ die verallgemeinerten Inversen der bedingten Randverteilungen bezüglich deren ersten Argument. Dann existiert eine eindeutige bedingte Copula $C : [0, 1]^n \times \mathcal{W} \rightarrow [0, 1]$ von F , die für alle $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$ und $w \in \mathcal{W}$

$$C(u_1, \dots, u_n | w) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1 | w), \dots, F_n^{\leftarrow}(u_n | w) | w)$$

erfüllt.

Im Falle der Anwendung von Copulas auf multivariate Zeitreihen repräsentiert W im Allgemeinen die Vergangenheit der Zufallsvariablen, d.h. bei der Modellierung der gemeinsamen Verteilung eines Zufallsvektors $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})'$, bedingt auf eine bestimmte Informationsmenge, ist diese Information üblicherweise gegeben durch die Sigma-Algebra $\mathcal{F}_{t-1} := \sigma(\mathbf{X}_{t-j} : j \geq 1)$, die die Vergangenheit des Prozesses bis zum Zeitpunkt $t - 1$ repräsentiert.

3 Faktor-Copulas

Eine wichtige Aufgabe des modernen Risikomanagements besteht darin, die multivariate Verteilung für eine große Anzahl an Aktien>Returns zu finden. Da die in Kapitel 2 vorgestellten Copulas nicht für hochdimensionale Daten geeignet sind, stellt sich die Frage nach einem geeigneten Verfahren zur Konstruktion der gemeinsamen Verteilung für solche Daten. Bei derartigen Modellen, deren Fokus auf hochdimensionalen Datensätzen liegt, spielt oft das Konzept der Dimensionsreduktion eine entscheidende Rolle. Eine in der Finanzwelt weitverbreitete Methode, um eine solche Reduktion der Dimensionen zu erzielen, ist die Verwendung einer Faktorstruktur. In diesem Zusammenhang präsentieren Oh und Patton [36] die Klasse der Faktor-Copula Modelle. Diese Modelle basieren auf einer einfachen Faktorstruktur für die Copula und können mit existierenden Modellen für die univariaten Verteilungen kombiniert werden, um Verteilungen zu konstruieren, die trotz einer nicht allzu großen Anzahl an Parametern ein ausreichendes Maß an Flexibilität aufweisen.

In diesem Kapitel soll zunächst ein kurzer Einblick in Faktormodelle gegeben werden, bevor das Hauptaugenmerk auf Faktor-Copulas gerichtet wird. Dabei wird, ausgehend vom Ein-Faktor-Copula Modell, die Klasse der Multi-Faktor-Copulas sowie jene Klasse von Copulas mit einer nicht-linearen Faktorstruktur hergeleitet, bevor zum Abschluss dieses Kapitels noch das dynamische Ein-Faktor-Copula Modell vorgestellt wird. Als Grundlage dafür dienen sowohl die Arbeiten von Oh und Patton [36, 37, 38] als auch jene von McNeil et al. [34].

3.1 Faktormodelle

Die Grundidee von Faktormodellen liegt darin, den Zusammenhang der Kovarianzen zwischen vielen Variablen anhand von wenigen zugrundeliegenden, jedoch unbeobachtbaren, Zufallsvariablen, welche auch als Faktoren bezeichnet werden, zu beschreiben. Grundsätzlich können Faktormodelle durch folgendes Argument motiviert werden (vgl. Johnson und Wichern [29]): Geht man davon aus, dass Variablen nach ihren Korrelationen gruppiert werden können, d.h. alle Variablen einer speziellen Gruppe sind untereinander stark korreliert, weisen jedoch eine relativ schwache Korrelation zu Variablen anderer Gruppen auf, dann repräsentiert jede Gruppe von Variablen einen Faktor, der für die beobachtbaren Korrelationen verantwortlich ist. Formal sind Faktormodelle wie folgt definiert:

Definition 3.1 (Lineares Faktormodell). Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ folgt einem K -Faktormodell, wenn er zerlegt werden kann in

$$X_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} Z_k + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

bzw. in Matrix-Notation

$$\mathbf{X} = \mathbf{a} + B\mathbf{Z} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Dabei bezeichnet

- (a) $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_K)'$ einen Zufallsvektor von gemeinsamen Faktoren mit $K < n$ und einer positiv definiten Kovarianzmatrix Ω (d.h. $\mathbf{y}'\Omega\mathbf{y} > 0$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^K \setminus \{\mathbf{0}\}$),
- (b) $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ einen Zufallsvektor von idiosynkratischen Fehlertermen, welche unkorreliert sind (d.h. $\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$) und Erwartungswert 0 haben,
- (c) $B = (\beta_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times K}$ eine konstante Matrix und $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)' \in \mathbb{R}^n$ einen konstanten Vektor.

Weiters wird angenommen, dass \mathbf{Z} und $\boldsymbol{\epsilon}$ unkorreliert sind, d.h.

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbb{E}((\mathbf{Z} - \mathbb{E}(\mathbf{Z})) \boldsymbol{\epsilon}') = 0.$$

Die Komponenten der Matrix B werden auch als Faktorladungen bezeichnet und geben an, wie stark der Einfluss der gemeinsamen Faktoren auf die Variablen des Modells ist. Dementsprechend wird die Matrix B auch als Faktorladungsmatrix bezeichnet. Ein wichtiger Teil dieser Definition ist, dass sowohl die Fehlerterme untereinander als auch mit den gemeinsamen Faktoren unkorreliert sind. Man beachte, dass nur Unkorreliertheit gefordert wird, nicht jedoch Unabhängigkeit.

Folgt der Zufallsvektor \mathbf{X} einem K -Faktormodell, so weist dessen Kovarianzmatrix Σ eine spezielle Struktur auf. Sei, wie bereits erwähnt, Ω die Kovarianzmatrix von \mathbf{Z} und bezeichnet man mit der Diagonalmatrix γ jene von $\boldsymbol{\epsilon}$, so folgt

$$\Sigma = B\Omega B' + \gamma.$$

Unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung erhält man für die positiv definite Kovarianzmatrix Ω die Darstellung

$$\Omega = AA',$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{K \times K}$ eine untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen darstellt. Setzt man nun $\mathbf{Z}^* := A^{-1}(\mathbf{Z} - \mathbb{E}(\mathbf{Z}))$ und $B^* := BA$, dann kann das Faktormodell umgeschrieben werden zu

$$\mathbf{X} = \mathbb{E}(\mathbf{X}) + B^*\mathbf{Z}^* + \boldsymbol{\epsilon},$$

wobei die beiden Eigenschaften

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z}^*) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \Sigma = B^*(B^*)' + \gamma$$

erfüllt sind. Die Umkehrung gilt ebenfalls (vgl. McNeil et al. [34]): Falls die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors \mathbf{X} von der Form

$$\Sigma = BB' + \gamma \tag{3.1}$$

ist, wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times K}$ mit $\text{rang}(B) = K < n$ und γ eine Diagonalmatrix ist, so weist \mathbf{X} eine K -Faktorstruktur für einen K -dimensionalen Faktorvektor \mathbf{Z} und einen n -dimensionalen Fehlervektor $\boldsymbol{\epsilon}$ auf:

$$\mathbf{X} = B\mathbf{Z} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

In weiterer Folge betrachten wir einen Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ mit

$$\mathbb{E}(X_i) = 0, \quad \text{Var}(X_i) = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

und einer Equikorrelationsmatrix R , d.h. die Korrelation zwischen jedem Komponentenpaar ist gleich $\rho > 0$. Somit ist die Kovarianzmatrix Σ von \mathbf{X} von der Form

$$\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man nun $B := (\sqrt{\rho}, \dots, \sqrt{\rho})'$, so ist die Kovarianzmatrix unter Verwendung der Notation I_n für die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix von der Form

$$\Sigma = BB' + (1 - \rho)I_n,$$

welche offensichtlich mit der Darstellung (3.1) übereinstimmt. Somit weist der Vektor \mathbf{X} aufgrund der zuvor erwähnten Charakterisierung eine Ein-Faktorstruktur auf, d.h. er lässt sich darstellen als $\mathbf{X} = BZ + \boldsymbol{\epsilon}$.

Um eine Zerlegung von \mathbf{X} zu finden, wähle eine beliebige von \mathbf{X} unabhängige Zufallsvariable Y mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 und definiere den gemeinsamen Faktor Z und den Fehlervektor $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ durch

$$\begin{aligned} Z &:= \frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho(n-1)} \sum_{i=1}^n X_i + \sqrt{\frac{1-\rho}{1 + \rho(n-1)}} Y, \\ \epsilon_i &:= X_i - \sqrt{\rho} Z, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Offensichtlich ist in dieser Konstruktion der Erwartungswert von Z gleich 0. Für die Varianz des Faktors gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z) &= \text{Var} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho(n-1)} \sum_{i=1}^n X_i + \sqrt{\frac{1-\rho}{1 + \rho(n-1)}} Y \right) \\
&= \frac{\rho}{(1 + \rho(n-1))^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) + \frac{1-\rho}{1 + \rho(n-1)} \text{Var}(Y) \\
&= \frac{\rho}{(1 + \rho(n-1))^2} n(1 + \rho(n-1)) + \frac{1-\rho}{1 + \rho(n-1)} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aufgrund der Unabhängigkeit der X_i 's von Y folgt. Da der Erwartungswert von ϵ offensichtlich $\mathbf{0}$ ist, muss, um sicherzustellen, dass \mathbf{X} einem Ein-Faktormodell folgt, nur noch überprüft werden, ob sowohl die Fehler untereinander als auch die Fehler mit dem Faktor unkorreliert sind. Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Z, X_j) &= \text{Cov} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho(n-1)} \sum_{i=1}^n X_i + \sqrt{\frac{1-\rho}{1 + \rho(n-1)}} Y, X_j \right) \\
&= \frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho(n-1)} \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n X_i, X_j \right) \\
&= \frac{\sqrt{\rho}}{1 + \rho(n-1)} (1 + \rho(n-1)) \\
&= \sqrt{\rho}
\end{aligned}$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) &= \text{Cov}(X_i - \sqrt{\rho}Z, X_j - \sqrt{\rho}Z) \\
&= \rho \mathbb{1}_{\{i \neq j\}} + \mathbb{1}_{\{i=j\}} - 2\rho + \rho \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j, \\ 1 - \rho, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

$$\text{Cov}(Z, \epsilon_j) = \text{Cov}(Z, X_j - \sqrt{\rho}Z) = \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho} \text{Var}(Z) = 0. \tag{3.4}$$

Somit sind alle Eigenschaften aus Definition 3.1 erfüllt. Einen Zufallsvektor mit standardisierten Rändern und einer Equikorrelationsmatrix kann man sich also vorstellen als ein Faktormodell mit einem gemeinsamen Faktor.

Da die Zufallsvariable Y in Formel (3.2) beliebig gewählt werden kann, sind weder der Faktor noch die Fehlerterme in der Zerlegung eindeutig bestimmt. Für die spezielle Wahl, dass \mathbf{X} ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor ist und auch Y normalverteilt ist,

folgt, dass sowohl der gemeinsame Faktor Z einer Normalverteilung folgt als auch der Fehlervektor multivariat normalverteilt ist. Aufgrund der Normalverteilungsannahme sowie der Gleichungen (3.3) und (3.4) folgt zusätzlich, dass sowohl Z unabhängig von ϵ_i für alle $i = 1, \dots, n$ ist als auch die Unabhängigkeit von ϵ_i und ϵ_j für $i \neq j$. Definiert man nun aufgrund der Tatsache, dass $\text{Var}(\epsilon_i) = 1 - \rho$, die Zufallsvariable ϵ_i^* durch

$$\epsilon_i^* := \frac{\epsilon_i}{\sqrt{1 - \rho}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dann lässt sich das Ein-Faktormodell umschreiben zu

$$X_i = \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1 - \rho}\epsilon_i^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $Z, \epsilon_1^*, \dots, \epsilon_n^*$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind. Setzt man schließlich $U_i := \Phi(X_i)$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet, dann erhält man unter Verwendung von Korollar 2.17

$$\mathbf{U} := (U_1, \dots, U_n)' \sim C_R^{Ga},$$

wobei mit R die Korrelationsmatrix von \mathbf{X} bezeichnet wird. Man spricht in diesem Fall von einer Ein-Faktor-Gauss-Copula, einem Spezialfall der im nächsten Abschnitt definierten Ein-Faktor-Copula.

3.2 Ein-Faktor-Copula Modell

Um die folgenden Abschnitte möglichst einfach zu halten, beschränken wir uns zunächst auf unbedingte Verteilungen, werden aber im Verlauf der Arbeit ebenso die Erweiterung auf bedingte Verteilungen thematisieren.

Nachfolgend betrachten wir stets einen Vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$, bestehend aus n Variablen, mit einer multivariaten Verteilungsfunktion F , Randverteilungen F_1, \dots, F_n und einer Copula C . Nach Satz 2.16, dem Satz von Sklar, ist daher stets

$$\mathbf{Y} \sim F = C(F_1, \dots, F_n)$$

erfüllt. Die Zerlegung der gemeinsamen Verteilung auf diese Art und Weise hat im Gegensatz zur direkten Betrachtung der gemeinsamen Verteilungsfunktion F zwei entscheidende Vorteile (vgl. Oh und Patton [38]): Einerseits wird aufgrund der Zerlegung eine mehrstufige Schätzung erlaubt, welche sich besonders bei hochdimensionalen Anwendungen als nützlich erweist, da sowohl die spärlich vorhandenen Daten als auch die stark zunehmende Anzahl an Parametern Probleme verursachen können. Andererseits erlaubt sie auf die umfangreiche Literatur für Modelle univariater Verteilungen zurückzugreifen, sodass “nur“ die Aufgabe der Konstruktion einer geeigneten Copula verbleibt, was durchaus ein einfacheres Problem darstellt.

Wie bereits mehrfach erwähnt, beschreibt die Copula C vollständig die Abhängigkeit zwischen den Variablen Y_1, \dots, Y_n . Wir werden nun, ohne darauf jedoch näher einzugehen, existierende Modelle für die Schätzung der Randverteilungen F_1, \dots, F_n verwenden, und fokussieren uns vollständig auf die Konstruktion sinnvoller Modelle für die Abhängigkeit zwischen diesen Variablen. Dabei werden wir von einem einfachen Modell ausgehen und dieses anschließend in verschiedene Richtungen erweitern. Zur Beschreibung dieser Modelle führen wir nun folgende Notation ein: Sind zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig, so schreiben wir $X \perp Y$.

Wir betrachten zunächst jene Klasse von Copulas, welche durch eine Ein-Faktorstruktur generiert wird und auf $n + 1$ latenten Variablen basiert:

$$\begin{aligned}
X_i &= Z + \epsilon_i, & i = 1, \dots, n \\
\text{wobei } Z &\sim F_Z(\gamma_Z) \\
\epsilon_i &\stackrel{iid}{\sim} F_\epsilon(\gamma_\epsilon), & i = 1, \dots, n \\
Z &\perp \epsilon_i, & i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$(X_1, \dots, X_n)' =: \mathbf{X} \sim F_{\mathbf{X}} = C(G_1(\gamma), \dots, G_n(\gamma); \gamma)$$

Hier bezeichnet $F_Z(\gamma_Z)$ die parametrische univariate Verteilung des gemeinsamen Faktors Z mit Parameter(vektor) γ_Z und $F_\epsilon(\gamma_\epsilon)$ jene der idiosynkratischen Fehler ϵ_i mit Parameter(vektor) γ_ϵ . Darüber hinaus werden mit G_1, \dots, G_n die Randverteilungen von \mathbf{X} bezeichnet und der Parametervektor γ ist definiert durch $\gamma := (\gamma'_\epsilon, \gamma'_Z)'$.

Die aus der obigen Struktur resultierende Copula $C(\gamma)$ der latenten Variable \mathbf{X} wird als Modell für die Copula der beobachtbaren Variable \mathbf{Y} verwendet. Ein wichtiger Aspekt dieser Konstruktion ist, dass die Randverteilungen von \mathbf{X} nicht mit jenen von \mathbf{Y} übereinstimmen müssen, d.h. im Allgemeinen gilt $F_i \neq G_i$. Die für den Vektor \mathbf{X} verwendete Struktur wird nur zum Erhalt der Copula verwendet, während die entsprechenden Randverteilungen zur Gänze verworfen werden. Durch diese Vorgehensweise wird $C(\gamma)$, hervorgehend aus Struktur (3.5), verwendet, um ein Modell für die Copula von \mathbf{Y} zu konstruieren, wohingegen die Randverteilungen F_i in einem separaten Schritt spezifiziert und geschätzt werden. Diese Methode wird dadurch motiviert, dass die Faktorstruktur als Dimensionsreduktionstechnik nur in jener Komponente des multivariaten Modells Verwendung findet, welche in hohen Dimensionen schwer zu schätzen ist, nämlich der Copula, während die Modellierung der Randverteilungen mit Hilfe eines alternativen Ansatzes erfolgen kann. Da in diesem Fall die Ein-Faktorstruktur nur für die Konstruktion der Copula verwendet wird, spricht man auch von sogenannten Ein-Faktor-Copula Modellen.

Die mit Hilfe der Faktorstruktur (3.5) erzeugte Copula besitzt im Allgemeinen keine geschlossene Form. Explizit angegeben werden kann sie jedoch in jenem Fall, wenn sowohl F_Z als auch F_ϵ der Normalverteilung entsprechen, sodass \mathbf{X} eine multivariat normalverteilte Variable ist und man dementsprechend eine Gauss'sche Copula mit einer gleichkorrelierten

Abhängigkeitsstruktur (genauer, mit einer Korrelation von $\sigma_Z^2/(\sigma_Z^2 + \sigma_\epsilon^2)$ zwischen jedem Variablenpaar, wobei $\sigma_\epsilon^2 := \sigma_{\epsilon_1}^2 = \dots = \sigma_{\epsilon_n}^2$) erhält. Für eine beliebige andere Wahl von F_Z und F_ϵ ist die gemeinsame Verteilung von \mathbf{X} , und wichtiger, die Copula von \mathbf{X} , im Allgemeinen nicht in geschlossener Form darstellbar.

Oh and Patton demonstrieren in [36] die Flexibilität, die bereits diese einfache Klasse von Copulas aufweist, indem sie jeweils 1000 zufällige Ziehungen von Vektoren aus vier verschiedenen bivariaten Verteilungen, die mit Hilfe von verschiedenen Copulas konstruiert werden, grafisch darstellen (vgl. Abbildung 3.1). In allen Fällen wurde für die beiden Randverteilungen F_1 und F_2 die Standardnormalverteilung gewählt und die Varianzen der latenten Variablen in der Faktor-Copula wurden festgelegt durch $\sigma_Z^2 = \sigma_{\epsilon_1}^2 = \sigma_{\epsilon_2}^2 = 1$, sodass der gemeinsame Faktor Z zur Hälfte der Varianz jedes X_i beiträgt. Durch die Wahl von unterschiedlichen Kombinationen von F_Z und F_ϵ werden die vier verschiedenen Faktor-Copulas festgelegt:

- (C1) Die erste Copula wird durch eine Faktorstruktur mit $F_Z = F_\epsilon = \mathcal{N}(0, 1)$ erzeugt, sodass es sich bei dieser Copula um die Gauss'sche Copula handelt.
- (C2) Zur Generierung der zweiten Copula entspricht F_Z als auch F_ϵ der Student-t Verteilung mit 4 Freiheitsgraden, wodurch eine symmetrische Copula mit positiver Tail-Abhängigkeit generiert wird.
- (C3) Die dritte Copula verwendet $F_\epsilon = \mathcal{N}(0, 1)$ und bei F_Z handelt es sich um die schiefe t-Verteilung von Hansen (vgl. Hansen [22]) mit dem Freiheitsgradparameter $\nu_Z = \infty$ und dem Nichtzentralitätsparameter $\psi_Z = -0.25$, was einer schiefen Normalverteilung entspricht. Diese Copula weist asymmetrische Abhängigkeit auf, und zwar im Hinblick darauf, dass Crashes stärker korreliert sind als Booms, jedoch keine Tail-Abhängigkeit.
- (C4) Für die vierte Copula wird $F_\epsilon = t(4)$ gesetzt und für F_Z wird ebenfalls die schiefe t-Verteilung von Hansen, jedoch mit Parametervektor $(\nu_Z, \psi_Z) = (4, -0.25)$ verwendet, was einer schiefen $t(4)$ -Verteilung entspricht. Durch diese Wahl wird eine Copula mit asymmetrischer Abhängigkeitsstruktur und positiver Tail-Abhängigkeit generiert.

Ist bei der Verteilung des gemeinsamen Faktors der Freiheitsgradparameter unendlich wie im Fall der Normalverteilung (C1) oder der schiefen Normalverteilung (C3), so verdeutlicht Abbildung 3.1, dass Extremereignisse dazu tendieren, unkorreliert zwischen den beiden Variablen zu sein. Ist hingegen $\nu_Z = 4$ wie bei (C2) und (C4), so sind einige Beobachtungen in den gemeinsamen oberen und unteren Tails erkennbar. Ist der Asymmetrieparameter negativ wie bei den beiden schiefen Verteilungen (C3) und (C4), dann sind stärkere Anhäufungen der Beobachtungen im negativen als im positiven Quadranten feststellbar.

Eine alternative Methode, um die Unterschiede in den Abhängigkeitsstrukturen dieser vier vorgestellten Copulamodelle zu verdeutlichen, ist die Verwendung eines Abhängigkeitsmaßes, welches auch als Quantil-Abhängigkeit (engl. quantile-dependent measure of dependence) bezeichnet wird. Dieses Maß beschreibt die Stärke der Abhängigkeit zwischen

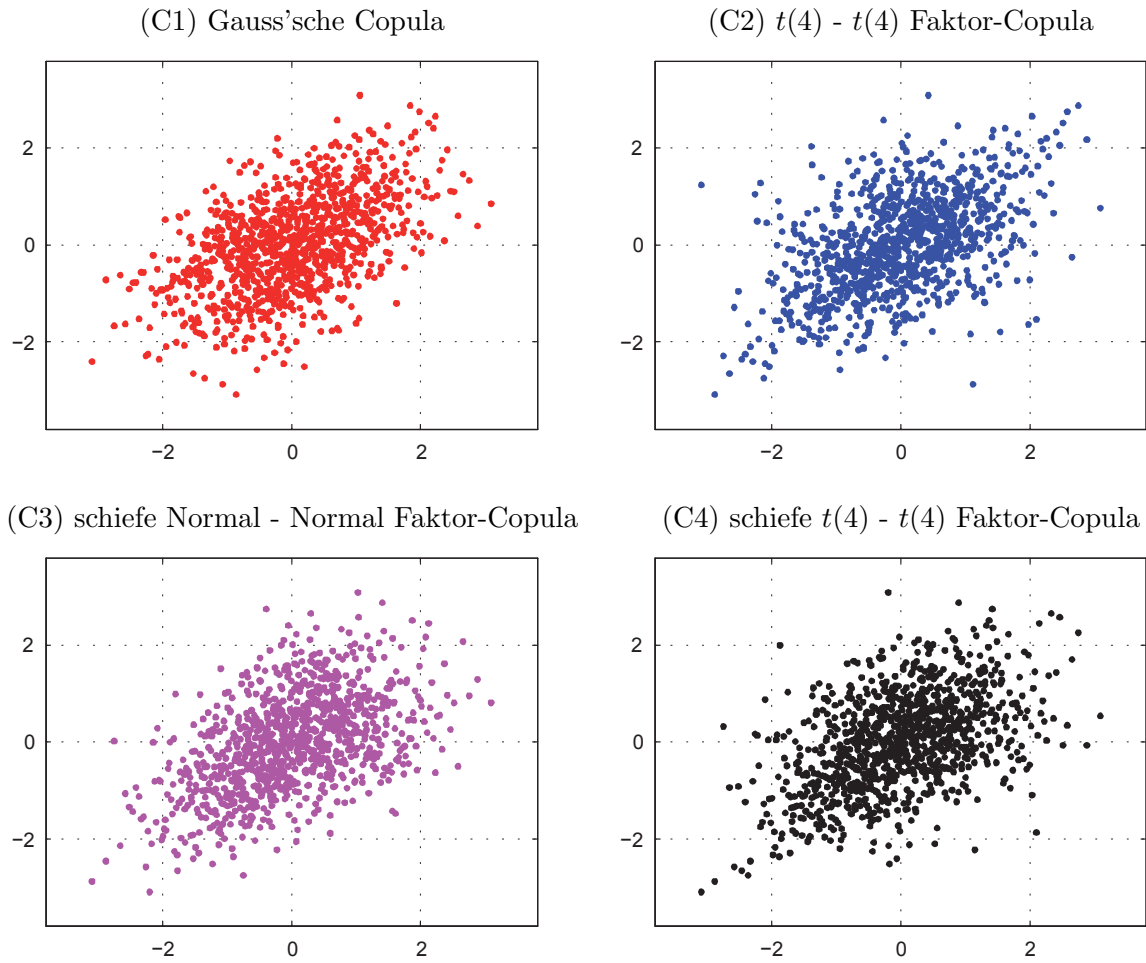


Abbildung 3.1: Scatterplots von vier bivariaten Verteilungen, alle mit standardnormalverteilten Rändern und einer linearen Korrelation von 0.5, konstruiert mit vier verschiedenen Copulas (vgl. Oh und Patton [36]).

zwei Variablen in den gemeinsamen unteren oder oberen Tails (vgl. Patton [43]). Formell ist es definiert durch

$$\tau(q) := \begin{cases} \mathbb{P}(U_1 \leq q | U_2 \leq q), & q \in (0, 0.5], \\ \mathbb{P}(U_1 > q | U_2 > q), & q \in (0.5, 1), \end{cases}$$

wobei $U_i := G_i(X_i) \sim \mathcal{U}(0, 1)$ die Wahrscheinlichkeitstransformation der simulierten Variable X_i ist. Mittels Schätzung der Abhängigkeitsstärke zwischen zwei Variablen, indem man sich vom Zentrum ($q = 0.5$) zu den Tails bewegt und den linken Tail ($q < 0.5$) mit dem rechten Tail ($q > 0.5$) vergleicht, liefert dieses Maß eine detailliertere Information über die Abhängigkeitsstruktur als skalarwertige Maße wie etwa die lineare Korrelation oder die Rangkorrelation. Man beachte, dass das Maß der Quantil-Abhängigkeit für $q \rightarrow 0$ bzw. $q \rightarrow 1$ gegen den unteren bzw. oberen Tail-Abhängigkeitskoeffizienten konvergiert, welche

in Kapitel 2.4.2 definiert wurden. Für Werte von q in der “Nähe“ von Null oder Eins erhalten wir folglich einen Schätzer für die Abhängigkeit in der “Nähe“ der gemeinsamen Tails und somit auch für die Tail-Abhängigkeitskoeffizienten.

Für die bereits zuvor beschriebenen vier verschiedenen Faktor-Copulas sind in Abbildung 3.2 die Quantil-Abhängigkeitsfunktionen dargestellt. Für die symmetrischen Copulas (C1) und (C2) ist diese Funktion symmetrisch um $q = 0.5$, wohingegen das für die anderen beiden nicht der Fall ist. Für die beiden Copulas, bei denen der gemeinsame Faktor einer heavy-Tail-Verteilung folgt, also jene, bei denen Z einer Student-t bzw. schiefen t-Verteilung folgt (d.h. die Copulas (C2) und (C4)), ist zu beobachten, dass die Quantil-Abhängigkeiten in der Nähe der Tails ansteigen, was wie folgt zu erklären ist: In diesen Fällen ist es wahrscheinlicher, dass eine extreme Beobachtung vom heavy-tailed gemeinsamen Faktor Z stammt als von der Variable ϵ_i und daher mit einem Extremwert für eine Variable auch die Wahrscheinlichkeit eines Extremwerts für die andere Variable steigt. Die wichtigste Erkenntnis dieser Abbildung liefert allerdings die schiefe $t(4)$ - $t(4)$ Faktor-Copula, da sie die Flexibilität dieser einfachen Klasse von Modellen widerspiegelt: Sie weist eine niedrige obere, jedoch eine hohe untere Quantil-Abhängigkeit auf, eine Eigenschaft die sich bei der Modellierung von Aktien>Returns als äußerst nützlich erweist.

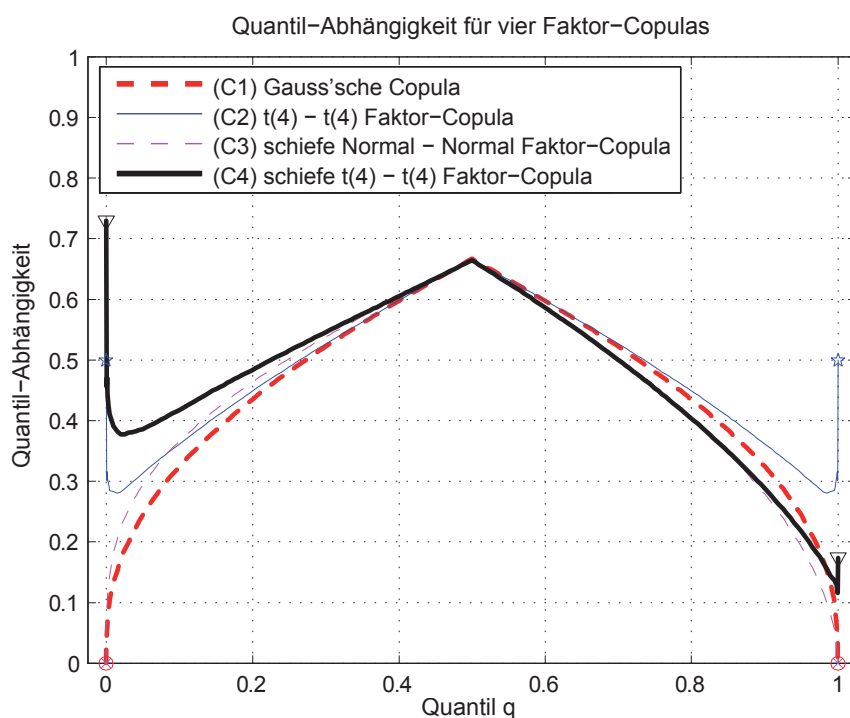


Abbildung 3.2: Quantil-Abhängigkeit für vier Faktor-Copulas, alle mit einer linearen Korrelation von 0.5 (vgl. Oh und Patton [36]).

Im Ein-Faktor-Copula Modell (3.5) weist die Faktorstruktur eine sehr einfache Form auf. Diese kann jedoch dahingehend erweitert werden, indem Gewichte auf dem gemeinsamen

Faktor zugelassen werden, die sich für die verschiedenen Variablen unterscheiden. Somit ergibt sich das folgende Modell:

$$\begin{aligned}
X_i &= \beta_i Z + \epsilon_i, & i = 1, \dots, n \\
\text{wobei } Z &\sim F_Z(\gamma_Z) \\
\epsilon_i &\stackrel{iid}{\sim} F_\epsilon(\gamma_\epsilon), & i = 1, \dots, n \\
Z &\perp \epsilon_i, & i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$(X_1, \dots, X_n)' =: \mathbf{X} \sim F_{\mathbf{X}} = C(G_1(\boldsymbol{\gamma}), \dots, G_n(\boldsymbol{\gamma}); \boldsymbol{\gamma})$$

wobei $\boldsymbol{\gamma} := (\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma'_\epsilon, \gamma'_Z)'$. Aufgrund der erweiterten Faktorstruktur weist dieses Modell $n - 1$ zusätzliche Parameter auf, weshalb im Gegensatz zur Ein-Faktor-Copula die Abhängigkeit eines gegebenen Paares von Variablen schwächer oder stärker ausfallen kann als für ein anderes Paar. Diese Abhängigkeitseigenschaft erhöht zwar die Flexibilität des Modells, im Gegenzug dazu wird aber auch die Parameterschätzung erschwert.

Ein Spezialfall dieses Modells ist jenes der sogenannten Blockabhängigkeit. Dabei werden die Variablen im Hinblick auf ihre Abhängigkeit a priori in homogene Gruppen eingeteilt, d.h. zwei beliebige Variablen verschiedener Gruppen sind in gleiche Weise voneinander abhängig wie zwei andere Variablen derselben beiden Gruppen. Eine in der Finanzwelt häufig benutzte Einteilung in Blöcke findet unter Verwendung der „Internationalen Standardklassifikation der Wirtschaftszweige“ statt. Wird nun mit G die Anzahl der Gruppen bezeichnet und mit $g(i) \in \{1, \dots, G\}$ jene Gruppe, der die i -te Variable zugehörig ist, so lässt sich die Faktorstruktur schreiben als

$$X_i = \beta_{g(i)} Z + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Im Falle von $G = 1$ entspricht dieses Modell genau dem Ein-Faktor-Copula Modell, wohingegen es für $G = n$ mit Modell (3.6) übereinstimmt.

3.3 Multi-Faktor-Copula Modell

Eine weitere Möglichkeit der Erweiterung des Ein-Faktor-Copula Modells besteht darin, K Faktoren zur Modellierung der Abhängigkeit zu erlauben:

$$X_i = \sum_{k=1}^K \beta_{ik} Z_k + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mittels der Spaltenvektoren $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_K)'$ und $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ sowie der Faktorladungsmatrix $B = (\beta_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times K}$ kann das K -Faktormodell in Matrix-Notation dargestellt werden als

$$\mathbf{X} = B\mathbf{Z} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Darüber hinaus gelten wie bisher die Bedingungen

$$Z_k \sim F_{Z_k}(\gamma_k), \quad k = 1, \dots, K, \quad \epsilon_i \stackrel{iid}{\sim} F_\epsilon(\gamma_\epsilon), \quad i = 1, \dots, n, \quad Z_k \perp \epsilon_i \quad \forall i, k.$$

Erlaubt man Abhängigkeiten zwischen den gemeinsamen Faktoren, so lässt sich die Verteilung von \mathbf{Z} mit Hilfe der Copula $C_{\mathbf{Z}}$ darstellen:

$$\mathbf{Z} \sim F_{\mathbf{Z}} = C_{\mathbf{Z}}(F_{Z_1}, \dots, F_{Z_K}).$$

Eine Möglichkeit der Vereinfachung des Modells besteht darin, Unabhängigkeit zwischen den gemeinsamen Faktoren zu fordern. Dies ist auch aus empirischer Sicht sinnvoll, da dadurch die Notwendigkeit der Spezifikation sowie der Schätzung von $C_{\mathbf{Z}}$ vermieden werden kann. Unter Berücksichtigung dieser Forderung lässt sich das K -Faktormodell folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{B}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\epsilon} \\ \text{wobei } Z_k &\stackrel{iid}{\sim} F_{Z_k}(\gamma_k) \\ \epsilon_i &\stackrel{iid}{\sim} F_\epsilon(\gamma_\epsilon), \quad i = 1, \dots, n \\ Z_k &\perp \epsilon_i \quad \forall i, k \\ \mathbf{X} &\sim F_{\mathbf{X}} = C(G_1(\boldsymbol{\gamma}), \dots, G_n(\boldsymbol{\gamma}); \boldsymbol{\gamma}) \end{aligned}$$

Hierbei ist der Parametervektor $\boldsymbol{\gamma}$ definiert durch $\boldsymbol{\gamma} := (\text{vec}(B)', \gamma'_\epsilon, \gamma'_1, \dots, \gamma'_K)'$, wobei $\text{vec}(B)$ jenen Spaltenvektor darstellt, der durch die spaltenweise Vektorisierung der Matrix B entsteht. Darüber hinaus werden mit der Bezeichnung *iid* (engl. independent but not identically distributed) unabhängige, aber nicht identisch verteilte Zufallsvariablen gekennzeichnet.

Dieses Multi-Faktormodell lässt sich zudem weiter vereinfachen, wenn man annimmt, dass das Gewicht eines jeden Faktors entweder gleich Null oder Eins ist, d.h. $\beta_{ik} \in \{0, 1\}$. Dabei werden die Gewichte bereits vorab bestimmt, indem die Variablen gruppiert werden. Im Detail bedeutet das folgendes: Jeder der Faktoren Z_k , $k = 1, \dots, K$, repräsentiert eine der K Gruppen. Ist die Variable X_i der Gruppe Z_k zugehörig, so ist $\beta_{ik} = 1$, sonst Null, wobei jede Variable auch mehreren Gruppen angehören kann. So eine Gruppierung kann bei Aktien etwa nach den unterschiedlichen Industriezweigen erfolgen.

Nachdem wir nun Multi-Faktor-Copulas formell definiert haben, sind bei der Spezifikation solcher Modelle einige Entscheidungen hinsichtlich der Wahl der Verteilungen und der Anzahl der Faktoren zu treffen:

- In erster Linie ist die Wahl zu treffen, welche Verteilungen für die gemeinsamen Faktoren und die idiosynkratischen Fehlerterme verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass es bei der Verwendung von simulationsbasierten Schätzmethoden möglich sein muss, Zufallsvariablen dieser Verteilungen auf einfache Art und Weise zu generieren (was bei den üblichen Verteilungsfunktionen stets der Fall ist).

- Darüber hinaus sind diese Verteilungen so zu wählen, dass sie sowohl Tail-Abhängigkeiten als auch asymmetrische Abhängigkeiten erfassen können.
- Zu guter Letzt ist die Anzahl der Faktoren festzulegen. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass zwar die Flexibilität des Modells erhöht wird, wenn man mehr als einen Faktor erlaubt, im Gegenzug dazu aber auch die Parameterschätzung erschwert wird.

Praktische Anwendung findet das Multi-Faktor-Copula Modell etwa in einer empirischen Studie von Oh und Patton [38], in der die Abhängigkeit zwischen 100 Aktien, die jeweils Bestandteil des S&P-Index sind, untersucht wird. Während bei der Betrachtung für $K = 1$ (d.h. im Ein-Faktor-Copula Modell) ein signifikanter Hinweis für einen schiefen, heavy-tailed gemeinsamen Faktor, welcher asymmetrische Abhängigkeit und Tail-Abhängigkeit generiert, zu finden ist, wird im Multi-Faktormodell die Wichtigkeit von Industriefaktoren verdeutlicht.

3.4 Nicht-lineares Faktor-Copula Modell

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln bereits lineare Faktor-Copulas näher betrachtet wurden, sollen hier kurz allgemeinere Faktor-Copula Modelle vorgestellt werden. Dazu betrachten wir die folgende allgemeine Ein-Faktorstruktur:

$$\begin{aligned}
 X_i &= h(Z, \epsilon_i), & i = 1, \dots, n \\
 \text{wobei } Z &\sim F_Z(\gamma_Z) \\
 \epsilon_i &\stackrel{iid}{\sim} F_\epsilon(\gamma_\epsilon), & i = 1, \dots, n \\
 Z &\perp \epsilon_i, & i = 1, \dots, n \\
 (X_1, \dots, X_n)' =: \mathbf{X} &\sim F_{\mathbf{X}} = C(G_1(\gamma), \dots, G_n(\gamma); \gamma)
 \end{aligned}$$

Dabei wird mit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion bezeichnet und der Parametervektor γ ist definiert durch $\gamma := (\gamma'_\epsilon, \gamma'_Z)'$. Einige Beispiele für Copulamodelle, die in diese Struktur passen, sind in der nachfolgenden Tabelle angeführt.

Copula	$h(\mathbf{Z}, \epsilon_i)$	F_Z	F_ϵ
Gauss'sche Copula	$Z + \epsilon_i$	$\mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$	$\mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$
Student-t Copula	$\sqrt{Z} \epsilon_i$	$Ig(\nu/2, \nu/2)$	$\mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$
schiefe t-Copula	$\lambda Z + \sqrt{Z} \epsilon_i$	$Ig(\nu/2, \nu/2)$	$\mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$
verallgemeinerte hyperbolische Copula	$\gamma Z + \sqrt{Z} \epsilon_i$	$GIG(\lambda, \chi, \psi)$	$\mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$
Clayton Copula	$(1 + \epsilon_i/Z)^{-\alpha}$	$\Gamma(\alpha, 1)$	$Exp(1)$

Tabelle 3.1: Beispiele für nicht-lineare Faktor-Copula Modelle.

Hier bezeichnet Ig die Inverse Gammaverteilung, GIG die verallgemeinerte inverse Normalverteilung, Γ die Gammaverteilung und Exp die Exponentialverteilung. Für Details zur schiefen t-Copula und zur verallgemeinerten hyperbolischen Copula sei an dieser Stelle auf McNeil et al. [34] verwiesen.

Aufgrund der speziellen Wahl der Funktion h in Kombination mit der Wahl der Verteilungsfunktionen F_Z und F_ϵ kann für jede in obiger Tabelle genannte Copula die Dichte in geschlossener Form angegeben werden. Für andere Kombinationen von h und den Verteilungsfunktionen existieren nicht notwendigerweise geschlossene Ausdrücke für die Dichte und somit auch nicht für die Likelihood-Funktion. Dieser Nachteil kann allerdings mit Hilfe von simulationsbasierten Schätzmethoden übergangen werden, sodass man eine weitaus größere Vielfalt an Modellen für die Abhängigkeitsstruktur erhält (vgl. Oh und Patton [38]). Praktische Anwendungen dieser nicht-linearen Modelle sind in der Literatur derzeit jedoch noch nicht verfügbar.

3.5 Zeitvariierendes Ein-Faktor-Copula Modell

In den vorangegangenen Abschnitten wurde stets angenommen, dass sich die Abhängigkeitsstruktur über die Zeit nicht verändert, was jedoch keineswegs die Realität widerspiegelt. Daher soll zum Abschluss dieses Kapitels ein dynamisches Copulamodell betrachtet werden, welches Veränderungen über die Zeit zulässt. Dazu betrachten wir die bedingte Version des Satzes von Sklar, d.h.

$$\mathbf{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim F_t = C_t(F_{1t}, \dots, F_{nt}).$$

Das entsprechende dynamische Ein-Faktor-Copula Modell ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} X_{it} &= \beta_{it}(\gamma_\beta) Z_t + \epsilon_{it}, & i = 1, \dots, n \\ \text{wobei } Z_t &\sim F_{Zt}(\gamma_Z) \\ \epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{nt} &\stackrel{iid}{\sim} F_{\epsilon t}(\gamma_\epsilon) \\ Z_t &\perp \epsilon_{it}, & i = 1, \dots, n \\ \mathbf{X}_t &\sim F_{\mathbf{X}_t} = C_t(G_{1t}(\gamma), \dots, G_{nt}(\gamma); \gamma) \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei $\gamma := (\gamma'_\beta, \gamma'_\epsilon, \gamma'_Z)'$. Wie bereits mehrfach erwähnt, ist die Angabe der Faktor-Copula in geschlossener Form im Allgemeinen nicht möglich. Infolgedessen existiert auch keine Darstellung der Copula-Likelihood-Funktion in geschlossener Form. Diese Problematik kann jedoch mit Hilfe numerischer Methoden überwunden werden. Oh und Patton [36] präsentieren eine simulationsbasierte Momentenmethode zur Schätzung der unbekannt Parameter. Dieser Ansatz erzielt zwar gute Resultate, kann allerdings nur auf bedingte, über die Zeit konstante Copulas angewandt werden. Da der Fokus dieses Abschnitts allerdings auf dynamischen Copulas liegt, ist ein alternativer Ansatz erforderlich. Oh und Patton [37] schlagen daher eine numerische Integrationsmethode vor, welche die Tatsache

ausnützt, dass, obwohl die Copula n -dimensional ist, nur der gemeinsame Faktor ausintegriert werden muss, welcher in obiger Struktur eindimensional ist.

Ausgehend von der Faktorstruktur (3.7) ist es nun das Ziel, die Copuladichte von \mathbf{X}_t zu bestimmen:

$$c_t(u_1, \dots, u_n) = \frac{f_{xt}(G_{1t}^{-1}(u_1), \dots, G_{nt}^{-1}(u_n))}{g_{1t}(G_{1t}^{-1}(u_1)) \cdots g_{nt}(G_{nt}^{-1}(u_n))},$$

wobei $f_{xt}(x_1, \dots, x_n)$ die gemeinsame Dichte von \mathbf{X}_t bezeichnet, $g_{it}(x_i)$ die Randdichte von X_i und $c_t(u_1, \dots, u_n)$ die Copuladichte. Um die Copuladichte konstruieren zu können, benötigt man nun jede der Funktionen, welche in obiger Gleichung auf der rechten Seite auftreten: $f_{xt}(x_1, \dots, x_n)$, $g_{it}(x_i)$ sowie $G_{it}^{-1}(u_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Aufgrund der Unabhängigkeit von Z und ϵ_i folgt

$$\begin{aligned} f_{X_i|Z,t}(x_i|z) &= f_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}z), \\ F_{X_i|Z,t}(x_i|z) &= F_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}z), \\ f_{\mathbf{X}|Z,t}(x_1, \dots, x_n|z) &= \prod_{i=1}^n f_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}z). \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser bedingten Dichten bzw. der bedingten Verteilung erhält man für die Randdichte die Darstellung

$$g_{it}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_i,Z,t}(x_i, z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_i|Z,t}(x_i|z) f_{Z,t}(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}z) f_{Z,t}(z) dz,$$

und analog folgt

$$\begin{aligned} G_{it}(x_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}z) f_{Z,t}(z) dz, \\ f_{xt}(x_1, \dots, x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}z) f_{Z,t}(z) dz. \end{aligned}$$

Um obige Integrale in beschränkte Integrale zu transformieren, verwenden wir die Substitution $u = F_{Z,t}(z)$ und erhalten

$$\begin{aligned} g_{it}(x_i) &= \int_0^1 f_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}F_{Z,t}^{-1}(u)) du, \\ G_{it}(x_i) &= \int_0^1 F_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}F_{Z,t}^{-1}(u)) du, \\ f_{xt}(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n f_{\epsilon_i}(x_i - \beta_{it}F_{Z,t}^{-1}(u)) du. \end{aligned}$$

Die hier angeführten Gleichungen zeigen, dass zur Berechnung der Dichte der Faktor-Copula nur eindimensionale Integrale ausgewertet werden müssen (für eine Faktor-Copula mit K gemeinsamen Faktoren würde das Integral K -dimensional sein). Zur Berechnung dieser Integrale verwenden wir die Gauss-Legendre-Quadratur mit Q Knoten, wobei eine Simulationsstudie in [37] zeigt, dass sich für die Anzahl der Knoten die Wahl $Q = 50$ als geeignet erweist.

Schlussendlich fehlt noch eine Methode um $G_{it}(x_i)$ zu invertieren, wobei wir uns hier ebenfalls an der Arbeit von Oh und Patton [37] orientieren: Man beachte, dass $G_{it}(x_i)$ eine Funktion sowohl in x als auch in β_{it} ist, wobei aufgrund obiger Darstellung $G_{it} = G_{js}$ folgt, falls $\beta_{it} = \beta_{js}$. Wir schätzen die Inverse von G_{it} , indem wir ein Gitter mit 100 Punkten für x auf dem Intervall $[x_{min}, x_{max}]$ und 50 Punkten für β auf dem Intervall $[\beta_{min}, \beta_{max}]$ konstruieren und anschließend G an jedem dieser Gitterpunkte auswerten. Wir verwenden nun die zweidimensionale lineare Interpolation um $G^{-1}(u; \beta)$ gegeben u und β zu erhalten. Durch diese zweidimensionale Approximation reduziert sich der Rechenaufwand erheblich, speziell in jenem Fall, wenn β zeitvariierend ist, da die Funktion G bereits vor der Schätzung ausgewertet werden kann anstatt sie für jede Likelihood-Auswertung neu zu schätzen.

Eine praktische Anwendung des dynamischen Faktor-Copula Modells findet man in der Literatur etwa in einer empirischen Studie von Oh und Patton [37], in der die gemeinsame Verteilung von 100 CDS-Spreads analysiert wird.

4 Ein dynamisches Copulamodell für hochdimensionale Datensätze

Wie bereits erwähnt, werden die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Portfoliobestandteilen üblicherweise als konstant über die Zeit betrachtet. Dies entspricht jedoch keineswegs der Realität, da die Abhängigkeitskoeffizienten sehr wohl im Laufe der Zeit variieren können. Aus diesem Grund widmet sich dieses Kapitel der Vorgehensweise zur Erfassung dieser Dynamik in Abhängigkeit einer relativ großen Anzahl an Variablen. Dazu wird zunächst die Klasse jener datengenerierenden Prozesse (engl. data generating processes (DGPs)) betrachtet, die zeitvariierende bedingte Randverteilungen erlaubt. Unter Verwendung des zeitvariierenden Faktor-Copula Modells des vorangegangenen Kapitels wird anschließend näher auf die Modellierung eines dynamischen Copulamodells eingegangen. Grundlage dieses Kapitels ist die Arbeit von Oh und Patton [37].

4.1 Beschreibung des Modells für die bedingte gemeinsame Verteilung

Es ist allgemein bekannt, dass multivariate Finanzzeitreihen in der Regel weder linear noch normalverteilt sind. Daher ist die klassische lineare multivariate Modellierung, welche auf der Annahme einer Normalverteilung beruht, ungeeignet. Um jedoch eine flexible Modellierung der gesamten bedingten Verteilung einer Zeitreihe zu gewährleisten, führen Chen und Fan [4] die Klasse der semiparametrischen copulabasierten multivariaten dynamischen (engl. semiparametric copula-based multivariate dynamic (SCOMDY)) Modelle ein. Unter diesen Modellen werden der bedingte Erwartungswert und die bedingte Varianz einer multivariaten Zeitreihe parametrisch festgelegt, jedoch wird die multivariate Verteilung der (standardisierten) Fehlerterme semiparametrisch spezifiziert, d.h. durch eine parametrische Copula, welche an den nicht-parametrischen univariaten Randverteilungen ausgewertet wird. Anhand von Beispielen verdeutlichen Chen und Fan in ihrer Arbeit die Flexibilität dieser SCOMDY Modelle, indem sie ein breites Spektrum von nicht-linearen, asymmetrischen Abhängigkeitsstrukturen sowie das Verhalten der Randverteilungen von multivariaten Zeitreihen erfassen.

In vorliegender Arbeit soll jedoch die von Oh und Patton [37] beschriebene Verallgemeine-

zung des SCOMDY Modells Anwendung finden, in der zusätzlich *zeitvariierende bedingte Copulas* erlaubt werden. Diese zusätzliche Flexibilität führt allerdings zur Notwendigkeit, die bedingten Randverteilungen als parametrisch zu spezifizieren. Die Erfordernis der parametrischen Randverteilung resultiert aus der Tatsache, dass die asymptotische Verteilungstheorie für ein Modell mit nicht-parametrischen Rändern und zeitvariierender Copula in der Literatur derzeit noch nicht verfügbar ist (vgl. Oh und Patton [37]).

Wir betrachten nun die n -dimensionale Zeitreihe $\mathbf{Y}_t := (Y_{1t}, \dots, Y_{nt})'$ und bezeichnen mit

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots)$$

die Sigma-Algebra, die die gesamte Informationsmenge bis zum Zeitpunkt t repräsentiert. Zum besseren Verständnis wollen wir hier anmerken, dass in der empirischen Analyse (vgl. Kapitel 5) mit Y_{it} stets der logarithmierte Aktien-Return der i -ten Aktie zum Zeitpunkt t bezeichnet wird. Wie bereits einleitend erwähnt, betrachten wir nun jene Klasse von DGPs, die zeitvariierende bedingte Randverteilungen erlaubt:

$$Y_{it} := \mu_i(\mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\phi}) + \sigma_i(\mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\phi})\eta_{it}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

wobei $\mathbf{Z}_{t-1} \in \mathcal{F}_{t-1}$. Hierbei wird mit

$$\mu_i(\mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\phi}) = \mathbb{E}(Y_{it} | \mathcal{F}_{t-1})$$

der zeitvariierende bedingte Erwartungswert und mit

$$\sigma_i^2(\mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\phi}) = \text{Var}(Y_{it} | \mathcal{F}_{t-1})$$

die zeitvariierende bedingte Varianz bezeichnet, die jeweils durch den unbekannt Parameter $\boldsymbol{\phi}$ parametrisiert werden. Darüber hinaus werden mit η_{it} die standardisierten Residuen bezeichnet.

Durch die Annahme der parametrischen Modellierung der bedingten Erwartungswerte und Varianzen kann auf eine große Vielfalt an existierenden Modellen zurückgegriffen werden. So können für den Erwartungswert etwa ARMA-Modelle, Vektorregressionsmodelle sowie lineare als auch nicht-lineare Regressionsmodelle verwendet werden, wohingegen für die bedingte Varianz ARCH-Modelle sowie jede ihrer zahlreichen Erweiterungen (GARCH, EGARCH, GJR-GARCH, etc.) oder stochastische Volatilitätsmodelle als mögliche Wahl zur Verfügung stehen.

Die bedingte Verteilung der standardisierten Residuen

$$\eta_{it} := \frac{Y_{it} - \mu_i(\mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\phi})}{\sigma_i(\mathbf{Z}_{t-1}, \boldsymbol{\phi})}$$

ist eine stetige parametrische Verteilung mit Erwartungswert Null und Einheitsvarianz. Diese Verteilung kann als (parametrische) Funktion von \mathcal{F}_{t-1} -messbaren Variablen über die Zeit variieren:

$$\eta_{it} | \mathcal{F}_{t-1} \sim F_i(\cdot | \mathbf{Z}_{t-1}; \boldsymbol{\phi}). \quad (4.2)$$

Ist nun die bedingte Wahrscheinlichkeitstransformation der standardisierten Residuen gegeben durch

$$U_{it} := F_i(\eta_{it}), \quad i = 1, \dots, n,$$

dann entspricht die bedingte Copula von $\mathbf{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}$ der bedingten Verteilung von $\mathbf{U}_t := (U_{1t}, \dots, U_{nt})' | \mathcal{F}_{t-1}$:

$$\mathbf{U}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim C(\boldsymbol{\delta}_t(\boldsymbol{\gamma})). \quad (4.3)$$

Dabei ist $\boldsymbol{\delta}_t$ der Parameter der Copula C ist $\boldsymbol{\gamma}$ ist jener Parameter, der die Dynamik der Zeitreihe regelt. Darüber hinaus beinhaltet $\boldsymbol{\phi}$ alle Parameter im Zusammenhang mit den Randverteilungen und $\boldsymbol{\theta} := (\boldsymbol{\phi}', \boldsymbol{\gamma}')'$ bezeichnet den Vektor aller Parameter.

Während wir im in Kapitel 3.5 beschriebenen dynamischen Ein-Faktor-Copula Modell erlauben, dass die bedingte Copula C_t selbst über die Zeit variieren kann, betrachten wir von nun an stets, wie in (4.3) angeführt, konstante Copulas, erlauben aber einen zeitvariierenden Parameter $\boldsymbol{\delta}_t$, der von einem fixen Parameter $\boldsymbol{\gamma}$ gesteuert wird.

4.2 GAS-Dynamik

Bei dynamischen Copulamodellen stellt sich nun die Frage, wie sich die Parameter über die Zeit entwickeln. In diesem Zusammenhang schlagen Oh und Patton [37] eine Adaption des sogenannten Generalized Autoregressive Score (GAS) Modells vor. Aus diesem Grund wollen wir nachfolgend zunächst das von Creal et al. [9] vorgestellte GAS-Modell in seiner allgemeinen Form präsentieren, bevor wir dieses mit zeitvariierenden Copulas in Verbindung bringen.

Beim GAS-Modell handelt es sich um ein Modell, bei dem die zeitvariierenden Parameter durch Beobachtungen gesteuert werden. Betrachte dazu den n -dimensionalen Vektor \mathbf{y}_t und bezeichne mit $\boldsymbol{\delta}_t$ den zeitvariierenden k -dimensionalen Parametervektor und mit $\boldsymbol{\theta}$ den konstanten Parametervektor. Definiere $Y^t := \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\}$ und $\Delta^t := \{\boldsymbol{\delta}_0, \dots, \boldsymbol{\delta}_t\}$. Die zum Zeitpunkt t verfügbare Informationsmenge bestehe aus $\{\boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}\}$, wobei

$$\mathcal{G}_t := \{Y^t, \Delta^t\}, \quad t = 0, \dots, n-1.$$

Wir nehmen an, dass die beobachtbaren Werte \mathbf{y}_t durch die Dichte

$$\mathbf{y}_t \sim p(\cdot | \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \quad (4.4)$$

generiert werden. Weiters nehmen wir an, dass der Mechanismus zur Aktualisierung der zeitvariierenden Parameter $\boldsymbol{\delta}_t$ durch folgende autoregressive Aktualisierungsgleichung gegeben ist:

$$\boldsymbol{\delta}_{t+1} = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^p A_i \mathbf{s}_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j \boldsymbol{\delta}_{t-j+1}. \quad (4.5)$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\omega}$ einen k -dimensionalen konstanten Vektor, A_i , $i = 1, \dots, p$, und B_j , $j = 1, \dots, q$, sind $(k \times k)$ -dimensionale Koeffizientenmatrizen und \mathbf{s}_t ist eine geeignete vektorwertige Funktion der vergangenen Daten der Dimension k , d.h. $\mathbf{s}_t = s(\mathbf{y}_t, \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$. Die unbekannt Parameter in (4.5) sind Funktionen von $\boldsymbol{\theta}$, d.h. $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})$, $A_i = A_i(\boldsymbol{\theta})$ und $B_j = B_j(\boldsymbol{\theta})$ für $i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, q$.

Der Ansatz basiert nun für einen gegebenen Parameter $\boldsymbol{\delta}_t$ auf der Dichte (4.4). Wird eine Beobachtung \mathbf{y}_t realisiert, so wird $\boldsymbol{\delta}_t$ für die nächste Periode $t + 1$ unter Verwendung von Gleichung (4.5) aktualisiert:

$$\mathbf{s}_t = S_t \boldsymbol{\nabla}_t, \quad \boldsymbol{\nabla}_t = \frac{\partial \log p(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\delta}_t}, \quad S_t = S(t, \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}), \quad (4.6)$$

wobei $S(\cdot)$ eine Matrixfunktion der Dimension $(k \times k)$ ist. Die Gleichungen (4.4) bis (4.6) definieren nun das Generalized Autoregressive Score Modell der Ordnungen p und q , kurz GAS(p, q).

Während diese Spezifikation für die Entwicklung der zeitvariierenden Parameter auf den ersten Blick etwas beliebig erscheint, führen Creal et al. [9] zwei Argumente an, welche die Verwendung dieses Modells rechtfertigen. Zum einen kann die Rekursion als die steilste Anstiegsrichtung zur Verbesserung des Modell-Fits bezüglich ihrer Likelihood-Funktion gegeben der aktuellen Position des Modellparameters $\boldsymbol{\delta}_t$ interpretiert werden, ähnlich zu numerischen Optimierungsalgorithmen wie dem Gauss-Newton-Algorithmus. Zum anderen beinhaltet das GAS-Modell eine Vielzahl an gängigen existierenden Modellen. Zu einem der wichtigsten Vertreter zählt mit Sicherheit das GARCH-Modell, auf welches hier nun kurz näher eingegangen werden soll. Betrachtet wird das Modell

$$y_t = \epsilon_t, \quad \epsilon_t \stackrel{ind}{\sim} \mathcal{N}(0, \delta_t)$$

mit zeitvariierender Varianz $\delta_t = \sigma_t^2$ und als Skalierungsmatrix S_t (welche in diesem Fall eine (1×1) -Matrix ist) wird die Inverse der Fisher-Informationsmatrix¹ gewählt, d.h.

$$S_t := \mathcal{I}_{t|t-1}^{-1} = -\mathbb{E}_{t-1} \left[\frac{\partial^2 \log p(y_t | \delta_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_t^2} \right]^{-1},$$

¹Sei \mathbf{y}_t eine n -dimensionale Zufallsstichprobe, die durch die Dichtefunktion $p(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$ generiert wird, wobei $\boldsymbol{\delta}_t$ den k -dimensionalen Parametervektor der Dichte beschreibt. Die Fisher-Informationsmatrix ist gegeben durch die symmetrische $(k \times k)$ -Matrix $\mathcal{I}_{t|t-1} := \mathcal{I}_{t|t-1}(\boldsymbol{\delta}_t) = \left(\mathcal{I}_{t|t-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{\delta}_t) \right)_{1 \leq i, j \leq k}$, wobei

$$\mathcal{I}_{t|t-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{\delta}_t) := \mathbb{E}_{t-1} \left(\nabla_t^{(i)} \nabla_t^{(j)} \right) = -\mathbb{E}_{t-1} \left[\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_t^{(i)} \partial \delta_t^{(j)}} \right].$$

Hierbei wird mit \mathbb{E}_{t-1} ein Erwartungswert bezüglich $p(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$ bezeichnet. Darüber hinaus wird mit $\delta_t^{(i)}$ die i -te Komponente des Vektors $\boldsymbol{\delta}_t$ gekennzeichnet und $\nabla_t^{(i)}$ bezeichnet die i -te Komponente von $\boldsymbol{\nabla}_t = \frac{\partial \log p(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\delta}_t}$, d.h. $\nabla_t^{(i)} = \frac{\partial \log p(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\delta}_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_t^{(i)}}$. Für nähere Details zur Informationsmatrix siehe Lehmann und Casella [32].

wobei mit \mathbb{E}_{t-1} ein Erwartungswert bezüglich $p(y_t|\delta_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$ bezeichnet wird. Die Dichte der normalverteilten Zufallsvariable y_t hat die Gestalt

$$p(y_t|\delta_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\delta_t}\right),$$

und somit ist der Logarithmus der Dichtefunktion von der Form

$$\log p(y_t|\delta_t, \mathcal{G}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\delta_t) - \frac{y_t^2}{2\delta_t}.$$

Infolgedessen erhält man für die Score-Funktion ∇_t und die inverse Informationsmatrix die folgenden Darstellungen:

$$\begin{aligned} \nabla_t &= \frac{1}{2\delta_t^2} y_t^2 - \frac{1}{2\delta_t} = \frac{1}{2\delta_t^2} (y_t^2 - \delta_t), \\ \mathbb{E}_{t-1}(\nabla_t) &= \frac{1}{2\delta_t^2} (\mathbb{E}_{t-1}(y_t^2) - \delta_t) = \frac{1}{2\delta_t^2} (\text{Var}_{t-1}(y_t) + \mathbb{E}_{t-1}(y_t)^2 - \delta_t) = \frac{1}{2\delta_t^2} (\delta_t - \delta_t) = 0, \\ \mathcal{I}_{t|t-1} &= -\mathbb{E}_{t-1} \left(-\frac{y_t^2}{\delta_t^3} + \frac{1}{2\delta_t^2} \right) = \frac{\delta_t}{\delta_t^3} - \frac{1}{2\delta_t^2} = \frac{1}{2\delta_t^2}, \\ S_t &= \mathcal{I}_{t|t-1}^{-1} = 2\delta_t^2. \end{aligned}$$

Demzufolge gilt $s_t = S_t \nabla_t = y_t^2 - \delta_t$ und die GAS-Aktualisierungsgleichung hat folgende Gestalt:

$$\delta_{t+1} = \omega + A(y_t^2 - \delta_t) + B\delta_t.$$

Daher reduziert sich das GAS(1,1)-Updating-Schema für $\delta_t = \sigma_t^2$ zum GARCH(1,1)-Modell:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + A(y_t^2 - \sigma_t^2) + B\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_t^2 + \beta \sigma_t^2, \quad (\beta = B - A),$$

wobei die unbekanntenen Koeffizienten ω , α und β bestimmten Voraussetzungen unterliegen, um die Stationarität des Prozesses zu gewährleisten (vgl. Bollerslev [3]). Neben dem GARCH-Modell zählen auch noch das sogenannte multiplikative Fehlermodell (vgl. Engle [18]) sowie das von Davis et al. [10] vorgestellte Poisson-Zählmodell zu wichtigen Vertretern der Klasse der GAS-Modelle.

Im Ein-Faktor-Copula Modell (3.7) entsteht die Dynamik, indem man erlaubt, dass die Gewichte β_{it} auf dem gemeinsamen Faktor über die Zeit variieren und/oder dass die Verteilungen des gemeinsamen Faktors und der idiosynkratischen Variablen sich über die Zeit verändern. Verwendet man in (4.3) für den die Dynamik beschreibenden Parameter $\boldsymbol{\delta}_t$ das GAS(1,1)-Modell, so erhält man für Faktor-Copulas das folgende Modell (vgl. Oh und Patton [37]):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t | \mathcal{F}_{t-1} &\sim C(\boldsymbol{\delta}_t(\boldsymbol{\gamma})), \\ \boldsymbol{\delta}_t &= \boldsymbol{\omega} + A\mathbf{s}_{t-1} + B\boldsymbol{\delta}_{t-1}, \\ \mathbf{s}_{t-1} &= S_{t-1} \nabla_{t-1}, \\ \nabla_{t-1} &= \frac{\partial \log c(\mathbf{u}_{t-1} | \boldsymbol{\delta}_{t-1})}{\partial \boldsymbol{\delta}_{t-1}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2.1 GAS-Dynamik für hochdimensionale Daten

Wir wollen nun das soeben eingeführte GAS(1,1)-Modell verwenden, um im Ein-Faktor-Copula Modell die Dynamik der Faktorladungen zu modellieren. Wir betrachten dazu das bereits in Abschnitt 3.5 eingeführte zeitvariierende Ein-Faktor-Copula Modell:

$$\begin{aligned} X_{it} &= \beta_{it}(\gamma_\beta)Z_t + \epsilon_{it}, & i &= 1, \dots, n, \\ Z_t &\sim F_{Zt}(\gamma_Z), & \epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{nt} &\stackrel{iid}{\sim} F_{\epsilon t}(\gamma_\epsilon), & Z_t &\perp \epsilon_{it} \forall i, t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Da unser Interesse jedoch darin liegt, eine große Anzahl an Variablen zu erlauben, werden wir das Modell dahingehend spezifizieren, dass ein auch für hochdimensionale Daten (d.h. große Werte für n), leicht handhabbares Modell daraus resultiert. Dabei orientieren wir uns an der Arbeit von Oh und Patton [37].

Um, wie bereits erwähnt, das Modell auch für hochdimensionale Daten möglichst einfach zu halten, setzen wir voraus, dass die Parameter der Verteilungen des gemeinsamen Faktors und der idiosynkratischen Fehler, γ_Z und γ_ϵ , konstant sind. Als Verteilungsmodell für F_Z verwenden wir die schiefe t-Verteilung von Hansen, welche zwei Parameter hat, nämlich den Freiheitsgradparameter $\nu_Z \in (2, \infty)$ und den Nichtzentralitätsparameter $\psi_Z \in (-1, 1)$, und die folgende Dichte aufweist (vgl. Hansen [22]):

$$f_Z(x|\nu_Z, \psi_Z) := \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu_Z - 2} \left(\frac{bx+a}{1-\psi_Z} \right)^2 \right)^{-(\nu_Z+1)/2}, & x < -a/b, \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu_Z - 2} \left(\frac{bx+a}{1+\psi_Z} \right)^2 \right)^{-(\nu_Z+1)/2}, & x \geq -a/b, \end{cases}$$

wobei die Konstanten a, b und c folgendermaßen gegeben sind:

$$a := 4\psi_Z c \frac{\nu_Z - 2}{\nu_Z - 1}, \quad b := \sqrt{1 + 3\psi_Z^2 - a^2}, \quad c := \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_Z+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_Z}{2}\right) \sqrt{\pi(\nu_Z - 2)}}.$$

Aus Gründen der Einfachheit verwenden wir als Modell für F_ϵ die (standardisierte) Student-t Verteilung mit ν_ϵ Freiheitsgraden, d.h. wir fordern Symmetrie in der Verteilung der idiosynkratischen Variablen. Man beachte dazu, dass sich die schiefe t-Verteilung zur Student-t Verteilung vereinfacht, wenn man den Nichtzentralitätsparameter gleich Null setzt.

Im allgemeinen GAS-Ansatz (4.7) existieren für die n zeitvariierenden Faktorladungen $n + 2n^2$ Parameter (n Intercepts ω_i sowie je n^2 Parameter infolge der Matrizen A und B), die ihre Entwicklung beeinflussen. Da dies jedoch bereits für nicht allzu große n eine unzumutbare Anzahl an zu schätzenden Parametern wäre, nehmen wir an, dass die Koeffizientenmatrizen A und B in (4.7) Diagonalmatrizen mit einem gemeinsamen Parameter auf der Diagonale sind (vgl. Engle [17]), d.h. $A = aI_n$ und $B = bI_n$. Zusätzlich setzen wir, um die Schätzung der $(n \times n)$ -Skalierungsmatrix S_t zu vermeiden, $S_t = I_n$. Somit

ergibt sich unter Verwendung der Notation $\boldsymbol{\beta}_t = (\beta_{1t}, \dots, \beta_{nt})'$ das folgende Modell für die logarithmierten Faktorladungen:

$$\log \beta_{it} = \omega_i + b \log \beta_{i,t-1} + a s_{i,t-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.9)$$

wobei

$$s_{it} = \frac{\partial \log c(\mathbf{u}_t | \boldsymbol{\beta}_t, \nu_Z, \psi_Z, \nu_\epsilon)}{\partial \beta_{it}}.$$

Das dynamische Copulamodell gegeben durch die Gleichungen (4.8) und (4.9) beinhaltet in Summe $n + 5$ zu schätzende Parameter, wobei $n + 2$ Parameter infolge der GAS-Dynamik entstehen und 3 Parameter mit der Wahl der Verteilung des gemeinsamen Faktors sowie der idiosynkratischen Variablen einhergehen.

Die Anzahl der zu schätzenden Parameter lässt sich jedoch weiter reduzieren, indem dem Modell weitere Restriktionen auferlegt werden. Fordert man etwa in (4.9) $\omega_i = \omega$ für alle $i = 1, \dots, n$, so ist die paarweise Abhängigkeit zwischen jedem Variablenpaar identisch. In diesem Fall sind nur 6 Parameter zu schätzen, unabhängig von n , der Anzahl der Variablen. Diese Einschränkung verringert den Aufwand für die Parameterschätzung des Modells erheblich, fordert allerdings auch Homogenität im Modell. Ist soeben genanntes Modell allerdings zu restriktiv, so wird oftmals jenes Modell betrachtet, in dem die verschiedenen Aktien ex ante in Gruppen eingeteilt werden, etwa unter Verwendung des Klassifikationschemas für unterschiedliche Industriezweige. Dies führt zu folgendem Modell:

$$\begin{aligned} X_{it} &= \beta_{g(i),t} Z_t + \epsilon_{it}, & i &= 1, \dots, n, \\ \log \beta_{g,t} &= \omega_g + b \log \beta_{g,t-1} + a s_{g,t-1}, & g &= 1, \dots, G, \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei mit $g(i)$ jene Gruppe bezeichnet wird, der die i -te Variable zugehörig ist und mit G die Anzahl der Gruppen. In diesem Fall ist die Anzahl der zu schätzenden Parameter gleich $G + 5$.

4.2.2 Ein alternativer Ansatz: “variance targeting“-Methode

Wie bereits erwähnt, beinhaltet die Schätzung der Parameter im flexibleren Modell die numerische Suche von $n+5$ Parametern, was für $n = 100$ bereits eine große Herausforderung darstellen kann. Daher soll zum Abschluss dieses Kapitels eine von Oh und Patton [37] vorgestellte Methode präsentiert werden, mit der dieses Problem umgangen werden kann, indem die Intercepts ω_i in der GAS-Evolutionsgleichung durch eine Transformation eines Stichproben-Abhängigkeitsmaßes ersetzt werden. Damit wir jedoch in der Lage sind, diese Methode im Detail zu beschreiben, bedarf es einiger Annahmen.

Annahme 4.1. *Die bedingte Copula von $\mathbf{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}$ entspricht der bedingten Copula von $\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}$, die durch die Gleichungen (4.8) und (4.9) gegeben ist.*

Diese Annahme stellt sicher, dass die Copula der beobachtbaren Daten die GAS-Faktor-Copula ist.

Die folgende Annahme resultiert aus der Tatsache, dass in der Literatur zwar Voraussetzungen zu finden sind, unter denen das univariate GAS-Modell Stationaritätsbedingungen erfüllt, entsprechende Resultate für den multivariaten Fall jedoch nicht verfügbar sind. Daher fordern wir:

Annahme 4.2. *Der durch (4.9) gegebene Prozess $\{\beta_t\}$ ist strikt stationär².*

Annahme 4.3. *Sei $\rho_{ij,t,X} := \text{RankCorr}(X_{it}, X_{jt})$ und $\rho_{ij,t,X}^L := \text{Corr}(X_{it}, X_{jt})$, wobei mit RankCorr der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman bezeichnet wird. Dann ist für feste Werte von $(\gamma_Z, \gamma_\epsilon)$ die Abbildung $\rho_{ij,t,X} = \varphi(\rho_{ij,t,X}^L)$ streng monoton wachsend.*

Während Annahme 4.3 es uns erlaubt, lineare Korrelationen auf Rangkorrelationen abzubilden, wird in der folgenden Annahme die Anwendbarkeit einer Taylorreihen-Entwicklung auf jene Funktion, welche $\boldsymbol{\rho}_{t,X}$ (definiert wie in Annahme 4.4) auf β_t abbildet, sichergestellt.

Annahme 4.4. *Sei $\boldsymbol{\rho}_{t,X} := \text{vech}(\text{RankCorr}(\mathbf{X}_t))$, wobei der Operator $\text{vech}(A)$ die untere Dreiecksmatrix von A in einen Spaltenvektor transformiert. Dann ist der Vektor $\log \beta_t := (\log \beta_{1t}, \dots, \log \beta_{nt})'$ eine lineare Funktion von $\boldsymbol{\rho}_{t,X}$.*

Zunächst betrachten wir die bereits bekannte Evolutionsgleichung für $\log \beta_{it}$:

$$\log \beta_{it} = \omega_i + b \log \beta_{i,t-1} + a s_{i,t-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei

$$s_{i,t-1} = \frac{\partial \log c(\mathbf{u}_{t-1} | \beta_{t-1}, \nu_Z, \psi_Z, \nu_\epsilon)}{\partial \beta_{i,t-1}}.$$

Unter Verwendung des Resultats von Creal et al. [9], dass $\mathbb{E}_{t-1}(s_{i,t}) = 0$ ist, folgt

$$\mathbb{E}(\log \beta_{it}) = \omega_i + b \mathbb{E}(\log \beta_{i,t-1}).$$

Nutzt man nun die aufgrund von Annahme 4.2 geltende Stationarität von $\{\beta_t\}$ aus, so erhält man

$$\mathbb{E}(\log \beta_{it}) = \frac{\omega_i}{1-b} \quad \text{bzw.} \quad \omega_i = (1-b) \mathbb{E}(\log \beta_{it}),$$

sodass die GAS-Gleichung in folgende Form umgeschrieben werden kann:

$$\log \beta_{it} = (1-b) \mathbb{E}(\log \beta_{it}) + b \log \beta_{i,t-1} + a s_{i,t-1}.$$

Um nun, wie bereits erwähnt, das Erfordernis der numerischen Optimierung zu umgehen, um die Konstanten ω_i zu erhalten, soll in weiterer Folge die Herleitung eines Schätzers für

²Sei \mathcal{T} die Indexmenge für einen stochastischen Prozess. Ein Prozess $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ heißt strikt stationär, falls die gemeinsamen Verteilungen von $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ und $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ für alle $t_1, \dots, t_n, h \in \mathcal{T}$ und $n \in \mathbb{N}$ gleich sind.

$\mathbb{E}(\log \beta_{it})$ basierend auf den beobachtbaren Daten, genauer auf den Stichproben-Rangkorrelationen, erfolgen. Dazu werden wir zunächst zeigen, dass eine Abbildung existiert, die die Populations-Rangkorrelationen der standardisierten Residuen auf das Mittel der logarithmierten Faktorladungen abbildet.

Für das Modell (4.8) mit den in Kapitel 4.2.1 getroffenen Annahmen über die Verteilungen des gemeinsamen Faktors sowie der idiosynkratischen Fehler gilt:

$$\sigma_{Z_t}^2 = 1 \quad \forall t \quad \text{und} \quad \sigma_{\epsilon_{it}}^2 = 1 \quad \forall i, t.$$

Somit ist die lineare Korrelation zwischen X_{it} und X_{jt} in diesem Modell gegeben durch

$$\rho_{ij,t,X}^L := \text{Corr}(X_{it}, X_{jt}) = \frac{\beta_{it}\beta_{jt}}{\sqrt{(1 + \beta_{it}^2)(1 + \beta_{jt}^2)}} =: g(\beta_{it}, \beta_{jt})$$

bzw. in Matrix-Notation

$$R_{t,X}^L := (\rho_{ij,t,X}^L)_{1 \leq i,j \leq n} = \text{Corr}(\mathbf{X}_t) =: G(\boldsymbol{\beta}_t).$$

Das entspricht infolge der Annahme 4.1 für $n = 3$ einem exakt- bzw. für $n > 3$ einem überidentifizierten System, da es n Parameter $\beta_{1t}, \dots, \beta_{nt}$ und $n(n-1)/2$ Korrelationen aufweist. Aufgrund von Annahme 4.3 haben wir daher auch ein exakt- oder überidentifiziertes System der Rangkorrelationsmatrix:

$$R_{t,X} := (\rho_{ij,t,X})_{1 \leq i,j \leq n} = (\varphi(\rho_{ij,t,X}^L))_{1 \leq i,j \leq n} =: \varphi(R_{t,X}^L) = \varphi(G(\boldsymbol{\beta}_t)).$$

Sei nun die Funktion H definiert als der Logarithmus der Inversen der Funktion $\varphi \circ G$, sodass

$$\log \boldsymbol{\beta}_t = H(\boldsymbol{\rho}_{t,X}),$$

wobei $\boldsymbol{\rho}_{t,X} := \text{vech}(R_{t,X})$. Obwohl die Funktion H keine geschlossene Form aufweist, lässt sie sich mit dem folgenden Optimierungsproblem sehr einfach ermitteln:

$$H(\boldsymbol{\rho}_{t,X}) = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}^*} \mathbf{m}(\boldsymbol{\beta}^*)' \mathbf{m}(\boldsymbol{\beta}^*), \tag{4.11}$$

$$\text{wobei} \quad \mathbf{m}(\boldsymbol{\beta}^*) := \text{vech}(\varphi(G(\exp \boldsymbol{\beta}^*))) - \boldsymbol{\rho}_{t,X}.$$

Da die Funktion $H(\boldsymbol{\rho}_{t,X})$ aufgrund von Annahme 4.4 linear ist, gilt unter Verwendung der Notation $\bar{\boldsymbol{\rho}}_X := \mathbb{E}(\boldsymbol{\rho}_{t,X})$:

$$\mathbb{E}(\log \boldsymbol{\beta}_t) = \mathbb{E}(H(\boldsymbol{\rho}_{t,X})) = H(\mathbb{E}(\boldsymbol{\rho}_{t,X})) = H(\bar{\boldsymbol{\rho}}_X).$$

Schließlich nutzen wir noch die Tatsache aus, dass $\text{RankCorr}(\mathbf{X}_t)$ und $\text{RankCorr}(\boldsymbol{\eta}_t)$ aufgrund von Annahme 4.1 (siehe auch Gleichung (4.1)) in Verbindung mit Satz 2.33 identisch sind, sodass mit der Notation $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\eta$ für den Erwartungswert jenes Vektors, der

entsteht, wenn man den vech-Operator auf die Rangkorrelationsmatrix der standardisierten Residuen anwendet, folgendes gilt:

$$\mathbb{E}(\log \boldsymbol{\beta}_t) = H(\bar{\boldsymbol{\rho}}_X) = H(\bar{\boldsymbol{\rho}}_\eta). \quad (4.12)$$

Somit haben wir gezeigt, dass $\mathbb{E}(\log \boldsymbol{\beta}_t)$ auch als Funktion der Rangkorrelationsmatrix der Residuen dargestellt werden kann.

Abschließend soll nun unter Verwendung der “variance targeting“-Methode ein Schätzer für $\mathbb{E}(\log \boldsymbol{\beta}_t)$ präsentiert werden. Diese Methode, welche von Engle und Mezrich [19] diskutiert wird, ist ein Zwei-Stufen-Verfahren, bei dem im ersten Schritt die Varianz durch die Stichprobenvarianz geschätzt wird, während im zweiten Schritt, bedingt auf diesen Schätzer, die übrigen Parameter geschätzt werden. Unter Verwendung der vorangegangenen Herleitung ist der “variance targeting“-Schätzer also das Stichproben-Analogon zum Ausdruck (4.12), d.h. der empirische Schätzer für den Erwartungswert von $\log \boldsymbol{\beta}_t$ ist gegeben durch

$$\widehat{\log \boldsymbol{\beta}} := H(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_\eta),$$

wobei mit $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_\eta$ das Stichproben-Analogon zu $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\eta$ bezeichnet wird. Dieser Schätzer ist, wie wir nachfolgend zeigen werden, ein generalisierter Momentenschätzer (GMM-Schätzer) (für Details siehe Hansen [24]). Dieses Ergebnis ist zum einen nützlich, da es uns erlaubt, die Schätzung des gesamten bedingten Verteilungsmodells als mehrstufigen GMM-Schätzer zu betrachten, zum anderen weisen GMM-Schätzer wichtige Eigenschaften auf. So sind sie asymptotisch normalverteilt, asymptotisch effizient und es kann unter gewissen Annahmen die Konsistenz des GMM-Schätzers nachgewiesen werden (vgl. Hansen [23]).

Zum Nachweis, dass obiger Schätzer ein GMM-Schätzer ist, beachte, dass die Randverteilungen von $\boldsymbol{\eta}_t$ bekannt sind (siehe Formel (4.2)) und daher die Rangkorrelationen der Stichprobe Funktionen eines Stichproben-Moments sind (vgl. Gleichung (2.9)), d.h. der Stichprobenkorrelationskoeffizient von Spearman ist gegeben durch

$$\widehat{\rho}_{ij,\eta} = 12\mathbb{E}(F_i(\eta_{it})F_j(\eta_{jt})) - 3 = \frac{12}{T} \sum_{t=1}^T F_i(\eta_{i,t})F_j(\eta_{j,t}) - 3.$$

Den Schätzer von $\mathbb{E}(\log \beta_{it})$ erhalten wir durch Gleichung (4.11):

$$\widehat{\log \boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}^*} \bar{\mathbf{m}}_T(\boldsymbol{\beta}^*)' \bar{\mathbf{m}}_T(\boldsymbol{\beta}^*),$$

wobei $\bar{\mathbf{m}}_T(\boldsymbol{\beta}^*) := \text{vech}(\varphi(G(\exp \boldsymbol{\beta}^*))) - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_\eta$.

Dieses Optimierungsproblem entspricht jedoch gerade der Definition eines GMM-Schätzers. Daher ist $\widehat{\log \boldsymbol{\beta}}$ für $n \geq 3$ ein GMM-Schätzer für $\mathbb{E}(\log \boldsymbol{\beta}_t)$.

5 Empirische Analyse

Ziel dieses Kapitels ist es, die bisher betrachtete Theorie in die Praxis umzusetzen. Dazu konstruieren wir ein Portfolio bestehend aus Aktien, deren Abhängigkeiten mit unterschiedlichen Copulamodellen, von sehr einfachen bis hin zu komplexen Faktor-Copulas, modelliert werden. All diese verschiedenen Modelle werden anschließend im Hinblick auf den geschätzten Value-at-Risk miteinander verglichen. Anregungen zur Umsetzung stammen aus der Arbeit von Bartels und Ziegelmann [1].

Sämtliche nachfolgende Berechnungen wurden mit dem Softwarepaket MATLAB durchgeführt. Neben der *GAS factor copula Toolbox*¹ von Andrew J. Patton wurden zusätzlich die *UCSD GARCH Toolbox* von Kevin Sheppard als auch die *Econometrics Toolbox* von James P. LeSage verwendet.

5.1 Beschreibung der Daten

Der in der empirischen Analyse verwendete Datensatz besteht aus 10 Finanzzeitreihen, wobei jede dieser Zeitreihen die zeitliche Entwicklung eines Aktienkurses widerspiegelt. Diese 10 Aktien, die alle an der Frankfurter Börse gehandelt werden, sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. Für jede der Aktien liegen 1519 Beobachtungen der Tagesschlusskurse aus dem Zeitraum vom 4. Januar 2010 bis zum 30. Dezember 2015 vor. Die Bereinigung der Daten aufgrund fehlender Datenpunkte in diesen historischen Aktienkursen, welche man etwa bei <https://finance.yahoo.com> findet, erfolgte mit linearer Interpolation.

Für die Analyse von Faktor-Copulas mit Blockabhängigkeiten wurden die 10 zu analysierenden Aktien entsprechend dem Marktsegment, in dem sie agieren, in 4 Blöcke eingeteilt. Diese Kategorisierung der Aktien ist beliebig und könnte auch auf andere Art und Weise erfolgen. Jedoch basierend auf der Annahme, dass Firmen im selben Marktsegment ähnliche Abhängigkeitsstrukturen aufweisen, erscheint diese Einteilung als sinnvoll. Die Namen der Blöcke, in der die Aktien eingeteilt werden, sind ebenfalls in Tabelle 5.1 zu finden.

Für die Analyse und Modellierung verwenden wir in weiterer Folge die Log>Returns der

¹Downloadbar unter <http://public.econ.duke.edu/~ap172/code.html>

Kürzel	Aktie	Blockname	Blockcode
ADS	Adidas AG	Textilien und Sportartikel	1
BOSS	Hugo Boss AG	Textilien und Sportartikel	1
PUM	Puma SE	Textilien und Sportartikel	1
BMW	Bayerische Motoren Werke AG	Fahrzeugindustrie	2
DAI	Daimler AG	Fahrzeugindustrie	2
VOW	Volkswagen AG	Fahrzeugindustrie	2
HEI	HeidelbergCement AG	Baugewerbe	3
HOT	Hochtief AG	Baugewerbe	3
G1A	GEA Group AG	Maschinenbau	4
PFV	Pfeiffer Vacuum Technology AG	Maschinenbau	4

Tabelle 5.1: In der empirischen Analyse verwendete Aktien inklusive deren Einteilung in die verschiedenen Blöcke.

Aktienpreise, welche wie folgt definiert sind:

$$Y_{it} := \log(P_{it}) - \log(P_{i,t-1}) = \log\left(\frac{P_{it}}{P_{i,t-1}}\right), \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T.$$

Hier bezeichnet Y_{it} den Log-Return und P_{it} den Preis der i -ten Aktie zum Zeitpunkt t . Mit $n = 10$ wird die Anzahl der Aktien im Portfolio bezeichnet. Darüber hinaus wird dem 4. Januar 2010 der Zeitpunkt $t = 0$ und dem 30. Dezember 2015 der Zeitpunkt $t = 1518$ zugeordnet, sodass sich für die Aktien-Log>Returns ein Umfang von $T = 1518$ Beobachtungen ergibt.

Das in weiterer Folge betrachtete Portfolio hat dieselben Gewichte für alle Aktien. Daher ist der Log-Return des Portfolios zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$Y_t := \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(Y_{it})\right), \quad t = 1, \dots, T.$$

Die Portfolio-Log>Returns für den in der Analyse betrachteten, oben genannten Zeitraum sind in Abbildung 5.1 dargestellt.

Während Abbildung 5.2 die zeitliche Entwicklung der einzelnen Aktien>Returns illustriert, beinhaltet Tabelle 5.2 einige statistische Kennwerte wie Stichprobenmomente, ausgewählte Quantile sowie das Minimum und Maximum für die Returns der einzelnen Aktien als auch für den Portfolio-Return. Zum besseren Verständnis sei hier angemerkt, dass die angeführte Tabelle zeilenweise folgendermaßen zu lesen ist: In der Spalte „Mittel“ ist der Mittelwert über die jeweiligen statistischen Kennwerte aller 10 Aktien>Returns zu finden,

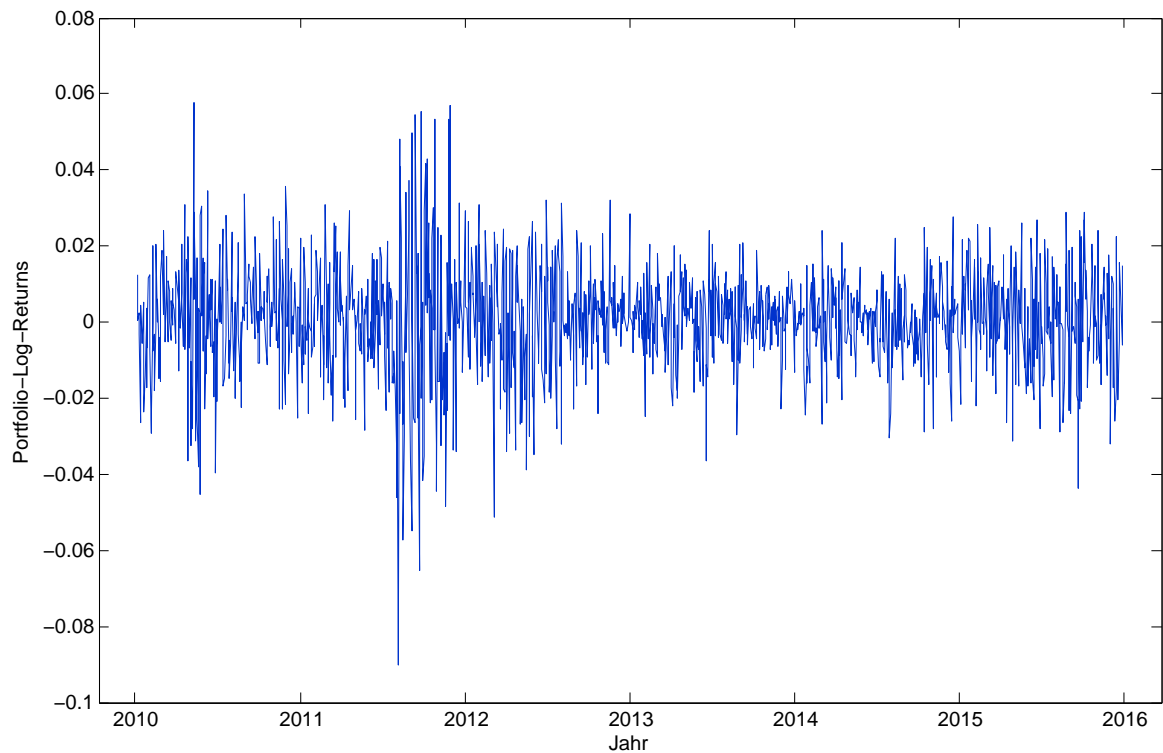


Abbildung 5.1: Log>Returns des Portfolios im Zeitraum vom 5. Januar 2010 bis 30. Dezember 2015.

Kennwerte	Mittel	Min	25%	Median	75%	Max	Portf.
Mittelwert	0.0004	-0.0001	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009	0.0005
Standardabw.	0.0193	0.0165	0.0188	0.0197	0.0204	0.0211	0.0140
Schiefe	-0.2557	-0.6454	-0.4411	-0.2590	-0.0917	0.2969	-0.3157
Kurtosis	7.1587	4.3053	5.0217	6.3597	8.2322	11.8164	5.8703
Minimum	-0.1285	-0.1809	-0.1587	-0.1259	-0.1015	-0.0693	-0.0901
5%-Quantil	-0.0301	-0.0344	-0.0316	-0.0307	-0.0296	-0.0243	-0.0234
25%-Quantil	-0.0098	-0.0112	-0.0106	-0.0100	-0.0089	-0.0084	-0.0064
Median	0.0005	-0.0003	0.0000	0.0005	0.0011	0.0011	0.0008
75%-Quantil	0.0109	0.0086	0.0102	0.0111	0.0118	0.0129	0.0083
95%-Quantil	0.0310	0.0262	0.0300	0.0316	0.0321	0.0357	0.0220
Maximum	0.0922	0.0748	0.0813	0.0861	0.0963	0.1380	0.0577

Tabelle 5.2: Statistische Kennwerte des betrachteten Datensatzes.

in der Spalte „Min“ ist das Minimum des jeweiligen statistischen Kennwerts der Aktien>Returns dargestellt, in der Spalte „25%“ wird jeweils das 25%-Quantil des entsprechenden Kennwerts der Returns angegeben, usw. Die Kennwerte für den Portfolio-Return sind in der Spalte „Portf.“ zu finden. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Kurtosis im Mittel 7.16 ist und keine Aktien-Return-Zeitreihe eine Kurtosis kleiner als 3 aufweist, also jene der Normalverteilung. Dies ist ein Indikator dafür, dass die Verteilungen der Returns heavy Tails aufweisen.

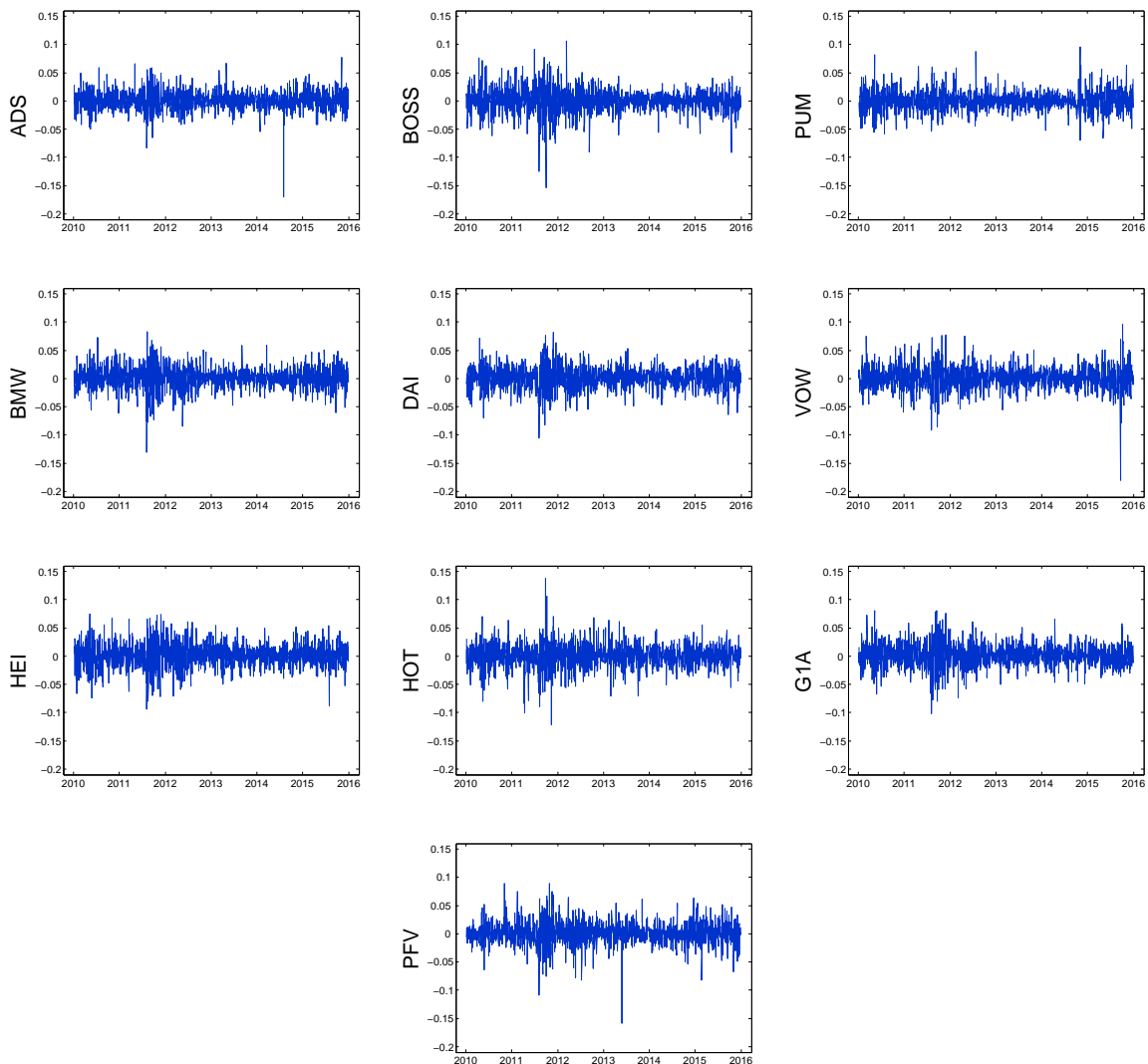


Abbildung 5.2: Log>Returns der einzelnen Aktien im Zeitraum vom 5. Januar 2010 bis 30. Dezember 2015.

5.2 Verfahren zur Schätzung der Parameter

Da es in weiterer Folge das Ziel, das beste Copulamodell für die im vorigen Abschnitt beschriebenen logarithmierten Aktien>Returns hinsichtlich des Value-at-Risk zu finden, soll dieser Abschnitt unter der Voraussetzung, dass die Randverteilungen als auch die Copula bekannt sind, dazu dienen, jenes Verfahren zu beschreiben, das sowohl für die Schätzung der unbekannt Parameter der Randverteilungen als auch für jene der Copula verwendet wird. Nachfolgend werden neben der Copula auch die Randverteilungen sowie die gemeinsame Verteilung als parametrisch angenommen.

Ausgangspunkt für die Parameterschätzung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode bildet die bedingte Version des Satzes von Sklar, der besagt, dass sich die n -dimensionale bedingte parametrische Verteilungsfunktion F_t eines Zufallsvektors $\mathbf{Y}_t := (Y_{1t}, \dots, Y_{nt})'$ schreiben lässt als

$$F_t(\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1, \dots, \phi_n, \gamma) = C_t \left(F_{1t}(y_{1t} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1), \dots, F_{nt}(y_{nt} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_n) | \mathcal{F}_{t-1}, \gamma \right).$$

Hier wird mit C_t eine bedingte Copula mit Parametervektor γ bezeichnet und F_{1t}, \dots, F_{nt} kennzeichnen die bedingten univariaten Randverteilungen mit jeweiligen Parametervektoren ϕ_1, \dots, ϕ_n . Darüber hinaus beschreibt \mathcal{F}_t die gesamte bis zum Zeitpunkt t verfügbare Informationsmenge. Da wir, wie bereits in Kapitel 4.1 erwähnt, nur konstante Copulas, jedoch mit möglicherweise zeitvariierenden Parametern, erlauben und auch nur über die Zeit gleichbleibende Randverteilungsfunktionen betrachten, verändert sich auch die multivariate Verteilungsfunktion während des gesamten betrachteten Zeitraums nicht, sodass sich obiger Ausdruck zu

$$F(\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1, \dots, \phi_n, \gamma) = C \left(F_1(y_{1t} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1), \dots, F_n(y_{nt} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_n) | \mathcal{F}_{t-1}, \gamma \right) \quad (5.1)$$

vereinfacht. Nimmt man an, dass die bedingte Copula C über die bedingte Dichtefunktion c verfüge und die bedingten Randverteilungen F_1, \dots, F_n über die bedingten Randdichten f_1, \dots, f_n , so ergibt die partielle Ableitung von (5.1) nach sämtlichen Variablen y_{1t}, \dots, y_{nt} die n -dimensionale bedingte parametrische Dichtefunktion f des Zufallsvektors \mathbf{Y}_t :

$$f(\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1, \dots, \phi_n, \gamma) = c \left(F_1(y_{1t} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1), \dots, F_n(y_{nt} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_n) | \mathcal{F}_{t-1}, \gamma \right) \prod_{i=1}^n f_i(y_{it} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_i).$$

Die entsprechende Likelihood-Funktion ist somit gegeben durch

$$L(\phi_1, \dots, \phi_n, \gamma) := \prod_{t=1}^T f(\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1, \dots, \phi_n, \gamma) = \prod_{t=1}^T \left[c \left(F_1(y_{1t} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_1), \dots, F_n(y_{nt} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_n) | \mathcal{F}_{t-1}, \gamma \right) \prod_{i=1}^n f_i(y_{it} | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_i) \right],$$

wodurch die Log-Likelihood-Funktion geschrieben werden kann als

$$l(\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_n, \boldsymbol{\gamma}) := \log L(\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_n, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{t=1}^T \log c\left(F_1(y_{1t}|\mathcal{F}_{t-1}, \boldsymbol{\phi}_1), \dots, F_n(y_{nt}|\mathcal{F}_{t-1}, \boldsymbol{\phi}_n)|\mathcal{F}_{t-1}, \boldsymbol{\gamma}\right) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \log f_i(y_{it}|\mathcal{F}_{t-1}, \boldsymbol{\phi}_i).$$

Die simultane Schätzung aller Parameter mit der Maximum-Likelihood-Methode kann rechenstechnisch sehr aufwendig sein, insbesondere für hochdimensionale Daten. Daher verwenden wir ein von Joe und Xu [28] beschriebenes Zwei-Stufen-Verfahren, welches auch als “inference function for margin“ (IFM)-Methode bezeichnet wird. Dieses ist wie folgt definiert:

- (1) Zunächst erfolgt die Durchführung von n separaten Schätzungen der Parametervektoren der univariaten Randverteilungen, indem die n entsprechenden Log-Likelihood-Funktionen einzeln maximiert werden, um die Schätzer $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\phi}}_n$ zu erhalten:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_i = \arg \max_{\boldsymbol{\phi}_i} l_{f_i}(\boldsymbol{\phi}_i) = \arg \max_{\boldsymbol{\phi}_i} \sum_{t=1}^T \log f_i(y_{it}|\mathcal{F}_{t-1}, \boldsymbol{\phi}_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

- (2) Anschließend wird, um $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ zu erhalten, die Log-Likelihood-Funktion

$$l_c\left(\boldsymbol{\gamma}|\hat{\boldsymbol{\phi}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\phi}}_n\right) := \sum_{t=1}^T \log c\left(F_1(y_{1t}|\mathcal{F}_{t-1}, \hat{\boldsymbol{\phi}}_1), \dots, F_n(y_{nt}|\mathcal{F}_{t-1}, \hat{\boldsymbol{\phi}}_n)|\mathcal{F}_{t-1}, \boldsymbol{\gamma}\right)$$

der Copula für gegebene $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\phi}}_n$ maximiert:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\gamma}} &= \arg \max_{\boldsymbol{\gamma}} l_c\left(\boldsymbol{\gamma}|\hat{\boldsymbol{\phi}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\phi}}_n\right) \\ &= \arg \max_{\boldsymbol{\gamma}} \sum_{t=1}^T \log c\left(F_1(y_{1t}|\mathcal{F}_{t-1}, \hat{\boldsymbol{\phi}}_1), \dots, F_n(y_{nt}|\mathcal{F}_{t-1}, \hat{\boldsymbol{\phi}}_n)|\mathcal{F}_{t-1}, \boldsymbol{\gamma}\right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung des soeben beschriebenen Verfahrens sieht die weitere Vorgehensweise zur Schätzung der unbekannt Parameter für die in Abschnitt 5.1 beschriebenen Daten folgende Schritte vor:

- Passe zunächst für jede Aktien-Return-Zeitreihe ein Modell der AR-GARCH-Klasse mit der Maximum-Likelihood-Methode an.
- Bestimme die standardisierten Residuen und schätze in weiterer Folge die Verteilungsfunktionen dieser Residuen.
- Ermittle, unter Verwendung der im vorangegangenen Schritt erhaltenen Parameter, einen Schätzer für den Parametervektor der Copula (der standardisierten Residuen) mit der IFM-Methode.

5.3 Modellierung der Randverteilungen

Bevor wir nun den Fokus auf die Copula-Modellierung, dem zentralen Thema der vorliegenden Arbeit, legen, widmen wir uns zunächst der Modellierung der bedingten Randverteilungen. Diese erfolgt mit Hilfe eines AR(1)-GARCH(1,1)-Modells, welches wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \phi_0 + \phi_1 Y_{i,t-1} + \sigma_{it} \eta_{it}, \\ \sigma_{it}^2 &= \kappa + \gamma \sigma_{i,t-1}^2 + \alpha \sigma_{i,t-1}^2 \eta_{i,t-1}^2, \\ \eta_{it} | \mathcal{F}_{t-1} &\sim F_i(0, 1), \end{aligned}$$

wobei mit $F_i(0, 1)$ eine Verteilungsfunktion mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 bezeichnet wird. Diese Struktur erlaubt jeder Zeitreihe den zeitvariierenden bedingten Erwartungswert

$$\mathbb{E}(Y_{it} | \mathcal{F}_{t-1}) = \phi_0 + \phi_1 Y_{i,t-1}$$

sowie die zeitvariierende bedingte Varianz $Var(Y_{it} | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_{it}^2$, wobei mit

$$\mathcal{F}_t := \{(Y_{i,t-j}, \eta_{i,t-j}) : i \in \{1, \dots, n\}, j \geq 0\}$$

die gesamte Informationsmenge bis zum Zeitpunkt t bezeichnet wird. Weiters nehmen wir an, dass die standardisierten Residuen η_{it} einer im Zeitablauf konstanten bedingten Verteilung (mit Erwartungswert Null und Einheitsvarianz) folgen. Üblicherweise wird dafür die Standardnormalverteilung angenommen. Da bei Finanzzeitreihen aber häufig zu beobachten ist, dass die standardisierten bedingten Returns heavy Tails aufweisen und auch nicht symmetrisch sind (Aktien haben üblicherweise eine negative Schiefe, was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit eines großen negativen Returns größer ist als ein großer positiver Return), verwenden wir hier die bereits mehrfach erwähnte einfache, jedoch sehr flexible schiefe t-Verteilung.

Unter Verwendung des soeben beschriebenen Modells konstruieren wir die geschätzten standardisierten Residuen wie folgt:

$$\hat{\eta}_{it} := \frac{Y_{it} - \hat{\phi}_0 - \hat{\phi}_1 Y_{i,t-1}}{\hat{\sigma}_{it}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei mit $\hat{\phi}_0$ und $\hat{\phi}_1$ die geschätzten Parameter im Modell für den bedingten Erwartungswert bezeichnet werden und mit $\hat{\sigma}_{it}^2$ die geschätzte bedingte Varianz.

Die geschätzten Parameter des AR(1)-GARCH(1,1)-Modells als auch jene der schiefen t-Verteilung sind in Tabelle 5.3 zu finden. Wir können erkennen, dass die ϕ_0 -Werte aller Zeitreihen in der Nähe von Null liegen, was ein Hinweis dafür ist, dass sie sich alle, wie erwartet, um Null einpendeln. Weiters wollen wir hier anmerken, dass die meisten ν -Werte klein sind. Das ist ein Indikator dafür, dass eine heavy-Tail-Verteilung für die Residuen einer Normalverteilung vorzuziehen ist.

Aktie	bedingter Erwartungsw.		bedingte Varianz			schiefe t-Verteilung	
	ϕ_0	ϕ_1	κ	γ	α	ν	ψ
ADS	0.0005	0.0154	0.0000	0.0855	0.7744	5.1171	0.0529
BOSS	0.0009	-0.0392	0.0000	0.1015	0.8919	4.1718	-0.0591
PUM	-0.0001	-0.0261	0.0000	0.1072	0.8440	4.5462	0.0245
BMW	0.0007	0.0250	0.0000	0.1084	0.8422	5.6551	-0.0195
DAI	0.0005	0.0698	0.0000	0.1124	0.8508	8.4384	-0.0643
VOW	0.0004	0.0855	0.0000	0.1238	0.8229	5.8727	0.0021
HEI	0.0003	-0.0176	0.0000	0.0999	0.8528	8.9157	0.0065
HOT	0.0003	-0.0087	0.0001	0.1325	0.7466	4.7696	-0.0466
G1A	0.0005	0.0035	0.0000	0.1085	0.8506	7.1626	0.0036
PFV	0.0003	-0.0410	0.0001	0.1873	0.6294	4.1000	0.0439

Tabelle 5.3: Geschätzte Parameter der bedingten Erwartungswerte, der bedingten Varianzen sowie der schiefen t-Verteilung für alle betrachteten Aktien.

Um sicherzugehen, dass die mit der angenommenen Verteilungsfunktion transformierten geschätzten standardisierten Residuen, also

$$\widehat{U}_{i,t} := F_{\text{schief } t} \left(\widehat{\eta}_{it}; \widehat{\nu}_i, \widehat{\psi}_i \right),$$

tatsächlich gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind, muss überprüft werden, ob die standardisierten Residuen der angenommenen schiefen t-Verteilung folgen. Dazu verwenden wir sowohl den Kolmogorov-Smirnov (KS)-Test als auch den Cramér-von Mises (CvM)-Test für die standardisierten Residuen. Die Teststatistiken dieser beiden Tests basieren auf den geschätzten Wahrscheinlichkeitstransformationen und sind wie folgt definiert:

$$KS_i := \max_{1 \leq t \leq T} \left| \widehat{U}_{i,(t)} - \frac{t}{T} \right|,$$

$$CvM_i := \sum_{t=1}^T \left(\widehat{U}_{i,(t)} - \frac{t}{T} \right)^2,$$

wobei mit $\widehat{U}_{i,(t)}$ der t -größte Wert von $\left\{ \widehat{U}_{i,t} \right\}_{t=1}^T$ bezeichnet wird. Obwohl die asymptotischen Verteilungen der beiden Teststatistiken bekannt sind, ist das in unserem Fall nicht von Nutzen, da die Parameter der hypothetischen Verteilung aus der Stichprobe geschätzt wurden und sich dadurch die asymptotische Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese ändert (vgl. Patton [43]). Um dieses Problem zu umgehen, nutzen wir daher die Tatsache aus, dass mit parametrischen Modellen für den Erwartungswert, für die Varianz und für die Fehlerverteilung die bedingte Verteilung vollständig beschrieben wird. Daher kann eine einfache simulationsbasierte Methode verwendet werden, um die kritischen Werte zu erhalten (vgl. Patton [43]):

- (a) Simuliere T Beobachtungen für Y_{it} von diesem Modell unter Verwendung der geschätzten Parameter,
- (b) schätze Modelle für die simulierten Daten,
- (c) berechne die KS- und CvM-Teststatistik für die geschätzten Wahrscheinlichkeits-transformationen der simulierten Daten,
- (d) wiederhole die Schritte (a) - (c) S Mal (z.B. $S = 500$),
- (e) verwende das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $\{(KS_{(s)}, CvM_{(s)})\}_{s=1}^S$ als kritischen Wert für diese Tests.

Unter Verwendung des oben genannten Verfahrens erhalten wir p -Werte für den KS- und CvM-Test, welche in Tabelle 5.4 zu finden sind. Da für alle Aktien der p -Wert größer als 0.1 ist, kann die Nullhypothese, dass die schiefe t-Verteilung für die standardisierten Residuen wohldefiniert ist, zum Niveau $\alpha = 0.9$ nicht verworfen werden. Dieses Ergebnis legt somit nahe, dass die transformierten Residuen annähernd einer $\mathcal{U}(0, 1)$ -Verteilung folgen, sodass wir nun mit der Modellierung der Copula fortfahren können.

Aktie	KS	CvM	Aktie	KS	CvM
ADS	0.8580	0.7600	VOW	0.6800	0.7160
BOSS	0.2780	0.2860	HEI	0.1320	0.1500
PUM	0.5620	0.3920	HOT	0.5960	0.7700
BMW	0.4200	0.4120	G1A	0.6460	0.4540
DAI	0.6360	0.7360	PFV	0.2460	0.2760

Tabelle 5.4: Simulationsbasierte p -Werte des Kolmogorov-Smirnov-Tests als auch des Cramér-von Mises-Tests für die Modelle der bedingten Randverteilungen, jeweils mit 500 Simulationen.

5.4 Copulas

Nachdem im vorherigen Abschnitt die geschätzten Parameter der Randverteilungen der Aktien>Returns präsentiert wurden, widmet sich dieses Kapitel nun den empirischen Resultaten der Abhängigkeitsstruktur dieser 10 Aktien>Returns. Diesbezüglich schätzen wir die Parameter von 18 verschiedenen Modellen für Copulas. Neben den Standard-Copulas wie der Gauss'schen Copula, der Student-t Copula und der Clayton Copula betrachten wir eine Vielzahl an Ein-Faktor-Copula Modellen. Diese unterscheiden sich einerseits in den Verteilungen des gemeinsamen Faktors und der idiosynkratischen Fehler, in den Abhängigkeitsstrukturen als auch darin, dass die Faktorladungen über die Zeit variabel, jedoch auch konstant sein können.

Um all diese betrachteten Modelle miteinander vergleichen zu können, verwenden wir „Akaikes Informationskriterium“ (AIC). Dieses ist wie folgt definiert:

$$AIC := -2 \log L(\hat{\gamma}) + 2p,$$

wobei mit $\log L$ der Log-Likelihood-Wert des Copulamodells mit Parametervektor γ und mit p die Anzahl der zu schätzenden Parameter der Copula bezeichnet wird. Diese Kennzahl berücksichtigt die Anzahl der verwendeten Parameter als Strafe für die Komplexität des Modells, die mit einer größeren Anzahl an Parametern einhergeht. AIC ist demnach derart definiert, dass gilt: Je kleiner der Wert von AIC, desto besser ist das Modell an die Daten angepasst.

5.4.1 Standard-Copulas

In diesem Abschnitt betrachten wir einige der in Kapitel 2.5 beschriebenen Copulamodelle für die standardisierten Residuen (welche auch Copulamodelle der logarithmierten Aktien>Returns \mathbf{Y}_t sind): Wir vergleichen die Gauss'sche Copula und die Student-t Copula, also die beiden elliptischen Copulas, mit der Clayton Copula (als Vertreter der archimedischen Copulas). Da letztere Gleichkorrelation infolge ihrer Konstruktion impliziert, sollen zur besseren Vergleichbarkeit die beiden elliptischen Copulas ebenso Gleichkorreliertheit aufweisen, d.h. die Korrelationsmatrix R ist eine Matrix, bei der alle nicht-diagonal-Elemente gleich ρ sind.

Neben den geschätzten Parametern $(\rho, 1/\nu, \alpha)$ dieser Copulas enthält Tabelle 5.5 auch den Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum ($\log L$) sowie Akaikes Informationskriterium (AIC). Zur besseren Orientierung sind die Werte des besten Modells hinsichtlich des AIC fett gekennzeichnet.

PARA- METER	MODELL		
	Gauss	Student-t	Clayton
ρ	0.4608	0.4693	—
$1/\nu$	—	0.0657	—
α	—	—	0.4735
$\log L$	2916.72	3042.47	2289.75
AIC	-5831.44	-6080.94	-4577.51

Tabelle 5.5: Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium der Standard-Copulas der standardisierten Residuen.

Im Hinblick auf das AIC ist von den Standard-Copulas die Student-t Copula am besten für unsere Daten geeignet. Da diese somit auch gegenüber der Gauss'schen Copula bevorzugt wird, scheint die Modellierung von Abhängigkeiten mit heavy Tails von Relevanz zu sein.

Im Gegensatz zu den beiden elliptischen Copulas scheint die Clayton Copula hingegen kein gutes Modell für die Modellierung der Abhängigkeit unserer Daten zu sein.

5.4.2 Faktor-Copulas

Wie bereits einleitend erwähnt, vergleichen wir nun eine Vielzahl an Ein-Faktor-Copula Modellen. Dabei betrachten wir jeweils unterschiedliche Kombinationen der Verteilungen des gemeinsamen Faktors und der idiosynkratischen Fehler, der Dynamik in den Faktorladungen als auch der Abhängigkeitsstrukturen.

Für die Verteilungen des gemeinsamen Faktors und der idiosynkratischen Fehler verwenden wir die nachfolgend aufgelisteten Kombinationen und benützen entsprechend, wie bereits in Kapitel 3.2, die folgenden Notationen:

- Eine Faktor-Copula, bei der sowohl der gemeinsame Faktor Z_t als auch die Fehler ϵ_{it} normalverteilt sind, wir als *Normal - Normal Faktor-Copula* bezeichnet.
- Unter einer *Student-t - Student-t Faktor-Copula* verstehen wir eine Faktor-Copula, bei der sowohl Z_t als auch ϵ_{it} einer Student-t Verteilung folgen.
- Folgt der gemeinsame Faktor der schiefen t-Verteilung und sind die Fehler t-verteilt, so bezeichnen wir diese Copula als *schiefe t - Student-t Faktor-Copula*.

Zudem unterscheiden wir zwischen statischen und dynamischen Faktor-Copulas. Hierbei bezeichnen wir mit statischen Copulas jene Modelle, deren Faktorladungen sich über die Zeit nicht verändern, wohingegen diese bei dynamischen Copulas im Zeitverlauf variieren können. Geschätzt werden die statischen Modelle auf die selbe Art und Weise wie dynamische Copulas, wobei in Formel (4.9) $a = b = 0$ gesetzt wird.

Darüber hinaus differenzieren wir zwischen unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen, wobei mit G stets die Anzahl der Blöcke bezeichnet wird:

- Zum einen betrachten wir homogene Modelle, d.h. wir setzen $G = 1$ im Modell (4.10).
- Weiters untersuchen wir Modelle mit Blockabhängigkeiten, indem wir die Aktien in $G = 4$ Blöcke einteilen (vgl. Tabelle 5.1).
- Außerdem setzen wir $G = n = 10$ und erhalten dadurch das heterogene Modell.

Im Detail bedeutet das folgendes: Während in den homogenen Modellen die Abhängigkeit zwischen jedem Paar von Aktien>Returns identisch ist, werden die Aktien>Returns in den Modellen mit Blockabhängigkeit in 4 Gruppen eingeteilt, sodass zwei beliebige Variablen verschiedener Blöcke in gleiche Weise voneinander abhängig sind wie zwei andere Variablen derselben beiden Blöcke. Im Gegensatz dazu weist in den heterogenen Modellen jedes Paar von Aktien>Returns eine unterschiedliche Abhängigkeit auf.

Da mit dem heterogenen Modell eine große Anzahl an zu schätzenden Variablen einhergeht, verwenden wir hierfür die sogenannte “variance targeting“-Methode, welche in Kapitel 4.2.2 beschrieben wurde. Da dieses Verfahren jedoch nicht auf statische Modelle anwendbar ist und die Optimierung der Variablen im allgemeineren Modell rechentechnisch sehr aufwendig wäre, verzichten wir in der weiteren Analyse auf die Ergebnisse des statischen heterogenen Faktor-Copula Modells.

An dieser Stelle wollen wir anmerken, dass die Gauss’sche Copula mit Equikorrelationsmatrix R und die statische Ein-Faktor-Copula, bei der sowohl der gemeinsame Faktor als auch die Fehler normalverteilt sind, und bei dem jedes Paar von Variablen dieselbe Abhängigkeit aufweist, übereinstimmen, wenn folgende Gleichheit erfüllt ist:

$$\rho = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} = \frac{(\exp \omega)^2}{1 + (\exp \omega)^2},$$

wobei $\beta := \beta_{g,t}$ und $\omega := \omega_g$ (beide Variablen sind konstant, da die Faktor-Copula sowohl statisch als auch homogen ist) wie in Gleichung (4.10) spezifiziert sind. Kommt es allerdings zur Schätzung der Parameter, so ist diese Gleichung nur approximativ richtig, da der Wert der Log-Likelihood-Funktion der Faktor-Copula infolge einiger Annahmen und Vereinfachungen, die getroffen wurden, um ein zulässiges Ergebnis zu erhalten, nur eine Approximation ist.

Für jede der zuvor genannten Faktor-Copulas sind die geschätzten Parameter, als auch der Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie das AIC in den Tabellen 5.6 bis 5.8 aufgelistet. Wie bereits bei den Standard-Copulas sind hier ebenfalls die Werte des jeweils besten Modells hinsichtlich des AIC fett gekennzeichnet. Wie aus den Tabellen zu entnehmen ist, ist für jede der betrachteten Abhängigkeitsstrukturen jeweils die Kombination von Verteilungen, die die Daten hinsichtlich des AIC am besten anpasst, jene, bei der der gemeinsame Faktor einer schiefen t-Verteilung folgt und die Fehlerterme Student-t verteilt sind. Daher werden wir in der weiteren Analyse ausschließlich auf das schiefe t - Student-t Faktor-Copula Modell näher eingehen.

In Bezug auf das AIC ist offensichtlich das Modell, das am besten an die Daten angepasst ist, jenes mit der heterogenen Abhängigkeitsstruktur. Darüber hinaus sind die dynamischen Copulas stets den statischen vorzuziehen.

Mit den geschätzten Werten der Inversen des Freiheitsgrades, welche in den Tabellen 5.6 bis 5.8 abzulesen sind, gehen jeweils kleine Werte für den Freiheitsgradparameter einher, sowohl für den gemeinsamen Faktor als auch für die idiosynkratischen Fehler. Daraus folgt, dass die Gauss’sche Copula in der Tat ungeeignet ist. Darüber hinaus ist der geschätzte Nichtzentralitätsparameter stets kleiner als Null, was konsistent ist mit unterer Tail-Abhängigkeit, d.h. Aktien weisen eine stärkere Abhängigkeit auf, wenn die Preise fallen als wenn sie steigen, ein allseits bekanntes Verhalten von Aktien>Returns.

HOMOGENES MODELL						
PARA- METER	Faktor-Copula Normal - Normal		Faktor-Copula Student-t - Student-t		Faktor-Copula schief t - Student-t	
	statisch	dynamisch	statisch	dynamisch	statisch	dynamisch
ω	-0.0720	-0.0138	-0.0916	-0.0154	-0.0861	-0.0075
a	—	0.0312	—	0.0469	—	0.0417
b	—	0.8435	—	0.8664	—	0.9380
$1/\nu_\epsilon$	—	—	0.2097	0.2104	0.2081	0.2109
$1/\nu_Z$	—	—	0.1481	0.1456	0.1479	0.1425
ψ_Z	—	—	—	—	-0.1348	-0.1205
$\log L$	2929.76	2979.56	3185.41	3238.67	3197.06	3243.29
AIC	-5857.52	-5953.11	-6364.83	-6467.35	-6386.12	-6474.58

Tabelle 5.6: Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 6 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit homogener Abhängigkeit zwischen den Variablen.

MODELL MIT BLOCKABHÄNGIGKEIT						
PARA- METER	Faktor-Copula Normal - Normal		Faktor-Copula Student-t - Student-t		Faktor-Copula schief t - Student-t	
	statisch	dynamisch	statisch	dynamisch	statisch	dynamisch
ω_1	-0.3110	-0.1246	-0.4315	-0.1497	-0.4455	-0.0843
ω_2	0.2323	0.1020	0.1943	0.0593	0.2001	0.0296
ω_3	-0.0839	-0.0449	-0.1171	-0.0335	-0.0971	-0.0219
ω_4	-0.3560	-0.1575	-0.3908	-0.1354	-0.3776	-0.0794
a	—	0.0580	—	0.0744	—	0.0659
b	—	0.5575	—	0.6376	—	0.7974
$1/\nu_\epsilon$	—	—	0.2084	0.2049	0.2092	0.2104
$1/\nu_Z$	—	—	0.1437	0.1365	0.1411	0.1259
ψ_Z	—	—	—	—	-0.1180	-0.1323
$\log L$	3056.78	3078.71	3284.44	3299.28	3295.21	3310.95
AIC	-6105.56	-6145.42	-6556.89	-6582.56	-6576.41	-6603.89

Tabelle 5.7: Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 6 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit Blockabhängigkeit für Firmen aus demselben Industriezweig.

HETEROGENES MODELL			
PARA- METER	Faktor-Copula	Faktor-Copula	Faktor-Copula
	Normal - Normal	Student-t - Student-t	schief t - Student-t
	dynamisch	dynamisch	dynamisch
ω_1	-0.055096	0.000010	0.000011
ω_2	-0.339465	0.000063	0.000065
ω_3	-0.354571	0.000066	0.000068
ω_4	0.302726	-0.000057	-0.000058
ω_5	0.328139	-0.000061	-0.000063
ω_6	0.083420	-0.000016	-0.000016
ω_7	0.065111	-0.000012	-0.000013
ω_8	-0.256978	0.000048	0.000049
ω_9	0.091419	-0.000017	-0.000018
ω_{10}	-0.607272	0.000113	0.000117
a	0.0789	0.0313	0.0319
b	0.1376	1.0002	1.0002
$1/\nu_\epsilon$	—	0.2169	0.2135
$1/\nu_Z$	—	0.1478	0.1245
ψ_Z	—	—	-0.1324
$\log L$	3200.99	3418.40	3430.09
AIC	-6397.98	-6828.81	-6850.17

Tabelle 5.8: Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 3 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit heterogener Abhängigkeit zwischen den Variablen.

In Abbildung 5.3 ist die zeitliche Entwicklung der Faktorladungen der dynamischen homogenen schiefen t - Student-t Faktor-Copula dargestellt. Darüber hinaus wird die konstante Faktorladung des entsprechenden statischen Modells ebenfalls abgebildet. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass sich die meisten Faktorladungen zwischen 0.7 und 1.2 bewegen, also in etwa um $\beta = \exp(\omega) = 0.92$, dem Wert der Faktorladung des statischen Modells.

Für die dynamische schiefe t - Student-t Faktor-Copula mit Blockabhängigkeiten wird die zeitliche Entwicklung der Faktorladungen eines jeden Blocks in Abbildung 5.4 gezeigt. Dabei pendeln die Faktorladungen eines jeden Blocks um ein unterschiedliches Niveau. Diese Niveaus korrespondieren mit den entsprechenden statischen Faktorladungen, welche ebenfalls in der Grafik ersichtlich sind. Die Gruppe mit dem höchsten Level ist jene der *Fahrzeugindustrie*, gefolgt von der *Baugewerbe*-Gruppe, während die anderen beiden Blöcke ein etwas niedrigeres Niveau aufweisen. Dies lässt sich wie folgt erklären: *Fahrzeugindustrie* ist eine Gruppe, die ausschließlich aus Automobilherstellern besteht, und auch im Block

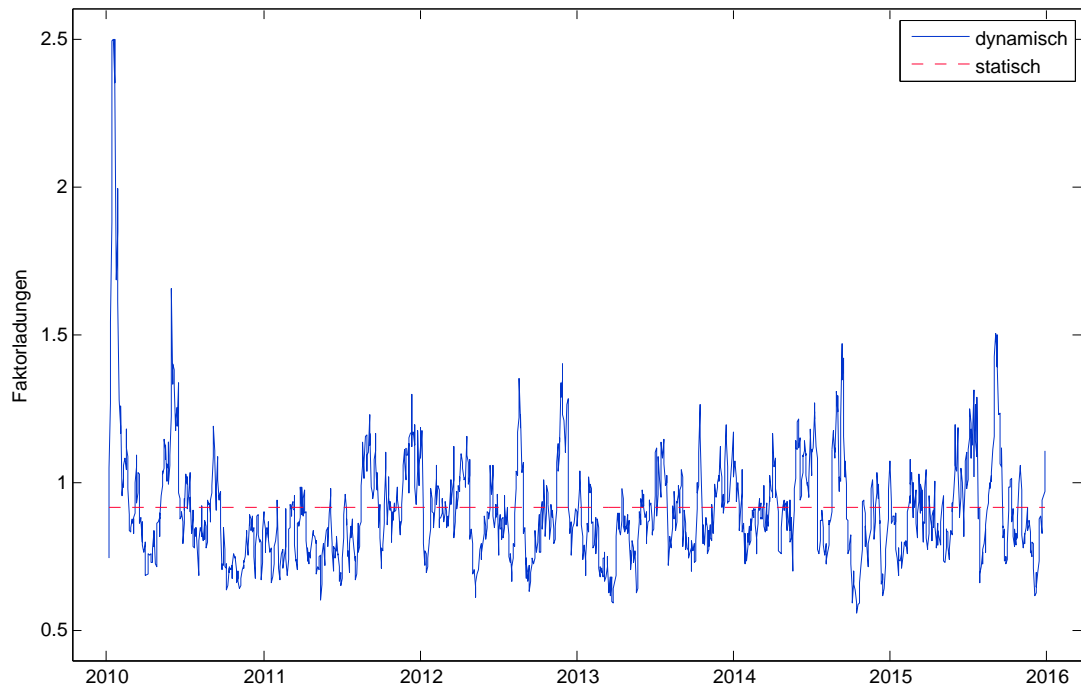


Abbildung 5.3: Geschätzte Faktorladungen $\{\beta_t\}_{1 \leq t \leq T}$ der dynamischen als auch der statischen schiefen t - Student-t Faktor-Copula mit homogener Abhängigkeit.

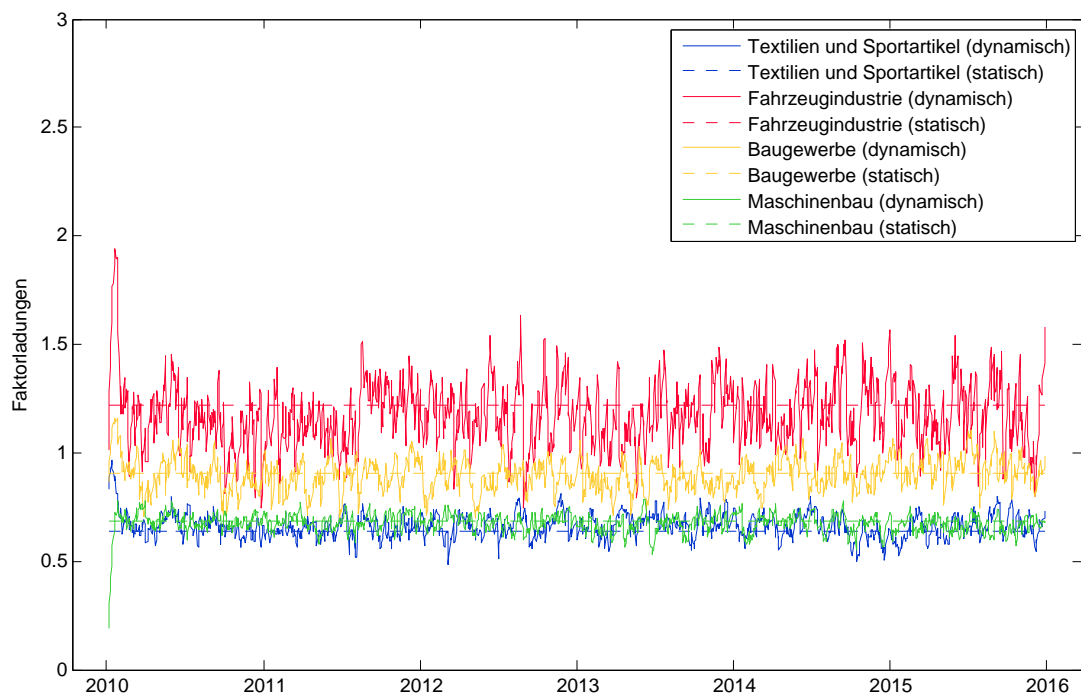


Abbildung 5.4: Geschätzte Faktorladungen $\{\beta_{g(i),t}\}_{1 \leq t \leq T}$, $1 \leq g(i) \leq 4$, der dynamischen als auch der statischen schiefen t - Student-t Faktor-Copula mit Blockabhängigkeit für Firmen aus demselben Industriezweig.

Baugewerbe stammen die Firmen aus demselben Marktsegment. Daher wird erwartet, dass diese Gruppen große Korrelationen aufweisen, was höhere Faktorladungen impliziert. Im Gegensatz dazu sind in der Gruppe *Maschinenbau* Unternehmen zu finden, die nicht in direkter Konkurrenz zueinander stehen (während sich die GEA Group AG auf Prozesstechnik und Komponenten für Produktionsverfahren konzentriert, liegt das Geschäftsfeld der Pfeiffer Vacuum Technology AG in der Entwicklung, Herstellung sowie im Vertrieb von Vakuumpumpensystemen bzw. -komponenten) und auch im Block *Textilien und Sportartikel* wurden zwei Industriezweige zu einer Gruppe zusammengefasst. Dementsprechend fallen die Korrelationen und infolgedessen auch die Faktorladungen geringer aus. Bei Betrachtung von Abbildung 5.4 lässt sich zudem erkennen, dass die Faktorladungen der Gruppen *Fahrzeugindustrie* und *Baugewerbe* eine etwas höhere Variabilität aufweisen als jene der beiden anderen Blöcke. Diese Gegebenheit lässt sich auf das höhere Niveau, um das die Faktorladungen schwanken, zurückführen.

5.5 Das Risikomaß „Value-at-Risk“

Ein fester Bestandteil der Portfolioanalyse sind Risikomaße. Risikomaße spiegeln das Risiko eines beliebigen Portfolios in einer einzigen Zahl wider. Ziel dieses Kapitels ist es nun, das beste Modell für die gemeinsame Verteilungsfunktion der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Aktien>Returns bezüglich des Value-at-Risk des Portfolios zu finden. Im vorherigen Abschnitt wurden für unseren Datensatz bereits die Parameter für verschiedene Copulamodelle geschätzt. Unter Verwendung dieser Schätzer wollen wir nun für all diese Modelle den Portfolio-Value-at-Risk ermitteln und schließlich miteinander vergleichen.

5.5.1 Value-at-Risk: Theoretische Grundlagen

Ein im Finanzsektor häufig verwendetes Risikomaß ist der Value-at-Risk (VaR). Für ein gegebenes Konfidenzniveau α und ein gegebenes Portfolio gibt der VaR den Verlust an, der mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ nicht überschritten wird. Formal ist der Value-at-Risk für ein gegebenes Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ wie folgt definiert:

$$VaR_t^\alpha := \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(-Y_t > x) \leq 1 - \alpha\} = F_{-Y_t}^{-1}(\alpha),$$

wobei Y_t die Zufallsvariable bezeichnet, die den Portfolio-Return zum Zeitpunkt t repräsentiert und $-Y_t$ wird mit dem Portfolio-Verlust zum Zeitpunkt t assoziiert. Der Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α entspricht demnach dem negativen $(1 - \alpha)$ -Quantil der Portfolio-Return-Verteilung. Typische Werte für das Konfidenzniveau sind $\alpha = 0.95$ oder $\alpha = 0.99$.

Um den Value-at-Risk für ein Portfolio bestimmen zu können, muss die Verteilung der Portfolio>Returns bekannt sein. Ist die gemeinsame Verteilungsfunktion der relevanten Variablen elliptisch (z.B. Normal oder Student-t), dann ist die Verteilung jeder Linearkombination dieser Variablen in geschlossener Form bekannt. Werden jedoch flexiblere Modelle

für die Modellierung der Randverteilungen und der Copula verwendet, dann ist die Verteilung von Linearkombinationen dieser Variablen im Allgemeinen nicht in geschlossener Form darstellbar. Daher ist ein alternativer Ansatz erforderlich, um den Value-at-Risk für ein Portfolio zu erhalten.

Ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des VaR eines Portfolios von Variablen, deren Verteilung unter Verwendung von copulabasierten Ansätzen modelliert wird, wie es in dieser Arbeit der Fall ist, ist die Simulation. Hierbei werden zu jedem Zeitpunkt S Beobachtungen vom multivariaten Modell unter Verwendung der zugrundeliegenden geschätzten Copula und Randverteilungen generiert, anschließend der Portfolio-Return gebildet und schließlich ergibt sich der VaR für das Konfidenzniveau α aus der empirischen Verteilung dieser simulierten Portfolio>Returns.

Um die Güte der Anpassung eines Modells bestimmen zu können, berechnen wir den Anteil der Werte der beobachteten Portfolio>Returns, welche kleiner sind als die Schätzer von $-VaR_t^\alpha$. Ist das Modell, also sowohl die Randverteilungen als auch die Copula gut an die vorliegenden Daten angepasst, dann sollte dieser Anteil in der Nähe des festgelegten Werts $1 - \alpha$ liegen. Die formale Überprüfung erfolgt mit Hilfe des Christoffersen-Tests (vgl. Christoffersen [6]), mit dem die Nullhypothese

$$H_0 : \mathbb{P}(Y_t < -VaR_t^\alpha) = 1 - \alpha$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 : \mathbb{P}(Y_t < -VaR_t^\alpha) \neq 1 - \alpha$$

überprüft wird.

5.5.2 Value-at-Risk: Portfolioanalyse

In der folgenden Analyse wird, wie bereits erwähnt, ausschließlich auf schiefe t - Student-t Faktor-Copulas näher eingegangen, da diese Faktor-Copula Modelle unter allen betrachteten Kombinationen von Verteilungen für den gemeinsamen Faktor und die Fehlerterme (für alle Abhängigkeitsstrukturen) unsere Daten hinsichtlich des AIC am besten anpassen. Darüber hinaus werden wir in der Folge das erste halbe Jahr der bisher betrachteten Zeitreihe verwerfen, um eventuelle Probleme zu vermeiden, die aufgrund der gewählten Startpunkte zur Schätzung der Faktorladungen auftreten könnten, d.h. anstatt die Zeitreihe ab dem 5. Januar 2010 zu betrachten, legen wir in der nachfolgenden Analyse als Startdatum den 1. Juli 2010 fest, sodass sich ein Gesamtumfang von 1392 Beobachtungen ergibt.

Zur Bestimmung des VaR generieren wir für jedes der betrachteten Modelle zu jedem Zeitpunkt $S = 10000$ Simulationen (vom multivariaten Modell), bilden anschließend, wie bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben, zu jedem Zeitpunkt die Portfolio>Returns und erhalten schließlich den VaR für das Konfidenzniveau α aus der empirischen Verteilung dieser simulierten Portfolio>Returns. Für jedes der Modelle wird der Value-at-Risk

für verschiedene Konfidenzniveaus α geschätzt, wobei hierfür die vier gängigsten Werte betrachtet werden: $\alpha = 0.90$, $\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.975$ sowie $\alpha = 0.99$. In Tabelle 5.9 wird für jedes Modell der Anteil der Überschreitungen der beobachtbaren Portfolio-Verluste über den VaR (über die Zeit) präsentiert. Die p -Werte des Christoffersen-Tests sind dabei jeweils in Klammer dargestellt. Wie bereits bei den Copulamodellen sind auch hier für jedes Konfidenzniveau die Werte des jeweils besten Modells im Hinblick auf die Genauigkeit der VaR-Schätzung fett gekennzeichnet.

MODELL		$1 - \alpha$							
		0.01		0.025		0.05		0.10	
Standard-Copula	Gauss	0.0115	(0.5842)	0.0273	(0.5882)	0.0532	(0.5921)	0.0991	(0.9145)
	Student-t	0.0108	(0.7739)	0.0259	(0.8377)	0.0539	(0.5117)	0.1020	(0.8030)
	Clayton	0.0072	(0.2662)	0.0273	(0.5882)	0.0625	(0.0391)	0.1264	(0.0015)
statische Faktor-Copula	homogen	0.0036	(0.0056)	0.0216	(0.3989)	0.0474	(0.6553)	0.0977	(0.7742)
	Blockabh.	0.0079	(0.4142)	0.0280	(0.4792)	0.0568	(0.2574)	0.1106	(0.1928)
dynamische Faktor-Copula	homogen	0.0086	(0.5963)	0.0287	(0.3830)	0.0524	(0.6782)	0.1042	(0.6065)
	Blockabh.	0.0101	(0.9828)	0.0280	(0.4792)	0.0553	(0.3706)	0.1114	(0.1648)
	heterogen	0.0165	(0.0254)	0.0352	(0.0215)	0.0668	(0.0061)	0.1243	(0.0035)

Tabelle 5.9: Anteil an Überschreitungen des simulierten Portfolio-VaR zum Konfidenzniveau α sowie die dazugehörigen p -Werte des Christoffersen-Tests für die verschiedenen Modelle.

Wie aus der Tabelle zu entnehmen ist, hat unter den Standard-Copulas die Clayton Copula die schlechteste Performance bezüglich des Value-at-Risk: Während für $\alpha = 0.99$ der VaR leicht überschätzt wird, ist für die übrigen Werte von α der Anteil der Überschreitungen des Value-at Risk deutlich über den $(1 - \alpha)$ -Werten, was gleichbedeutend damit ist, dass der Portfolio-VaR in diesen Fällen unterschätzt wird. Dieses Ergebnis ist statistisch signifikant, da der Christoffersen-Test die Nullhypothese $\mathbb{P}(Y_t < -VaR_t^\alpha) = 1 - \alpha$ für $\alpha = 0.95$ und $\alpha = 0.90$ verwirft. Im Gegensatz dazu sind die Resultate der Gauss'schen und der Student-t Copula deutlich besser. Für diese beiden Modelle, zwischen denen keine relevanten Unterschiede erkennbar sind, verwirft der Christoffersen-Test die Nullhypothese für keine der betrachteten Konfidenzniveaus.

Mit Ausnahme der statischen homogenen Faktor-Copula, die den VaR zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.99$ deutlich überschätzt und bei der auch die Nullhypothese des Signifikanztests verworfen wird, sind keine nennenswerten Unterschiede sowohl zwischen den statischen als auch den dynamischen Faktor-Copulas mit homogener Abhängigkeit und Blockabhängigkeit erkennbar. Es lässt sich jedoch beobachten, dass die statische homogene Faktor-Copula den Value-at-Risk leicht überschätzt, wohingegen die übrigen drei Modelle den VaR für $\alpha = 0.975$, $\alpha = 0.95$ und $\alpha = 0.90$ etwas unterschätzen. Mit Ausnahme des dynamischen heterogenen Faktor-Copula Modells liefern alle getesteten Faktor-Copulas weitestgehend relativ ähnliche Ergebnisse wie die Gauss'sche und die Student-t Copula ab,

sollten jedoch gegenüber den Standard-Copulas den Vorzug erhalten, da sie sowohl heavy Tails als auch Asymmetrien berücksichtigen.

Im Hinblick auf die dynamischen Modelle wird erwartet, dass sie keine große Verbesserung in das Modell bringen, obwohl sie laut AIC die Daten besser anpassen als die statischen Modelle. Da sich die Niveaus der Faktorladungen aller Abhängigkeitstypen über die Zeit nicht wesentlich verändern (siehe Abbildungen 5.3 und 5.4), wird erwartet, dass die statischen und dynamischen Copulas ein sehr ähnliches Verhalten aufweisen und dass sich der geschätzte VaR im statischen Modell nicht maßgeblich von jenem im dynamischen Modell unterscheidet, was sich auch in den Ergebnissen widerspiegelt.

Auffallend in obigen Ergebnissen ist jedoch, dass im Vergleich zu allen anderen Modellen das dynamische heterogene Faktor-Copula Modell hinsichtlich des Value-at-Risk wider Erwarten mit Abstand am schlechtesten abschneidet: Der VaR wird deutlich unterschätzt und auch der Christoffersen-Test verwirft die Nullhypothese $H_0 : \mathbb{P}(Y_t < -VaR_t^\alpha) = 1 - \alpha$ sowohl für $\alpha = 0.975$, $\alpha = 0.95$ als auch für $\alpha = 0.90$. Eine mögliche Erklärung hierfür könnte folgende sein: Das dynamische heterogene Faktor-Copula Modell ist unter allen betrachteten Faktor-Copulas das einzige, bei dem die Faktorladungen unter Verwendung der “variance targeting“-Methode geschätzt wurden. Diese Tatsache legt die Vermutung nahe, dass es sich bei den unter Verwendung dieses Ansatzes geschätzten Werten für die Faktorladungen um schlechte Schätzer handelt. Um diese Vermutung zu überprüfen, soll nachfolgend eine detaillierte Untersuchung eines Portfolios mit heterogener Abhängigkeitsstruktur erfolgen, bei der die Schätzer sowohl im allgemeineren Modell als auch unter Verwendung der “variance targeting“-Methode berechnet werden, und anschließend die Anteile der Überschreitungen des VaR miteinander verglichen werden.

Ein Portfolio mit heterogener Abhängigkeitsstruktur: Standard-Schätzer vs. “variance targeting“-Schätzer

Um, wie zuvor erwähnt, einen Vergleich zwischen den VaR-Überschreitungen unter dem Standard-Modell und der “variance targeting“-Methode ziehen zu können, müssen zunächst die Faktorladungen unter beiden Modellen geschätzt werden. Da diese Schätzung im Standard-Modell für das bisher betrachtete Portfolio trotz der nicht allzu großen Anzahl an Aktien im Portfolio rechentechnisch bereits sehr aufwendig wäre, erfolgt der Vergleich anhand eines Teilportfolios (des in Kapitel 5.1 beschriebenen Portfolios) bestehend aus 5 zufällig gewählten Aktien, welche in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet sind. Während die geschätzten Parameter der Randverteilungen dieser Aktien unverändert zum ursprünglichen Portfolio bleiben (siehe Abschnitt 5.3), müssen die Copula-Parameter neu geschätzt werden. Diese sind in Tabelle 5.11 angeführt, wobei in den ersten beiden Spalten der Tabelle die Parameter des statischen bzw. dynamischen Standard-Modells und in der dritten Spalte jene des dynamischen Modells unter Verwendung des “variance targeting“(VT)-Ansatzes zu finden sind.

Abbildung 5.5, in der die Faktorladungen des heterogenen Modells für jede der 5 Aktien dargestellt sind, lässt erkennen, dass die Faktorladungen des dynamischen Standard-Modells

Kürzel	Aktie
BMW	Bayerische Motoren Werke AG
DAI	Daimler AG
VOW	Volkswagen AG
HEI	HeidelbergCement AG
G1A	GEA Group AG

Tabelle 5.10: Aktien des Teilportfolios zur detaillierten Untersuchung des heterogenen Faktor-Copula Modells.

PARA- METER	HETEROGENES MODELL		
	schiefe t - Student-t Faktor-Copula		
	statisch	dynamisch	dynamisch VT
ω_1	0.3636	0.0723	0.001490
ω_2	0.3904	0.0790	0.001701
ω_3	0.2208	0.0394	0.000407
ω_4	-0.0372	-0.0092	-0.000121
ω_5	0.0015	-0.0041	0.000017
a	—	0.0310	0.0144
b	—	0.7871	0.9972
$1/\nu_\epsilon$	0.2291	0.2392	0.2315
$1/\nu_Z$	0.1120	0.1079	0.1102
ψ_Z	-0.1533	-0.1528	-0.1363
$\log L$	2159.22	2158.33	2156.56
AIC	-4304.45	-4296.65	-4303.11

Tabelle 5.11: Geschätzte Parameter, Wert der Log-Likelihood-Funktion im Optimum sowie Akaikes Informationskriterium von 3 verschiedenen Faktor-Copulas der standardisierten Residuen, jeweils mit heterogener Abhängigkeit zwischen den Variablen (für das aus 5 Aktien bestehende Teilportfolio).

für alle Aktien um jene des statischen Modells schwanken, wohingegen dies für die Faktorladungen des “variance targeting“-Modells offensichtlich nicht der Fall ist. Daher liegt die Vermutung nahe, dass der geschätzte VaR unter dem VT-Modell von jenem der anderen beiden Modelle abweichen wird.

Wie bereits zuvor, generieren wir zur Schätzung des VaR für jedes Modell zu jedem Zeitpunkt $S = 10000$ Simulationen und verwerfen analog zur vorangegangenen Analyse das erste halbe Jahr der Zeitreihe. Der Anteil der Überschreitungen eines jeden Modells sowie

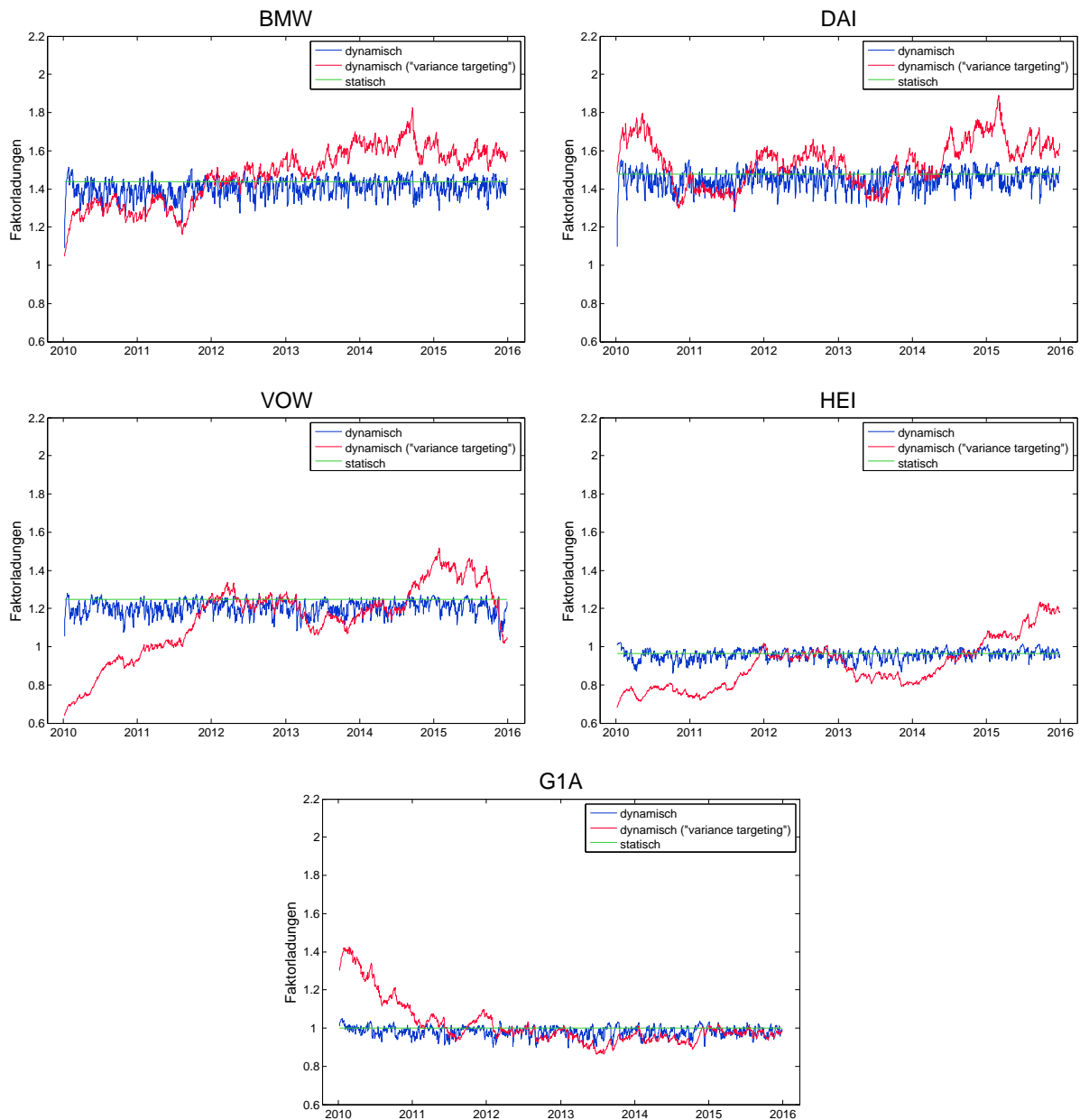


Abbildung 5.5: Geschätzte Faktorladungen $\{\beta_{i,t}\}_{1 \leq t \leq T}$, $1 \leq i \leq 5$, (für alle 5 Aktien des Teilportfolios) der schiefen t - Student-t Faktor-Copula mit heterogener Abhängigkeit.

die p -Werte des Christoffersen-Tests, welche jeweils in Klammer dargestellt sind, werden in Tabelle 5.12 präsentiert. Wie aus der Tabelle zu entnehmen ist, wird der Value-at-Risk im dynamischen heterogenen Modell, bei dem die Schätzung der Faktorladungen unter Verwendung des VT-Ansatzes erfolgt, etwas unterschätzt. Zudem lässt sich beobachten, dass dieses Modell nicht nur im Vergleich zum dynamischen heterogenen Standard-Faktor-Copula Modell, sondern auch gegenüber dem statischen Modell wesentlich schlechter ab-

schneidet. Die Resultate legen somit nahe, dass die Verwendung der “variance targeting“-Methode als mögliche Alternative zum Standard-Ansatz nicht in Betracht gezogen werden sollte.

MODELL		$1 - \alpha$							
		0.01		0.025		0.05		0.10	
heterogene Faktor-Copula	statisch	0.0115	(0.5842)	0.0273	(0.5882)	0.0503	(0.9608)	0.1042	(0.6065)
	dynamisch	0.0101	(0.9828)	0.0273	(0.5882)	0.0489	(0.8434)	0.1027	(0.7353)
	dynamisch VT	0.0122	(0.4226)	0.0280	(0.4792)	0.0510	(0.8637)	0.1049	(0.5464)

Tabelle 5.12: Anteil an Überschreitungen des simulierten Portfolio-VaR (für das aus 5 Aktien bestehende Teilportfolio) zum Konfidenzniveau α sowie die dazugehörigen p -Werte des Christoffersen-Tests für die verschiedenen Modelle.

Abschließend soll hier festgehalten werden, dass in einer weiteren Arbeit der in vorliegendem Werk präsentierte Faktor-Copula Ansatz anhand von weiteren Portfolios untersucht wurde. Die verschiedenen Portfolios, die jeweils eine unterschiedliche Anzahl an Aktien umfassen, bestehen dabei allesamt aus Aktien, die an der Frankfurter Börse gehandelt werden. Darüber hinaus wurden diese Aktien derart gewählt, dass eine andere Kategorisierung der Aktien als in vorliegender Arbeit vorgenommen werden konnte. Die Untersuchung der Portfolios führt zu Ergebnissen, die vergleichbar und recht ähnlich zu den Resultaten dieser Arbeit sind.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, ein geeignetes Modell für die gemeinsame Verteilungsfunktion der Returns eines hochdimensionalen Aktienportfolios zu finden. Ein möglicher Ansatz hierfür ist die Verwendung von Copulas. Diese erlauben einem bei der Modellierung der multivariaten Verteilungsfunktion die univariaten Randverteilungen der einzelnen Aktien-Returns von der Abhängigkeitsstruktur zwischen diesen Variablen zu trennen. Die meisten in der einschlägigen Literatur zu findenden Copulas sind allerdings für höhere Dimensionen nicht ausreichend flexibel. Aus diesem Grund widmete sich diese Arbeit der Untersuchung von Faktor-Copulas, die ein noch sehr junges Forschungsgebiet darstellen. Faktor-Copulas basieren auf einer einfachen Faktorstruktur und weisen insbesondere für hochdimensionale Anwendungen trotz einer nicht allzu großen Anzahl an Parametern ein ausreichendes Maß an Flexibilität auf.

Im praktischen Teil dieser Arbeit wurden verschiedene Faktor-Copula Modelle für ein Portfolio bestehend aus 10 Aktien, die allesamt an der Frankfurter Börse gehandelt werden, untersucht und anschließend im Hinblick auf die Genauigkeit der Schätzung des Value-at-Risk mit traditionellen multivariaten Ansätzen verglichen. Die durchgeführte Analyse zeigt, dass sich bezüglich des geschätzten Value-at-Risk für oben genanntes Portfolio die Clayton Copula schlechter eignet als die elliptischen Copulas (Gauss'sche Copula und Student-t Copula). Unter den statischen und dynamischen Faktor-Copulas mit jeweils verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen (homogene Abhängigkeit bzw. Blockabhängigkeit) scheint es keine relevanten Unterschiede in den Ergebnissen zu geben. Darüber hinaus erzielen sie allesamt ähnlich gute Resultate wie die elliptischen Copulas. Das einzige Faktor-Copula Modell, das keine zufriedenstellenden Ergebnisse erzielt, ist die dynamische heterogene Faktor-Copula. Diese Tatsache lässt sich jedoch darauf zurückführen, dass hier aufgrund der großen Anzahl an zu schätzenden Parametern der "variance targeting"-Ansatz verwendet wurde. In einer separaten Analyse von Faktor-Copulas mit heterogener Abhängigkeit stellte sich jedoch heraus, dass sich die Anwendung dieser Methode als nicht praktikabel erweist. Das Modell, das die besten Resultate in Relation zur Anzahl der zu schätzenden Parameter erzielt, ist das statische homogene Faktor-Copula Modell, bei dem der gemeinsame Faktor einer schiefen t-Verteilung folgt und die idiosynkratischen Fehlerterme Student-t verteilt sind.

Die Ergebnisse zeigen, dass sich die Verwendung des Faktor-Copula Ansatzes in der Praxis als sinnvoll erweist. Der entscheidende Vorteil von Faktor-Copulas gegenüber traditionellen

multivariaten Ansätzen ist, dass diese Modelle sowohl heavy Tails als auch Asymmetrien berücksichtigen, die bei der Schätzung des Value-at-Risk maßgebenden Einfluss haben.

In weiteren Arbeiten wäre eine Erweiterung des hier dargestellten Ansatzes denkbar. Ein Ziel könnte es sein, andere Verteilungsfunktionen für den gemeinsamen Faktor als auch für die idiosynkratischen Fehlerterme zu berücksichtigen. Eine andere Erweiterung könnte auf eine Erhöhung der Faktoranzahl abzielen. Darüber hinaus wäre die Schätzung des Value-at-Risk für unterschiedlich gewichtete Portfolios als Erweiterung ebenso lohnenswert.

Literaturverzeichnis

- [1] Mariana Bartels und Flavio A. Ziegelmann. Value at Risk and Expected Shortfall Estimation for High Dimensional Portfolios via Factor Copulas. Juli 2015.
- [2] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc., 3. Auflage, 1995.
- [3] Tim Bollerslev. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327, Februar 1986.
- [4] Xiaohong Chen und Yanqin Fan. Estimation and Model Selection of Semiparametric Copula-Based Multivariate Dynamic Models Under Copula Misspecification. *Journal of Econometrics*, 135:125–154, 2006.
- [5] Umberto Cherubini, Elisa Luciano und Walter Vecchiato. *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons, Ltd., 2004.
- [6] Peter F. Christoffersen. Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*, 39(4):841–862, November 1998.
- [7] Steffen Ciupke. *Wertpotenziale der Kreditversicherung: Ansätze der Risikosteuerung durch Makroderivate*. Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2008.
- [8] R. Dennis Cook und Mark E. Johnson. A Family of Distributions for Modelling Non-elliptically Symmetric Multivariate Data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 43(2):210–218, 1981.
- [9] Drew Creal, Siem Jan Koopman und André Lucas. Generalized Autoregressive Score Models with Applications. *Journal of Applied Econometrics*, 28(5):777–795, August 2013.
- [10] Richard A. Davis, William T.M. Dunsmuir und Sarah B. Streett. Observation driven models for Poisson counts. *Biometrika*, 90:770–790, 2001.
- [11] Fabrizio Durante und Carlo Sempi. *Principles of Copula Theory*. CRC Press, 2015.
- [12] J. Durbin und A. Stuart. Inversions and Rank Correlation Coefficients. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 13(2):303–309, September 1951.

- [13] Bradley Efron und Robert J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, 1993.
- [14] Paul Embrechts und Marius Hofert. A note on generalized inverses. *Mathematical Methods of Operations Research*, 77(3):423–432, 2013.
- [15] Paul Embrechts, Alexander McNeil und Daniel Straumann. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In Michael A. H. Dempster (Ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Seiten 176–223. Cambridge University Press, 2002.
- [16] Paul Embrechts, Filip Lindskog und Alexander McNeil. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. In Svetlozar T. Rachev (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Kapitel 8, Seiten 329–384. Elsevier, 2003.
- [17] Robert Engle. Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20:339–350, 2002.
- [18] Robert Engle. New frontiers for ARCH models. *Journal of Applied Econometrics*, 17: 425–446, 2002.
- [19] Robert Engle und Joseph Mezrich. GARCH for Groups. *Risk*, 9:36–40, 1996.
- [20] Kai-Tai Fang, Samuel Kotz und Kai-Wang Ng. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman & Hall, 1990.
- [21] Manrico Glauser. *Messung von Marktrisiken unter Verwendung von Copulafunktionen: Eine empirische Studie für den Schweizer Aktienmarkt*. Dissertation, Universität Freiburg, Schweiz, 2003.
- [22] Bruce E. Hansen. Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*, 35(3):705–730, August 1994.
- [23] Lars Peter Hansen. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, 50(4):1029–1054, Juli 1982.
- [24] Lars Peter Hansen. Generalized Method of Moments Estimation. In Steven N. Durlauf und Lawrence E. Blume (Eds.), *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Palgrave Macmillan, 2. Auflage, 2008.
- [25] Wassily Hoeffding. Maßstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5:181–233, 1940.

- [26] Robert V. Hogg und Allen T. Craig. *Introduction to Mathematical Statistics*. Prentice-Hall, Inc., 5. Auflage, 1995.
- [27] Harry Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, 1997.
- [28] Harry Joe und James J. Xu. The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. Technical Report 166, Department of Statistics, University of British Columbia, 1996.
- [29] Richard A. Johnson und Dean W. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Pearson Prentice Hall, 6. Auflage, 2007.
- [30] Clark H. Kimberling. A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Mathematicae*, 10(2):152–164, Juni 1974.
- [31] Ulrich Krenzel. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg, 8. Auflage, 2005.
- [32] E. L. Lehmann und George Casella. *Theory of Point Estimation*. Springer, 2. Auflage, 1998.
- [33] Jan-Frederik Mai und Matthias Scherer. *Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms and Applications*. Imperial College Press, 2012.
- [34] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey und Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, überarbeitete Auflage, 2015.
- [35] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, 2. Auflage, 2006.
- [36] Dong Hwan Oh und Andrew J. Patton. Modelling Dependence in High Dimensions with Factor Copulas. Duke University, April 2012.
- [37] Dong Hwan Oh und Andrew J. Patton. Time-Varying Systemic Risk: Evidence from a Dynamic Copula Model of CDS Spreads. *Journal of Business & Economic Statistics*, Seiten 1–47, 2016.
- [38] Dong Hwan Oh und Andrew J. Patton. Modelling Dependence in High Dimensions with Factor Copulas. *Journal of Business & Economic Statistics*, 35(1):139–154, Januar 2017.
- [39] Andrew J. Patton. *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*. Dissertation, University of California, San Diego, 2002.
- [40] Andrew J. Patton. Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. *International Economic Review*, 47(2), Mai 2006.

- [41] Andrew J. Patton. Copula-Based Models for Financial Time Series. In Torben Gustav Andersen, Richard A. Davis, Jens-Peter Kreiss und Thomas V. Mikosch (Eds.), *Handbook of Financial Time Series*, Seiten 767–785. Springer, 2009.
- [42] Andrew J. Patton. A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 110:4–18, 2012.
- [43] Andrew J. Patton. Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series. In Graham Elliott und Allan Timmermann (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, Volume 2, Seiten 899–960. Springer, 2013.
- [44] Berthold Schweizer und Abe Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 1983.
- [45] Abe Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 8:229–231, 1959.
- [46] Igor Vaynman und Brendan K. Beare. Stable Limit Theory for the Variance Targeting Estimator. *Essays in Honor of Peter CB Phillips (Advances in Econometrics, Volume 33)*, Seiten 639–672, 2014.