



Hinteregger Thessa BSc

# **Faktormodelle im Kontext des Kreditrisikos mit speziellem Fokus auf dem Einfaktormodell**

## **MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Betreuerin:

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dragoti-Cela Eranda

Institut für Diskrete Mathematik

Graz, August 2017



## **EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG**

### ***AFFIDAVIT***

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

*I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.*

---

Datum/Date

---

Unterschrift/Signature



## **Abstract**

This thesis provides an overview of the use of factor models for modeling credit risk. The basis for many models used in practice is the classical one-factor model, which works under the premise of standard normal distribution for central parameters (e.g. Basel II). However it is based on simplified assumptions. The focus of this thesis is in the advancement of this classical model by adding more interconnections such as correlation between two or more obligors, the stochasticity of certain parameters as well as the use of models with more than one factor. This approach also includes different distribution models than just the normal distribution. The last point is underscored by an empirical simulation study on the t-distribution.

Due to its good analytical tractability much research has been done on the one-factor model. Together with the well-known industry models like the KMV-model and CreditMetrics (multi-factor models) it is the most commonly used model. The results of this thesis illustrate that disregard or misspecification of certain interconnections can lead to underestimation of risk and should therefore be taken into account.

**Keywords:** credit risk, one-factor model, multi-factor-models



## **Kurzfassung**

Diese Arbeit gibt einen Überblick über den Einsatz von Faktormodellen zur Modellierung des Kreditrisikos. Das klassische Einfaktormodell unter Annahme der Standardnormalverteilung für zentrale Parameter bildet die Grundlage für viele Modelle in der Praxis (Stichwort Basel II), basiert jedoch auf vereinfachenden Annahmen. Daher liegt der Fokus dieser Masterarbeit auf der Weiterentwicklung dieses Modells durch Hinzufügen diverser Abhängigkeiten wie der Korrelation zwischen den Schuldnern, der Stochastizität diverser Parameter, Einbeziehen mehrerer Faktoren sowie dem Fallenlassen der Normalverteilungsannahme. Letzter Punkt wird mithilfe einer Simulationsstudie im Fall der t-Verteilung auch empirisch untersucht.

Aufgrund seiner guten analytischen Handhabbarkeit ist das klassische Einfaktormodell theoretisch am besten erforscht und wird daher neben den gängigsten Industriemodellen wie dem KMV-Modell und CreditMetrics (Mehrfaktormodelle) auch am häufigsten verwendet. Ergebnisse dieser Arbeit zeigen allerdings, dass Missachtung oder Fehlspezifikation diverser Abhängigkeiten zur Unterschätzung des Risikos eines Portfolios führen können und daher berücksichtigt werden sollten.

**Schlagnworte:** Kreditrisiko, Einfaktormodell, Mehrfaktormodelle



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Danksagung</b>	<b>IX</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung und Ziel der Arbeit . . . . .	1
1.2 Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2 Allgemeines zum Kreditrisiko</b>	<b>3</b>
2.1 Das Basismodell des Ausfallrisikos . . . . .	4
2.2 Die Bedeutung der Korrelationen . . . . .	6
2.3 Das Konzept der bedingten Unabhängigkeit . . . . .	9
<b>3 Mathematische Grundlagen</b>	<b>11</b>
3.1 Risikomaße . . . . .	11
3.2 Copulas . . . . .	13
<b>4 Einfaktormodell</b>	<b>19</b>
4.1 Modelldefinition und Spezialfälle . . . . .	19
4.1.1 Grundlegende Modelldefinition . . . . .	19
4.1.2 Das Merton-Einfaktormodell . . . . .	23
4.1.3 Approximation durch ein unendlich großes Portfolio . . . . .	24
4.2 Basel und der Bezug zum Einfaktormodell . . . . .	27
4.2.1 Mathematischer Hintergrund . . . . .	28
4.2.2 Berechnung der Mindesteigenkapitalanforderungen . . . . .	31
4.2.2.1 Standardansatz . . . . .	31
4.2.2.2 Interner Ratingansatz . . . . .	32
4.2.3 Kritik am Einfaktormodell . . . . .	35
4.3 Erweiterungen . . . . .	36

4.3.1	Länderrisiko . . . . .	37
4.3.2	Abhängigkeit zwischen den Schuldnern . . . . .	39
4.3.3	Stochastizität von EAD und LGD . . . . .	40
4.3.3.1	Stochastizität von <i>LG</i> D . . . . .	41
4.3.3.2	Stochastizität von <i>E</i> AD . . . . .	42
4.3.3.3	Zusammenführung . . . . .	42
4.4	Granularitätsanpassung . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Verallgemeinerung Einfaktormodell und numerische Analyse</b>	<b>51</b>
5.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	52
5.2	Numerische Analyse . . . . .	54
5.3	Zusammenfassung . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Mehrfaktormodelle</b>	<b>61</b>
6.1	Zweifaktormodell . . . . .	62
6.1.1	Modelldefinition . . . . .	62
6.1.2	Vergleich mit dem Einfaktormodell . . . . .	66
6.2	Modelle mit mehr als zwei Faktoren . . . . .	68
6.2.1	Arten von Mehrfaktormodellen . . . . .	68
6.2.1.1	Linearer Ansatz . . . . .	69
6.2.1.2	Nichtlinearer Ansatz . . . . .	69
6.2.1.3	Hierarchische Struktur der Faktoreinflüsse . . . . .	69
6.2.2	Die Anwendung von Copulas auf Mehrfaktormodelle . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Industriemodelle</b>	<b>77</b>
7.1	KMV-Modell . . . . .	78
7.2	CreditMetrics . . . . .	81
7.3	Vergleich CreditMetrics/KMV-Modell . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>85</b>
	<b>Literatur</b>	<b>87</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Überblick Kreditrisiken und Kreditrisikomodelle . . . . .	4
2.2	Veränderung von yield spreads zweier Firmen im Vergleich mit dem jeweiligen Industriesektor . . . . .	7
2.3	Vergleich der Verlustverteilung zweier Portfolios . . . . .	8
3.1	Portfoliodichte mit Risikokennzahlen . . . . .	12
3.2	Motivation Copulas . . . . .	14
4.1	Grundidee Einfaktormodell . . . . .	20
4.2	Ausfall im Merton-Modell . . . . .	23
4.3	Grundaufbau Basel II . . . . .	27
4.4	Berechnungsansätze Basel II . . . . .	32
4.5	Vergleich verschiedenster Modellerweiterungen von Basel II . . . . .	36
4.6	Einbeziehung des Länderrisikos im Einfaktormodell . . . . .	39
5.1	Vergleich Dichtefunktion Normalverteilung, t-Verteilung . . . . .	51
5.2	Verlustverteilung für $\rho = 0.1, EAD = LGD = 1$ . . . . .	55
5.3	Value at Risk zu verschiedenen Konfidenzniveaus, Beispiel 6 . . . . .	59
6.1	Motivation Mehrfaktormodelle . . . . .	61
6.2	Idee Doppelintegral Zweifaktormodell . . . . .	64
6.3	Vergleich Ein- und Zweifaktormodell I . . . . .	67
6.4	Vergleich Ein- und Zweifaktormodell II . . . . .	67
6.5	Mehrfaktormodell mit hierarchischer Struktur . . . . .	70
7.1	Übersicht Industriemodelle . . . . .	77
7.2	Bedeutung der Asset Levels in CreditMetrics . . . . .	83
7.3	Migrationswahrscheinlichkeiten in CreditMetrics . . . . .	84



# Tabellenverzeichnis

4.1	Risikogewichte Standardansatz in Basel II . . . . .	31
4.2	IRB-Risikogewichte in Basel II . . . . .	35
5.1	Ausfallwahrscheinlichkeiten, Beispiel 2 . . . . .	55
5.2	Schätzer Risikokennzahlen, Beispiel 3 . . . . .	56
5.3	Risikokennzahlen, Beispiel 3 . . . . .	57
5.4	Schätzer Risikokennzahlen, Beispiel 4 . . . . .	57
5.5	Schätzer Risikokennzahlen - relative Verhältnisse, Beispiel 4 . . . . .	58
5.6	Schätzer Risikokennzahlen, Beispiel 5 . . . . .	58
5.7	Schätzer Risikokennzahlen - relative Verhältnisse, Beispiel 5 . . . . .	59
6.1	Einschränkungen für $y_1, y_2$ im Zweifaktormodell . . . . .	64
6.2	Copulas nichtlineares Mehrfaktormodell . . . . .	75



# Abkürzungsverzeichnis

- D** Ausfallindikator
- EAD** Ausfallbedrohter Betrag
- EC** Economic Capital, Ökonomisches Kapital
- EL** Expected Loss, Erwartete Ausfallhöhe
- engl.** englisch
- ES** Expected Shortfall
- etc.** et cetera
- IRB** Internal Ratings Based (Approach), Interner Ratingansatz
- L** (Potentielle) Ausfallhöhe, Verlustvariable
- LGD** Verlustquote
- oBdA** ohne Beschränkung der Allgemeinheit
- p** Ausfallwahrscheinlichkeit (im allgemeinen Kontext)
- PD** Ausfallwahrscheinlichkeit (im Kontext von Basel II)
- RC** Wiedereinbringungsquote
- $\tau^L$  untere Tail-Abhängigkeit
- $\tau^U$  obere Tail-Abhängigkeit
- u.a.** und andere
- UL** Unexpected Loss, Unerwarteter Verlust
- usw.** und so weiter
- Var** Varianz
- VaR** Value at Risk



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei all jenen bedanken, die mich beim Schreiben der vorliegenden Arbeit unterstützt und motiviert haben.

An erster Stelle gebührt mein Dank Frau Prof. Dragoti-Cela, die meine Arbeit betreut und begutachtet hat. Vielen Dank für die vielen Inputs und hilfreichen Tipps sowie Anregungen vor und während der Umsetzung.

Aber auch meine Familie hat durch ihre tatkräftige Unterstützung während des gesamten Studiums und vor allem während des Verfassens dieser Arbeit maßgeblich zum Erfolg beigetragen. Ein besonderer Dank gilt vor allem meinem Partner, der immer für mich da war und mich moralisch sehr unterstützt hat.

Hinteregger Thessa  
Graz, 16.August 2017



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Der Umgang mit Kreditrisiko hat in den letzten Jahren speziell bei Banken und Versicherungen vermehrt an Bedeutung gewonnen. Dies liegt zum einen am verstärkten Handel mit Kreditrisiken, zum anderen aber auch am Aufkommen diverser bankenaufsichtsrechtlicher Entwicklungen und Vorgaben (Stichwort Basel).

Eine Möglichkeit, Kreditrisiko zu modellieren besteht im Einsatz von Faktormodellen. Diesen liegt die Idee zugrunde, dass die Bonität eines Schuldners von einem oder mehreren Faktoren abhängig ist. Die Klasse der Faktormodelle gehört zu den wenigen Modellen, die Korrelationen realistisch abbilden können, dabei aber gleichzeitig eine analytische Handhabbarkeit bewahren.

Da Faktormodelle die Grundlage für viele Modelle in der Praxis bilden (so kommt das Einfaktormodell unter anderem in der Berechnung der Mindesteigenkapitalanforderungen in Basel zum Einsatz) existiert auch dementsprechend viel Literatur zu diesem Thema. Repräsentativ sollen an dieser Stelle drei Werke genannt werden. Schönbucher [2001] gibt eine gute Einführung in das Thema Einfaktormodell und beschreibt auch kurz Erweiterungen sowie ein lineares Mehrfaktormodell. Albrecht [2005] beschäftigt sich vor allem mit dem Einfaktormodell, beschreibt aber auch die Anwendung von Faktormodellen in der Praxis. Auch in Martin, Reitz und Wehn [2006] findet sich ein einführendes Kapitel in dieses Thema, vor allem in Bezug auf die Umsetzung in Basel II.

Häufig wird allerdings nur ein kurzer Überblick über das Einfaktormodell gegeben, weiterführende Themen werden sehr selten behandelt. Cespedes und Martin [2002] befassen sich eingehend mit einem Zweifaktormodell sowie dem Vergleich zum klassischen Einfaktormodell. Die Anwendung von Copulas auf Mehrfaktormodelle wird in Oh und Patton [2015] beschrieben. Weitere Autoren, die sich mit dem Thema der Mehrfaktormodelle beschäftigen sind Schönbucher oder auch Rösch und Scheule [2005], die das Thema eines Mehrfaktormodells für die Ausfallrate und Wiedereinbringungsquote aufgreifen.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, dem Leser einen guten Überblick über die Verwendung der Ein- und Mehrfaktormodelle im Kreditrisikobereich zu verschaffen. So werden nicht nur diverse Erweiterungen des klassischen Einfaktormodells präsentiert, sowie die Idee hinter den Mehrfaktormodellen vorgestellt, es wird auch deren Anwendung in der Praxis (Stichwort Industrie-modelle) diskutiert. Aufgrund der guten Handhabbarkeit liegt der Fokus der meisten Arbeiten

in diesem Gebiet auf dem klassischen Einfaktormodell mit einer Normalverteilungsannahme der Faktoren. Daher liegt in der vorliegenden Arbeit das Hauptaugenmerk auf diversen Erweiterungen und Verallgemeinerungen dieses Modells und den Folgerungen daraus.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Kapitel 2 („Allgemeines zum Kreditrisiko“) gibt eine kurze allgemeine Einführung in die Thematik des Kreditrisikos. Dabei wird das Basismodell des Ausfallrisikos, auf dem in weiterer Folge auch das Einfaktormodell aufbaut, vorgestellt. Die Bedeutung der Korrelationen wird ebenso hervorgehoben wie das Konzept der bedingten Unabhängigkeit präsentiert, das in den weiteren Kapiteln seine Anwendung finden wird.

In Kapitel 3 („Mathematische Grundlagen“) werden die wichtigsten Risikomaße zur Beschreibung einer Verlustfunktion diskutiert. Ein weiteres Unterkapitel ist einer Einführung in Copulas, die später bei Mehrfaktormodellen verwendet werden, gewidmet.

Kapitel 4 („Einfaktormodell“) behandelt schließlich das Einfaktormodell. Dabei wird das klassische Basismodell vorgestellt und es werden erste Aussagen zur Verlustverteilung in diesem Zusammenhang präsentiert. Aufgrund der wohl populärsten Anwendung dieses Modells in Basel II ist diesem Thema ebenfalls ein eigenes Kapitel gewidmet. Es folgt ein Unterkapitel zu diversen Erweiterungen des Standard-Modells wie der Miteinbeziehung des Länderrisikos, der Abhängigkeit zwischen einzelnen Schuldnern sowie der Stochastizität zweier wichtiger Variablen im Einfaktormodell. Das letzte Unterkapitel ist dem Thema der Granularitätsanpassung gewidmet.

Eine Verallgemeinerung des klassischen Einfaktormodells, die die Annahme der Normalverteilung für zentrale Variablen fallenlässt wird in Kapitel 5 („Verallgemeinerung Einfaktormodell und numerische Analyse“) beschrieben. Dieses Thema wird nicht nur aus theoretischer Sicht beleuchtet, es folgt auch eine numerische Analyse, die dem Vergleich der einzelnen Modelle (Standardnormalverteilung, t-Verteilung für zentrale Parameter) dienen soll.

Die Erweiterung von einem zugrundeliegenden Faktor auf mehrere erfolgt in Kapitel 6 („Mehrfaktormodelle“). Der einfachste Fall in diesem Kontext, ein Zweifaktormodell, wird im ersten Unterkapitel besprochen. Weiters werden unterschiedlichste Ansätze zur Miteinbeziehung mehrerer Faktoren in das Modell beleuchtet, auch die Anwendung von Copulas auf Mehrfaktormodelle wird beschrieben.

Die wichtigsten Industriemodelle, in denen Faktormodelle verwendet werden werden in Kapitel 7 („Industriemodelle“) besprochen. Dazu gehören das KMV-Modell ebenso wie CreditMetrics. Ein weiteres Unterkapitel ist dem Vergleich dieser beiden Modelle gewidmet.

Das letzte Kapitel („Schlussfolgerungen“) fasst die wichtigsten Resultate nochmals zusammen.

# Kapitel 2

## Allgemeines zum Kreditrisiko

Kreditrisiko bezeichnet generell das Risiko, dass sich der Wert eines Kreditportfolios aufgrund unerwarteter Veränderungen der Kreditqualität des beziehungsweise der Emittenten ändert, siehe McNeil, Frey und Embrechts [2005]. Der Inhalt dieses Kapitels hält sich weitestgehend an den Aufbau in Albrecht [2005], Ausnahmen davon werden an den jeweiligen Stellen gekennzeichnet.

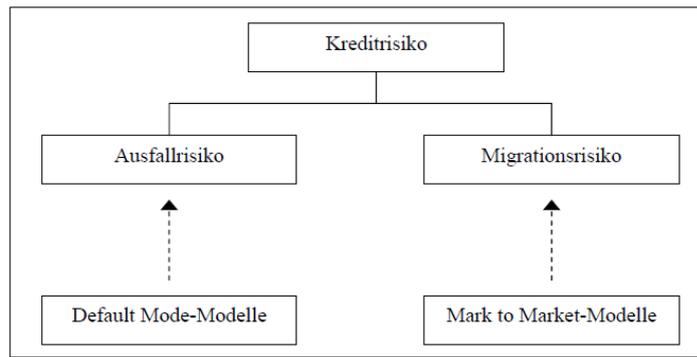
Zunächst ist festzuhalten, dass der Begriff des Kreditrisikos auf zwei unterschiedliche Arten zu verstehen ist.

Das Kreditrisiko im engeren Sinn meint das reine Ausfallrisiko (engl. *Default Risk*) - das Risiko, dass ein Schuldner nicht mehr in der Lage ist, seinen Zahlungsverpflichtungen nachzukommen. In diesem Kontext gibt es daher nur zwei Zustände: Einem Schuldner ist es möglich, finanzielle Forderungen zu erfüllen oder nicht.

Im Kontext des Kreditrisikos im weiteren Sinn spricht man vom Migrationsrisiko (engl. *Credit Migration*), das zusätzlich das Risiko einer Bonitätsverschlechterung beinhaltet. Der Schuldner fällt nicht zur Gänze aus, allerdings erhöht sich seine Ausfallwahrscheinlichkeit. Der Kreditausfall besteht hierbei in der schlechtesten aller möglichen Bonitätsveränderungen.

Aus diesen beiden Möglichkeiten das Kreditrisiko zu betrachten entstanden auch zwei verschiedene Arten, eben jenes zu modellieren. Bei *Default Mode*-Modellen besteht das Kreditrisiko nur im Ausfall eines Kreditnehmers, bei *Mark to Market*-Modellen entsteht das Kreditrisiko durch Marktwertverringerung, die zum Beispiel aus Bonitätsverschlechterungen der Kreditnehmer resultiert. Dieser Zusammenhang wird nochmals in Abbildung 2.1 dargestellt.

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die folgenden Kapitel und damit die Faktormodelle geschaffen. Zu allererst wird das Basismodell des Ausfallrisikos vorgestellt (wir betrachten also die Klasse der *Default Mode*-Modelle), im Zuge dessen werden auch erste Eigenschaften abgeleitet. Um die Wichtigkeit der Korrelation zwischen einzelnen Schuldnern hervorzuheben ist diesem Thema ebenfalls ein eigenes Unterkapitel gewidmet. Darin geht es um die verschiedenen Möglichkeiten, Zusammenhänge zwischen Schuldnern zu beschreiben und deren genaue mathematische Bedeutung. Zu guter Letzt widmet sich der dritte Teil dem Konzept der bedingten Unabhängigkeit, das später im Kontext der Faktormodelle mehrfach Anwendung finden wird.



**Abbildung 2.1:** Überblick Kreditrisiken und Kreditrisikomodelle  
[aus: Albrecht [2005], S.27]

## 2.1 Das Basismodell des Ausfallrisikos

Im Folgenden soll das Basismodell des Ausfallrisikos betrachtet werden. Ziel ist es, die wichtigsten Variablen einzuführen und eine erste allgemeine Formel für Erwartungswert und Varianz des Verlustes anzugeben.

Dem Modell liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zugrunde, wobei  $\Omega$  den Zustandsraum,  $\mathcal{F}$  die dazugehörige Sigma-Algebra und  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnen. Die Elemente von  $\mathcal{F}$  sind die messbaren Elemente des Modells. Außerdem wird angenommen, dass das Ereignis des Ausfalls in der Menge der messbaren Elemente enthalten ist.<sup>1</sup>

Es wird eine Verlustvariable  $L \geq 0$  eingeführt, die die (potentielle) Ausfallhöhe beschreibt und wie folgt modelliert wird:

$$L = EAD \cdot LGD \cdot D \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet *EAD* (engl. *Exposure at Default*) den ausfallbedrohten Betrag. Dieser gibt die Höhe des noch offenen Kreditbetrags zum Zeitpunkt des Ausfalls an.<sup>2</sup> *LGD* (engl. *Loss Given Default*) ist die Verlustquote bei Eintritt des Ausfalls, also der Prozentsatz, den der Schuldner bei Insolvenz nicht mehr an den Kreditgeber zurückzahlen kann.

Im Zusammenhang mit der Verlustquote ist auch die Wiedereinbringungsquote (engl. *Recovery Rate*) *RC*

$$RC = 1 - LGD.$$

einzuführen. Diese ist vorrangig von der bestehenden Besicherung (engl. *Collateral*) der Kredite sowie dem Rang der Bedienung des Gläubigers bei Insolvenz abhängig. Deren Größenordnung wird unter anderem auch durch Ratingagenturen wie *Moody's* ermittelt.

*D* bezeichnet den Ausfallindikator (engl. *Default Indicator, Default Variable*). Dieser kann entweder den Wert 1 oder 0 annehmen, je nachdem, ob ein Ausfall innerhalb einer bestimmten Zeitperiode (meist ein Jahr) eintritt oder nicht:

$$D = \begin{cases} 1, & \text{Ausfall tritt ein} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

<sup>1</sup>aus Bluhm, Overbeck und Wagner [2010].

<sup>2</sup>Details zur Berechnung von *EAD* finden sich in Bluhm, Overbeck und Wagner [2010], Kapitel 1.1.2.

Das heißt insbesondere, dass  $D$  Bernoulli-verteilt ist mit den Parametern 1 und  $p$  (also  $D \sim B(1, p)$ ), wobei  $p = PD = P(D = 1)$  die Ausfallwahrscheinlichkeit (engl. *Default Probability*) bezeichnet. Implizit wird in diesem Modell also angenommen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit über die Zeit hinweg konstant ist. Allerdings kann sie von Schuldner zu Schuldner variieren.

Meist ist es nicht einfach, diese Ausfallwahrscheinlichkeit für jeden Schuldner individuell anzugeben.<sup>3</sup> Grundsätzlich unterscheidet man zwei Arten der Berechnung: Zum einen die Bestimmung aus Marktdaten, zum anderen die Bestimmung mittels (internen oder externen) Ratings.<sup>4</sup> Externe Ratings basieren auf Daten von Ratingagenturen wie zum Beispiel *Moody's*, *Standard&Poor's* oder *Fitch*. Da Unternehmen ihre Kunden meist besser kennen als externe Agenturen und solche Bewertungen häufig nicht schnell genug auf Marktveränderungen reagieren können (sofern sie überhaupt vorliegen), macht es oft Sinn, auf interne Ratings zurückzugreifen.

Immer gilt allerdings: Je besser ein Kreditnehmer geratet ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuldner ausfällt.

Entscheidende Faktoren für die Zahlungsfähigkeit eines Unternehmens sind zum Beispiel die zukünftigen Einnahmen und Geldflüsse, kurz- und langfristige Verbindlichkeiten, die Liquidität, Marktsituation sowie die interne Struktur der Firma. Diverse empirische Studien belegen, dass Ausfallhäufigkeiten exponentiell zu absteigender Kreditwürdigkeit steigen.

Betrachtet man *Mark to Market*-Modelle, so müssen zusätzlich zum ausfallsbedrohten Betrag, der Verlustquote sowie der Ausfallwahrscheinlichkeit noch Migrationswahrscheinlichkeiten erfasst werden.<sup>5</sup>

Geht man davon aus, dass  $EAD$ ,  $LGD$  und  $D$  stochastisch unabhängig sind, so ist die erwartete Ausfallhöhe (engl. *Expected Loss*)  $EL$  durch

$$\begin{aligned} EL &:= E(L) = E(EAD) \cdot E(LGD) \cdot E(D) \\ &= E(EAD) \cdot E(LGD) \cdot p \end{aligned} \quad (2.2)$$

angegeben.

Jede der bis jetzt erwähnten Variablen ist grundsätzlich eine Zufallsgröße. Meist werden aus vereinfachenden Gründen  $EAD$  und  $LGD$  als deterministisch angenommen. Gleichung 2.2 vereinfacht sich dann dementsprechend zu

$$E(L) = EAD \cdot LGD \cdot p.$$

Auch die Standardabweichung des Verlusts lässt sich aufgrund von  $\sigma(D) = \sqrt{p(1-p)}$  leicht berechnen:

$$\sigma(L) = EAD \cdot LGD \cdot \sqrt{p(1-p)}.$$

<sup>3</sup>Verschiedenste Studien belegen, dass eine positive Korrelation zwischen Ausfallrate und Verlustrate besteht (siehe zum Beispiel Eckert [2016], Kapitel 4.1). Weiters kann gezeigt werden, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit bei Steigen der Volatilität einer Firma sowie deren Schuldenquote ebenfalls steigt (siehe Das, Freed, Geng und Kapadia [2006], S.3).

<sup>4</sup>Auch hier wird auf Bluhm, Overbeck und Wagner [2010] verwiesen - in Kapitel 1.1.1.2 wird die Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit aus Ratings behandelt.

<sup>5</sup>Diese Klasse von Kreditrisikomodellen wird in dieser Arbeit nur in Kapitel 7.2 über das Industriemodell CreditMetrics behandelt.

Diese Annahme und auch die Unabhängigkeit werden in weiteren Kapiteln dieser Arbeit zunehmend fallengelassen. Je mehr man sich von diesen Annahmen entfernt, desto weniger geschlossene Formen wie in Gleichung 2.2 gibt es.

Nun wird ein Portfolio bestehend aus  $N$  Krediten betrachtet. Jedem dieser Kredite werden dabei eine Verlustvariable  $L_n$  sowie die dazugehörigen Variablen  $EAD_n, LGD_n, D_n, n = 1, \dots, N$  zugeordnet. Der Portfolioverlust ergibt sich dann aus

$$L = \sum_{n=1}^N L_n = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot D_n.$$

Da  $D_n$  entweder die Werte 0 oder 1 annimmt und per Definition  $0 \leq LGD_n \leq 1$  gilt, so folgt für den Gesamtverlust

$$0 \leq L \leq \sum_{n=1}^N EAD_n.$$

Mithilfe der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{nm}$  zweier Kredite  $n, m$  ( $n \neq m$ ) sowie der Ausfallkorrelation  $\rho_{nm}$  (siehe Kapitel 2.2) können auch Erwartungswert und Varianz beziehungsweise Standardabweichung des Portfolios berechnet werden:

$$E(L) = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot p_n,$$

$$\sigma(L) = \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot EAD_m \cdot LGD_m \cdot \rho_{nm} \cdot \sigma_n \sigma_m}. \quad (2.3)$$

Dabei bezeichne  $\sigma_n := \sigma(D_n)$  die Varianz von  $D_n$  und  $\rho_{nm} := \rho(D_n, D_m)$  die Ausfallkorrelation. Indirekt sind per Definition der Ausfallkorrelation die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_n$  in der Standardabweichung enthalten.

## 2.2 Die Bedeutung der Korrelationen

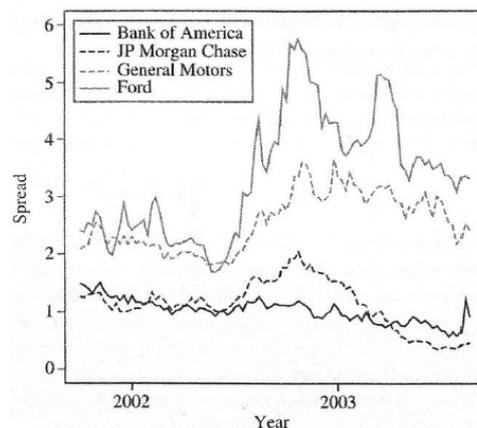
Fällt ein Unternehmen aus, so trifft es meist nicht nur dieses, sondern eine Reihe mit ihm verbundener Firmen. Dies kann über wirtschaftliche Probleme bis hin zur Zahlungsunfähigkeit jener führen. Die eben angesprochene Verbindung zweier oder mehrerer Unternehmen kann direkt erfolgen (zum Beispiel über Großkunden oder wichtige Lieferanten) und auch indirekt. Das ist dann der Fall, wenn mehrere Firmen dieselben Inputfaktoren nützen und daher denselben Preisschocks ausgeliefert sind oder dieselben Märkte bedienen und von deren Nachfrage abhängig sind. Auch der Industriezweig oder der Sitz des Konzerns können eine wichtige Rolle spielen. Der Aufbau dieses Unterkapitels geschieht in Anlehnung an Schönbucher [2001].

Dass Zahlungsausfälle Insolvenzen anderer Firmen bedingen zeigen etliche Beispiele in den USA:

- Ölindustrie: Ausfall von 22 Unternehmen in den Jahren 1982 - 1986

- Eisenbahn-Branche: Jedes Jahr ein Ausfall, 1970 - 1977
- Airlines: 3 Ausfälle 1970 - 1971, 5 Ausfälle 1989 - 1990
- Casinos und Hotelketten: 10 Ausfälle im Jahr 1990
- Einzelhandel: mehr als 20 Ausfälle in den Jahren 1990 - 1992
- Immobilienbranche: 4 Ausfälle im Jahr 1992

Dieses Beispiel, das Schönbucher [2001] entnommen wurde, soll oben angeführte Idee noch einmal mit Zahlen belegen und ließe sich auch auf Europa oder andere Länder ummünzen. Eine Graphik, die die Wichtigkeit von Korrelation bestätigt findet sich in Abbildung 2.2 wieder. Sie zeigt, wie sich einzelne wichtige Vertreter einer Branche meist synchron mit jener entwickeln.



**Abbildung 2.2:** Veränderung von yield spreads zweier Firmen im Vergleich mit dem jeweiligen Industriesektor  
[aus: Lando [2004], S.216]

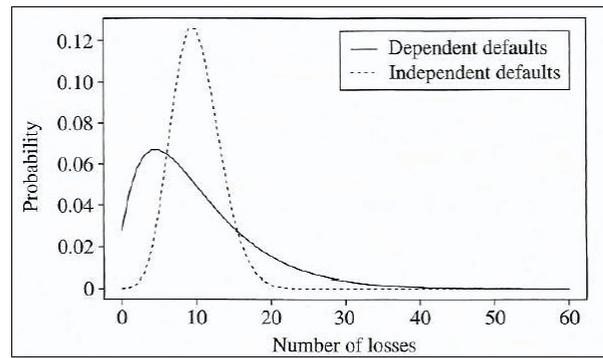
Abbildung 2.3 unterstreicht abermals die Notwendigkeit, Abhängigkeiten zwischen einzelnen Schuldern zu betrachten. Dabei wird die Verlustverteilung zweier homogener Portfolios, jeweils mit der gleichen Ausfallwahrscheinlichkeit, untersucht. Beim ersten Portfolio wird die Unabhängigkeit der Ausfälle angenommen, beim zweiten wird von einer Ausfallkorrelation von 0,5% ausgegangen. Es zeigt sich, dass im Falle einer Abhängigkeit ein schwererer rechter Tail vorliegt.

Der Einfachheit halber seien nun zwei Schuldner A und B gegeben. Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten werden mit  $p_A$  und  $p_B$  bezeichnet. Die alleinige Kenntnis dieser zwei Kenngrößen reicht nicht aus, um die **gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit**  $p_{AB}$  (das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass beide Schuldner ausfallen)

$$p_{AB} = P(D_A = 1, D_B = 1)$$

oder die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{A|B}$

$$p_{A|B} = P(D_A = 1 | D_B = 1)$$



**Abbildung 2.3:** Vergleich der Verlustverteilung zweier Portfolios  
[aus: McNeil, Frey und Embrechts [2005], S.330]

beziehungsweise  $p_{B|A}$  (das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuldner ausfällt, gegeben, dass der andere schon ausgefallen ist) zu berechnen. Es ist mindestens eine dieser Größen notwendig, um die andere zu berechnen. Der Zusammenhang ist durch

$$p_{A|B} = \frac{p_{AB}}{p_B}, \quad p_{B|A} = \frac{p_{AB}}{p_A}$$

gegeben.

Spricht man über Korrelation, so betrachtet man meist zunächst die **Ausfallkorrelation** (den linearen Korrelationskoeffizienten), die durch

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= \frac{\text{Cov}(A, B)}{\sqrt{p_A(1-p_A)p_B(1-p_B)}} \\ &= \frac{p_{AB} - p_A p_B}{\sqrt{p_A(1-p_A)p_B(1-p_B)}} \end{aligned}$$

gegeben ist. Der typische Wertebereich liegt zwischen 0 und 0.05.

Dieser ist allerdings zur Messung der Abhängigkeiten von Ausfällen in einem Portfolio nicht gut geeignet. Wesentlich aussagekräftiger ist die gesamte Verteilung der Returns. Viele wesentliche Eigenschaften einer solchen Verteilung können durch bekannte Kennzahlen (siehe Kapitel 3.1) beschrieben werden.

Für den linearen Korrelationskoeffizienten gibt es drei Fälle:

- $\rho = 0$ : Dieser Fall wird perfekte Diversifikation genannt. Hier gibt es keinen Zusammenhang zwischen den beiden Schuldnern. Die Idee der Diversifikation besteht darin, dass das Risiko geringer wird, je unterschiedlicher die Schuldner aufgestellt sind.
- $\rho > 0$ : In diesem Fall bringt der Ausfall der einen Partei ein erhöhtes Risiko des Ausfalls der zweiten Partei mit sich, man spricht von Konzentrationsrisiko (engl. *concentration risk*).
- $\rho < 0$ : Dies ist das Gegenteil zum Fall  $\rho > 0$ .

Es ist auch möglich, die gemeinsame und die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit über den linearen Korrelationskoeffizienten zu definieren:

$$\begin{aligned} p_{AB} &= p_A p_B + \rho_{AB} \sqrt{p_A(1-p_A)p_B(1-p_B)} \\ p_{A|B} &= p_A + \rho_{AB} \sqrt{\frac{p_A}{p_B}(1-p_A)(1-p_B)}. \end{aligned}$$

Ein Beispiel soll den größtenmäßigen Zusammenhang zwischen den eben eingeführten Kenngrößen veranschaulichen.

**Beispiel 1** Seien  $p_A = p_B := p = 1\%$  und  $\rho_{AB} := \rho = 10\%$ . Der lineare Korrelationskoeffizient ist also im Vergleich mit den Ausfallwahrscheinlichkeiten sehr groß und dominiert in weiterer Folge auch die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit sowie die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p_{AB} = 0.01 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.01 \cdot 0.99 = 0.00109 \approx p^2 + \rho p \approx \rho p$$

$$p_{A|B} = p_{B|A} = 0.01 + 0.1 \cdot 0.99 = 0.109 \approx \rho.$$

Als weiteres Korrelationsmaß existiert die sogenannte **Assetkorrelation**, die im speziellen Fall des Ein-Faktor-Modells in Gleichung 4.2 eingeführt und deren Beziehung zur Ausfallkorrelation dort auch näher erläutert werden wird.

Im Zusammenhang mit Copulas, die in Kapitel 3.2 eingeführt werden, gibt es noch mehr Abhängigkeitsmaße, wie zum Beispiel die Rangkorrelation und die Tail-Abhängigkeit. Diese seien hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

## 2.3 Das Konzept der bedingten Unabhängigkeit

Das Konzept der bedingten Unabhängigkeit ist von zentraler Bedeutung bei verschiedensten Kreditrisikomodellen und -analysen. Der Aufbau dieses Kapitels wurde Albrecht [2005] entnommen.

Zur Bestimmung von  $\sigma(L)$  in Gleichung 2.3 müssen bereits  $n(n-1)/2$  Ausfallkorrelationen berechnet werden. Dies gestaltet sich bei einer hohen Anzahl an Kreditnehmern  $n$  in der Praxis oft schwierig. Daher greift man auf das Konzept der bedingten Unabhängigkeit zurück und bedient sich dem Vorteil der Dimensionsreduktion, da nicht mehr alle Ausfallkorrelationen berechnet und geschätzt werden müssen, sondern nur mehr die paarweisen Korrelationen zwischen den einzelnen Faktoren.

Dabei wird angenommen, dass Zufallszahlen  $X_1, \dots, X_M$ , die im Vektor  $X$  zusammengefasst werden, die Defaultindikatoren  $D_n$  beeinflussen. Dies können zum Beispiel Ratingeinflüsse oder konjunkturelle Einflüsse sein.

Damit ergibt sich als bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit für den  $n$ -ten Schuldner

$$p_n(x) = P(D_n = 1 | X = x),$$

sowie insgesamt für den Portfolioverlust

$$E(L|X = x) = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot p_n(x), \quad (2.4)$$

$$Var(L|X = x) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot EAD_m \cdot LGD_m \cdot Cov(D_n, D_m | X = x) \quad (2.5)$$

Bei der Bedingung auf eine Realisation  $X = x$  wird für alle Einflussfaktoren  $X_1, \dots, X_M$  eine bestimmte Ausprägung fixiert, also zum Beispiel ein bestimmtes Rating oder ein Konjunkturstatus.

Nun unterscheidet man zwischen sogenannten systematischen und idiosynkratischen (nicht-systematischen) Einflüssen. Erstere sind unabhängig vom jeweiligen Kredit und wirken auf alle Kredite gleichermaßen. Unter idiosynkratischen Einflüssen versteht man jene, die auf individuelle Kredite einwirken. Sind nun im Zufallsvektor  $X$  alle systematischen Einflüsse enthalten, so bleiben für den einzelnen Kredit nur noch dessen kreditspezifischen Einflüsse übrig. Da sich diese nur auf einen einzelnen Kredit beziehen kann man hier von einer Unabhängigkeit untereinander ausgehen. Dies formuliert den Begriff der bedingten Unabhängigkeit:

$D_n|X = x$  und  $D_m|X = x$  sind stochastisch unabhängig für  $n \neq m$

Nun gilt also, dass  $Cov(D_n, D_m|X = x) = 0$  für  $n \neq m$  und daher aus Gleichung 2.5

$$Var(L|X = x) = \sum_{n=1}^N EAD_n^2 \cdot LGD_n^2 \cdot Var(D_n|X = x) \quad (2.6)$$

$$= \sum_{n=1}^N EAD_n^2 \cdot LGD_n^2 \cdot p_n(x) (1 - p_n(x)) \quad (2.7)$$

Das Konzept der bedingten Unabhängigkeit spielt eine wichtige Rolle in den Ein- und Mehrfaktormodellen und wird im Laufe der nächsten Kapitel immer wieder verwendet.

# Kapitel 3

## Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen, auf denen diese Arbeit aufbaut, vorgestellt. Zum einen bedeutet dies die Definition einiger Risikomaße, zum anderen folgt eine kurze Einführung in die Theorie der Copulas, da diese in Kapitel 6.2.2 in Zusammenhang mit den Mehrfaktormodellen verwendet werden.

### 3.1 Risikomaße

Von zentraler Bedeutung im Kreditrisikomanagement ist die Bestimmung der Verlustfunktion, der dazugehörigen Verteilungs- und Dichtefunktion, sowie deren Kennzahlen.

Der Vollständigkeit halber sollen nun die wichtigsten Risikokennzahlen zu einer gegebenen Verlustfunktion  $L$  (mit der dazugehörigen Verteilungsfunktion  $F_L$ ) vorgestellt werden.

- **Erwarteter Verlust  $EL$ :** Unter gegebenem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  ist der erwartete Verlust (engl. *Expected Loss*)  $EL$  definiert durch

$$EL := E_{\mathbb{P}}(L).$$

Dieser wurde im Basismodell des Kreditrisikos schon in Gleichung 2.2 behandelt.

- **Unerwarteter Verlust  $UL$ :** Der unerwartete Verlust (engl. *Unexpected Loss*)  $UL$  ist als Maßzahl zur Bewertung der Variabilität der zufälligen Verluste gegeben durch

$$UL := \sqrt{\text{Var}(L)}.$$

- **Value at Risk  $VaR$ :** Sei  $\alpha \in (0, 1)$  ein vorgegebenes Konfidenzniveau.  $VaR(L)$  ist die kleinste Zahl  $l$ , sodass  $P(L > l) \leq 1 - \alpha$  gilt.

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha}(L) &= \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der Value at Risk gibt also denjenigen Verlust an, der mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  nicht überschritten wird. In der Praxis wird häufig  $\alpha = 0,999$  gesetzt. Ein Verlust größer als der Value at Risk gilt daher als extrem unwahrscheinliches und seltenes Verlustereignis.

Für eine Verlustfunktion  $L$  und deren Verteilungsfunktion  $F_L$  gilt aufgrund der Definition des Value at Risk

$$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(F_L), \quad (3.2)$$

wobei  $q_\alpha(F) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$  das  $\alpha$ -Quantil von  $F$  bezeichnet.

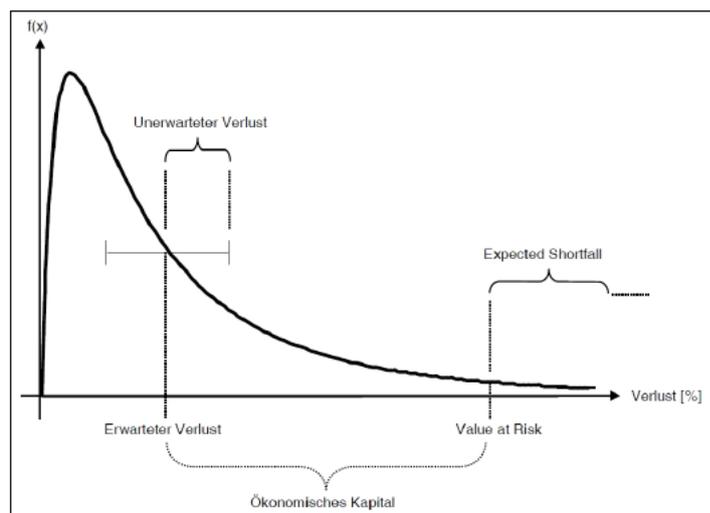
- **Expected Shortfall ES:** Der Value at Risk kann keine Auskunft darüber geben, wie hoch der Verlust sein kann, wenn  $L \geq VaR_\alpha(L)$ . Daher betrachtet man ein weiteres Risikomaß, den Conditional Value at Risk  $CVaR$  oder Expected Shortfall  $ES$ :

$$CVaR(L) := ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR(L)).$$

- **Ökonomisches Kapital  $EC$ :** Das ökonomische Kapital (engl. Economic Capital)  $EC$  wird als Differenz des Value at Risk und des erwarteten Verlusts definiert und ist wesentlich vom gewählten Konfidenzniveau  $\alpha$  des Value at Risk abhängig:

$$EC_\alpha = VaR_\alpha - EL$$

Abbildung 3.1 stellt die typische Form einer Dichtefunktion im Zusammenhang mit den oben vorgestellten Kennzahlen dar.



**Abbildung 3.1:** Portfoliodichte mit Risikokennzahlen  
[aus: Bluhm, Overbeck und Wagner [2010], S.28]

Die Rechtsschiefe der Dichtefunktion ist dadurch begründbar, dass Kreditausfälle relativ seltene Ereignisse sind; wenn ein Verlust eintritt, dann meist in geringer Höhe. Als Folge davon

wird in den meisten Jahren der erwartete Verlust eher unterschritten, in einigen wenigen Jahren aber wieder deutlich überschritten.

- **Tail-Abhängigkeit:** Die Tail-Abhängigkeit (engl. *tail dependence*) stellt ein alternatives Maß zur Messung der Abhängigkeit, genauer zur Messung von extremer Abhängigkeit, der Abhängigkeit in den Tails, dar.<sup>6</sup> Die Tail-Abhängigkeit ist für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit Verteilungsfunktionen  $F$  beziehungsweise  $G$  durch

$$\begin{aligned}\tau^L &= \lim_{q \rightarrow 0} P\left(X \leq F^{-1}(q) | Y \leq G^{-1}(q)\right) \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{P\left(X \leq F^{-1}(q), Y \leq G^{-1}(q)\right)}{q} \\ \tau^U &= \lim_{q \rightarrow 1} P\left(X > F^{-1}(q) | Y > G^{-1}(q)\right) \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{P\left(X > F^{-1}(q), Y > G^{-1}(q)\right)}{1 - q}\end{aligned}\tag{3.3}$$

gegeben. Die zweite Gleichung ergibt sich aus

$$P\left(Y \leq G^{-1}(q)\right) = G\left(G^{-1}(q)\right) = q\tag{3.4}$$

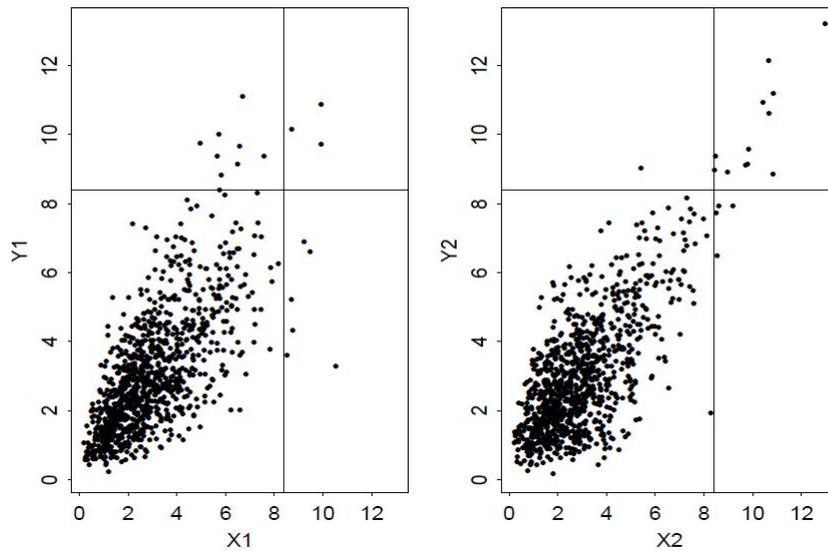
Dabei bezeichnet  $\tau^L$  die untere (engl. *lower tail dependence*) und  $\tau^U$  die obere Tail-Abhängigkeit (engl. *upper tail dependence*). Die untere Tail-Abhängigkeit misst dabei die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Variable unter ihrem  $q$ -Quantil liegt (für  $q \rightarrow 0$ ), gegeben, dass auch die zweite Variable unter ihrem  $q$ -Quantil liegt. Die obere Tail-Abhängigkeit ist analog definiert.

Je größer  $\tau^L$  beziehungsweise  $\tau^U$  sind, desto größer ist die Abhängigkeit im unteren beziehungsweise oberen Tail.

## 3.2 Copulas

In diesem Unterabschnitt wird Grundlegendes zur Theorie von Copulas behandelt: Es werden die Definition einer Copula sowie der Satz von Sklar vorgestellt, sowie einige Beispiele für Copulas präsentiert.

Als Motivation zur Einführung von Copulas dienen Fälle wie in Abbildung 3.2. Dargestellt sind jeweils 1000 bivariate Realisationen zweier verschiedener Modelle für den Vektor  $(X, Y)$ . In beiden Modellen liegen dieselbe Randverteilung für  $X$  und  $Y$  sowie der gleiche lineare Korrelationskoeffizient (siehe Kapitel 2.2) vor. Beide Modelle weisen aber offensichtlich eine unterschiedliche Abhängigkeitsstruktur auf. Daher genügt es nicht, nur diese zwei Maße (die jeweiligen Randverteilungen sowie den linearen Korrelationskoeffizienten) zu betrachten. Durch



**Abbildung 3.2:** Motivation Copulas  
[aus: Embrechts, McNeil und Straumann [1998], S.2]

Copulas können diese zusätzlichen Abhängigkeitsstrukturen nun berücksichtigt werden.<sup>7</sup>

In der Theorie der Faktormodelle wird sehr häufig die Annahme der Normalverteilung für die systematischen und idiosynkratischen Risiken getroffen. Wird nicht von dieser Annahme ausgegangen und ändert man die jeweiligen Verteilungen, so bleibt die lineare Korrelation zwischen den Bonitätsindikatoren gleich, aber es zieht Veränderungen der Ausfallwahrscheinlichkeit und infolgedessen der Verlustverteilung nach sich, siehe Schönbucher [2001]. Dies hat unter anderem Auswirkungen auf die Tails der Verlustverteilung und kann in vielen Fällen die gegebene Situation besser widerspiegeln, insbesondere da bei Annahme der Normalverteilung eine Tail-Abhängigkeit von 0 vorliegt und dies nicht immer erwünscht ist.

Sei  $F$  die Verteilungsfunktion eines  $d$ -dimensionalen Zufallsvektors  $X = (X_1, \dots, X_d)$ , das heißt es gelte

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_d) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$$

Sind die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_d$  gegeben, so wird die Abhängigkeit zwischen den Variablen vollständig durch ihre gemeinsame Verteilungsfunktion beschrieben.

Die Verteilungsfunktion von  $X_k$  wird  $k$ -te Randverteilung  $F_k$  von  $F$  genannt und über

$$F_k(x_k) = P(X_k \leq x_k) = F(\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty)$$

berechnet.

<sup>6</sup>Weitere Abhängigkeitsmaße im Zusammenhang mit Copulas und einige Irrtümer in diesem Kontext können in Hahne und Tischer [2011] nachgelesen werden.

<sup>7</sup>Das linke Bild in Abbildung 3.2 entspricht Gamma(3,1)-verteilten Rändern und einer Gauß-Copula mit 70% Korrelation, das rechte Gamma(3,1)-verteilten Rändern und einer Gumbel-Copula mit 70% Korrelation (die genauen Definitionen folgen), siehe Embrechts, McNeil und Straumann [1998].

Eine  $d$ -dimensionale Copula ist eine multivariate,  $d$ -dimensionale Verteilungsfunktion  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , deren eindimensionale Randverteilungen gleichverteilt sind im Intervall  $[0, 1]$ .

Äquivalent formuliert bedeutet dies: Eine Copula  $C$  ist eine Funktion  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  mit den folgenden drei Eigenschaften, siehe Dragoti-Cela [2009]:

1.  $C(u_1, \dots, u_d)$  ist monoton steigend in jeder Variablen  $u_k, k = 1, \dots, d$ .
2.  $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k \forall k = 1, \dots, d, u_k \in [0, 1]$
3. Für alle  $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$  mit  $a_k \leq b_k \forall k = 1, \dots, d$  gilt folgende Ungleichung („Rechtecksungleichung“):

$$\sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_d=1}^2 (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_d} C(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{dk_d}) \geq 0$$

wobei  $u_{j1} = a_j$  und  $u_{j2} = b_j$ .

Diese Summe kann interpretiert werden als

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq X_d \leq b_d) > 0,$$

siehe Embrechts, McNeil und Straumann [1998].

Von zentraler Bedeutung in der Copula-Theorie ist der Satz von Sklar (1959).

**Satz 3.2.1 (Satz von Sklar)** Sei  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  eine Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert eine Copula  $C$ , sodass für alle  $(x_1, \dots, x_d) \in [-\infty, \infty]$  gilt:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (3.5)$$

Wenn  $F_1, \dots, F_d$  stetig sind, dann ist  $C$  eindeutig.

Umgekehrt wird für jede Copula  $C$  und jede Wahl von Verteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$  eine multivariate Verteilungsfunktion  $F$  mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$  durch obige Gleichung bestimmt.

**Beweis** Der Beweis kann zum Beispiel in McNeil, Frey und Embrechts [2005], Satz 5.3, nachgelesen werden.  $\square$

Die Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen wird also vollständig durch die Copula  $C$  wiedergegeben. Sind die eindimensionalen Randverteilungen gegeben, so kann durch eine Copula eine beliebige Abhängigkeitsstruktur dargestellt werden.

Unmittelbar aus dem Satz von Sklar folgt mit  $u_i = F_i(x_i), i = 1, \dots, d$ , dass bei gegebener Verteilungsfunktion  $F$  mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$  für eine Copula  $C$

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (3.6)$$

gelten muss.

Für die Praxis ist die zweite Eigenschaft im Satz von Sklar von Nutzen. Es genügt nach dem Satz von Sklar Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  der zugrundeliegenden Risikofaktoren festzulegen. Dann liefert jede Copula  $C$  ein gemeinsames Modell, für das  $F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$  gilt.  $C$  wird dabei so gewählt, dass vorhandene Informationen über Abhängigkeiten miteinbezogen werden, siehe Neslehova [2006].

Generell unterscheidet man drei Arten von Copulas, siehe Eckert [2016] und Engel [2007]:

- **Fundamentale Copulas:** Diese repräsentieren wichtige Abhängigkeitsstrukturen. Bekannte Beispiele sind die

- Unabhängigkeitscopula, die durch

$$C(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i$$

gegeben ist.

- Komonotoniecopula. Diese wird im Zweidimensionalen über

$$C_o(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$$

angegeben.

- Kontramotoniecopula, welche im Zweidimensionalen via

$$C_u(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$$

berechnet wird.

- **Implizite Copulas:** Diese werden durch Anwendung des Satzes von Sklar mittels Gleichung 3.6 aus gegebenen Verteilungsfunktionen abgeleitet und besitzen daher nicht notwendigerweise eine geschlossene Form. Dazu zählen unter anderem die

- Gauß-Copula (Normalcopula):

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

Dabei bezeichnet  $\Phi$  die multivariate Normalverteilungsfunktion.

- t-Copula:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \mathbf{t}_\nu(\mathbf{t}_\nu^{-1}(u_1), \dots, \mathbf{t}_\nu^{-1}(u_d))$$

Dabei bezeichnen  $\mathbf{t}$  die multivariate t-Verteilungsfunktion und  $\nu$  die Anzahl der Freiheitsgrade.

Beide Beispiele gehören der Klasse der elliptischen Copulas an.

- **Explizite Copulas:** Diese können in einfachen expliziten Ausdrücken angegeben werden. Beispiele hierfür sind unter anderem die

- Bivariate Gumbel-Copula, die durch

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp \left[ - \left( (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right)^{1/\theta} \right], 1 < \theta < \infty$$

gegeben ist sowie die

- Bivariate Clayton-Copula

$$C_\theta(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0 < \theta < \infty$$

Beide sind Vertreter der Familie der archimedischen Copulas.

In der Anwendung von Copulas auf Mehrfaktormodelle wird der Begriff der regulären Variation gebraucht, weshalb er an dieser Stelle eingeführt werden soll.

Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion  $h$  auf  $(0, \infty)$  heißt von regulärer Variation mit Index  $\alpha \in \mathbb{R}$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha \quad \forall t > 0$$

gilt.  $f$  heißt von langsamer Variation, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1 \quad \forall t > 0$$

gilt, das heißt wenn  $\alpha = 0$ .

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$ . Gilt nun für den Tail

$$\bar{F}(x) = L(x) \cdot x^{-\alpha}, \alpha > 0$$

wobei  $L(x)$  eine langsam variierende Funktion ist, so nennt man  $F$  eine Verteilung mit einem Tail von regulärer Variation mit Index  $\alpha > 0$ .



# Kapitel 4

## Einfaktormodell

Faktormodelle, manchmal auch als *conditionally independent credit risk models* bezeichnet, stellen eine wichtige Gruppe innerhalb der Kreditrisikomodelle dar. Sie gehören zu den wenigen Modellen, die Korrelationen realistisch abbilden können, dabei aber gleichzeitig eine analytische Handhabbarkeit bewahren. Daher bilden sie auch den Grundstein für viele Modelle in der Praxis.

Dieses Kapitel beleuchtet den einfachsten Fall innerhalb der Klasse der Faktormodelle: Das Einfaktormodell. Im ersten Unterkapitel geht es daher zunächst um die Idee hinter den Faktormodellen und eine genaue mathematische Spezifikation des Einfaktormodells. Weiters werden ein bekannter Spezialfall, das Merton-Einfaktormodell, behandelt, sowie Ergebnisse bei Approximation durch ein unendlich großes Portfolio präsentiert. Eine besondere Bedeutung hat das Einfaktormodell auch in der Berechnung der Mindesteigenkapitalanforderungen für Banken im Kontext von Basel II - dieses Thema wird im zweiten Unterkapitel aufgegriffen. Diverse Erweiterungen des Basismodells werden im dritten Teil präsentiert. Approximative analytische Formeln sollen das Kapitel abrunden.

### 4.1 Modelldefinition und Spezialfälle

Um die Grundidee hinter den Faktormodellen zu verstehen blicken wir zunächst auf den Fall, dass nur ein Faktor den Kredit eines Schuldners beeinflusst. Dieses Unterkapitel hält sich weitestgehend an die Ausführungen in Albrecht [2005], sowie in Schönbucher [2001].

#### 4.1.1 Grundlegende Modelldefinition

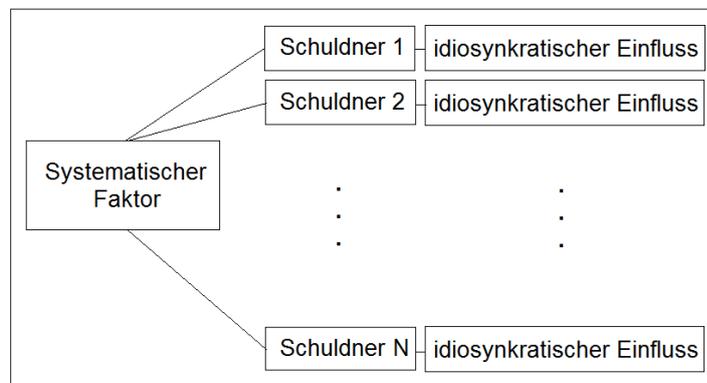
Im Folgenden wird immer vom Basismodell des Ausfallrisikos, wie es in Kapitel 2.1 beschrieben wird, ausgegangen. Ziel dieses Unterabschnitts ist es, die Verlustverteilung im Einfaktormodell herzuleiten.

Innerhalb eines Portfolios aus  $N$  Krediten mit  $N$  zugehörigen (unterschiedlichen) Schuldnern wird jedem dieser Schuldner ein Bonitätsindikator  $V_n, n = 1, \dots, N$  zugeordnet. Gilt nun für diesen, dass

$$V_n = \sqrt{\rho_n}Y + \sqrt{1 - \rho_n}\epsilon_n, \quad (4.1)$$

wobei  $Y, \epsilon_n \sim N(0, 1)$  und  $Y$  und  $\epsilon_n$  sowie  $\epsilon_n$  und  $\epsilon_m$  stochastisch unabhängig für  $n \neq m$ , so spricht man von einem Einfaktormodell.<sup>8</sup> Die Bedeutung der  $\rho_n$  wird wenig später in Gleichung 4.2 verdeutlicht.

Es gibt also genau einen Faktor, den Faktor  $Y$ , der für alle Bonitätsindikatoren gleich ist. Man spricht von einem gemeinsamen oder systematischen Faktor. Dieser könnte zum Beispiel die konjunkturelle Lage widerspiegeln. Andererseits existiert ein unternehmensspezifischer oder idiosynkratischer Faktor, der sich nur auf das jeweilige Unternehmen beziehungsweise den jeweiligen Schuldner bezieht. Abbildung 4.1 veranschaulicht diese Idee noch einmal graphisch. Der Parameter  $\sqrt{\rho_n}$  misst den Einfluss des systematischen Faktors  $Y$  auf den Bonitätsindikator  $V_n$ .



**Abbildung 4.1:** Grundidee Einfaktormodell

Bildet man in Gleichung 4.1 Varianzen und nützt die Unabhängigkeit sowie die Standardnormalverteilung von  $Y$  und  $\epsilon_n$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_n) &= \rho_n \text{Var}(Y) + (1 - \rho_n) \text{Var}(\epsilon_n) \\ &= \underbrace{\rho_n}_{\text{systematisch}} + \underbrace{(1 - \rho_n)}_{\text{spezifisch/idiosynkratisch}} = 1 \end{aligned}$$

Eine solche Varianzzerlegung findet sich auch in komplizierteren Faktormodellen wieder. Sie beschreibt den Anteil einer erklärenden Variablen (in diesem Fall  $Y$ ) und jenen Teil, der nicht durch diese Variable beschrieben werden kann.

Allgemein gilt, dass

$$\text{Corr}(V_n, V_m) = \sqrt{\rho_n} \sqrt{\rho_m}, \quad n \neq m \quad (4.2)$$

Da es sich im ursprünglichen Merton-Modell bei den Bonitätsindikatoren um Asset-Werte beziehungsweise deren Log-Renditen handelt spricht man hier häufig von Assetkorrelation. Diese fließt in die Berechnung der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten und daher in die Ausfallkorrelation mit ein, siehe Henking, Bluhm und Fahrmeir [2006], Kapitel 6.1.2. Wichtig ist

<sup>8</sup>Die Verallgemeinerung des Modells für den Fall einer beliebigen Verteilung an Stelle der Normalverteilung erfolgt im Zuge des Projekts und wird in Kapitel 5 näher besprochen.

zu bemerken, dass sich die Assetkorrelation auf die Bonitätsindikatoren bezieht, die Ausfallkorrelation hingegen auf die Ausfallvariablen  $D_1, \dots, D_N$ , wobei  $D_n$  den Wert 1 annimmt, wenn Schuldner  $n$  ausfällt, sonst 0.

Häufig wird in der Literatur davon ausgegangen, dass alle Schuldner dieselbe Korrelationsvariable  $\rho$  besitzen, das heißt  $\rho_n = \rho \forall n = 1, \dots, N$ . In diesem Fall sind die Bonitätsindikatoren von zwei Schuldnern  $n$  und  $m$  korreliert mit linearem Korrelationskoeffizienten  $\rho$  (Einsetzen von  $\rho_n = \rho_m = \rho$  in Gleichung 4.2).<sup>9</sup>

Der zentrale Punkt ist, dass bedingt auf eine Realisation des systematischen Faktors  $Y$  der Bonitätsindikator und die Ausfälle unabhängig sind.

Im Folgenden bezeichne  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion und  $\varphi(x)$  die Dichtefunktion einer Standardnormalverteilung.

Ein Ausfall, der durch den Ausfallindikator  $D$  beschrieben wird, tritt genau dann ein, wenn der Bonitätsindikator eine vorgegebene Schranke  $K_n$  unterschreitet (diese könnte zum Beispiel die Schuldenhöhe des Kreditnehmers darstellen):

$$D_n = 1 \Leftrightarrow V_n \leq K_n. \quad (4.3)$$

Da die gewichtete Summe normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist und damit per Definition auch  $V_n$  (wegen  $Y, \epsilon_n \sim N(0, 1)$  ist  $V_n$  sogar standardnormalverteilt) kann die Schranke  $K_n$  explizit durch die Ausfallwahrscheinlichkeit angegeben werden:

$$p_n = P(V_n \leq K_n) = \Phi(K_n) \Rightarrow K_n = \Phi^{-1}(p_n). \quad (4.4)$$

Umgekehrt kann auch die Ausfallschranke  $K_n$  vorgegeben (zum Beispiel im Zuge einer Bilanzanalyse) und daraus die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_n$  berechnet werden.

In weiterer Folge wird ein uniformes oder homogenes Portfolio betrachtet. Von einem solchen spricht man im Fall  $p_n = p, \rho_n = \rho, \forall n = 1, \dots, N$ . Man geht also von einer über alle Schuldner gleichen Ausfallwahrscheinlichkeit sowie Assetkorrelation aus (und damit, wegen Gleichung 4.4, auch von einer für alle Schuldner gleichen Ausfallschranke  $K_n = K$ ).

Wie schon im vorhergehenden Kapitel bezeichne  $D := D_1 + \dots + D_N$  die Anzahl an Ausfällen in der betrachteten Zeitperiode. Nimmt man an, dass die Defaultvariablen  $D_n$  unabhängig sind, so ist  $D$  als Summe unabhängiger Bernoulli-Variablen binomialverteilt mit den Parametern  $N$  und  $p$  (das heißt  $D \sim B(N, p)$ ).<sup>10</sup> Daher gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Gesamtanzahl von  $N$  genau  $n$  Kredite ausfallen

$$P(D = n) = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}. \quad (4.5)$$

Daraus ergibt sich durch Summation die Wahrscheinlichkeit, dass bis zu  $n$  Schuldner ausfallen:

$$P(D \leq n) = \sum_{i=0}^n \binom{N}{i} p^i (1 - p)^{N-i}$$

<sup>9</sup>Der typische Wertebereich für  $\rho$  liegt zwischen 10 und 50%.

<sup>10</sup>Da die Korrelation von zwei Bonitätsindikatoren wegen Gleichung 4.2 im Allgemeinen nicht Null ist, ist dies eine sehr einschränkende Bedingung.

Ziel ist es nun, die Verteilungsfunktion für die Ausfälle herzuleiten. Im Folgenden soll angenommen werden, dass alle Schuldner den selben Ausfallbetrag  $L_n = 1$  haben. In diesem Fall kann die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $n$  Schuldner ausfallen als Durchschnitt aller bedingten Wahrscheinlichkeiten, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\varphi(y)$  berechnet werden:

$$P(D = n) = \int_{-\infty}^{\infty} P(D = n|Y = y)\varphi(y)dy, \quad (4.6)$$

wobei die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(D = n|Y = y)$  gemäß Gleichung 4.5 bestimmt werden kann:

$$P(D = n|Y = y) = \binom{N}{n} (p(y))^n (1 - p(y))^{N-n}.$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p(y)$  bezeichnet dabei die (generell für jeden Schuldner individuelle) Wahrscheinlichkeit, dass der Bonitätsindikator  $V_n$  unter die gegebene Schranke  $K$  fällt, gegeben, dass  $Y$  in  $y$  realisiert wird:

$$\begin{aligned} p(y) &= P(V_n < K|Y = y) \\ &= P\left(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\epsilon_n < K|Y = y\right) \\ &= P\left(\epsilon_n < \frac{K - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}|Y = y\right) \\ &= \Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Man beachte, dass über die Beziehung  $K = \Phi^{-1}(p)$  die unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  in die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p(y)$  mit einfließt. Weiters kann man erkennen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten im Portfolio geringer sind, je „besser“ es um den Faktor  $y$  bestellt ist (das heißt je weiter rechts er sich in der Gaußschen Glockenkurve befindet) und umgekehrt.

Dies kann nun in Gleichung 4.6 eingesetzt werden:

$$P(D = n) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{n} \left(\Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^n \left(1 - \Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-n} \varphi(y)dy$$

Summation ergibt die Verteilungsfunktion der Ausfälle - die Wahrscheinlichkeit, dass bis zu  $n$  Schuldner ausfallen:

$$P(D \leq n) = \sum_{i=0}^n \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{i} \left(\Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^i \left(1 - \Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-i} \varphi(y)dy \quad (4.8)$$

Diese Form der Verlustverteilung ist sehr gut zur Implementation geeignet, da gängige Softwareprodukte numerische Integration beherrschen und daher die Verlustverteilung direkt, ohne Simulation, berechnet werden kann.

Die wichtigste Eigenschaft für das Risikomanagement besteht in der erhöhten Masse der Verlustfunktion in den Rändern (siehe Kapitel 5.2).

### 4.1.2 Das Merton-Einfaktormodell

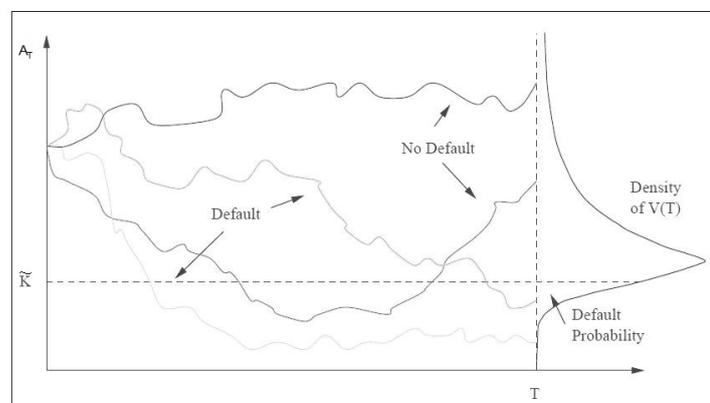
Einen Spezialfall des Einfaktormodells stellt das Merton-Einfaktormodell dar. Dieses gehört zur Gruppe der Unternehmenswertmodelle (engl. *structural models*) und modelliert daher im Vergleich zu den intensitätsbasierten Modellen (engl. *reduced form models*) explizit die Entwicklung des Unternehmenswertes. Die Beschreibung des Merton-Einfaktormodells in diesem Unterkapitel folgt jener in Albrecht [2005].

Es wird der besseren Lesbarkeit halber nur ein Schuldner betrachtet, es sei aber an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das Vorgehen für alle Schuldner  $n = 1, \dots, N$  dasselbe ist.

Der Bonitätsindikator  $V$  in Gleichung 4.1 wird im Rahmen dieses Modells näher definiert. Von zentraler Bedeutung ist aber zunächst die Modellierung der Assetwerte  $A_t$  zum Zeitpunkt  $t$ . Diese hängen in einfacher Weise mit dem Börsenwert des Unternehmens (dem Marktwert des Eigenkapitals)  $E_t$  zusammen. Dieser ergibt sich zum Zeitpunkt  $t$  als Differenz der Marktwerte der Aktiva  $A_t$  (engl. *Assets*) und der Passiva  $L_t$  (engl. *Liabilities*);

$$E_t = A_t - L_t. \quad (4.9)$$

Es wird angenommen, dass ein Schuldner nur am Ende der betrachteten Zeitperiode  $[0, T]$  ausfallen kann. Dies wird in Abbildung 4.2 veranschaulicht.



**Abbildung 4.2:** Ausfall im Merton-Modell  
[aus: Giesecke [2004], S.5]

Weiters findet ein Ausfall genau dann statt, wenn der Wert der Aktiva  $A_T$  zum Zeitpunkt  $T$  eine kritische Grenze  $\tilde{K}$  unterschreitet. Diese ergibt sich, da man hinsichtlich der Struktur der Verpflichtungen von einem Zerobond mit Rückzahlungsbetrag  $\tilde{K}$  ausgeht und die Passiva daher (bei konstantem Zinssatz  $r$ ) durch

$$L_t = \tilde{K} \cdot \exp(-r(T - t))$$

ausgedrückt werden können. Gilt nun zum Zeitpunkt  $T$ , dass  $A_T < \tilde{K}$ , so kann den Verpflichtungen nicht mehr vollständig nachgegangen werden und ein Ausfall tritt ein.

Im Merton-Modell sind die Variablen des Basismodells aus Gleichung 2.1 durch

$$\begin{aligned} EAD &= \tilde{K} \\ LGD &= (\tilde{K} - A_T)/\tilde{K} = 1 - A_T/\tilde{K} \end{aligned}$$

gegeben, wobei  $EAD$  den ausfallbedrohten Betrag bezeichnet und  $LGD$  die Verlustquote bei Eintritt des Ausfalls. Die Assetwerte  $A_t$  folgen einer geometrischen Brownschen Bewegung, das heißt es gilt

$$A_t = A_0 \cdot \exp\left(mt + \sigma \sqrt{t}W(t)\right), \quad (4.10)$$

wobei  $W(t) \sim N(0, 1)$  und  $m = \mu - \sigma^2/2$ .  $\mu$  bezeichnet dabei den Drift und  $\sigma^2$  die Volatilität der Brownschen Bewegung.

Da ein Ausfall genau dann stattfindet, wenn der Wert der Aktiva  $A_T$  zum Zeitpunkt  $T$  eine kritische Grenze  $\tilde{K}$  unterschreitet, kann die Ausfallwahrscheinlichkeit durch

$$p = P(A_T < \tilde{K})$$

definiert werden. Nutzt man die Beziehung in Gleichung 4.10, so kann man

$$K = \frac{\ln(\tilde{K}/A_0) - mT}{\sigma \sqrt{T}}$$

setzen und erhält in weiterer Folge

$$p = P(W(T) < K). \quad (4.11)$$

Mithilfe dieser Umformung ist es nun gelungen, die Ausfallwahrscheinlichkeit durch  $W(T)$  als normierten Assetwert zum Zeitpunkt  $T$  auszudrücken. Jenes  $W(T)$  setzt man nun als Bonitätsindikator und unterstellt ein Einfaktormodell wie in Gleichung 4.1, das heißt

$$\begin{aligned} V := W(T) &= \frac{\ln(A_T/A_0) - mT}{\sigma \sqrt{T}}, \\ W(T) &= \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1 - \rho}\epsilon \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei  $Y, \epsilon \sim N(0, 1)$  und  $Y$  und  $\epsilon$  sowie  $\epsilon_n$  und  $\epsilon_m$  stochastisch unabhängig sind für  $n \neq m$ .

Diverse Erweiterungen des Merton-Basis-Modells finden sich überblicksartig etwa in Albrecht [2005], eine Diskussion der Nachteile des Modells zum Beispiel in Filipovic [2016].

Eine populäre Anwendung dieses Modells stellt das KMV-Modell dar, das in Kapitel 7.1 besprochen wird.

### 4.1.3 Approximation durch ein unendlich großes Portfolio

In diesem Abschnitt wird ein Portfolio mit einer sehr großen Anzahl von Schuldnern betrachtet - hier kann die Verlustfunktion in einer geschlossenen Form angegeben werden.

Vasicek [1991] befasste sich als einer der ersten mit diesem Thema, daher erhält das Einfaktormodell in diesem Fall auch oft den Namen Vasicek-Modell. Dieses Unterkapitel folgt dem Aufbau in Schönbucher [2001], der Beweis in der zweiten Hälfte wurde Martin, Reitz und Wehn [2006] entnommen.

Bessere Handhabbarkeit als in Gleichung 4.8 kann dadurch erzielt werden, dass die Anzahl der Schuldner  $N$  beliebig groß wird. Bezeichne  $\bar{D}_N$  den Bruchteil jener Kreditnehmer, die Zahlungsausfall erleiden:

$$\bar{D}_N := \frac{1}{N} (D_1 + \dots + D_N).$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für  $N \rightarrow \infty$  wird mit  $\bar{D}$  bezeichnet:

$$\bar{D} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{D}_N.$$

In diesem Fall gilt folgender Satz.

**Satz 4.1.1** *In einem Portfolio, in dem die Zahl  $N$  der Schuldner gegen Unendlich geht,  $N \rightarrow \infty$ , kann die Verlustfunktion durch*

$$P(\bar{D} \leq x) = \Phi \left( \frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right)$$

angegeben werden.

**Beweis** Gegeben eine Realisation  $y$  von  $Y$  sind die einzelnen Kredite stochastisch unabhängig (Konzept der bedingten Unabhängigkeit, Kapitel 2.3). Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt in einem Portfolio mit  $N \rightarrow \infty$ , dass der Bruchteil der zahlungsunfähigen Schuldner fast sicher der Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht:

$$P(\bar{D} = p(y) | Y = y) = 1. \quad (4.13)$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist durch Gleichung 4.7 gegeben. Daher kann der Prozentsatz der Schuldner, die Zahlungsausfall erleiden, vorhergesagt werden, wenn  $Y$  bekannt ist. Aber auch wenn  $Y$  nicht bekannt ist, so kann wie folgt vorgegangen werden, um letzten Endes die Verteilungsfunktion des Verlustes angeben zu können.

Dafür bedarf es zuerst der Einführung einer Hilfsvariablen  $y^*$

$$y^* := \frac{K - \sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} P(\bar{D} \leq x) &= E(P(\bar{D} \leq x | Y)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{D} \leq x | Y = y) \varphi(y) dy \\ &\stackrel{4.13}{=} \int_{-\infty}^{\infty} P(p(y) \leq x | Y = y) \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_{p(y) \leq x} \varphi(y) dy = \int_{y^*}^{\infty} \varphi(y) dy = 1 - \Phi(y^*) = \Phi(-y^*) \\ &= \Phi \left( \frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - K}{\sqrt{\rho}} \right) \\ &\stackrel{4.4}{=} \Phi \left( \frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right) \end{aligned}$$

Obige Gleichung ist gültig, da

$$P(\bar{D} = p(y) \leq x | Y = y) = \begin{cases} 1, & p(y) \leq x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und diese Bedingung aus Gleichung 4.7 zu

$$y > \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( K - \sqrt{1 - \rho} \Phi^{-1}(x) \right) = y^*$$

umgeformt werden kann. □

In diesem Fall kann die Verlustverteilung also in geschlossener Form angegeben werden. Weiters ist sie sehr gut dazu geeignet, den Zusammenhang zwischen der Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  und der Assetkorrelation  $\rho$  zu veranschaulichen.

Offensichtlich spielen hier die idiosynkratischen Effekte  $\epsilon_n$  des einzelnen Kreditnehmers keine Rolle mehr. Dies resultiert aus der Tatsache, dass der Anteil eines einzelnen Kredits in einem Portfolio mit sehr vielen Kreditnehmern gegen null tendiert und daher das kreditspezifische Risiko wegdiversifiziert wird.

Weiters gilt folgendes Lemma.

**Lemma 4.1.2** *In einem Portfolio, in dem die Zahl  $N$  der Schuldner gegen Unendlich geht,  $N \rightarrow \infty$ , geht die Varianz des Verlustes im Grenzfalle gegen Null:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(L_N | Y = y) = 0.$$

**Beweis** Die bedingte Varianz des Portfolioverlustes

$$L_N = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot D_n$$

kann generell (siehe Gleichung 2.6) und daher auch im Spezialfall des Einfaktormodells via

$$\text{Var}(L_N | Y = y) = \sum_{n=1}^N EAD_n^2 \cdot LGD_n^2 \cdot p_n(y) (1 - p_n(y))$$

ermittelt werden.  $LGD$  gibt dabei einen Prozentsatz an und kann daher nach oben mit 1 abgeschätzt werden. Auch die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_n$  nimmt Werte im Intervall  $[0, 1]$  an, deswegen kann das Produkt  $p_n(y) (1 - p_n(y))$  nach oben mit  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  begrenzt werden. Unterstellt man nun eine obere Schranke  $E$  für die Summe aller ausstehenden Forderungen  $\sum_{n=1}^N EAD_n$  und außerdem  $EAD_n < k \frac{E}{N}$  mit  $k$  beliebig, aber fest, so folgt

$$\text{Var}(L_N | Y = y) \leq N \cdot \left( k \frac{E}{N} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{(kE)^2}{4N}$$

und somit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(L_N | Y = y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(kE)^2}{4N} = 0.$$

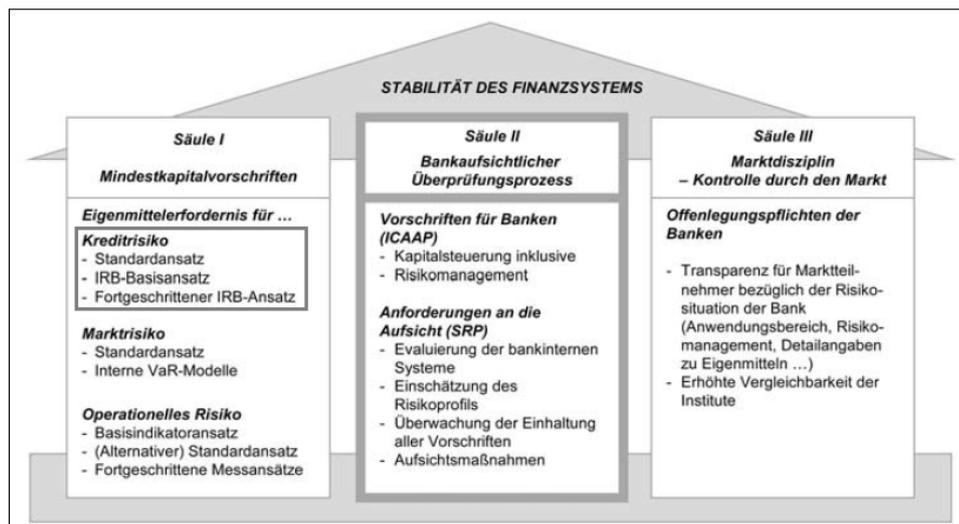
□

Schönbucher [2001] beschreibt die Qualität der Approximation als *bemerkenswert*. Henking, Bluhm und Fahrmeir [2006] streichen den praktischen Nutzen dieser Annäherung in der schnellen und effizienten Bewertung von uniformen Subportfolios in Banken hervor. Anstatt jeden Kunden einzeln zu betrachten macht es oft Sinn, ein homogenes Subsegment zu bewerten. Der Informationsverlust bleibt dabei sehr gering und ist daher vernachlässigbar.

## 4.2 Basel und der Bezug zum Einfaktormodell

Der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht verabschiedete am 26. Juni 2004 eine neue Eigenkapitalvereinbarung: Basel II. Der auf drei Säulen (I- Kapitalanforderungen, II- Aufsichtsrechtliche Überprüfungsverfahren, III- Offenlegung) basierende Ansatz soll zur Sicherheit und Stabilität im nationalen und internationalen Bankenumfeld beitragen. Außerdem wird durch die für international tätige Banken geltenden Richtlinien die Harmonisierung des Bankenwesens verstärkt.<sup>11</sup>

Eine erste Stellungnahme aus dem Jahr 1988 (Basel I) beinhaltete nur das Marktrisiko. Dieser Bereich wird in Basel II um die zwei Bereiche Kreditrisiko und operationales Risiko erweitert.<sup>12</sup> Grafik 4.3 soll dies noch einmal zusammengefasst veranschaulichen.<sup>13</sup>



**Abbildung 4.3:** Grundaufbau Basel II  
[aus: Nationalbank und Finanzmarktaufsicht [2006], S.7]

Dieses Kapitel widmet sich dem Kreditrisiko, im Speziellen den Kapitalanforderungen und der Anwendung des Einfaktormodells in Basel II. Die in diesem Kapitel verwendeten Formeln und Zusammenhänge stützen sich weitestgehend auf die Formulierungen in [3], der mathematische

<sup>11</sup>Diese Richtlinien werden von den einzelnen Staaten in nationales Recht umgewandelt.

<sup>12</sup>Eine dritte Erweiterung in Form von Basel III wurde Ende 2010 veröffentlicht und ist seit 1. Jänner 2014 EU-weit in Kraft.

<sup>13</sup>Ein kurzer geschichtlicher Überblick über die Entwicklung von Basel wird in McNeil, Frey und Embrechts [2005] gegeben (Kapitel 1.2.2 sowie 1.3).

Hintergrund wurde Martin, Reitz und Wehn [2006] entnommen.

In Basel II gibt es drei Möglichkeiten zur Berechnung der Eigenkapitalanforderungen: Den Standardansatz (engl. *Standardised Approach*), sowie den Internen Ratingansatz (engl. *Internal Ratings Based Approach*, IRB-Ansatz), in Form des IRB-Basisansatzes (engl. *Foundation Approach*) oder des fortgeschrittenen IRB-Ansatzes (engl. *Advanced Approach*).<sup>14</sup>

### 4.2.1 Mathematischer Hintergrund

In diesem Kapitel wird der mathematische Hintergrund von Basel II beleuchtet. Ziel ist es, eine Formel für den Value at Risk des Verlustes herzuleiten, da diese (bis auf eine kleine Änderung) in den Richtlinien von Basel II einen Grundstein für die Mindestkapitalanforderungen bildet.

Geht man von einem Einfaktormodell der Form

$$V_n = \sqrt{\rho_n}Y + \sqrt{1 - \rho_n}\epsilon_n,$$

wobei  $Y, \epsilon_n \sim N(0, 1)$  und  $Y$  und  $\epsilon_n$  sowie  $\epsilon_n$  und  $\epsilon_m$  stochastisch unabhängig für  $n \neq m$ ,

für die Bonitätsindikatoren  $V_n, n = 1, \dots, N$  aus (siehe Gleichung 4.1), so tritt Ausfall genau dann ein, wenn diese Variable eine Schranke  $K_n \stackrel{(4.4)}{=} \Phi^{-1}(PD_n)$  unterschreitet, wobei  $PD_n$  die einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit der jeweiligen Ratingklasse, in die der Kreditnehmer  $n$  eingeordnet ist, bezeichnet (mindestens aber 0,03%).<sup>15</sup> Das jeweilige Rating eines Unternehmens beeinflusst daher die Ausfallwahrscheinlichkeit (diese steigt, je schlechter das Unternehmen geratet ist) und somit auch die Höhe der Ausfallschranke. Sinkt der Unternehmenswert unter diesen Wert  $K_n$ , in Basel der Buchwert der Verbindlichkeiten, so fällt das betrachtete Unternehmen aus.

Umformen ergibt nun (siehe Gleichung 4.7) für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit gegeben, dass  $Y$  in  $y$  realisiert wird

$$\begin{aligned} PD_n(y) &= P(V_n < K_n | Y = y) = P(D_n = 1 | Y = y) \\ &= \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \sqrt{\rho_n}y}{\sqrt{1 - \rho_n}} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Gilt nun, dass  $PD_n =: PD$  und  $\rho_n =: \rho \forall n = 1, \dots, N$ , so folgt daraus  $PD_n(y) = PD(y)$ .

Bezeichne

$$\overline{L}_N := \sum_{n=1}^N w_n^{(N)} \cdot LGD_n \cdot D_n \quad (4.15)$$

<sup>14</sup>"Von Banken, die einen IRB-Ansatz eingeführt haben, wird die Beibehaltung dieses Ansatzes erwartet. Eine freiwillige Rückkehr zum Standardansatz wird nur unter außergewöhnlichen Umständen gestattet [...] und muss von der Bankenaufsicht genehmigt werden."-aus: [3],S.65

<sup>15</sup>Bisher wurde immer  $p$  statt  $PD$  verwendet, um aber mit der Notation in den Baseler Richtlinien konform zu gehen wird hier gewechselt.

mit

$$w_n^{(N)} := \frac{EAD_n}{\sum_{m=1}^N EAD_m}$$

die zufällige Verlustquote. Falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (w_n^{(N)})^2 = 0 \quad (4.16)$$

gilt, so spricht man von einem **homogenen, perfekt diversifizierten** Portfolio.

Die  $w_n$  stellen dabei Gewichte dar, die den Anteil des  $n$ -ten Kredits am Gesamtportfolio beschreiben. Gleichung 4.16 bedeutet nun, dass kein Kredit die anderen größenordnungsmäßig dominiert.

Sei nun der Einfachheit halber  $EAD_n = LGD_n = 1$  und  $PD_n =: PD \forall n = 1, \dots, N$ . Gleichung 4.15 vereinfacht sich dementsprechend zu

$$\overline{L}_N = \sum_{n=1}^N w_n^{(N)} D_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_n.$$

Die zufällige Verlustquote entspricht daher der durchschnittlichen Anzahl an Ausfällen. In diesem Spezialfall kann der bedingte Erwartungswert in einem homogenen Portfolio durch

$$\begin{aligned} E(\overline{L}_N | Y = y) &= \sum_{n=1}^N w_n^{(N)} \cdot LGD_n \cdot PD(y) \\ &= PD(y) \underbrace{\sum_{n=1}^N w_n^{(N)} \cdot LGD_n}_{=1} = PD(y) \\ &\stackrel{(4.14)}{=} \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

ermittelt werden.

Nach Lemma 4.1.2 gilt für

$$L_N = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot D_n$$

folgendes:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(L_N | Y = y) = 0.$$

Da in diesem Fall  $\overline{L}_N = \frac{1}{N} L_N$  gilt auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\overline{L}_N | Y = y) = 0.$$

Dies kann genutzt werden, um die Konvergenz der Folge  $(\overline{L}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  im quadratischen Mittel gegen  $PD(Y)$  zu beweisen:

$$\begin{aligned} E((\overline{L}_N - PD(Y))^2) &\stackrel{(4.17)}{=} E((\overline{L}_N - E(\overline{L}_N|Y = y))^2) \\ &= \text{Var}(\overline{L}_N|Y = y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Aus der Konvergenz im quadratischen Mittel folgt die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Dazu wendet man die Markov'sche Ungleichung auf  $h = (\overline{L}_N - PD(Y))^2$  an und es folgt

$$P(|\overline{L}_N - PD(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E((\overline{L}_N - PD(Y))^2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Daher kann das  $\alpha$ -Quantil  $q_\alpha(PD(Y))$  bei großen Werten von  $N$  als Näherungswert für das  $\alpha$ -Quantil (und daher aufgrund von Gleichung 3.2 für den Value at Risk) der Verlustquote verwendet werden. Dies wird über die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $PD(y)$  berechnet:

$$\begin{aligned} P(PD(y) \leq x) &\stackrel{(4.14)}{=} P\left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right) \leq x\right) \\ &= P\left(-\sqrt{\rho}y \leq \Phi^{-1}(x) \cdot \sqrt{1-\rho} - \Phi^{-1}(PD)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right) \end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Definition des  $\alpha$ -Quantils (siehe Gleichung 3.1) folgt durch Umformen von

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right) &= \alpha \\ \Rightarrow q_\alpha(PD(y)) &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\text{VaR}_\alpha(\overline{L}_N) \approx \text{VaR}_\alpha(PD(y)) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (4.18)$$

für  $N$  groß genug. Wird auf die Einschränkung  $EAD_n = LGD_n = 1$  verzichtet, aber weiterhin angenommen, dass  $EAD_n = EAD$  und  $LGD_n = LGD \forall n$  so muss der Wert in Formel 4.18 noch mit  $EAD \cdot LGD$  multipliziert werden.

Man kann zeigen, dass im Fall eines heterogenen Portfolios, das sich als Vereinigung  $h$  homogener Portfolios ergibt, das  $\alpha$ -Quantil des Gesamtportfolios als Summe der  $\alpha$ -Quantile der Subportfolios berechnet werden kann:<sup>16</sup>

$$\text{VaR}_\alpha = \sum_{i=1}^h EAD_i \cdot LGD_i \cdot \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i) + \sqrt{\rho_i}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho_i}}\right) \quad (4.19)$$

<sup>16</sup>Der Beweis findet sich zum Beispiel in Wehrspohn [2003].

### 4.2.2 Berechnung der Mindesteigenkapitalanforderungen

Generell gilt, dass das Verhältnis von haftendem Eigenkapital  $EK$  zu den gewichteten Risikoaktiva  $RWA$  nicht weniger als 8% betragen darf, siehe [3] (I.40):

$$EK \geq 0,08 \cdot RWA_{\text{gesamt}},$$

wobei sich die Summe aller gewichteten Risikoaktiva als (gewichtete) Summe der Anforderungen der drei Risiken Marktrisiko, operationelles Risiko und Kreditrisiko ergibt:

$$RWA_{\text{gesamt}} = RWA_{\text{Kredit}} + 12,5 \cdot EK_{\text{Marktrisiko}} + 12,5 \cdot EK_{\text{Operationelles Risiko}}$$

Die gewichteten Risikoassets für einen Einzelkredit berechnen sich durch

$$RWA_{\text{Kredit}} = 12,5 \cdot EAD \cdot K, \quad (4.20)$$

wobei  $K$  die Eigenkapitalanforderung für den jeweiligen Kredit bezeichnet und  $EAD$  die ausstehenden Forderungen bei Ausfall.

Formt man diese Gleichung nun nach  $K$  um, so kann die Mindest-Eigenkapitalanforderung  $K$  in Abhängigkeit des Risikogewichts und  $EAD$  angegeben werden:

$$K = 8\% \cdot EAD \cdot RWA_{\text{Kredit}}.$$

Ein wichtiger Punkt im Einfaktormodell-Ansatz in Basel II ist, dass sich die Mindesteigenkapitalanforderungen eines einzelnen Kredits unabhängig von der Zusammensetzung des Portfolios berechnen lassen. Das Risiko des gesamten Portfolios ergibt sich dann als Summe der Einzelrisiken.

#### 4.2.2.1 Standardansatz

Im Standardansatz wird das Risikogewicht  $RWA$  durch ein externes Rating bestimmt und darf nicht durch interne Modelle berechnet werden, wie in Tabelle 4.1 dargestellt. Wenn kein externes Rating zu einem Unternehmen vorliegt, so wird für dieses ein Risikogewicht von 100% wie schon in Basel I angenommen.

Insbesondere dieser Punkt zählt zu den größten Kritikpunkten im Standardansatz, da sich viele Klein- und Mittelbetriebe kein externes Rating leisten können und eben beschriebene Erweiterung um externe Ratings in der Praxis kaum angewandt werden kann. Daher ändert sich im Fall des Standardansatzes in Basel II im Vergleich zu Basel I sehr wenig.

Standard & Poor's	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C
Bankenaufsicht	AAA bis AA		A	BBB	BB bis B		unter B		
öffentliche Schuldner	0%		20%	50%	100%		150%		
Banken	20%		50%	100%	100%		150%		
Unternehmen	20%		100%	100%	100%		150%		

**Tabelle 4.1:** Risikogewichte Standardansatz in Basel II [aus: Königshofer, S.45]

#### 4.2.2.2 Interner Ratingansatz

Der IRB-Ansatz ermöglicht es den Banken zwar nicht, interne Kreditrisikomodelle zur Berechnung der Mindest-Eigenkapitalanforderungen zu verwenden, aber er berechtigt dazu, einzelne Parameter, die in die bankaufsichtlich vorgegebenen Formeln einfließen, selbst zu ermitteln. So fließt in die Berechnung des Risikogewichts nicht nur die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD$  in Form eines internen Ratings ein, sondern auch die Verlustrate bei Ausfall ( $LGD$ ), sowie die Restlaufzeit  $M$  (engl. *Maturity*) in Jahren. Diese Größen dürfen im IRB-Ansatz teilweise oder ganz von den Banken selbst berechnet werden. Der Unterschied zwischen den beiden IRB-Ansätzen wird in Grafik 4.4 verdeutlicht.

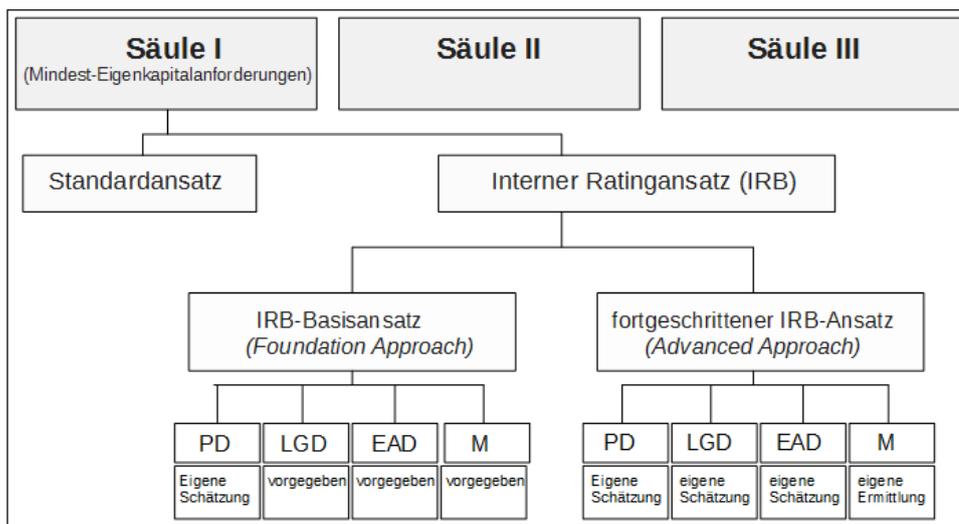


Abbildung 4.4: Berechnungsansätze Basel II

Innerhalb dieses Ansatzes wird zwischen unterschiedlichen Forderungsklassen unterschieden, für die das erforderliche Mindesteigenkapital jeweils unterschiedlich berechnet wird:

- **Unternehmen:** Hier gibt es leichte Unterscheidungen in der Berechnung, wenn ein Klein- oder Mittelunternehmen bewertet werden soll. Es gibt fünf Unterklassen an Spezialfinanzierungen:<sup>17</sup>
  - Projektfinanzierung
  - Objektfinanzierung
  - Rohstoffhandelsfinanzierung
  - Finanzierung von Mietimmobilie
  - Hochvolatile gewerbliche Realkredite
- **Staaten:** Hierzu zählen Staaten und ihre Zentralbanken, bestimmte sonstige öffentliche Stellen, sowie bestimmte multilaterale Entwicklungsbanken.

<sup>17</sup>Diese werden hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt - eine genaue Beschreibung kann in [3], S.56, nachgelesen werden.

- **Banken:** Dieser Teil umfasst Kredite an Banken und Wertpapierfirmen, sowie Forderungen an sonstige inländische öffentliche Stellen (PSE), die im Standardansatz wie Forderungen an Banken behandelt werden und solche an jene multilaterale Entwicklungsbanken, die nicht in den vorherigen Fall fallen.
- **Retail:** Hier enthalten sind zum Beispiel Kredite an Einzelpersonen, private Wohnbaukredite und (unter bestimmten Voraussetzungen) Kredite an kleine Unternehmen.<sup>18</sup> Innerhalb dieser Klasse werden wiederum drei Unterklassen gebildet:
  - Kredite, die durch Wohnimmobilien besichert sind
  - Qualifizierte revolvingende Retailkredite
  - Alle anderen Retailkredite
- **Beteiligungen:** Unter Beteiligungen versteht man Anteile an anderen Unternehmen, die bestimmt sind, dem eigenen Geschäftsbetrieb durch eine dauernde Verbindung zu diesen Unternehmen zu dienen. In diese Kategorie fallen sowohl direkt als auch indirekt gehaltene Beteiligungen an Vermögen und Erträgen eines gewerblichen Unternehmens oder Finanzunternehmens.

Diese Klassifizierung entspricht im Allgemeinen der gängigen Bankenpraxis.

Nach Basel gibt es nun für jede dieser Forderungsklassen innerhalb des IRB-Ansatzes drei Elemente: Die Risikokomponenten (darunter versteht man die einzelnen Parameter, die individuell zu schätzen sind), die Risikogewichtsfunktionen (diese bestimmen, wie viel die einzelnen Risikokomponenten zur Mindestkapitalanforderung beitragen), sowie die Mindestanforderungen, die eine Bank erfüllen muss, um den IRB-Ansatz verwenden zu dürfen. Wie zuvor schon erwähnt gibt es zwei mögliche Arten der Berechnung: Den Basisansatz und den fortgeschrittenen Ansatz. Zu bemerken ist allerdings, dass es die Möglichkeit zur Auswahl zwischen den beiden Ansätzen zwar für viele dieser Forderungsklassen gibt, aber nicht für alle (im Bereich der Retailforderungen müssen die Banken immer alle Parameter  $PD$ ,  $LGD$  und  $EAD$  selbst schätzen; die Regeln für Beteiligungspositionen werden später näher erläutert).

Im Folgenden wird die Berechnung der Mindest-Eigenkapitalanforderung  $K$  in Gleichung 4.20 für die einzelnen Forderungsklassen im IRB-Ansatz dargestellt.

Für die Forderungsklassen Unternehmen, Staaten und Banken (ausgenommen einiger Spezialfälle) gibt es eine gemeinsame Risikogewichtsfunktion und damit eine gemeinsame Mindesteigenkapitalforderung  $K$ :

$$K = LGD \cdot VaR \cdot MF, \quad (4.21)$$

mit der Restlaufzeitanpassung (engl. *maturity factor*)

$$MF = \frac{1 + (M - 2,5) \cdot b(PD)}{1 - 1,5 \cdot b(PD)},$$

<sup>18</sup>Genaue Zuordnungsdetails können auch hier wieder [3], S.58, entnommen werden.

wobei

$$b(PD) = (0,11852 - 0,05478 \cdot \ln(PD))^2.$$

Im IRB-Basisansatz ist die Restlaufzeit  $M$  mit einem Wert von 2,5 Jahren fest vorgeschrieben, Wertpapierpensions- und ähnliche Geschäfte erhalten einen Wert von 6 Monaten. Im fortgeschrittenen Ansatz wird  $M$  intern berechnet, der Wertebereich liegt aber jedenfalls zwischen einem und fünf Jahren.<sup>19</sup> Je nach Art des Ansatzes wird  $LGD$  intern geschätzt oder dessen Wert wird vorgegeben.

Der Value at Risk ist durch

$$VaR = \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} \Phi^{-1}(0,999)}{\sqrt{1-\rho}} \right) - PD \quad (4.22)$$

vorgegeben. Dieser ist identisch mit dem modelltheoretischen Value at Risk zum Niveau  $\alpha = 0,999$  aus Gleichung 4.18 bis auf die Subtraktion der Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$ . Dieser Term taucht in den neuen Anforderungen das erste Mal auf und spiegelt den Wunsch einer Reduktion des Risikogewichts und daher der Eigenkapitalanforderungen wider.

Der Korrelationskoeffizient  $\rho$  ist in dieser Forderungsklasse abhängig von der Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD$  und durch

$$\rho(PD) = 0,12 \left( \frac{1 - e^{-50PD}}{1 - e^{-50}} \right) + 0,24 \left( 1 - \frac{1 - e^{-50PD}}{1 - e^{-50}} \right)$$

gegeben. Die Terme in den Klammern sind nicht negativ und summieren sich gegenseitig auf 1, daher liegt der Korrelationskoeffizient immer im Intervall  $[0,12; 0,24]$ . Eine Größenanpassung des Risikogewichts für Klein- und Mittelunternehmen findet in einer Änderung des Korrelationskoeffizienten statt, indem der Jahresumsatz mit einfließt und somit  $\rho$  leicht verringert.

Der Bereich Retail wird wie oben beschrieben in drei Unterkategorien eingeteilt, dementsprechend gibt es auch für jede dieser Gruppen eine eigene Mindesteigenkapitalanforderung  $K$ . Die Berechnung erfolgt in allen drei Fällen über

$$K = LGD \cdot VaR,$$

wobei  $VaR$  wie in Gleichung 4.22 definiert ist und dem Value at Risk zum Niveau  $\alpha = 0,999$  entspricht. Im Vergleich zur Berechnung für den Fall Unternehmen, Staaten und Banken (Gleichung 4.21) fällt also die Multiplikation mit dem Faktor  $MF$  weg. Die Einteilung in Unterkategorien im Bereich Retail erfolgt nun, da sich die Berechnung des Korrelationskoeffizienten  $\rho$  unterscheidet:

- Wohnwirtschaftliche Realkredite:

$$\rho = 0,15$$

- Qualifizierte revolving Retailforderungen:

$$\rho = 0,04$$

<sup>19</sup>Details siehe [3], Nr.320, S.77

- Übrigens Retail:

$$\rho(PD) = 0,03 \frac{1 - e^{-35PD}}{1 - e^{-35}} + 0,16 \left( 1 - \frac{1 - e^{-35PD}}{1 - e^{-35}} \right)$$

Der Korrelationskoeffizient  $\rho(PD)$  liegt dabei (gleiche Argumentation wie im Unternehmensfall) immer zwischen 0,03 und 0,16.

Beispielhafte Risikogewichte im IRB-Ansatz in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD$  mit gegebenem  $LGD$  von 45% und einer Restlaufzeit  $M$  von 2,5 Jahren (ist zugleich Benchmark-Restlaufzeit) werden in Tabelle 4.2 dargestellt.

Forderungsklasse PD	Unternehmens- kredite	Wohn- immobilien	Übriges Retail- geschäft
0,03%	11.30%	4.15%	4.45%
0.10%	23.30%	10.69%	11.16%
0.25%	39.01%	21.30%	21.15%
0.50%	54.91%	35.08%	32.36%
1.00%	72.40%	56.40%	45.77%
2.00%	88.55%	87.94%	57.99%
5.00%	112.27%	148.22%	66.42%
10.00%	146.51%	204.41%	75.54%
20.00%	188.42%	253.12%	100.28%

**Tabelle 4.2:** IRB-Risikogewichte in Basel II [aus: [3], Anhang 3]

Für den Bereich Beteiligungen, die nicht im Handelsbuch gehalten werden, gibt es die Möglichkeit zwischen dem marktbasierten Ansatz und dem  $PD/LGD$ -Ansatz zu wählen. Die nationale Bankenaufsicht gibt vor, welcher der beiden Ansätze verwendet werden muss. Im marktbasierten Ansatz wird ebenfalls unterschieden, ob vorgegebene Risikogewichte verwendet werden (einfache Risikogewichtsmethode) oder die jeweilige Bank ihre eigenen Modelle zur Berechnung verwendet (auf bankinternen Marktrisikomodellen basierende Methode). Im  $PD/LGD$ -Ansatz wird im Prinzip nach dem IRB-Basisansatz für Unternehmenskredite vorgegangen.<sup>20</sup>

### 4.2.3 Kritik am Einfaktormodell

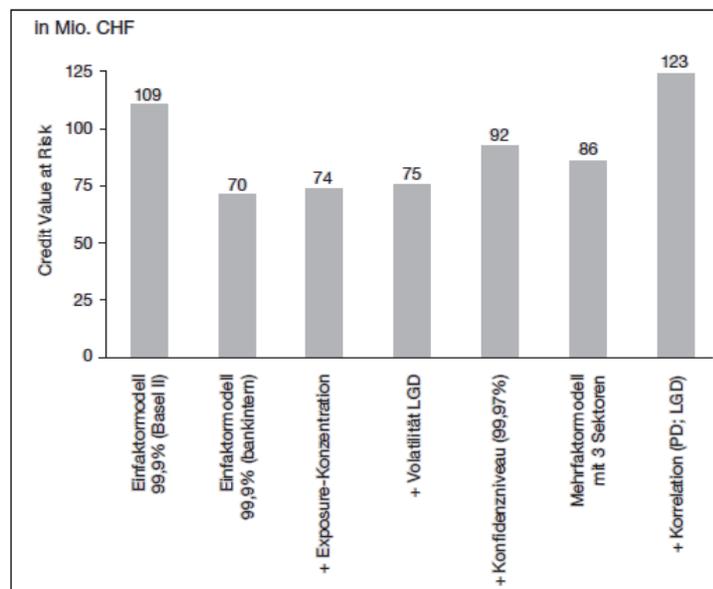
Da das Einfaktormodell, das auch in Basel II verwendet wird, sehr einschränkend ist und viele Annahmen trifft, die in der Praxis nicht zutreffen, wird immer wieder Kritik an diesem Modell laut.

Zum einen wird von einem homogenen Portfolio ausgegangen, das heißt kein Exposure verfüge über einen signifikanten Anteil. Zum anderen wird das Einfaktormodell selbst kritisiert, da es

<sup>20</sup>Unterscheidungen können in [3], Nr.350, S.83, nachgelesen werden.

nur einen Faktor miteinbezieht.

Einen Vergleich des Einfaktormodells in Basel II mit verschiedensten anderen Modellen, die gewisse Annahmen, die in Basel II getroffen werden, fallen lassen bietet Meier [2004], siehe dazu Abbildung 4.5.



**Abbildung 4.5:** Vergleich verschiedenster Modellerweiterungen von Basel II  
[aus: Meier [2004], S.258]

Dabei fällt auf, dass die Kapitalanforderungen im klassischen Einfaktormodell, wie es in Basel II verwendet wird, im Vergleich zu anderen verwendeten Modellen bis auf eine Ausnahme immer höher sind.

Meier [2004] meint zusammenfassend: „*Der Einfaktoransatz ist am ehesten noch für das Risikomanagement regional tätiger Institute geeignet, deren Schuldner eine starke Abhängigkeit vom Verlauf der lokalen Wirtschaft aufweisen. Dieser Ansatz macht branchenspezifische Klumpenrisiken jedoch nicht transparent und unterstützt ein aktives Kreditportfoliomanagement nur ungenügend.*

*[...] Der Basel II zugrunde liegende Einfaktoransatz blendet bestimmte Risiken bewusst aus und delegiert sie an die Säule 2 der zukünftigen Eigenkapitalvereinbarung.“*

### 4.3 Erweiterungen

Im Einfaktormodell werden vereinfachende Annahmen getroffen, die in der Praxis allerdings häufig nicht mehr bestehen. In diesem Unterkapitel werden drei Möglichkeiten der Erweiterung des Basismodells aufgezeigt. Alle drei ermöglichen eine geschlossene Darstellung des Value at Risk des Verlustes. Aufbau und Inhalt der ersten zwei Unterkapitel sind an Wehrspohn [2003] angelehnt, das letzte Unterkapitel wurde Kupiec [2007] entnommen.

Die Annahmen in den einzelnen Unterkapiteln sind teilweise sehr einschränkend, um gut handhabbare Formeln angeben zu können, allerdings zeigen sie sehr deutlich die Wichtigkeit auf, die einzelnen Korrelationen in ein allgemeines Modell miteinzubeziehen.

### 4.3.1 Länderrisiko

Ein Risiko, das oft unterschätzt und daher in vielen Kreditrisikomodellen gar nicht oder nur teilweise berücksichtigt wird ist das Länderrisiko.<sup>21</sup> So kann ein Unternehmen, das seinen Sitz im Ausland hat, seinen Zahlungen nur nachkommen, wenn Geldtransfers uneingeschränkt möglich sind. Dies muss aber aufgrund von politischen Krisen oder ähnlichem nicht immer der Fall sein.<sup>22</sup>

Meist wird dieser Effekt dadurch kompensiert, indem ein grundsätzlich gut bewertetes Unternehmen auf das meist niedrigere Rating seines Herkunftslandes herabgestuft wird und sich daher dessen Ausfallwahrscheinlichkeit erhöht. Oft wird übersehen, dass es nicht nur ausgewählte Unternehmen eines Staates trifft, sondern alle lokalen Firmen, die Geschäfte im Ausland betreiben, diese aber vielleicht unterschiedlich stark. Diese Abhängigkeit (Korrelation) zwischen dem Sitz eines Unternehmens und dessen Ausfallwahrscheinlichkeit soll im Folgenden in das klassische Einfaktormodell miteinbezogen werden.

In diesem Modell werden zwei vereinfachende Annahmen getroffen. Zum einen spiegelt das Rating eines Unternehmens dessen individuelle Kreditfähigkeit dar, unabhängig davon, wie dessen Land bewertet wurde. Andererseits wird davon ausgegangen, dass Firmen entweder gänzlich ohne Bezug zum Länderrisiko (und daher aus anderen Gründen) ausfallen oder aber alle Unternehmen eines Landes fallen aus, sofern dieses zahlungsunfähig wird.

**Satz 4.3.1** *In einem homogenen Portfolio aus Unternehmen, von denen ein Bruchteil  $s \in (0, 1)$  seinen Sitz in einem anderen Land mit Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_c$  hat, ist die Verlustverteilung über*

$$P(L \leq x) = \begin{cases} (1 - p_c) \Phi \left( \frac{\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1} \left( \frac{x}{LGD \cdot EAD} \right) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right) + p_c A(x), & x \leq EAD \cdot LGD \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq s \cdot EAD \cdot LGD \\ \Phi \left( \frac{\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1} \left( \frac{x}{LGD \cdot EAD \cdot (1-s)} \right) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right), & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $p_c = P(\text{Land fällt aus})$  gegeben.

<sup>21</sup>Ausnahmen stellen hier die zwei Kreditrisikomodelle *Credit Portfolio View* und das *Credit Risk Evaluation Model* dar.

<sup>22</sup>Im Folgenden wird immer von *Ländern* oder *Staaten* die Rede sein, dasselbe Argument lässt sich aber auch auf Bundesländer, Regionen oder ähnliches übertragen.

**Beweis** Da der Verlust nicht größer als  $EAD \cdot LGD$  werden kann gilt für den Fall  $x > EAD \cdot LGD$  immer  $P(L \leq x) = 1$ . Allgemein gilt wegen  $p_c = P(\text{Land fällt aus})$

$$P(L \leq x) = (1 - p_c)P(L \leq x | \text{Land fällt nicht aus}) + p_c P(L \leq x | \text{Land fällt aus}) \quad (4.23)$$

Bereits in Satz 4.1.1 wurde die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass der Bruchteil jener Kreditnehmer, die Zahlungsausfall erleiden, kleiner gleich  $x$  ist:

$$P(\bar{D} \leq x) = \Phi \left( \frac{\sqrt{1 - \rho} \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right)$$

Im Fall, dass das Land nicht zahlungsunfähig ist kann diese Formel ohne Zusatzüberlegung angewandt werden. Da  $L = LGD \cdot EAD \cdot \bar{D}$  und damit  $\frac{L}{LGD \cdot EAD} = \bar{D}$  gilt folgt

$$P(L \leq x | \text{Land fällt nicht aus}) = \Phi \left( \frac{\sqrt{1 - \rho} \Phi^{-1}\left(\frac{x}{LGD \cdot EAD}\right) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right) \quad (4.24)$$

Wird nun das Land insolvent, so fallen nach der Annahme zu Beginn des Unterkapitels alle Unternehmen mit Sitz in diesem Land aus und der Verlust beträgt mindestens  $s \cdot LGD \cdot EAD$ . Überschreitet der Verlust diese Grenze, so müssen zusätzlich noch andere Unternehmen zahlungsunfähig werden. Soll nun der Gesamtverlust eine fixe Grenze  $x$  nicht überschreiten, so kann der „sichere“ Verlust vom Gesamtverlust abgezogen werden und es muss  $L(1 - s) \leq x - s \cdot LGD \cdot EAD$  gelten. Formt man diese Ungleichung nach  $\bar{D}$  um kommt man auf folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} L(1 - s) &\leq x - s \cdot LGD \cdot EAD \\ LGD \cdot EAD \cdot \bar{D} \cdot (1 - s) &\leq x - s \cdot LGD \cdot EAD \\ \bar{D} \cdot (1 - s) &\leq \frac{x}{LGD \cdot EAD} - s \\ \bar{D} &\leq \frac{\frac{x}{LGD \cdot EAD} - s}{1 - s} \end{aligned}$$

Eine Division durch  $LGD \cdot EAD$  ist in diesem Fall ohne Umkehrung des Ungleichheitszeichens immer möglich, da stets  $LGD \cdot EAD > 0$  gilt; auch  $1 - s$  ist wegen  $s \in (0, 1)$  immer positiv. Zusammengefasst ergibt sich daher folgende Gleichung

$$P(L \leq x | \text{Land fällt aus}) = \Phi \left( \frac{\sqrt{1 - \rho} \Phi^{-1}\left(\frac{\frac{x}{LGD \cdot EAD} - s}{1 - s}\right) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right) \quad (4.25)$$

Fügt man nun Gleichungen 4.24 und 4.25 in 4.23 ein, kann die Verlustverteilung durch

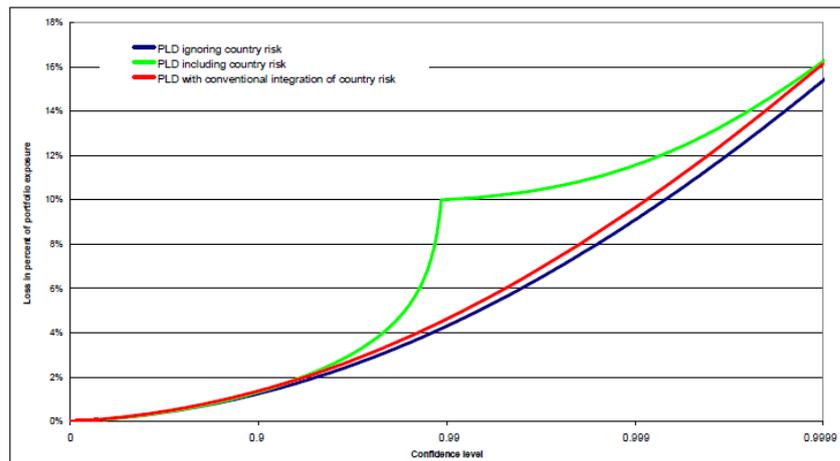
$$P(L \leq x) = \begin{cases} (1 - p_c) \Phi \left( \frac{\sqrt{1 - \rho} \Phi^{-1}\left(\frac{x}{LGD \cdot EAD}\right) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right) + p_c A(x), & x \leq EAD \cdot LGD \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.26)$$

mit

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq s \cdot EAD \cdot LGD \\ \Phi \left( \frac{\sqrt{1 - \rho} \Phi^{-1}\left(\frac{\frac{x}{LGD \cdot EAD} - s}{1 - s}\right) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right), & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt werden, was zu beweisen war. □

Die Formel in Satz 4.3.1 ist zwar etwas komplexer als im Basismodell, allerdings kann die Verlustverteilung noch immer in geschlossener Form angegeben und direkt implementiert werden. Der direkte Vergleich des Einfaktormodells mit der Erweiterung wird in Abbildung 4.6 dargestellt.<sup>23</sup> Ein großer Unterschied zeigt sich um das Konfidenzniveau von  $1 - p_c$ , bei kleineren und größeren Werten sind die einzelnen Modelle sehr ähnlich. Ersichtlich ist auch, dass in jedem Fall ohne Miteinbeziehen des Länderrisikos das Ausfallrisiko unterschätzt wird.



**Abbildung 4.6:** Einbeziehung des Länderrisikos im Einfaktormodell  
[aus: Wehrspohn [2003], S.10]

### 4.3.2 Abhängigkeit zwischen den Schuldnern

Häufig entsteht Insolvenz eines Unternehmens durch die Zahlungsunfähigkeit eines wichtigen Handelspartners desselben. Dieses Thema soll in diesem Unterkapitel besprochen werden.

Fällt in diesem Modell ein Unternehmen aus, so gleitet das von ihm abhängige Unternehmen mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $\pi$  selbst in die Zahlungsunfähigkeit (der Ausfall eines Unternehmens bedingt allerdings nicht zwingend den Ausfall seines Partners/Kunden). Im Folgenden werde angenommen, dass ein Bruchteil  $\nu \in [0, 1]$  aller Unternehmen von einem anderen in dieser Form abhängig sind. Weiters wird davon ausgegangen, dass jede Firma nur von einem Partner abhängig ist und umgekehrt.

Das betrachtete Gesamtportfolio setze sich aus  $h$  homogenen Portfolios zusammen. In diesen liegen identische Werte für den ausfallbedrohten Betrag  $EAD$ , die Verlustquote  $LGD$ , die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  sowie die Assetkorrelation  $\rho$  vor. Auch der systematische Faktor  $Y$  sei für alle derselbe.

Betrachtet man mehrere Perioden, so wirkt sich diese Abhängigkeit erst nach und nach aus. In der ersten Periode fallen Unternehmen unabhängig voneinander aus. Diese Ausfälle können dann in der nächsten Periode Zahlungsschwierigkeiten bei anderen Unternehmen verursachen

<sup>23</sup>Diese wurde mit den Parametern  $p = 0,05\%$ ,  $p_c = 1\%$ ,  $\rho = 20\%$ ,  $LGD = 100\%$ ,  $s = 10\%$  erstellt.

und so weiter. Diese Idee wird im Folgenden präzisiert.

**Satz 4.3.2** *In einem Portfolio mit einer Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Schuldnern wie beschrieben kann das  $\alpha$ -Quantil und daher auch der Value at Risk zum Niveau  $\alpha$  nach  $n$  Perioden durch*

$$VaR_{\alpha}^n(L) \approx a_0(\alpha) + \nu \sum_{i=1}^n a_i(\alpha) \quad (4.27)$$

mit

$$a_0(\alpha) = \sum_{j=1}^h LGD_j \cdot EAD_j \cdot \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(p_j) + \sqrt{\rho_j} \Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_j}} \right)$$

und rekursiver Definition der weiteren Summanden

$$a_i(\alpha) = \pi \cdot a_{i-1}(\alpha) \cdot \left( 1 - \sum_{k=0}^{i-1} a_k(\alpha) \right) \quad (4.28)$$

approximiert werden.

**Beweis**  $a_0(\alpha)$  ergibt sich direkt aus Gleichung 4.19, da in der ersten Periode noch keine Abhängigkeiten vorkommen. Für den Fall  $\nu = 1$  folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen, dass der Bruchteil jener Unternehmen, die zwischen Periode  $i - 1$  und  $i$  ausfallen genau dem Erwartungswert  $\pi \cdot a_{i-1}(\alpha)$  entspricht. Mit Wahrscheinlichkeit 1 sind aber schon  $\sum_{k=0}^{i-1} a_k(\alpha)$  % davon ausgefallen. Insgesamt ergibt sich daher Formel 4.28 und für den Spezialfall  $\nu = 1$

$$VaR_{\alpha}^n(L) = a_0(\alpha) + \sum_{i=1}^n a_i(\alpha).$$

Ist  $\nu < 1$  so muss dies berücksichtigt werden, indem die Summe noch mit diesem Wert multipliziert wird. □

Wehrspohn [2003] misst den Einfluss der Abhängigkeit zwischen einzelnen Schuldnern auf den Portfoliogesamtverlust beziehungsweise dessen Value at Risk auch anhand numerischer Daten. Dieser macht sich speziell für hohe Abhängigkeiten und eine große Anzahl von betrachteten Perioden bemerkbar.

### 4.3.3 Stochastizität von EAD und LGD

Im Basismodell des Ausfallrisikos und daher auch im Einfaktormodell wird meist davon ausgegangen, dass der ausfallbedrohte Betrag  $EAD$  sowie die Verlustrate bei Ausfall  $LGD$  deterministische Größen darstellen.

Dass diese Annahme nicht immer gerechtfertigt ist zeigen diverse Studien. So ist zum Beispiel eine erhöhte Variabilität von  $LGD$  innerhalb von Ratingklassen festzustellen. Bei Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit steigt auch der potentielle Verlust und die Wiedereinbringungsquote  $RC = 1 - LGD$  sinkt. All diese Ergebnisse lassen auf einen Zusammenhang zwischen der

Ausfallwahrscheinlichkeit und der Wiedereinbringungsquote beziehungsweise der Verlustquote bei Eintritt eines Ausfalls schließen, der im traditionellen Einfaktormodell nicht berücksichtigt wird. Diverse praktische Beispiele zeigen auch einen Zusammenhang zwischen der Ausfallwahrscheinlichkeit und dem ausfallbedrohten Betrag  $EAD$ .

Im Folgenden sollen die Verteilungen von  $LGD$  sowie  $EAD$  durch Treppenfunktionen angenähert werden. Dadurch erreicht man einerseits, dass die einzelnen Variablen nicht mehr als deterministisch angenommen werden müssen. Andererseits kann dadurch die Inverse der Verlustverteilung beschrieben werden, deren Genauigkeit beliebig erhöht werden kann, indem man die einzelnen Treppenfunktionen verfeinert.

Bezeichne  $F_X(x)$  die Verteilungsfunktion einer Variablen  $X$  mit  $x \in [0, 1]$ . Dies wird im weiteren Verlauf wichtig sein, das Modell aber nicht einschränken, da nur Verteilungsfunktionen von Variablen mit Wertebereich  $[0, 1]$  betrachtet werden.

#### 4.3.3.1 Stochastizität von $LGD$

Da  $LGD$  als Quote per Definition nur Werte im Intervall  $[0, 1]$  annehmen kann wird die Verteilungsfunktion für  $LGD$  direkt betrachtet. Die Verlustquote des Ausfalls hängt in diesem Modell vom jeweiligen Schuldner  $n = 1, \dots, N$  ab und wird daher mit Index geschrieben.  $LGD_n$  sei abhängig von einem Faktor  $F_n$ , der selbst einem Einfaktormodell unterliegt:

$$F_n = \sqrt{\rho_F} Y + \sqrt{1 - \rho_F} \epsilon_{n,F}$$

$LGD_n$  soll nun (in Abhängigkeit von  $F_n$ ) durch

$$LGD_n(F_n) = \begin{cases} 0, & B_{n,1} \leq F_n \\ \frac{1}{m}, & B_{n,2} \leq F_n < B_{n,1} \\ \frac{2}{m}, & B_{n,3} \leq F_n < B_{n,2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{m-1}{m}, & B_{n,m} \leq F_n < B_{n,m-1} \\ 1, & F_n < B_{n,m} \end{cases}$$

mit  $B_{n,m} < B_{n,m-1} < \dots < B_{n,1}$  approximiert werden.

Nun gilt

$$\begin{aligned} F_{LGD}(0) &= P(LGD \leq 0) = P(F_n \geq B_{m,1}) \\ &= 1 - P(F_n \leq B_{m,1}) = 1 - \underbrace{F_{F_n}}_{=\Phi}(B_{m,1}) \end{aligned}$$

und daher

$$B_{n,1} = \Phi^{-1}(1 - F_{LGD}(0)).$$

Allgemein kann dies mittels

$$B_{n,i} = \Phi^{-1}(1 - F_{LGD}(i - 1)), i = 1, \dots, m$$

formuliert werden. Die Modellierung von  $LGD$  kann also zurückgeführt werden auf die Modellierung der Schranken  $B$ . Je nach Portfoliozusammensetzung wird eine andere Verteilungsfunktion  $F_{LGD}$  gewählt werden.

Kupiec [2007] nennt als Beispiele die Beta(1.6,7)-Verteilung, die als rechtsschiefe Verteilung gut zur Modellierung revolvingender Unternehmensanleihen<sup>24</sup> herangezogen werden kann, die linksschiefe Beta(4,1.1)-Verteilung für revolvingende Retail-Kredite und die Beta(7,7)-Verteilung als symmetrische Verteilung zur Modellierung von investitionswürdigen Unternehmensanleihen.

#### 4.3.3.2 Stochastizität von $EAD$

Dasselbe Prinzip kann nun auch auf den ausfallbedrohten Betrag  $EAD$  angewandt werden. Dazu sei ein maximaler Kreditrahmen  $M_n$  gegeben.  $Dr_{n0}$  bezeichne den Prozentsatz des maximalen Kreditrahmens, der vom  $n$ -ten Schuldner am Beginn der betrachteten Periode tatsächlich genutzt wird. Der Gesamtbetrag des  $n$ -ten Schuldners zu Beginn der Periode beträgt daher  $Dr_{n0} \cdot M_n$ . Insgesamt könnte innerhalb der Periode ein Betrag von  $(1 - Dr_{n0})M_n$  aufgenommen werden. Bezeichne  $\delta_n \in [0, 1]$  jenen Bruchteil, der vom  $n$ -ten Schuldner tatsächlich aufgenommen wird. Der Betrag am Ende der betrachteten Periode ist dann

$$M_n(Dr_{n0} + \delta_n \cdot (1 - Dr_{n0})).$$

Nun wird analog zu vorhin vorgegangen.  $\delta_n$  sei abhängig von einem Faktor  $G_n$ , der einem Einfaktormodell unterliegt, also die Gleichung

$$G_n = \sqrt{\rho_G}Y + \sqrt{1 - \rho_G}\epsilon_{n,G}$$

erfüllt. Dieses  $\delta$  wird in Abhängigkeit von  $G$  durch eine Treppenfunktion angenähert:

$$\delta_n(G_n) = \begin{cases} 0, & A_{n,1} \leq G_n \\ \frac{1}{m}, & A_{n,2} \leq G_n < A_{n,1} \\ \frac{2}{m}, & A_{n,3} \leq G_n < A_{n,2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{m-1}{m}, & A_{n,m} \leq G_n < A_{n,m-1} \\ 1, & G_n < A_{n,m} \end{cases}$$

mit  $A_{n,m} < A_{n,m-1} < \dots < A_{n,1}$ . Auch hier gilt mit derselben Überlegung wie vorhin

$$A_{n,i} = \Phi^{-1}(1 - F_\delta(i - 1)), i = 1, \dots, m.$$

#### 4.3.3.3 Zusammenführung

Ausgangspunkt in dieser Erweiterung ist das bereits bekannte Einfaktormodell aus Gleichung 4.1, das die Bonitätsindikatoren  $Y_n$  spezifiziert:

$$V_n = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1 - \rho}\epsilon_n,$$

<sup>24</sup>Unter revolvingenden Krediten versteht man Kredite, die vom Kreditnehmer bis zur maximalen Höhe einer Kreditlinie wiederholt in Anspruch genommen werden können

wobei  $Y, \epsilon_n \sim N(0, 1)$  und  $Y$  und  $\epsilon_n$  sowie  $\epsilon_n$  und  $\epsilon_m$  stochastisch unabhängig für  $n \neq m$ .

Ausfall tritt genau dann ein, wenn der Bonitätsindikator eine vorgegebene Schranke  $K_n$  unterschreitet:  $V_n < K_n$ . In diesem Fall ist der Ausfallindikator  $D_n$  aus der Basisgleichung

$$L = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot D_n$$

gleich 1, das heißt  $D_n = 1 \Leftrightarrow V_n < K_n$ .

Da nun  $EAD$  und  $LGD$  nicht mehr als deterministisch festgelegt werden, kommen nun noch zwei Gleichungen, die der Grundidee des Einfaktormodells entsprechen, hinzu - jene für die Variable  $\delta_n(G_n)$  für  $EAD$

$$\begin{aligned} G_n &= \sqrt{\rho_G}Y + \sqrt{1 - \rho_G}\epsilon_{n,G} \text{ mit} \\ A_{n,i} &= \Phi^{-1}(1 - F_\delta(i - 1)), i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.29)$$

und jene für  $LGD_n(F_n)$

$$\begin{aligned} F_n &= \sqrt{\rho_F}Y + \sqrt{1 - \rho_F}\epsilon_{n,F} \text{ mit} \\ B_{n,i} &= \Phi^{-1}(1 - F_{LGD}(i - 1)), i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Diese Gleichungen wurden bereits in den Kapiteln 4.3.3.1 und 4.3.3.2 hergeleitet.  $m$  bezeichnet dabei die Feinheit der zwei Approximationen mittels Treppenstufen. Zu beachten ist auch, dass alle drei Variablen  $V_n$ ,  $G_n$  und  $F_n$  den Faktor  $Y$  gemeinsam haben. Damit bleiben bedingt auf eine Realisation  $y$  des Faktors  $Y$  nur mehr die idiosynkratischen Risiken übrig. Da sich diese nur auf einen einzelnen Kredit beziehen kann man hier von einer Unabhängigkeit untereinander ausgehen. Die bedingten Indikatorfunktionen sind also stochastisch unabhängig.

Mithilfe der Ausfallindikatoren

$$\begin{aligned} 1_{K_n}(V_n) &= \begin{cases} 1, & V_n < K_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ 1_{A_{ni}}(G_n) &= \begin{cases} 1, & G_n < A_{ni} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ 1_{B_{ni}}(F_n) &= \begin{cases} 1, & F_n < B_{ni} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

kann nun die Verlustrate für den  $n$ -ten Kreditnehmer angegeben werden:

$$L_n(V_n, G_n, F_n) = 1_{K_n}(V_n) \left( \left( Dr_{i0} + (1 - Dr_{i0}) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{A_{ni}}(G_n) \right) \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{B_{ni}}(F_n) \right) \right).$$

Nun kann auf eine Realisation  $y$  des Faktors  $Y$  bedingt werden:

$$L_n(V_n, G_n, F_n | Y = y) = 1_{K_n}(V_n | y) \cdot \left( \left( Dr_{i0} + (1 - Dr_{i0}) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{A_{ni}}(G_n | y) \right) \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{B_{ni}}(F_n | y) \right) \right). \quad (4.31)$$

Betrachtet man den Erwartungswert des Produkts dieser drei Indikatorfunktionen, so gilt aufgrund der Unabhängigkeit der bedingten Verteilungsfunktion der einzelnen Variablen:

$$E(1_{K_n}(V_n|y) \cdot 1_{A_{ni}}(G_n|y) \cdot 1_{B_{ni}}(F_n|y)) = E(1_{K_n}(V_n|y)) \cdot E(1_{A_{ni}}(G_n|y)) \cdot E(1_{B_{ni}}(F_n|y))$$

Dies kann direkt zur Berechnung der erwarteten Verlustrate in Gleichung 4.31 verwendet werden und es ergibt sich

$$E(L_n(V_n, G_n, F_n|Y = y)) = E(1_{K_n}(V_n|y)) \cdot \left( \left( Dr_{i0} + (1 - Dr_{i0}) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(1_{A_{ni}}(G_n|y)) \right) \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(1_{B_{ni}}(F_n|y)) \right) \right).$$

Die Erwartungswerte der Indikatorfunktionen können wegen der Annahme der Normalverteilung explizit angegeben werden:

$$\begin{aligned} E(1_{K_n}(V_n|y)) &\stackrel{(4.7)}{=} \Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \text{ und analog} \\ E(1_{A_{ni}}(G_n|y)) &= \Phi\left(\frac{A_{ni} - \sqrt{\rho_G}y}{\sqrt{1 - \rho_G}}\right) \\ E(1_{B_{ni}}(F_n|y)) &= \Phi\left(\frac{B_{ni} - \sqrt{\rho_F}y}{\sqrt{1 - \rho_F}}\right), \end{aligned}$$

womit insgesamt

$$E(L_n(V_n, G_n, F_n|Y = y)) = \Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \cdot \left( \left( Dr_{i0} + (1 - Dr_{i0}) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{A_{ni} - \sqrt{\rho_G}y}{\sqrt{1 - \rho_G}}\right) \right) \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{B_{ni} - \sqrt{\rho_F}y}{\sqrt{1 - \rho_F}}\right) \right) \right).$$

folgt.

Da die Verlustrate monoton fallend in  $y$  ist entspricht  $E(L_n(V_n, G_n, F_n|Y = \Phi^{-1}(1 - \alpha)))$  dem  $\alpha$ -Quantil der Funktion (und damit dem Value at Risk zum Niveau  $\alpha$ ). Wegen  $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$  sowie den Gleichungen 4.29 und 4.30 gilt somit im Spezialfall  $y = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L_n) &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_n) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \\ &\cdot \left( \left( Dr_{i0} + (1 - Dr_{i0}) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(1 - F_\delta(i-1)) + \sqrt{\rho_G}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_G}}\right) \right) \right. \\ &\cdot \left. \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(1 - F_{LGD}(i-1)) + \sqrt{\rho_F}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_F}}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Der erste Term entspricht exakt jenem aus Gleichung 4.18 - dies stellt den Value at Risk im Fall, dass  $EAD$  und  $LGD$  deterministisch gewählt werden dar. Der Unterschied im Vergleich zum Basis-Einfaktormodell besteht also in der Multiplikation der letzten zwei Terme. Der mittlere Term stellt dabei eine Approximation der bedingten Ausfallhöhe dar, der dritte Term spiegelt eine Annäherung der bedingten Verlustrate bei Ausfall wider.

## 4.4 Granularitätsanpassung

Das Konzept der Granularitätsanpassung für den Fall des Einfaktormodells wurde von Gordy im Jahr 2000 das erste Mal angedacht. Seither gab es zahlreiche Zusatzüberlegungen und Erweiterungen, zum Beispiel durch Wilde (2001), Phytkin und Dev (2002), Gordy und Lütkebohmert (2007) aber auch durch Emmer und Tasche (2005). Deren Ansatz soll im Folgenden allgemein vorgestellt und im Fall des Einfaktormodells präzisiert werden.

Die Idee der Granularitätsanpassung findet sich auch im Kontext von Basel II wieder. Dort wird im Internen Ratingansatz grundsätzlich davon ausgegangen, dass das betrachtete Portfolio perfekt diversifiziert (granular) ist, das heißt, dass die idiosynkratischen Faktoren  $\epsilon_n$  des einzelnen Schuldners keinen Beitrag zum Portfoliorisiko leisten. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Anteil eines einzelnen Portfolios gegen Null geht und dessen unternehmensspezifisches Risiko daher nicht mehr berücksichtigt werden muss - eine genaue mathematische Definition findet sich in Gleichung 4.16.<sup>25</sup> Dies kann in der Praxis auf sehr große Portfolios zutreffen, ist aber bei weitem nicht immer der Fall. Die Methode der Granularitätsanpassung erlaubt es nun, kreditnehmerspezifische Risiken miteinzubeziehen.

Die Grundidee besteht darin, den Portfolioverlust  $L$  in Abhängigkeit eines Faktors  $Y$  zu modellieren. Der auf  $Y$  bedingte Erwartungswert des Verlustes  $E(L|Y)$  soll den systematischen Teil des Verlustes darstellen.<sup>26</sup>

Zu Beginn soll ein Lemma formuliert werden, das im Laufe dieses Unterkapitels seine Anwendung findet.

### Lemma 4.4.1 (Faktorisierungslemma)

Sei  $(F, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum und  $Y : \Omega \rightarrow F$  eine Abbildung. Eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist messbar bezüglich der von  $Y$  erzeugten Sigma-Algebra  $\sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{F})$  genau dann, wenn  $X = f(Y)$  für eine  $\mathcal{F}$ -messbare Funktion  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  gilt.

**Beweis** <sup>27</sup> " $\Leftarrow$ " Gilt  $X = f(Y)$  für eine messbare Funktion  $f$ , dann folgt

$$X^{-1}(B) = Y^{-1}(f^{-1}(B)) \in \sigma(Y) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

(wobei  $\mathcal{B}$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra der reellen Zahlen bezeichne), weil  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . Daher ist  $X$   $\sigma(Y)$ -messbar.

" $\Rightarrow$ " Um zu zeigen, dass  $X$  eine messbare Funktion von  $Y$  ist wird schrittweise vorgegangen:

- (i) Sei für  $A \in \sigma(Y)$   $X = I_A$  eine Indikatorfunktion. Dann gilt  $A = Y^{-1}(B)$  für  $B \in \mathcal{F}$  und somit

$$X(\omega) = I_{Y^{-1}(B)}(\omega) = I_B(Y(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

<sup>25</sup>Die Risikogewichte in Basel II beinhalten einen Sicherheitsaufschlag, um nicht perfekt diversifizierte Risiken zu berücksichtigen. Zusätzlich gibt es auch dort die Möglichkeit der Granularitätsanpassung, indem die Risikogewichte noch einmal zusätzlich die Granularität der Bankportfolios miteinbeziehen (Details siehe [2] [2001]).

<sup>26</sup>Im Fall des Einfaktormodells wird  $Y$  jenes aus Gleichung 4.1 sein, der systematische Faktor.

<sup>27</sup>siehe Eberle [2014].

(ii) Gilt nun für  $A_i \in \sigma(Y)$  und  $c_i \in \mathbb{R}$ , dass  $X = \sum_{i=1}^n c_i I_{A_i}$ , so folgt

$$X = \sum_{i=1}^n c_i I_{B_i}(Y)$$

mit  $A_i = Y^{-1}(B_i)$  für  $B_i \in \mathcal{F}$ .

(iii) Für eine beliebige nichtnegative,  $\sigma(Y)$ -messbare Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existiert eine Folge  $(X_n)$  von  $\sigma(Y)$ -messbaren Funktionen mit  $X_n \rightarrow X$ . Nach dem zweiten Punkt gilt  $X_n = f_n(Y)$  für eine  $\mathcal{F}$ -messbare Funktion  $f_n$ . Somit gilt

$$X = \sup X_n = \sup f_n(Y) = f(Y)$$

mit  $f = \sup f_n$   $\mathcal{F}$ -messbar.

(iv) Für eine allgemeine  $\sigma(Y)$ -messbare Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind sowohl  $X^+$  als auch  $X^-$  messbare Funktionen von  $Y$  und daher auch  $X = X^+ + X^-$ .  $\square$

Ist nun  $Y : \Omega \rightarrow F$  eine Zufallsvariable, so ist  $E(L|Y)$   $\sigma(Y)$ -messbar und kann daher nach dem Faktorisierungslemma als Funktion  $g$  in Abhängigkeit von  $Y$  angegeben werden:

$$E(L|Y) =: g(Y),$$

wobei  $g$  eine reelle, messbare Funktion ist. Im Folgenden soll angenommen werden, dass  $g$  stetig und monoton ist.<sup>28</sup> Wie sich herausstellen wird ist  $g$  im Fall des Einfaktormodells monoton fallend, daher wird auch hier im Folgenden nur dieser Fall betrachtet (das heißt, der Fall, dass  $g$  monoton steigend ist wird hier nicht diskutiert).

Allgemein gilt nun folgender Satz.

**Satz 4.4.2** *Seien zwei Zufallsvariablen  $L$  und  $Y$  gegeben. Die Funktion  $g(Y) = E(L|Y)$  sei stetig und monoton fallend. Dann kann der Value at Risk der Variable  $L$  zum Niveau  $\alpha$  durch*

$$q_\alpha(L) \approx q_\alpha(E(L|Y)) - \frac{1}{2 \cdot g'(y)} \left[ \frac{\partial \text{Var}(L|Y=y)}{\partial y} + \text{Var}(L|Y=y) \left( \frac{h'(y)}{h(y)} - \frac{g''(y)}{g'(y)} \right) \right] \Big|_{y=q_{1-\alpha}(Y)}$$

approximiert werden, wobei  $h$  die Dichte von  $Y$  darstellt.

**Beweis** Es gilt wegen  $L = E(L|Y) + L - E(L|Y)$  auch  $L = E(L|Y) + h(L - E(L|Y))$  mit  $h = 1$ . Diese an sich triviale Beobachtung kann nun genutzt werden, um die Taylorentwicklung zweiten Grades des  $\alpha$ -Quantils von  $L$  (und damit wegen Gleichung 3.2 auch des Value at Risk zum Niveau  $\alpha$ ) angeben zu können:

$$\begin{aligned} q_\alpha(L) &= q_\alpha(E(L|Y) + h(L - E(L|Y))) \Big|_{h=1} \\ &\approx q_\alpha(E(L|Y)) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial h}(E(L|Y) + h(L - E(L|Y))) \Big|_{h=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial h^2}(E(L|Y) + h(L - E(L|Y))) \Big|_{h=0} \end{aligned}$$

<sup>28</sup>Dies stellt natürlich eine Einschränkung dar, wird in Emmer und Tasche [2005] aber so angenommen, um Kennzahlen wie Quantile leichter berechnen zu können.

Die Differenz  $q_\alpha(L) - q_\alpha(E(L|Y))$  beschreibt dabei die Anpassung für den Fall eines nicht perfekt diversifizierten Portfolios. Diese kann nicht in analytischer Form angegeben werden, deswegen wird auf Näherungen (hier in Form der Taylorentwicklung) zurückgegriffen, siehe Gordy und Lütkebohmert [2007].

Die erste partielle Ableitung kann nach einem Ergebnis aus Gourieroux, Laurent und Scaillet [2000] berechnet werden, indem berücksichtigt wird, dass bei monoton fallendem  $g$  stets  $q_\alpha(E(L|Y)) = E(L|q_{1-\alpha}(Y))$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_\alpha}{\partial h}(E(L|Y) + h(L - E(L|Y))) \Big|_{h=0} &= E(L - E(L|Y) | E(L|Y) = q_\alpha(E(L|Y))) \\ &= E(L - E(L|q_{1-\alpha}(Y))) \\ &= E(L) - \underbrace{E(E(L|q_{1-\alpha}(Y)))}_{=E(L)} = 0 \end{aligned}$$

Gourieroux, Laurent und Scaillet [2000] kann ein ähnliches Ergebnis wie vorhin für die zweite partielle Ableitung entnommen werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial h^2}(E(L|Y) + h(L - E(L|Y))) \Big|_{h=0} &= -\frac{1}{2h(y)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\text{Var}(L|Y=y)h(y)}{g'(y)} \Big|_{y=q_{1-\alpha}(Y)} \\ &= -\frac{1}{2h(y)} \cdot \frac{\partial \text{Var}(L|Y=y)}{\partial y} \cdot \frac{h(y)}{g'(y)} \Big|_{y=q_{1-\alpha}(Y)} \\ &\quad - \frac{\text{Var}(L|Y=y)}{2h(y)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{h(y)}{g'(y)} \Big|_{y=q_{1-\alpha}(Y)} \\ &= -\frac{1}{2 \cdot g'(y)} \frac{\partial \text{Var}(L|Y=y)}{\partial y} \\ &\quad + \text{Var}(L|Y=y) \left( \frac{h'(y)}{h(y)} - \frac{g''(y)}{g'(y)} \right) \Big|_{y=q_{1-\alpha}(Y)} \end{aligned}$$

wobei  $h(y)$  die Dichte von  $Y$  darstellt.

Die dritte Gleichheit gilt wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{h(y)}{g'(y)} &= \frac{h'(y) \cdot g'(y) - h(y) \cdot g''(y)}{(g'(y))^2} \\ &= \frac{h'(y)}{g'(y)} - \frac{h(y) \cdot g''(y)}{(g'(y))^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{h(y)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{h(y)}{g'(y)} &= \frac{h'(y)}{h(y) \cdot g'(y)} - \frac{g''(y)}{(g'(y))^2} \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies nun obige Gleichung. □

Betrachtet man nun das übliche Einfaktormodell unter dem Basisausfallmodell, in dem

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot D_n \\ V_n &= \sqrt{\rho_n} Y + \sqrt{1 - \rho_n} \epsilon_n \\ D_n &= 1 \Leftrightarrow V_n < K_n \end{aligned}$$

gelten, so kann die Gleichung in Satz 4.4.2 spezifiziert werden.

**Satz 4.4.3** *Im Einfaktormodell kann der Value at Risk zum Niveau  $\alpha$  durch*

$$q_\alpha(L) \approx g(q_{1-\alpha}(Y)) + \frac{1}{2g'(q_{1-\alpha}(Y))} \cdot \sum_{n=1}^N EAD_n^2 \cdot LGD_n^2 \cdot \left[ \frac{\sqrt{\rho_n}}{\sqrt{1-\rho_n}} \varphi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho_n}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho_n}}\right) \left(1 - 2\Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho_n}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho_n}}\right)\right) + \left(q_{1-\alpha}(Y) + \frac{g''(q_{1-\alpha}(Y))}{g'(q_{1-\alpha}(Y))}\right) \cdot \Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho_n}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho_n}}\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho_n}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho_n}}\right)\right) \right]$$

approximiert werden.

Ein Spezialfall dieser Gleichung ergibt sich durch

$$\rho_n = \rho, K_n = K, \text{ und } \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n = 1, n = 1, \dots, N$$

Das Produkt  $EAD_n \cdot LGD_n$  repräsentiert dabei das relative Gewicht des  $n$ -ten Schuldners im Gesamtportfolio. Insgesamt ergibt sich somit vereinfachend

$$q_\alpha(L) \approx \Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right) + \left(2 \cdot \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \cdot \Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^N EAD_n^2 \cdot LGD_n^2 \cdot \left[ \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \varphi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \left(1 - 2\Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right) + \left(q_{1-\alpha}(Y) - \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \frac{K - \sqrt{\rho}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \cdot \Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{K - \sqrt{\rho}q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right) \right]$$

**Beweis** Nach 4.7 gilt

$$\begin{aligned} g(Y) &= E(L|Y) \\ &= \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot \Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho_n}Y}{\sqrt{1-\rho_n}}\right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$g(Y)$  ist in diesem konkreten Fall also monoton fallend in  $Y$ , da  $\Phi$  monoton wachsend ist. Auch die bedingte Varianz wurde bereits in Gleichung 2.6 hergeleitet:

$$Var(L|Y) = \sum_{n=1}^N EAD_n^2 \cdot LGD_n^2 \cdot \Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho_n}Y}{\sqrt{1-\rho_n}}\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{K_n - \sqrt{\rho_n}Y}{\sqrt{1-\rho_n}}\right)\right)$$

Da  $Y$  standardnormalverteilt ist ist die dazugehörige Dichte durch  $h(y) = \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$  gegeben. Damit ist auch deren Ableitung bekannt:  $\varphi'(y) = -y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$ . Um obige Formel vollständig angeben zu können wird noch der Quotient

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(q_{1-\alpha}(Y))}{\varphi(q_{1-\alpha}(Y))} &= \frac{-\sqrt{2\pi} \cdot q_{1-\alpha}(Y) \cdot e^{-0.5(q_{1-\alpha}(Y))^2}}{\sqrt{2\pi} e^{-0.5(q_{1-\alpha}(Y))^2}} \\ &= -q_{1-\alpha}(Y). \end{aligned}$$

benötigt.

Die Approximation des  $\alpha$ -Quantils des Verlustes ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung aus Satz 4.4.2 und mehrmaliger Verwendung der Kettenregel.  $\square$

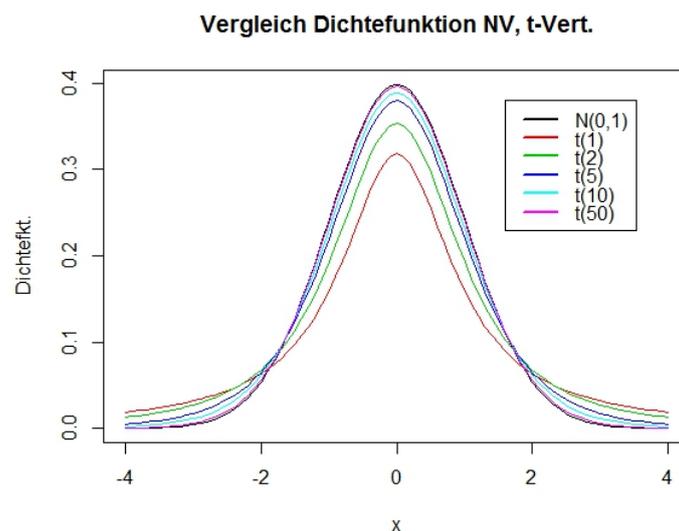
Emmer und Tasche [2005] zeigen anhand numerischer Beispiele, dass die Granularitätsanpassung im Fall hoher Konzentrationen zwischen den einzelnen Schuldnern zu falschen Aussagen führen kann; existieren diese Konzentrationen aber nicht, so ist die Qualität der Approximation sehr gut.



# Kapitel 5

## Verallgemeinerung Einfaktormodell und numerische Analyse

In Kapitel 4.1.1 wurde für das Einfaktormodell für  $Y$  und  $\epsilon$  eine Standardnormalverteilung angenommen. Diese Annahme soll in diesem Kapitel fallen gelassen und mit anderen Verteilungsannahmen verglichen werden. Das geschieht im Zuge einer numerischen Analyse. Diese erfolgt an dieser Stelle, da sie sich einschließlich auf das Einfaktormodell bezieht. Im Kontext des Kreditrisikos wird meist anstelle der Normalverteilung von einer t-Verteilung ausgegangen, da diese bei geeigneter Wahl der Freiheitsgrade mehr Gewicht in den Rändern aufweist. Mit steigender Anzahl an Freiheitsgraden kann die Normalverteilung durch die t-Verteilung angenähert werden, siehe Abbildung 5.1.<sup>29</sup>



**Abbildung 5.1:** Vergleich Dichtefunktion Normalverteilung, t-Verteilung

Eine Motivation zur Verwendung der t-Verteilung anstelle der Normalverteilung findet sich auch

<sup>29</sup>Ab einer Anzahl an Freiheitsgraden von 30 kann man sagen, dass die t-Verteilung nahe an der Normalverteilung ist, siehe Stoyanov, Rachev, Racheva-Iotova und Fabozzi [2011].

in Frey, McNeil und Nyfeler [2001] wieder:

[...] *Some of these copulas, such as the  $t$  copula possess tail dependence and, in contrast to the multivariate normal, they have a much greater tendency to generate simultaneous extreme values. This effect is highly important in latent variable models [...].*

## 5.1 Mathematische Grundlagen

Im Fall allgemeiner Verteilungen gelte für die Bonitätsindikatoren

$$V_n = \sqrt{\rho_n}Y + \sqrt{1 - \rho_n}\epsilon_n, \quad (5.1)$$

wobei  $Y \sim G$  und  $\epsilon_n \sim H_n$  und  $Y$  und  $\epsilon_n$  sowie  $\epsilon_n$  und  $\epsilon_m$  stochastisch unabhängig für  $n \neq m$ . Weiters bezeichne  $F_n$  die Verteilung von  $V_n$ , diese ist aufgrund obiger Gleichung von  $G$  und  $H_n$  abhängig.

Auch in diesem Fall wird ein homogenes Portfolio betrachtet, das heißt  $p_n = p, \rho_n = \rho$  und damit auch  $K_n = K, \forall n = 1, \dots, N$ .

Schon in Gleichung 4.4 wurde auf die Beziehung zwischen der Ausfallschranke  $K$  und der Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  verwiesen. In allgemeiner Form gilt dies auch hier:

$$p = P(V_n \leq K) = F_n(K) \Rightarrow K = F_n^{-1}(p). \quad (5.2)$$

Im Fall allgemeiner Verteilungen gilt folgender Satz.

**Satz 5.1.1** *Bezeichne  $D := D_1 + \dots + D_N$  die Anzahl an Ausfällen in der betrachteten Zeitperiode. Nimmt man an, dass die Defaultvariablen  $D_n$  unabhängig sind, so gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $n$  Schuldner ausfallen:*

$$P(D = n) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{n} \left( H_n \left( \frac{F_n^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^n \left( 1 - H_n \left( \frac{F_n^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^{N-n} g(y) dy, \quad (5.3)$$

wobei  $g$  die Dichtefunktion zur Verteilung  $G$  des systematischen Faktors  $Y$  bezeichnet.

Die Verteilungsfunktion der Ausfälle - die Wahrscheinlichkeit, dass bis zu  $n$  Schuldner ausfallen - berechnet sich über

$$P(D \leq n) = \sum_{i=0}^n \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{i} \left( H_i \left( \frac{F_i^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^i \left( 1 - H_i \left( \frac{F_i^{-1}(p) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^{N-i} g(y) dy \quad (5.4)$$

**Beweis** Der Beweis geht analog zum Fall der Standardnormalverteilung, siehe Kapitel 4.1.1 und wird daher an dieser Stelle nicht gebracht.  $\square$

Wie auch im Fall der Standardnormalverteilung für  $Y$  und  $\epsilon$  kann die Verlustverteilung in einem Portfolio, in dem die Anzahl der Schuldner  $N$  beliebig groß wird,  $N \rightarrow \infty$ , in geschlossener Form angegeben werden.

**Satz 5.1.2** In einem Portfolio, in dem die Zahl  $N$  der Schuldner gegen Unendlich geht,  $N \rightarrow \infty$ , und  $F_n := F, H_n = H \forall n = 1, \dots, N$  kann die Verlustfunktion durch

$$P(\bar{D} \leq x) = 1 - G\left(\frac{F^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}H^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (5.5)$$

angegeben werden.

**Beweis** Auch in diesem Fall kann der Beweis analog zum Fall der Standardnormalverteilung erbracht werden, siehe Satz 4.1.1.  $\square$

Auch für den Value at Risk im Falle allgemeiner Verteilungen kann eine Aussage getroffen werden.

**Satz 5.1.3** Für den Value at Risk zum Niveau  $\alpha$  in einem homogenen Portfolio mit  $EAD_n = LGD_n = 1 \forall n$  sowie  $F_n := F, H_n = H \forall n$  gilt:

$$VaR_\alpha(\bar{L}_N) \approx H\left(\frac{F^{-1}(p) - \sqrt{\rho}G^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (5.6)$$

für  $N$  groß genug. Wird auf die Einschränkung  $EAD_n = LGD_n = 1$  verzichtet, aber weiterhin angenommen, dass  $EAD_n = EAD$  und  $LGD_n = LGD, \forall n$ , so muss der Wert in Formel 5.6 noch mit  $EAD \cdot LGD$  multipliziert werden.

**Beweis** Der Beweis geht analog zum Fall des klassischen Einfaktormodells, siehe Kapitel 4.2.1.  $\square$

Im konkreten Fall der  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden anstelle der Normalverteilung für  $G$  und  $H_n$  im allgemein gehaltenen Einfaktormodell 5.1 ergibt sich folgende Form:

$$\begin{aligned} V_n &= \sqrt{\rho_n} \sqrt{\frac{\nu}{Z}} Y + \sqrt{1-\rho_n} \sqrt{\frac{\nu}{Z}} \epsilon_n \\ &= \sqrt{\frac{\nu}{Z}} (\sqrt{\rho_n} Y + \sqrt{1-\rho_n} \epsilon_n) \end{aligned}$$

wobei  $Y, \epsilon_n \sim N(0, 1)$  und  $Z \sim \chi_\nu^2$  und  $Y$  und  $\epsilon_n$  sowie  $\epsilon_n$  und  $\epsilon_m$  stochastisch unabhängig für  $n \neq m$ . Damit folgen nach Definition  $\sqrt{\frac{\nu}{Z}} Y$  und  $\sqrt{\frac{\nu}{Z}} \epsilon_n$  einer  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden. Nach Konstruktion ist somit auch  $V_n$   $t$ -verteilt:  $V_n \sim t_\nu$ .

Daher gilt in Satz 5.1.1, 4.1.1 sowie in Satz 5.1.3, dass  $G = H_n = F_n \sim t_\nu \forall n = 1, \dots, N$ . Aufgrund der Symmetrie der  $t$ -Verteilung lässt sich Gleichung 5.6 zu

$$VaR_\alpha(\bar{L}_N) \approx t_\nu\left(\frac{t_\nu^{-1}(p) + \sqrt{\rho}t_\nu^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (5.7)$$

vereinfachen.

## 5.2 Numerische Analyse

Dieses Unterkapitel - die Simulationsstudie - ist an Butenko [2014] angelehnt. Ziel ist es, die empirische Verlustverteilung mittels Monte-Carlo-Simulation zu berechnen und daraus Aussagen über diverse Risikokennzahlen wie den Erwartungswert oder den Value at Risk (in Abhängigkeit der gewählten Verteilung) treffen zu können. Alle vorliegenden Beispiele wurden in R erstellt.

Die Vorgehensweise der Simulation in den folgenden Beispielen beruht immer auf folgendem Schema:

1. Fixiere die Größe des Portfolios  $N$  sowie die Anzahl der Monte-Carlo-Simulationen  $N_{MC}$
2. Fixiere die zu betrachtende Verteilung  $F$  ( $N(0, 1)$  oder  $t_\nu$ ).
3. Für  $i = 1, \dots, N_{MC}$  berechne den Portfolioverlust  $L_i$ , der sich aus dem  $i$ -ten Simulationsschritt ergibt, wie folgt:
  - (a) Erzeuge unabhängige Zufallsvektoren  $p, \rho, EAD, LGD$  der Länge  $N$ , indem aus einer vorgegebenen Verteilung simuliert wird
  - (b) Erzeuge unabhängige Zufallsvektoren  $Y, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \sim F$ . Daraus ergibt sich

$$V_n = \sqrt{\rho_n}Y + \sqrt{1 - \rho_n}\epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N$$

- (c)  $L_i$  berechnet sich schließlich über

$$L_i = \sum_{n=1}^N EAD_n \cdot LGD_n \cdot 1_{V_n < F^{-1}(p_n)} \quad (5.8)$$

Werden gewisse Parameter deterministisch vorgegeben, so entfällt Punkt 3a (ganz oder teilweise).

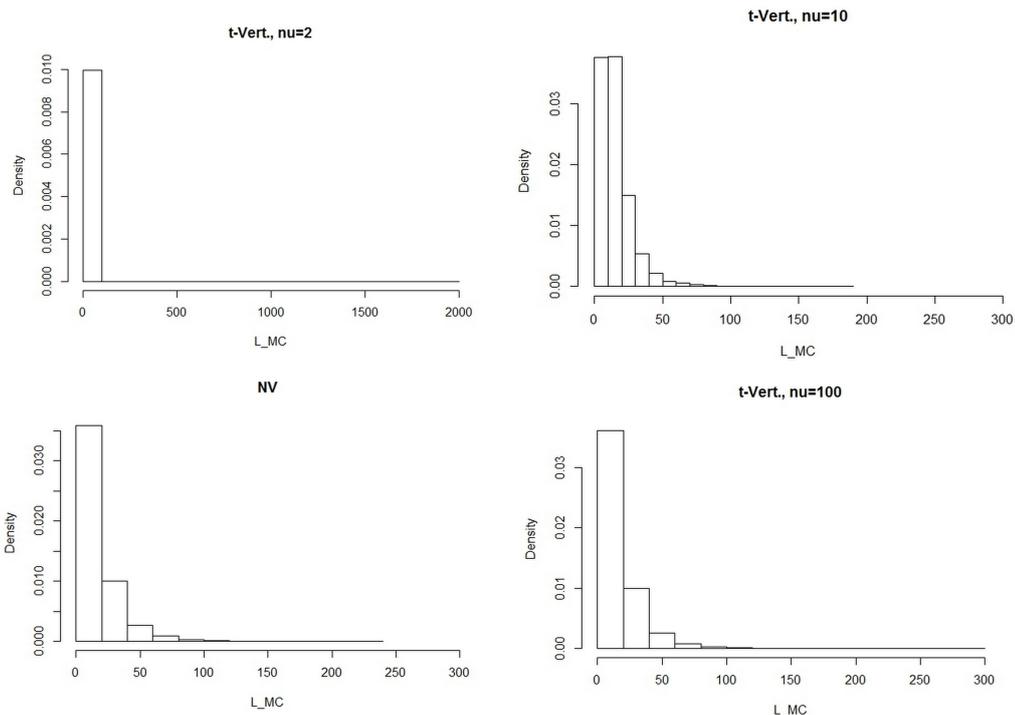
Nun werden verschiedenste Beispiele betrachtet. Der jeweilige Code findet sich im Projekt, das im Zuge dieser Masterarbeit entstanden ist.

**Beispiel 2** Das erste Beispiel in diesem Unterkapitel ist an Martin, Reitz und Wehn [2006], Beispiel 3.4, angelehnt. Dabei werden die Parameter  $EAD_n = LGD_n = 1 \forall n = 1, \dots, N$  sowie  $\rho = 0.1$  und auch die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  (siehe Tabelle 5.1) auf fixe Werte gesetzt und die Auswirkungen der einzelnen Verteilungsannahmen für  $Y$  und  $\epsilon$  untersucht. Es wird von einem Portfolio mit  $N = 2000$  Schuldnern ausgegangen, pro Portfolio werden  $N_{MC} = 10000$  Simulationen durchgeführt.

Den Ergebnissen, siehe Abbildung 5.2, kann man entnehmen, dass für eine  $t$ -Verteilung mit 100 Freiheitsgraden eine sehr, sehr große Ähnlichkeit mit der Normalverteilung besteht, auch für 10 Freiheitsgrade erkennt man eine Ähnlichkeit.

Kategorie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Kredite	150	200	150	300	450	200	150	200	100	100
$p$ (in Prozent)	0.09	0.14	0.4	0.81	0.82	0.98	1.17	1.27	1.79	1.84

**Tabelle 5.1:** Ausfallwahrscheinlichkeiten, Beispiel 2  
aus: Martin, Reitz und Wehn [2006], Beispiel 3.4



**Abbildung 5.2:** Verlustverteilung für  $\rho = 0.1$ ,  $EAD = LGD = 1$

**Beispiel 3** Durch Fixieren der Variablen  $EAD_n, LGD_n, p_n, n = 1, \dots, N$  sowie  $\rho$  sollen nun die Schätzer der einzelnen Risikomaße der zufälligen Verlustquote

$$\bar{L}_N = \sum_{n=1}^N w_n^{(N)} \cdot LGD_n \cdot D_n \text{ mit } w_n^{(N)} = \frac{EAD_n}{\sum_{m=1}^N EAD_m} \quad (5.9)$$

durch Monte-Carlo-Simulation berechnet und infolgedessen mit den analytischen Werten verglichen werden. Setze  $EAD := EAD_n = 1$ ,  $LGD := LGD_n = 1 \forall n = 1, \dots, N$ ,  $\rho = 0.1$ . Dann gilt  $w_n^{(N)} = \frac{1}{N}$ . Die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p$  seien wie in Tabelle 5.1 mit jeweils halber Anzahl an Krediten gegeben. Daher wird von einem Portfolio mit  $N = 1000$  Schuldner ausgegangen. Die Anzahl der Monte-Carlo-Simulationen betrage 10000. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 5.2.

Durch Bildung des Erwartungswerts in Gleichung 5.9 ergibt sich insgesamt für den Erwartungswert der zufälligen Verlustquote in diesem Beispiel:

$$E(\bar{L}_N) = \frac{1}{N} \cdot LGD \sum_{n=1}^N p_n = 0.00851$$

	t-Vert.			NV
	$\nu = 2$	$\nu = 10$	$\nu = 100$	
EL	0.00889	0.00808	0.00855	0.00845
std	0.02319	0.00691	0.00863	0.00853
$VaR_{0.90}$	0.01200	0.01500	0.01900	0.01900
$VaR_{0.95}$	0.01400	0.02000	0.02500	0.02500
$EC_{0.90}$	0.00311	0.00692	0.01044	0.01055
$EC_{0.95}$	0.00511	0.01192	0.01644	0.01655

**Tabelle 5.2:** Schätzer Risikokennzahlen, Beispiel 3

Da  $\overline{L}_N$  nur von den (in diesem Fall) deterministischen Variablen  $EAD$ ,  $LGD$  und  $p_n$  abhängig ist ist auch der Erwartungswert  $E(\overline{L}_N)$  unabhängig vom gewählten Modell, also für alle Modelle konstant. Die restlichen Kennzahlen hingegen sind abhängig vom gewählten Modell. Die Varianz kann aus Gleichung 5.9 über

$$\begin{aligned} \text{Var}(\overline{L}_N) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N w_n^{(N)} \cdot LGD_n \cdot w_m^{(N)} \cdot LGD_m \cdot \rho_{nm} \cdot \sigma_n \cdot \sigma_m \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \rho_{nm} \cdot \sigma_n \cdot \sigma_m \end{aligned}$$

berechnet werden. Dabei bezeichne  $\sigma_n := \sigma(D_n) = \sqrt{p_n(1-p_n)}$  die Varianz von  $D_n$  und  $\rho_{nm} := \rho(D_n, D_m)$  die Ausfallkorrelation. Nach Martin, Reitz und Wehn [2006] kann diese im Fall der Normalverteilung für  $Y$  und  $\epsilon$  durch

$$\rho_{nm} = \frac{\Phi_2(\Phi^{-1}(p_n), \Phi^{-1}(p_m), \Sigma) - p_n p_m}{\sigma_n \sigma_m},$$

wobei  $\Phi_2$  die Verteilungsfunktion einer bivariaten Normalverteilung mit Mittelwertsvektor  $\mu = (0, 0)$  und Korrelationsmatrix  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$  bezeichnet, berechnet werden. Die Standardabweichung ergibt sich dann als Wurzel aus der Varianz. Im Fall einer  $t$ -Verteilung ersetze überall die Verteilungsfunktion der Normalverteilung durch die der  $t$ -Verteilung.

Der Value at Risk ergibt sich dabei aus den Gleichungen 4.18 und 5.7, jeweils durch Multiplikation mit  $w^{(N)}$  und  $LGD$  und anschließender Summation. Da das ökonomische Kapital durch den Value at Risk und den Erwartungswert definiert ist bedarf es zu dessen Berechnung keiner gesonderten Formel.

Die simulierten Werte in Tabelle 5.2 sind in allen Fällen sehr nahe an den theoretischen aus Tabelle 5.3. Die theoretische Formel für den Value at Risk gilt nur für große Werte von  $N$  (Anzahl der Kredite) als gute Näherung für den tatsächlichen Wert, dies ist hier bei  $N = 1000$  schon der Fall.

**Beispiel 4** Das dritte Beispiel dieses Unterkapitels erfolgt in Anlehnung an Butenko [2014]. Dort werden (aufgrund historischer Erfahrungswerte) folgende Annahmen für die Simulation der einzelnen Parameter getroffen:  $LGD \sim U(0.5, 1)$ ,  $EAD \sim U(0, 1)$ ,  $p \sim U(0.01, 0.075)$ ,

	t-Vert.			NV
	$\nu = 2$	$\nu = 10$	$\nu = 100$	
Erwartungswert	0.00851	0.00851	0.00851	0.00851
Standardabweichung	0.03858	0.01814	0.00937	0.00816
Value at Risk, $\alpha = 0.90$	0.00921	0.01442	0.01773	0.01819
Value at Risk, $\alpha = 0.95$	0.01025	0.01850	0.02346	0.02414
Ökonom. Kapital, $\alpha = 0.90$	0.00070	0.00591	0.00922	0.00968
Ökonom. Kapital, $\alpha = 0.95$	0.00174	0.00999	0.01495	0.01563

**Tabelle 5.3:** Risikokennzahlen, Beispiel 3

$\rho \sim U(0.3, 0.6)$ . Dabei bezeichnet  $U(a, b)$  die Gleichverteilung im Intervall  $(a, b)$ . Im Gegensatz zu Beispiel 3 werden die Parameter hier also nicht fixiert, sondern simuliert. Die Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen liege bei 50000, die Anzahl der Kredite bei 1000. Ziel ist es nun, verschiedenste Kennzahlen für die einzelnen Verteilungen zu berechnen und zu analysieren.

Unter den oben genannten Annahmen erhalten wir das Ergebnis in Tabelle 5.4.

	t-Vert.			NV
	$\nu = 2$	$\nu = 10$	$\nu = 100$	
Erwartungswert	18.91	16.47	15.93	15.88
Standardabweichung	42.76	32.18	29.74	29.46
Value at Risk, $\alpha = 0.90$	25.17	40.67	44.57	45.48
Value at Risk, $\alpha = 0.95$	53.26	69.95	73.27	73.65
Value at Risk, $\alpha = 0.99$	287.65	171.34	152.22	148.48
Ökonom. Kapital, $\alpha = 0.99$	268.75	154.87	136.29	132.61
Expected Shortfall, $\alpha = 0.90$	103.02	91.29	88.50	88.30
Expected Shortfall, $\alpha = 0.95$	171.02	129.99	120.17	119.13

**Tabelle 5.4:** Schätzer Risikokennzahlen, Beispiel 4

Bildung des Erwartungswerts in Gleichung 5.8 ergibt in diesem Fall, da die einzelnen Parameter zwar nicht mehr deterministisch, aber unabhängig und gleichverteilt sind<sup>30</sup>

$$E(L) = \sum_{n=1}^N E(EAD_n) \cdot E(LGD_n) \cdot E(p_n) = (0.5 \cdot 0.75 \cdot 0.0425) \cdot N = 15.94$$

Auch in diesem Fall liefern die Normalverteilung sowie die t-Verteilung brauchbare Schätzer für den Erwartungswert. Da die einzelnen Parameter nun nicht mehr deterministisch sind, können für die anderen Risikokennzahlen keine geschlossenen Formeln mehr angegeben werden. Auffällig ist, dass der Value at Risk zum Niveau  $\alpha = 0.90$  sowie  $\alpha = 0.95$  mit zunehmender Anzahl an Freiheitsgraden steigt, zum Niveau  $\alpha = 0.99$  aber sinkt. Der Expected Shortfall nimmt

<sup>30</sup>Der Erwartungswert einer auf dem Intervall  $(a, b)$  gleichverteilten Zufallsvariable ist  $0.5 \cdot (a + b)$ .

für eine sinkende Anzahl an Freiheitsgraden einen immer höheren Wert an, es kann also bei Überschreitung des Value at Risk durchschnittlich mit einem höheren Verlust gerechnet werden. Um die einzelnen Verteilungsannahmen für  $Y$  und  $\epsilon$  besser vergleichen zu können, sollen noch die Werte der oben tabellarisch erfassten Risikokennzahlen der  $t$ -Verteilung in relativem Verhältnis zu denen der Normalverteilung erfasst werden, siehe Tabelle 5.5.

	t-Vert.			NV
	$\nu = 2$	$\nu = 10$	$\nu = 100$	
Erwartungswert	119%	104%	100,3%	100%
Standardabweichung	145%	109%	101%	100%
Value at Risk, $\alpha = 0.90$	55%	89%	98%	100%
Value at Risk, $\alpha = 0.95$	72%	95%	99%	100%
Value at Risk, $\alpha = 0.99$	194%	115%	103%	100%
Ökonom. Kapital, $\alpha = 0.99$	203%	117%	103%	100%
Expected Shortfall, $\alpha = 0.90$	117%	103%	100,2%	100%
Expected Shortfall, $\alpha = 0.95$	144%	109%	100,9%	100%

**Tabelle 5.5:** Schätzer Risikokennzahlen - relative Verhältnisse, Beispiel 4

**Beispiel 5** Dieses Beispiel dient der Weiterführung von Beispiel 4. Die Annahmen für die einzelnen Parameter seien dieselben, nur wird nun ein wesentlich kleineres Portfolio betrachtet. Es werde von 200 Krediten ausgegangen. Ziel ist es wieder, die Schätzer der Risikokennzahlen zu berechnen und mit jenen aus Beispiel 4 zu vergleichen. Das Ergebnis findet sich in Tabelle 5.6.

	t-Vert.			NV
	$\nu = 2$	$\nu = 10$	$\nu = 100$	
Erwartungswert	3.74	3.28	3.15	3.20
Standardabweichung	8.44	6.51	5.95	6.03
Value at Risk, $\alpha = 0.90$	5.43	8.21	8.96	9.19
Value at Risk, $\alpha = 0.95$	10.68	14.33	14.67	15.14
Value at Risk, $\alpha = 0.99$	54.84	34.30	29.79	30.29
Ökonom. Kapital, $\alpha = 0.99$	51.11	31.02	26.64	27.09
Expected Shortfall, $\alpha = 0.90$	20.43	18.49	17.65	18.02
Expected Shortfall, $\alpha = 0.95$	33.65	26.27	23.89	24.25

**Tabelle 5.6:** Schätzer Risikokennzahlen, Beispiel 5

Analog zu vorhin lässt sich der erwartete Verlust berechnen. Dieser liegt in diesem Fall bei  $E(L) = 0.01594 \cdot N = 3.188$ , da  $N = 200$ .

Für ein kleineres Portfolio wie in diesem Fall ergeben sich kleinere Werte für alle Kennzahlen: den Erwartungswert, die Standardabweichung, den Value at Risk und infolgedessen auch das Ökonomische Kapital, den Expected Shortfall. Der Unterschied zwischen den Risikokennzahlen

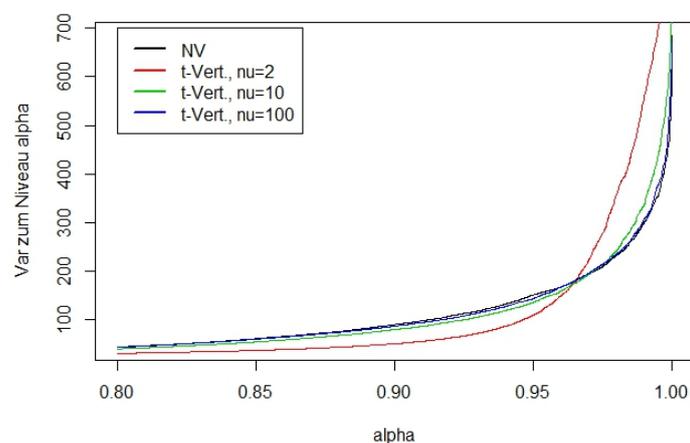
für die jeweiligen Verteilungsannahmen ist in diesem Fall aber (absolut betrachtet) nicht mehr so stark wie in Beispiel 4.

	t-Vert.			NV
	$\nu = 2$	$\nu = 10$	$\nu = 100$	
Erwartungswert	117%	102%	98%	100%
Standardabweichung	140%	108%	99%	100%
Value at Risk, $\alpha = 0.90$	59%	89%	97%	100%
Value at Risk, $\alpha = 0.95$	71%	95%	97%	100%
Value at Risk, $\alpha = 0.99$	181%	113%	98%	100%
Ökonom. Kapital, $\alpha = 0.99$	189%	115%	98%	100%
Expected Shortfall, $\alpha = 0.90$	113%	103%	98%	100%
Expected Shortfall, $\alpha = 0.95$	139%	108%	99%	100%

**Tabelle 5.7:** Schätzer Risikokennzahlen - relative Verhältnisse, Beispiel 5

Was die relativen Verhältnisse der einzelnen Verteilungsannahmen zueinander betrifft, siehe Tabelle 5.7, so macht es nicht viel Unterschied, ob ein großes Portfolio mit 1000 Krediten oder ein eher kleineres mit 200 Krediten betrachtet wird. Geringfügige Unterschiede ergeben sich durch die Ungenauigkeit der Simulation.

**Beispiel 6** Im Folgenden wird von den gleichen Annahmen für die einzelnen Parameter wie in Beispiel 4 ausgegangen. Die Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen sei 20000, die Anzahl der Kredite in einem Portfolio 2000. Nun soll der empirische Value at Risk zu verschiedenen Konfidenzniveaus für die einzelnen Verteilungsannahmen für  $Y$  und  $\epsilon$  geplottet und verglichen werden. Das Ergebnis der Simulation findet sich in Abbildung 5.3.



**Abbildung 5.3:** Value at Risk zu verschiedenen Konfidenzniveaus, Beispiel 6

Auch an diesem Beispiel ist die Annäherung der  $t$ -Verteilung an die Normalverteilung mit steigender Anzahl an Freiheitsgraden gut ersichtlich. Bis zu einem Konfidenzniveau von ca.  $\alpha = 0.97$  liegt der Wert des Value at Risk für die  $t$ -Verteilung unter dem Wert der Normalverteilung, danach ist es umgekehrt.

### 5.3 Zusammenfassung

In den vorhergehenden zwei Unterkapiteln wurde eine allgemeine Form des Einfaktormodells zur Modellierung des Kreditrisikos betrachtet. Dabei wurde in Gleichung 4.1 die Annahme der Standardnormalverteilung für  $Y$  und  $\epsilon_n, n = 1, \dots, N$  fallengelassen und durch die Annahme der  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden ersetzt. Diese Verteilung wird im Kontext des Kreditrisikos häufiger verwendet, da sie bei geeigneter Wahl der Freiheitsgrade mehr Gewicht in den Rändern als die Normalverteilung aufweist, aber analytisch trotzdem gut handhabbar bleibt. Weiters kann eine obere sowie untere Tail-Abhängigkeit ungleich Null erreicht werden.

Ziel des Projekts war es daher, verschiedene Verteilungsannahmen für  $Y$  und  $\epsilon$  zu untersuchen:

- $Y$  und  $\epsilon_n \sim N(0, 1)$
- $Y$  und  $\epsilon_n \sim t_\nu$  für verschiedene Werte von  $\nu$

Im theoretischen Teil wurde gezeigt, dass sich die Ergebnisse, die in Kapitel 4 für den Fall der Standardnormalverteilung hergeleitet wurden, eins zu eins auf den Fall der  $t$ -Verteilung übertragen lassen.

Um die Auswirkungen dieser veränderten Verteilungsannahme zu betrachten widmete sich der zweite Teil dieses Kapitels einer Simulationsstudie. Dabei wurde die empirische Verlustverteilung mittels Monte-Carlo-Simulation berechnet, infolgedessen konnten diverse Risikokennzahlen miteinander verglichen werden.<sup>31</sup>

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass Erwartungswert und Standardabweichung für eine sinkende Anzahl an Freiheitsgraden wachsen. Für ein Konfidenzniveau von  $\alpha = 0.90$  oder  $0.95$  steigt der Wert des Value at Risk bei steigender Anzahl an Freiheitsgraden der  $t$ -Verteilung, für  $\alpha = 0.99$  verhält es sich umgekehrt. Dies bestätigt (im Fall von deterministischen Werten für  $EAD, LGD, p$  und  $\rho$ ) auch der Vergleich mit den theoretischen Werten.

Der erwartete Verlust bei Überschreitung des Value at Risk (Expected Shortfall) zu den Niveaus  $\alpha = 0.90$  und  $0.95$  sinkt für steigende Anzahl an Freiheitsgraden.

Die empirische Analyse zeigte, dass keine generelle Aussage über die Beziehung des Value at Risk der  $t$ -Verteilung und der Standardnormalverteilung getroffen werden kann. Je nach Werten für die Assetkorrelation, die Ausfallwahrscheinlichkeit und das Konfidenzniveau liegt der Wert des Value at Risk im Fall der  $t$ -Verteilung über beziehungsweise unter dem der Standardnormalverteilung.

Weiters konnte anhand zweier Beispiele gezeigt werden, dass der relative Unterschied der  $t$ -Verteilung zur Standardnormalverteilung unabhängig von der Größe des betrachteten Portfolios ist.

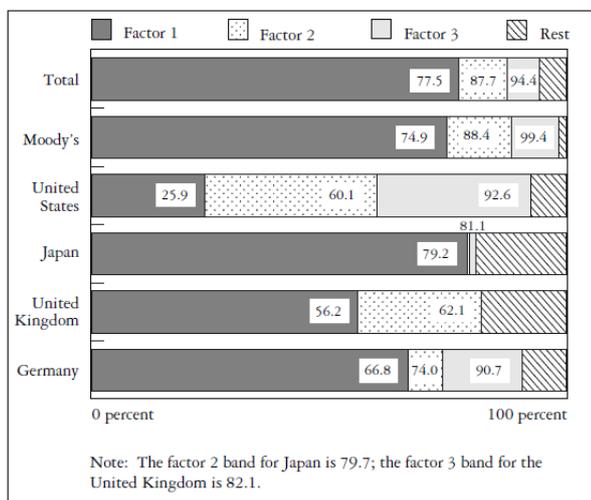
<sup>31</sup>Weitere numerische Untersuchungen können im Projekt, das zu dieser Masterarbeit entstand, nachgelesen werden.

# Kapitel 6

## Mehrfaktormodelle

Im Einfaktormodell wurde von einem Faktor ausgegangen, der die Bonitätsindikatoren beeinflusst, im Mehrfaktormodell sind es dementsprechend mehrere Faktoren, die Auswirkungen auf die Bonitätsindikatoren haben.

Eine Motivation zur Verwendung eines Mehrfaktormodells statt des Einfaktormodells gibt Wilson [1998]. Er zeigt in Abbildung 6.1, dass ein einziger Faktor nur 77,5% der gesamten Variation der Ausfallraten in ausgewählten Ländern wiedergibt. Dies entspricht dem Anteil des systematischen Risikos, der durch die meisten Einfaktormodelle beschrieben wird.



**Abbildung 6.1:** Motivation Mehrfaktormodelle  
[aus: Wilson [1998], S.74]

Weiters können Mehrfaktormodelle ein wesentlich differenzierteres Bild des Portfoliorisikos abgeben. Dies bedeutet insbesondere eine Berücksichtigung der länder- und branchenspezifischen Gegebenheiten sowie die Möglichkeit, Korrelationen zwischen einzelnen Schuldnern besser abbilden zu können.

Die genaue Spezifikation eines Mehrfaktormodells hängt von der jeweiligen Herangehensweise ab - einige Ansätze werden in diesem Kapitel präsentiert. Kapitel 6.1 beschreibt den einfachsten Fall im Mehrfaktorkontext: Das Zweifaktormodell. Dieses wird zuerst allgemein vorgestellt, im Weiteren erfolgt ein Vergleich mit dem Einfaktormodell aus Basel II. Im Fall mit mehr als zwei Faktoren gibt es sehr unterschiedliche Herangehensweisen: Sehr weit verbreitet ist eine hierarchische Struktur der Faktoreinflüsse, aber es wird auch ein allgemeiner Ansatz ohne diese Hierarchie präsentiert. Ein Schwerpunkt in diesem Unterkapitel liegt auf der Anwendung von Copulas für Mehrfaktormodelle.

## 6.1 Zweifaktormodell

Ein Modell, das zwei statt einen Faktor berücksichtigt bringt viele Vorteile gegenüber einem Einfaktormodell. In diesem Unterkapitel wird das Zweifaktormodell theoretisch betrachtet, um die Verlustverteilung herzuleiten. Die Berechnung dieser kann man auf das Lösen eines Doppelintegrals zurückführen. Im zweiten Teil wird das Zweifaktormodell mit dem Einfaktormodell verglichen. Dabei wird sich herausstellen, dass letzteres sehr einfach und gut handhabbar ist, aber dazu neigt, höhere Kapitalanforderungen zu stellen.

Der Ansatz in diesem Unterkapitel folgt weitestgehend Cespedes und Martin (2002).

### 6.1.1 Modelldefinition

Im Zweifaktormodell, das an dieser Stelle präsentiert wird, geht man von zwei korrelierten Faktoren  $Y_1, Y_2$  aus. Es wird angenommen, dass es zwei Typen von Unternehmen  $A$  und  $B$  gibt, die von jeweils einem Faktor beeinflusst werden. Weiters wird angenommen, dass es keine Unternehmen geben kann, die von beiden Faktoren beeinflusst werden.

Diese Faktoren können zum Beispiel länderspezifische Variablen sein (wie etwa die Ausfallwahrscheinlichkeit des jeweiligen Landes). Geht es nun einem Land finanziell nicht so gut, so wird sich das auch auf alle Firmen mit Sitz in diesem Land auswirken.

Die Bonitätsindikatoren  $V^A$  und  $V^B$  für Firmen vom Typ  $A$  beziehungsweise  $B$  folgen einem Einfaktormodell

$$\begin{aligned} V_n^A &= \sqrt{\rho_1} Y_1 + \sqrt{1 - \rho_1} \epsilon_{1,n} \\ V_m^B &= \sqrt{\rho_2} Y_2 + \sqrt{1 - \rho_2} \epsilon_{2,m}, \text{ wobei} \\ Y_1, Y_2, \epsilon_{1,n}, \epsilon_{2,m} &\stackrel{iid}{\sim} N(0, 1) \end{aligned}$$

Die Korrelation zwischen den beiden Faktoren wird über

$$\begin{aligned} Y_2 &= \rho_Y Y_1 + \sqrt{1 - \rho_Y^2} \xi, \\ \rho_Y &= \text{Corr}(Y_1, Y_2), \text{ wobei} \\ Y_1, Y_2, \xi &\stackrel{iid}{\sim} N(0, 1) \end{aligned} \tag{6.1}$$

berücksichtigt.

Ausfall tritt ein, wenn die Bonitätsindikatoren eine Schranke  $K_1$  beziehungsweise  $K_2$  unterschreiten. In diesem Fall können die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten wie im Einfaktorfall durch

$$\begin{aligned} p_A(y_1) &:= P(V_n^A < K_1 | Y_1 = y_1) \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1}y_1}{\sqrt{1 - \rho_1}}\right) \text{ und} \\ p_B(y_2) &:= P(V_m^B < K_2 | Y_2 = y_2) \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2}y_2}{\sqrt{1 - \rho_2}}\right) \end{aligned}$$

angegeben werden.

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt in einem Portfolio mit sehr vielen Schuldnern ( $N \rightarrow \infty$ ), dass der Bruchteil der zahlungsunfähigen Schuldner  $X$  fast sicher der Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht:<sup>32</sup>

$$P(X = n_1 p_A(y_1) + n_2 p_B(y_2) | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = 1,$$

wobei  $n_A$  ( $n_B$ ) den Anteil der Firmen Typs A (B) im Gesamtportfolio angibt. Dies kann nun mit der Turmeigenschaft dazu verwendet werden, die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als  $x\%$  der Schuldner ausfallen zu berechnen:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= E(P(X \leq x | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq x | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) \cdot \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X = n_1 p_A(y_1) + n_2 p_B(y_2) \leq x | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) \cdot \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \iint_A \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

mit  $A := \{(y_1, y_2) : n_1 p_A(y_1) + n_2 p_B(y_2) \leq x\}$ . Nun gilt es (in Abhängigkeit von  $n_1$  und  $n_2$ ) herauszufinden, welche Kombinationen von  $y_1$  und  $y_2$  die Gleichung

$$\begin{aligned} &n_1 p_A(y_1) + n_2 p_B(y_2) \leq x \text{ und daher} \\ &n_1 \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1}y_1}{\sqrt{1 - \rho_1}}\right) + n_2 \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2}y_2}{\sqrt{1 - \rho_2}}\right) \leq x \end{aligned} \tag{6.3}$$

lösen. Sei o.B.d.A.  $n_1 < n_2$ .<sup>33</sup> Die Lösungsmenge dieser Gleichung kann in tabellarischer Form angegeben werden, siehe Tabelle 6.1.

<sup>32</sup>An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass  $X = (X_1, \dots, X_M)$  nun nicht mehr den Vektor der Faktoren, die die Defaultindikatoren beeinflussen darstellt.

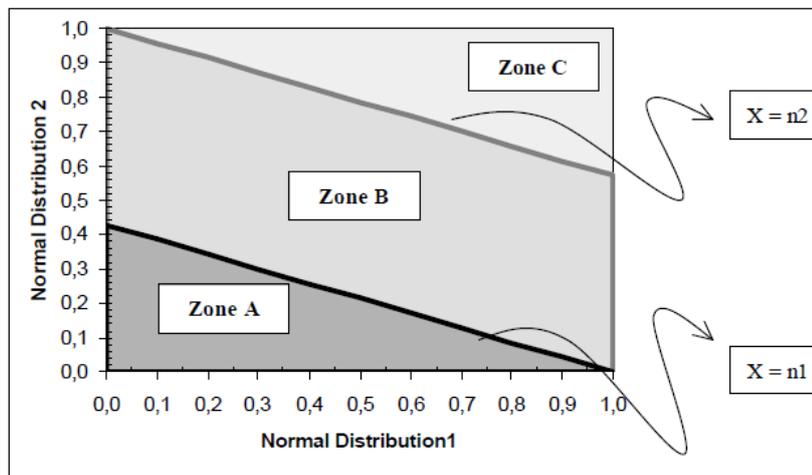
<sup>33</sup>Für den Fall  $n_2 < n_1$  können die zwei Unternehmen einfach umbenannt werden. Gilt  $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}$ , so gibt es nur zwei Zonen, die in Abbildung 6.2 durch die Gerade durch die zwei Punkte (1, 0) und (0, 1) getrennt werden (Zone B fällt also weg), die Vorgehensweise bleibt aber die gleiche.

	Zone	Einschränkung $y_1$	Einschränkung $y_2$
$x < n_1 < n_2$	A	$y_1 \geq \frac{K_1 - \sqrt{1-\rho_1}\Phi^{-1}\left(\frac{x}{n_1}\right)}{\sqrt{\rho_1}}$	$y_2 \geq \frac{K_2 - \sqrt{1-\rho_2}\Phi^{-1}\left(\frac{x-n_1\Phi_1}{n_2}\right)}{\sqrt{\rho_2}}$
$n_1 < x < n_2$	B	keine Einschränkung	$y_2 \geq \frac{K_2 - \sqrt{1-\rho_2}\Phi^{-1}\left(\frac{x-n_1\Phi_1}{n_2}\right)}{\sqrt{\rho_2}}$
$n_1 < n_2 < x$	C	$y_1 > \frac{K_1 - \sqrt{1-\rho_1}\Phi^{-1}\left(\frac{x-n_2}{n_1}\right)}{\sqrt{\rho_1}}$	keine Einschränkung
		$y_1 < \frac{K_1 - \sqrt{1-\rho_1}\Phi^{-1}\left(\frac{x-n_2}{n_1}\right)}{\sqrt{\rho_1}}$	

**Tabelle 6.1:** Einschränkungen  $y_1, y_2$  im Zweifaktormodell [aus: Cespedes und Martin, S.12]

Die Grundidee des Beweises besteht darin, alle Kombinationen der gewichteten Summe der beiden Verteilungsfunktionen wie in Abbildung 6.2 als Fläche darzustellen und sie dann in oben genannte drei Fälle einzuteilen.

Repräsentativ sollen hier nur die Grenzen für Zone A hergeleitet werden, Zone B und C funktionieren analog und können in Cespedes und Martin [2002] nachgelesen werden.



**Abbildung 6.2:** Idee Doppelintegral Zweifaktormodell [aus: Cespedes und Martin [2002], S.34]

In dieser Zone sind alle Paare  $(y_1, y_2)$ , für die

$$n_1 \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1}y_1}{\sqrt{1-\rho_1}}\right) + n_2 \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2}y_2}{\sqrt{1-\rho_2}}\right) \leq n_1$$

gilt. Da nun nach Gleichung 6.3  $x < n_1$  betrachtet man nicht die gesamte Fläche A, sondern nur

jenen Teil, der durch

$$n_1 \underbrace{\Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1}y_1}{\sqrt{1 - \rho_1}}\right)}_{=: \Phi_1} + n_2 \underbrace{\Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2}y_2}{\sqrt{1 - \rho_2}}\right)}_{=: \Phi_2} = x$$

begrenzt ist. Diese Gerade schneidet die  $x$ -Achse im Punkt  $\left(\frac{x}{n_1}, 0\right)$  (setze  $\Phi_2 = 0$  und forme nach  $\Phi_1$  um). Daher müssen für  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  folgende Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} 0 < \Phi_1 = \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1}y_1}{\sqrt{1 - \rho_1}}\right) < \frac{x}{n_1} &\Rightarrow y_1 > \frac{K_1 - \Phi^{-1}\left(\frac{x}{n_1}\right) \sqrt{1 - \rho_1}}{\sqrt{\rho_1}} \\ 0 < \Phi_2 = \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2}y_2}{\sqrt{1 - \rho_2}}\right) < \frac{x - n_1\Phi_1}{n_2} &\Rightarrow y_2 > \frac{K_2 - \Phi^{-1}\left(\frac{x - n_1\Phi_1}{n_2}\right) \sqrt{1 - \rho_2}}{\sqrt{\rho_2}} \end{aligned}$$

Damit wurde die erste Zeile in Tabelle 6.2 gezeigt.

Nachdem nun die Grenzen des Integrals in Gleichung 6.2 betrachtet wurden, soll nun noch die Dichtefunktion  $\varphi(y_1, y_2)$  näher erläutert werden. Diese kann im allgemeinen Fall einer bivariaten Normalverteilung für  $Y = (Y_1, Y_2) \sim N_2(\mu, \Sigma)$  mit  $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ ,  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_Y \\ \sigma_1\sigma_2\rho_Y & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  über

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - \rho_Y^2}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{1}{2(1 - \rho_Y^2)}\right) \cdot \left(\frac{(y_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho_Y(y_1 - \mu_1) \cdot (y_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right] \end{aligned}$$

angegeben werden. Liegt nun, wie im Fall des Zweifaktormodells, eine Standardnormalverteilung von  $Y_1$  und  $Y_2$  vor (gilt also  $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ), so kann dies zu

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho_Y^2}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{y_1^2 - 2\rho_Y y_1 y_2 + y_2^2}{2(1 - \rho_Y^2)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho_Y^2}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{(y_2 - \rho_Y y_1)^2 + y_1^2(1 - \rho_Y^2)}{2(1 - \rho_Y^2)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1 - \rho_Y^2}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{(y_2 - \rho_Y y_1)^2}{2(1 - \rho_Y^2)}\right)\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y_1^2}{2}\right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

umgeformt werden.

Die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist durch

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gegeben. Eine solche Gestalt findet sich in Gleichung 6.4 zwei Mal. Der erste Teil spiegelt die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\rho_Y y_1$  und Varianz  $1 - \rho_Y^2$  wider, der zweite Teil die einer standardnormalverteilten Zufallsvariable. Insgesamt folgt also

$$\varphi(y_1, y_2) = \varphi(y_1) \cdot \varphi_{\rho_Y y_1, 1 - \rho_Y^2}(y_2) \quad (6.5)$$

Die Ergebnisse aus Tabelle 6.1 sowie Gleichung 6.5 können zur Berechnung von Gleichung 6.2 genutzt werden:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \iint_A \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \iint_A \varphi(y_1) \cdot \varphi_{\rho_Y y_1, 1 - \rho_Y^2}(y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

Auch im Endergebnis werden wieder drei Fälle betrachtet.

- $x < n_1 < n_2$ :

$$P(X \leq x) = \int_{\frac{K_1 - \sqrt{1 - \rho_1} \Phi^{-1}\left(\frac{x}{n_1}\right)}{\sqrt{\rho_1}}}^{\infty} \varphi(y_1) \cdot \left[ 1 - \Phi_{\rho_Y y_1, 1 - \rho_Y^2} \left( \frac{K_2 - \sqrt{1 - \rho_2} \Phi^{-1}\left(\frac{x - n_1 \Phi_1}{n_2}\right)}{\sqrt{\rho_2}} \right) \right] dy_1$$

- $n_1 < x < n_2$ :

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_1) \cdot \left[ 1 - \Phi_{\rho_Y y_1, 1 - \rho_Y^2} \left( \frac{K_2 - \sqrt{1 - \rho_2} \Phi^{-1}\left(\frac{x - n_1 \Phi_1}{n_2}\right)}{\sqrt{\rho_2}} \right) \right] dy_1$$

- $n_1 < n_2 < x$ :

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{\frac{K_1 - \sqrt{1 - \rho_1} \Phi^{-1}\left(\frac{x - n_2}{n_1}\right)}{\sqrt{\rho_1}}} \varphi(y_1) \cdot \left[ 1 - \Phi_{\rho_Y y_1, 1 - \rho_Y^2} \left( \frac{K_2 - \sqrt{1 - \rho_2} \Phi^{-1}\left(\frac{x - n_1 \Phi_1}{n_2}\right)}{\sqrt{\rho_2}} \right) \right] dy_1 + \\ &+ \int_{\frac{K_1 - \sqrt{1 - \rho_1} \Phi^{-1}\left(\frac{x - n_2}{n_1}\right)}{\sqrt{\rho_1}}}^{\infty} \varphi(y_1) dy_1 \end{aligned}$$

Diese Integrale können mithilfe numerischer Integration (Cespedes und Martin [2002] nutzen die Simpsonregel) ausgewertet werden.

### 6.1.2 Vergleich mit dem Einfaktormodell

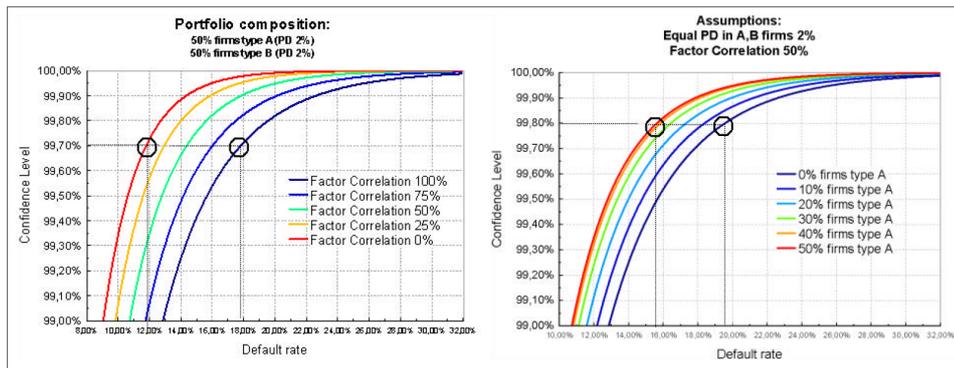
Das Zweifaktormodell wurde von Cespedes und Martin [2002] in Matlab implementiert. Dabei wurde ersichtlich, dass ein Modell mit zwei Faktoren besser dazu geeignet ist, Diversifikationseffekte abzubilden als ein Modell mit nur einem Faktor. Dies geschieht über die Spezifikation der Faktorkorrelation. Die genauen Ergebnisse sollen an dieser Stelle besprochen werden.

Erinnern wir uns an Gleichung 6.1, die von folgender Struktur ausgeht

$$\begin{aligned} Y_2 &= \rho_Y Y_1 + \sqrt{1 - \rho_Y^2} \xi, \\ \rho_Y &= \text{Corr}(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

so ist ersichtlich, dass sich im Fall  $\rho_Y = 1$  ein Einfaktormodell ergibt, da dann  $Y_1 = Y_2$  gilt. Am meisten Diversifikation liegt im Fall  $\rho_Y = 0$  vor.

Abbildung 6.3 links zeigt die Verlustverteilung für ein Portfolio, das zu 50% aus Firmen des Typs A und zu 50% aus Firmen des Typs B besteht. Bei beiden Firmenarten wird von einer 2 prozentigen Ausfallwahrscheinlichkeit ausgegangen.

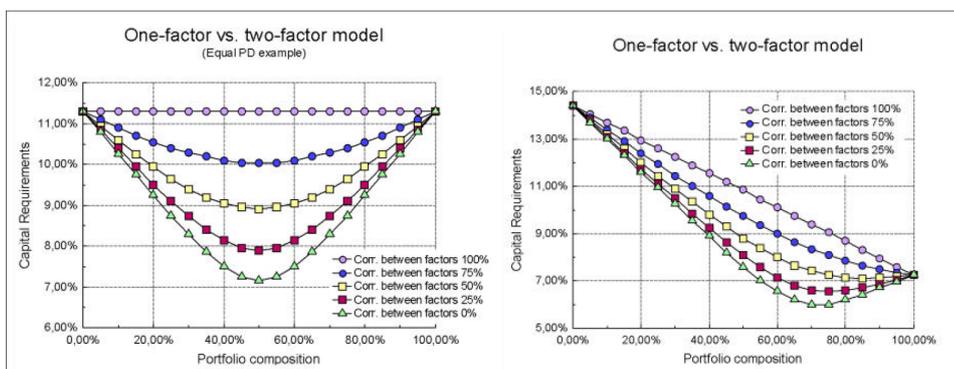


**Abbildung 6.3:** Vergleich Ein- und Zweifaktormodell I  
[aus: Cespedes und Martin [2002], S.17 und 19]

Die beiden Grafiken widmen sich der Darstellung der Ausfallrate in Abhängigkeit eines vorgegebenen Konfidenzniveaus. Als Ausfallrate wird in diesem Zusammenhang das jeweilige Quantil (zu vorgegebenem Konfidenzniveau) bezeichnet. Dabei wird ersichtlich, dass der Tail flacher wird, je höher die Korrelation  $\rho_Y$  ist. Bei gegebenem Konfidenzniveau von 99,7% ergibt sich bei einer Faktorkorrelation von 0% für die Ausfallrate ein Wert von ca. 12%, bei einer Korrelation von 100% hingegen ein Wert von rund 18%.

Wird nun nicht die Zusammensetzung des Portfolios festgehalten und die Veränderung der Faktorkorrelation betrachtet, sondern umgekehrt, das heißt, die Faktorkorrelation wird auf einen fixen Wert von 50% gesetzt und die Zusammensetzung des Portfolios variiert (siehe Abbildung 6.3 rechts), so erkennt man, dass der Tail flacher wird, je mehr Diversifikation vorliegt.

Bisher wurden die Tails der Verlustverteilung betrachtet. Nun wird wieder von zwei Firmentypen ausgegangen, die dieselben Ausfallwahrscheinlichkeiten von 2% haben und es wird das 99,9%-Perzentil der Verlustverteilung betrachtet, dies entspricht dem Value at Risk zum Niveau 99,9 (in den folgenden Graphiken mit „Kapitalanforderungen“ bezeichnet).



**Abbildung 6.4:** Vergleich Ein- und Zweifaktormodell II  
[aus: Cespedes und Martin [2002], S.20 und 24]

Abbildung 6.4 links veranschaulicht dies graphisch. Zum einen erkennt man hier, dass im Fall einer 100 prozentigen Korrelation (also im Einfaktormodell) die Kapitalanforderungen konstant sind, unabhängig von der Portfoliozusammensetzung. Generell sinken die Anforderungen, je ausgeglichener das Portfolio ist, das Minimum wird bei einem perfekt diversifizierten Portfolio (0% Korrelation) und jeweils der Hälfte Typ A-Firmen und Typ B-Firmen erreicht.

Betrachtet man nun dieselbe Fragestellung, aber unter der Annahme, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten für die beiden Typen von Firmen nicht übereinstimmen (in diesem Fall gelte für Typ A-Firmen eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 1%, für Typ B-Firmen eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 3%), so ergibt sich ein leicht verändertes Bild, siehe Abbildung 6.4 rechts.

Im Fall des Einfaktormodells ergibt sich eine streng monoton fallende Gerade. Das heißt, je mehr Firmen des Typs A im Portfolio vertreten sind, desto weniger Kapital wird benötigt. Das macht insofern Sinn, da Firmen dieses Typs aufgrund ihrer geringeren Ausfallwahrscheinlichkeit „besser“ sind als Firmen des Typs B.

Sinkt die Faktorkorrelation, so wird das Minimum nicht mehr bei einer 50 – 50 Verteilung angenommen - je nach Höhe der Korrelation befindet sich das Minimum nun zwischen einer 70 – 30 und einer 100 – 0 Verteilung (die erste Zahl bezieht sich immer auf den Anteil der Typ A-Firmen).

In beiden Fällen (gleiche und unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeit der zwei Typen von Firmen) impliziert eine Verwendung des Einfaktormodells anstelle des Zweifaktormodells einen höheren Kapitalbedarf.

## 6.2 Modelle mit mehr als zwei Faktoren

Im vorherigen Kapitel wurde der Spezialfall eines Zweifaktormodells betrachtet, nun geht es um die generelle Beschreibung von Mehrfaktormodellen im Kontext des Kreditrisikos. Daher werden zu allererst die verschiedensten Arten von Mehrfaktormodellen vorgestellt. Es folgt ein Unterkapitel über die Anwendung von Copulas auf Mehrfaktormodelle. Es werden einige Ergebnisse zu Abhängigkeitsparametern präsentiert, ebenso wie die Vorteile der Anwendung von Copulas hervorgehoben.

Als Literaturgrundlage dienen vor allem die Werke von McNeil, Frey und Embrechts [2005], sowie von Oh und Patton [2015]. Weitere Autoren, die sich mit dem Thema der Mehrfaktormodelle beschäftigen sind Schönbucher [Schönbucher] oder auch Rösch und Scheule [2005], die das Thema eines Mehrfaktormodells für die Ausfallrate und Wiedereinbringungsquote aufgreifen.

### 6.2.1 Arten von Mehrfaktormodellen

In Mehrfaktormodellen hängt der Bonitätsindikator des  $n$ -ten Schuldners  $V_n$  immer von mehreren Faktoren ab. Die genaue Art der Abhängigkeit kann aber auf verschiedenste Arten spezifiziert werden. Die gängigsten sollen in diesem Unterkapitel vorgestellt werden.

### 6.2.1.1 Linearer Ansatz

Jeder Faktor  $j$  beeinflusst den Wert des  $n$ -ten Bonitätsindikators mit einem Gewicht  $\beta_{nj}$ . Es gilt daher

$$V_n = \sum_{j=1}^J \beta_{nj} Y_j + \epsilon_n,$$

wobei  $Y \sim N_J(0, \Omega_Y)$ ,  $\epsilon_n \sim N(0, \omega_n^2)$  und  $Y, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  unabhängig seien.

$Y = (Y_1, \dots, Y_J)$  bezeichnet dabei den Vektor der  $J$  systematischen Faktoren und  $\epsilon_n$  die idiosynkratischen Faktoren beziehungsweise Fehler, siehe Schönbucher [2001].

### 6.2.1.2 Nichtlinearer Ansatz

Die generellste Form, die Abhängigkeit des Bonitätsindikators  $V_n$  von einem oder mehreren Faktoren  $Y = (Y_1, \dots, Y_J)$  darzustellen geschieht über eine allgemeine Funktion  $h : \mathbb{R}^{J+1} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$V_n = h(Y, \epsilon_n),$$

wobei wie vorhin  $Y \sim N_J(0, \Omega_Y)$ ,  $\epsilon_n \sim N(0, \omega_n^2)$  und  $Y, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  unabhängig seien, siehe Oh und Patton [2015].

Der lineare Ansatz ergibt sich über die (lineare) Funktion  $h(Y, \epsilon_n) = \sum_{j=1}^J \beta_{nj} Y_j + \epsilon_n$ , andere Beispiele werden im nächsten Unterkapitel über Copulas vorgestellt.

### 6.2.1.3 Hierarchische Struktur der Faktoreinflüsse

Ein Mehrfaktormodell, das auf einer hierarchischen Struktur der Faktoreinflüsse beruht, ist meist über vier Ebenen aufgebaut, wie in Abbildung 6.5 dargestellt, siehe Albrecht [2005]. Im Gegensatz zu den in den Kapiteln 6.2.1.1 und 6.2.1.2 vorgestellten Ansätzen wird hier also nicht nur die erste Ebene zur Modellierung der Bonitätsvariable  $V_n$  spezifiziert, es folgen weitere Ebenen zur genaueren Beschreibung.

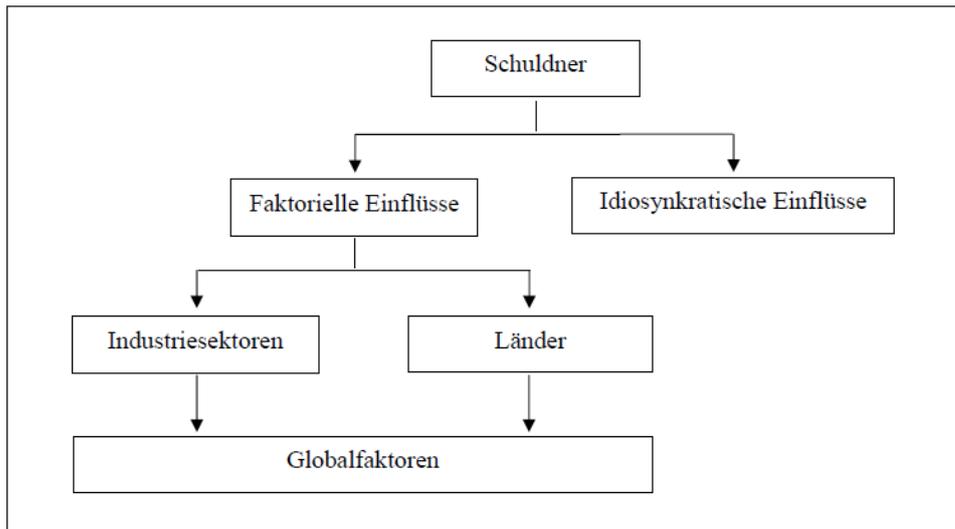
Die oberste Ebene geht von einem systematischen und einem schulnerspezifischen (idiosynkratischen) Einfluss auf den  $n$ -ten Schuldner aus:

$$V_n = b_n Y_n + \epsilon_n,$$

wobei  $Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ,  $\epsilon_n \sim N(\mu_\epsilon, \sigma_\epsilon^2)$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Weiters seien die Größen  $\epsilon_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , unabhängig. Dies gelte auch für  $Y_n$  und  $\epsilon_n$ .

Wie schon im Fall des Einfaktormodells lässt sich auch hier die Varianz in einen systematischen und einen idiosynkratischen Teil aufspalten:

$$\text{Var}(V_n) = \underbrace{b_n^2 \text{Var}(Y_n)}_{\text{systematisch}} + \underbrace{\text{Var}(\epsilon_n)}_{\text{idiosynkratisch}} .$$



**Abbildung 6.5:** Mehrfaktormodell mit hierarchischer Struktur  
[aus: Albrecht [2005], S.48]

In der zweiten Ebene wird der Faktor  $Y_n$  in einen Industriesektor- und einen Länderanteil aufgeteilt.  $G_m$  für  $m = 1, \dots, m_0$  spiegle dabei die Sektorindizes wider,  $G_m$  für  $m = m_0 + 1, \dots, M$  die Länderindizes. Die dazugehörigen Sektor- beziehungsweise Ländergewichte werden mit  $w_{nm}, m = 1, \dots, M$  bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 Y_n &= \sum_{m=1}^{m_0} w_{nm} G_m + \sum_{m=m_0+1}^M w_{nm} G_m \\
 &= \sum_{m=1}^M w_{nm} G_m
 \end{aligned}$$

Für die Gewichte  $w_{nm}$  gelte

$$\sum_{m=1}^{m_0} w_{nm} = \sum_{m=m_0+1}^M w_{nm} = 1.$$

Diese Industriesektor- und Länderanteile werden wiederum von globalen Faktoren  $H_r$  beeinflusst:

$$G_m = \sum_{r=1}^R a_{mr} H_r + \xi_m$$

Diese Faktoren  $H_1, \dots, H_R$  seien unkorreliert mit Varianz jeweils 1. Sonst werden keine weiteren Bedingungen an die Faktoren  $G_m, m = 1, \dots, M$  sowie  $H_r, r = 1, \dots, R$  gestellt.

In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$\begin{aligned}
 V &= BY + \epsilon, \\
 Y &= WG, \\
 G &= AH + \xi
 \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$V = BW(AH + \xi) + \epsilon.$$

Dieser Aufbau wird unter anderem im KMV-Modell verwendet und dort (Kapitel 7.1) näher erläutert.

In den allermeisten Fällen wird das Mehrfaktormodell über die Annahme der Normalverteilung definiert, das heißt wie oben  $Y \sim N_J(0, \Omega_Y)$ , an dieser Stelle sei aber explizit darauf hingewiesen, dass dies nicht immer der Fall sein muss. Einige andere Verteilungen werden im nächsten Kapitel diskutiert.<sup>34</sup>

Die geeignete Wahl der Anzahl der Faktoren kann auf verschiedenste Arten bestimmt werden - eine gängige Variante erfolgt unter Zuhilfenahme des sogenannten Scree-Plots von Cattell (Ellenbogenkriterium). Die Anwendung dessen auf Mehrfaktormodelle findet sich in Oh und Patton [2015], Kapitel 2.4.

## 6.2.2 Die Anwendung von Copulas auf Mehrfaktormodelle

Im Folgenden soll die Verwendung von Copulas auf Mehrfaktormodelle in Anlehnung an Oh und Patton [2015] beschrieben werden. Ziel ist es, eine Formel für die obere und untere Tail-Abhängigkeit im Mehrfaktormodell anzugeben.

Sei ein Vektor  $V$  von  $N$  Variablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $F_V$  sowie Randverteilungen  $F_n, n = 1 \dots, N$  und Copula  $C$  gegeben:

$$V = (V_1, \dots, V_N) \sim F_V \stackrel{(3.5)}{=} C(F_1, \dots, F_N) \quad (6.6)$$

Die Klasse von Copulas, die verwendet wird, um den Vektor  $V$  zu beschreiben sei nun diejenige, die sich aus einem linearen Mehrfaktormodell der Form

$$V_n = \sum_{j=1}^J \beta_{nj} Y_j + \epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (6.7)$$

wobei  $Y_j \sim F_Y$  und  $\epsilon_n \sim F_\epsilon$  ergibt. Dabei seien  $Y$  und  $\epsilon_n$  sowie  $Y_i$  und  $Y_j$  für  $i \neq j$  stochastisch unabhängig. Die Verteilung  $F_V$  ist demnach abhängig von der Spezifizierung der Verteilungen  $F_Y$  und  $F_\epsilon$ .

Bezeichne nun  $\theta$  den Vektor der Parameter der Verteilungen  $F_Y$  und  $F_\epsilon$  erweitert um die Matrix  $B = (\beta_{nj})_{1 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J}$ , dann gilt  $V \sim F_V = C(F_1(\theta), \dots, F_N(\theta); \theta)$ . Diese Copula  $C$  ist im Allgemeinen nicht in geschlossener Form bekannt. Der am weit verbreitetste Fall ist jener, wo  $F_Y$  und  $F_\epsilon$  und damit auch  $F_V$  einer Normalverteilung entsprechen. In diesem Fall impliziert dies das Vorliegen einer Gauß-Copula.

Die Wahl der Copula  $C(\theta)$  ist bedingt durch die Wahl der Verteilungsfunktionen  $F_Y, F_\epsilon$  für die Faktoren. Diese sollten so gewählt werden, dass Asymmetrie und ein bestimmtes Verhalten in

<sup>34</sup>Wird von einer anderen Verteilung ausgegangen, so wird nicht die Unabhängigkeit der  $Y, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  gefordert, sondern nur die Unkorreliertheit, siehe McNeil, Frey und Embrechts [2005], Kapitel 3.4.1.

den Tails gut wiedergegeben werden kann. Weiters muss auch die Anzahl  $J$  der systematischen Faktoren spezifiziert werden. Je mehr Faktoren es gibt, desto flexibler kann das Modell werden, allerdings erhöht sich auch die Anzahl der Parameter.

Auch wenn die meisten Copulas in keiner geschlossenen Form dargestellt werden können, so kann man im Fall des Mehrfaktormodells die obere und untere Tail-Abhängigkeit analytisch herleiten.

Der Einfachheit halber soll zuerst die Tail-Abhängigkeit für das Einfaktormodell als Spezialfall des Mehrfaktormodells angegeben werden. Dieses ergibt sich für  $J = 1$  aus Gleichung 6.7. Dabei wird der Index  $j = 1$  aus Gründen der Übersicht nicht mehr angeschrieben.  $x_s \sim y_s$  bedeute in diesem Zusammenhang  $x_s/y_s \rightarrow 1, s \rightarrow \infty$ .

**Satz 6.2.1** *Sei ein Einfaktormodell der Form*

$$V_i = \beta_i Y + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

*gegeben. Haben  $F_Y$  und  $F_\epsilon$  regulär variierende Tails mit einem gemeinsamen Tail-Index  $\alpha > 0$ , das heißt es gilt*

$$\begin{aligned} P(Y > s) &\sim A_Y^U \cdot s^{-\alpha} \text{ und } P(\epsilon_n > s) \sim A_\epsilon^U \cdot s^{-\alpha} \text{ für } s \rightarrow \infty \\ P(Y < -s) &\sim A_Y^L \cdot s^{-\alpha} \text{ und } P(\epsilon_n < -s) \sim A_\epsilon^L \cdot s^{-\alpha} \text{ für } s \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

*wobei  $A_Y^U, A_Y^L, A_\epsilon^U, A_\epsilon^L$  positive Konstanten seien, dann gilt abhängig vom Vorzeichen der Parameter  $\beta_i, i = 1, \dots, N$ :*

1.  $\beta_i, \beta_j > 0$ :

$$\tau_{ij}^L = \frac{\min(\beta_i, \beta_j)^\alpha A_Y^L}{\min(\beta_i, \beta_j)^\alpha A_Y^L + A_\epsilon^L}, \quad \tau_{ij}^U = \frac{\min(\beta_i, \beta_j)^\alpha A_Y^U}{\min(\beta_i, \beta_j)^\alpha A_Y^U + A_\epsilon^U}$$

2.  $\beta_i, \beta_j < 0$ :

$$\tau_{ij}^L = \frac{\min(|\beta_i|, |\beta_j|)^\alpha A_Y^L}{\min(|\beta_i|, |\beta_j|)^\alpha A_Y^L + A_\epsilon^L}, \quad \tau_{ij}^U = \frac{\min(|\beta_i|, |\beta_j|)^\alpha A_Y^U}{\min(|\beta_i|, |\beta_j|)^\alpha A_Y^U + A_\epsilon^U}$$

3.  $\beta_i > 0, \beta_j < 0$  oder  $\beta_i < 0, \beta_j > 0$ :

$$\tau_{ij}^L = \tau_{ij}^U = 0$$

4.  $\beta_i = \beta_j = 0$ :

$$\tau_{ij}^L = \tau_{ij}^U = 0$$

**Beweis** Da das Einfaktormodell einen Spezialfall des Mehrfaktormodells darstellt, ist auch diese Aussage ein Spezialfall des Mehrfaktor-Falls. Jener wird in Satz 6.2.2 bewiesen, weswegen hier für einen detaillierten Beweis auf Oh und Patton [2015], Proposition 1, verwiesen wird. Die Vorgehensweise ist analog zum Mehrfaktor-Fall.  $\square$

Im Fall, dass die Koeffizienten  $\beta_i, \beta_j$  das gleiche Vorzeichen haben, kann daher (anders als im Fall der Normalverteilung) eine Tail-Abhängigkeit ungleich Null erzeugt werden.

In allgemeiner Form gilt obiger Satz auch für das Mehrfaktormodell.

**Satz 6.2.2** *Sei ein lineares Mehrfaktormodell der Form*

$$V_n = \sum_{j=1}^J \beta_{nj} Y_j + \epsilon_n \quad (6.8)$$

wobei  $Y_j \sim F_{Y_j}, \epsilon_n \sim F_\epsilon$  gegeben. Dabei seien  $Y$  und  $\epsilon_n$  sowie  $Y_i$  und  $Y_j$  für  $i \neq j$  stochastisch unabhängig. Wenn  $F_{Y_1}, \dots, F_{Y_J}, F_\epsilon$  regulär variierende Tails haben mit gemeinsamem Tail-Index  $\alpha > 0$ , das heißt es existieren positive Konstanten  $A_1^L, \dots, A_J^L, A_\epsilon^L, A_1^U, \dots, A_J^U, A_\epsilon^U$ , sodass

$$\begin{aligned} P(Y_j > s) &\sim A_j^U \cdot s^{-\alpha}, j = 1, \dots, J \text{ und } P(\epsilon_n > s) \sim A_\epsilon^U \cdot s^{-\alpha} \text{ für } s \rightarrow \infty \\ P(Y_j < -s) &\sim A_j^L \cdot s^{-\alpha}, j = 1, \dots, J \text{ und } P(\epsilon_n < -s) \sim A_\epsilon^L \cdot s^{-\alpha} \text{ für } s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dann folgt im Fall  $\beta_{ij} \geq 0 \forall i, j$  für die untere und obere Tail-Abhängigkeit

$$\begin{aligned} \tau_{ik}^L &= \frac{\sum_{j=1}^J 1_{[\beta_{ij}\beta_{kj} > 0]} A_j^L \beta_{ij}^\alpha \delta_{L,ijk}^\alpha}{A_\epsilon^L + \sum_{j=1}^J A_j^L \beta_{ij}^\alpha} \\ \tau_{ik}^U &= \frac{\sum_{j=1}^J 1_{[\beta_{ij}\beta_{kj} > 0]} A_j^U \beta_{ij}^\alpha \delta_{U,ijk}^\alpha}{A_\epsilon^U + \sum_{j=1}^J A_j^U \beta_{ij}^\alpha}, \end{aligned}$$

wobei für  $Q \in \{L, U\}$

$$\begin{aligned} \delta_{Q,ijk}^{-1} &:= \begin{cases} \max\left(1, \gamma_{Q,ik} \frac{\beta_{ij}}{\beta_{kj}}\right), & \beta_{ij}\beta_{kj} > 0 \\ 1, & \beta_{ij}\beta_{kj} = 0 \end{cases} \\ \gamma_{Q,ik} &:= \left( \frac{A_\epsilon^Q + \sum_{j=1}^J A_j^Q \beta_{kj}^\alpha}{A_\epsilon^Q + \sum_{j=1}^J A_j^Q \beta_{ij}^\alpha} \right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

gesetzt werden.

**Beweis** Der Beweis wird an dieser Stelle nur für die untere Tail-Abhängigkeit erbracht, jener für die obere Tail-Abhängigkeit erfolgt analog. Erstere ist nach Gleichung 3.3 durch

$$\tau_{ik}^U = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{P(V_i > G_i^{-1}(q), V_k > G_k^{-1}(q))}{P(V_k > G_k^{-1}(q))}$$

gegeben. In weiterer Folge bezeichne der Einfachheit halber  $s_i := s_i(q) = G_i^{-1}(q)$ .

Betrachte zuerst den Nenner. Dabei wird verwendet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewichtete Summe von Zufallsvariablen eine Schranke  $s$  überschreitet für  $s \rightarrow \infty$  gleich der

Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass jede einzelne dieser Zufallsvariablen die Schranke überschreitet ist (der Beweis kann zum Beispiel in Feller [1971], Kapitel XVII.4, nachgelesen werden). Daher gilt für den Nenner nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} P(V_i > s_i) &\stackrel{(6.7)}{=} P\left(\sum_{j=1}^J \beta_{ij} Y_j + \epsilon_i > s_i\right) \\ &\sim P(\epsilon_i > s_i) + \sum_{j=1}^J P(\beta_{ij} Y_j > s_i) \\ &\sim s_i^{-\alpha} \left( A_\epsilon^U + \sum_{j=1}^J A_j^U \beta_{ij}^\alpha \right) \end{aligned}$$

Um einen geeigneten Ausdruck für den Zähler zu finden müssen zunächst einige Zusatzüberlegungen angestellt werden. Aufgrund von Gleichung 3.4, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass die Variable  $V_k$  unter ihrem  $q$ -Quantil liegt

$$P(V_k \leq G_k^{-1}(q)) = G_k(G_k^{-1}(q)) = q$$

folgt, dass  $P(V_i \leq s_i) = P(V_k \leq s_k)$  und somit  $P(V_i > s_i) = P(V_k > s_k) \forall i, k \in \{1, 2, \dots, N\}$  gelten muss. Daher muss das Paar  $(s_i, s_k)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} s_i^{-\alpha} \left( \sum_{j=1}^J \beta_{ij}^\alpha A_j^U + A_\epsilon^U \right) &= s_k^{-\alpha} \left( \sum_{j=1}^J \beta_{kj}^\alpha A_k^U + A_\epsilon^U \right) \\ \Rightarrow s_k &= s_i \left( \frac{A_\epsilon^U + \sum_{j=1}^J A_j^U \beta_{kj}^\alpha}{A_\epsilon^U + \sum_{j=1}^J A_j^U \beta_{ij}^\alpha} \right)^{1/\alpha} = s_i \cdot \gamma_{U,ik} \end{aligned} \quad (6.9)$$

erfüllen.

Um das Maximum von  $\frac{s_i}{\beta_{ij}}$  und  $\frac{s_k}{\beta_{kj}}$  für  $j = 1, \dots, J$  herauszufinden wird eine neue Variable  $\delta_{U,ijk}$  via

$$\max\left(\frac{s_i}{\beta_{ij}}, \frac{s_k}{\beta_{kj}}\right) \stackrel{(6.9)}{=} \max\left(\frac{s_i}{\beta_{ij}}, \frac{s_i}{\beta_{kj}} \gamma_{U,ik}\right) = \frac{s_i}{\beta_{ij}} \max\left(1, \frac{\beta_{ij}}{\beta_{kj}} \gamma_{U,ik}\right) = \frac{s_i}{\beta_{ij} \cdot \delta_{U,ijk}} \quad (6.10)$$

eingeführt. Daher gilt

$$\delta_{U,ijk}^{-1} = \max\left(1, \frac{\beta_{ij}}{\beta_{kj}} \gamma_{U,ik}\right)$$

In der Definition von  $\delta_{U,ijk}$  in obigem Satz wird auch der Fall  $\beta_{ij}\beta_{kj} = 0$  berücksichtigt. In diesem Fall wird  $\delta_{U,ijk}$  auf eine beliebige Zahl ungleich Null gesetzt, da die Variable in der Formel der Tail-Abhängigkeit mit Null multipliziert wird und es daher egal ist, welchen Wert sie annimmt.

Nach Feller [1971] gilt auch, dass die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zufallsvariablen eine Schranke  $s$  überschreiten für  $s \rightarrow \infty$  nur durch ihre gemeinsamen Komponenten bestimmt

wird. Damit kann nun ein geeigneter Ausdruck für den Zähler gefunden werden:

$$\begin{aligned}
P(V_i > s_i, V_k > s_k) &= P\left(\sum_{j=1}^J \beta_{ij} Y_j + \epsilon_i > s_i, \sum_{j=1}^J \beta_{kj} Y_j + \epsilon_k > s_k\right) \\
&\sim \sum_{j=1}^J P(\beta_{ij} Y_j > s_i, \beta_{kj} Y_j > s_k) \\
&= \sum_{j=1}^J 1_{[\beta_{ij}\beta_{kj} > 0]} P\left(Y_j > \max\left(\frac{s_i}{\beta_{ij}}, \frac{s_k}{\beta_{kj}}\right)\right) \\
&\stackrel{(6.10)}{=} \sum_{j=1}^J 1_{[\beta_{ij}\beta_{kj} > 0]} P\left(Y_j > \frac{s_i}{\beta_{ij}\delta_{U,ijk}}\right) \\
&\sim s_i^{-\alpha} \sum_{j=1}^J 1_{[\beta_{ij}\beta_{kj} > 0]} A_j^U \beta_{ij}^\alpha \delta_{U,ijk}^\alpha
\end{aligned}$$

Letzte Gleichheit gilt wieder nach Voraussetzung. Insgesamt folgt daher für die untere Tail-Abhängigkeit

$$\tau_{ik}^U = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{P(V_i > s_i(q), V_k > s_k(q))}{P(V_i > s_i(q))} = \frac{\sum_{j=1}^J 1_{[\beta_{ij}\beta_{kj} > 0]} A_j^U \beta_{ij}^\alpha \delta_{U,ijk}^\alpha}{A_\epsilon^U + \sum_{j=1}^J A_j^U \beta_{ij}^\alpha},$$

was zu zeigen war. □

Wird der allgemeine Fall eines nicht zwingend linearen Mehrfaktormodells betrachtet, wie er in Kapitel 6.2.1.2 vorgestellt wurde

$$V_n = h(Y, \epsilon_n),$$

so kann eine Reihe bekannter Copulas erzeugt werden, wie auch in Tabelle 6.2 dargestellt.

Copula	$h(Y, \epsilon)$	$F_Y$	$F_\epsilon$
Normal	$Y + \epsilon$	$N(0, \sigma_Y^2)$	$N(0, \sigma_\epsilon^2)$
Student's t	$\sqrt{Y}\epsilon$	Inv-Gamma( $\nu/2, \nu/2$ )	$N(0, \sigma_\epsilon^2)$
Clayton	$(1 + \epsilon/Y)^{-\alpha}$	$\Gamma(\alpha, 1)$	$Exp(1)$

**Tabelle 6.2:** Copulas nichtlineares Mehrfaktormodell [aus: Oh und Patton [2015], S.14]



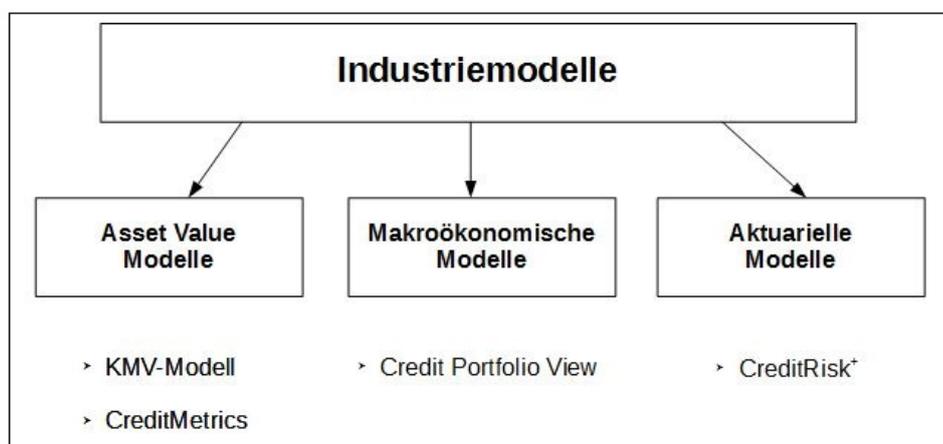
# Kapitel 7

## Industriemodelle

Viele der Modelle, die zur Bestimmung und Berechnung der Kreditrisiken entwickelt wurden werden heutzutage als Industriestandard angesehen, man nennt sie daher auch Industriemodelle. Zwei dieser Modelle mit direktem Bezug zum Thema Faktormodelle sollen in diesem Kapitel vorgestellt werden: Das KMV-Modell und CreditMetrics. Unterschiede, Gemeinsamkeiten, Vor- und Nachteile der beiden Modelle sollen in einem abschließenden Unterkapitel diskutiert werden.

Kapitel 7.1 hält sich weitestgehend an die Werke von Martin, Reitz und Wehn [2006] sowie Albrecht [2005], Kapitel 7.2 stützt sich auf die Aussagen in Gupton, Finger und Bhatia [1997] und Eckert [2016]. Schwarz [2004] diente als Grundlage für beide Unterkapitel.

Generell unterscheidet man drei Arten von Industriemodellen- die zwei Modelle, die hier näher betrachtet werden fallen in die Klasse der Asset Value Modelle, siehe Abbildung 7.1. Die Idee hinter beiden Modellen ist, dass der Ausfall eines Unternehmens von bestimmten Vermögenswerten (engl. *asset values*) abhängig ist. Fällt der Wert dieser Vermögenswerte unter eine vorgegebene Schranke, so fällt das Unternehmen aus.



**Abbildung 7.1:** Übersicht Industriemodelle  
[in Anlehnung an Albrecht [2005], S.77]

## 7.1 KMV-Modell

Von Kealhover, McQuown und Vasicek entwickelt wurde die Firma KMV im Jahr 2002 von Moody's übernommen.

Die Grundlage für dieses Modell bildet das Unternehmenswertmodell von Merton, das bereits in Kapitel 4.1.2 besprochen wurde. Dabei wird zu Beginn ein Zeithorizont  $[0, T]$  festgelegt, meist ein Jahr. Das Eigenkapital zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  ergibt sich als Differenz der Aktiva  $A_t$  und der Passiva  $L_t$ :

$$E_t = A_t - L_t$$

Im KMV-Modell geht man allerdings nicht von Marktwerten, sondern von Buchwerten aus.<sup>35</sup> Die Assetwerte (zum Zeitpunkt  $t$ )  $A_t$  folgen einer geometrischen Brownschen Bewegung, das heißt es gilt

$$A_t = A_0 \cdot \exp(mt + \sigma \sqrt{t}W(t)),$$

wobei  $W(t) \sim N(0, 1)$  und  $m = \mu - \sigma^2/2$ .  $\mu$  bezeichnet dabei den Drift und  $\sigma^2$  die Volatilität der Brownschen Bewegung. Daher gilt bei Bildung des Erwartungswertes zum Zeitpunkt  $T$

$$\begin{aligned} E(\ln(A_T)) &= \ln(A_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \\ &= \ln(A_0) + mT \end{aligned} \quad (7.1)$$

Nun führt man eine Variable Ausfallpunkt (engl. *Default Point*)  $DP$  ein, die über

$$DP = \text{kurzfristige Verbindlichkeiten} + \frac{1}{2} \text{langfristige Verbindlichkeiten}$$

berechnet wird. Diejenigen Verpflichtungen, die im betrachteten Zeithorizont erfüllt werden müssen werden dabei der Variable Kurzfristige Verbindlichkeiten (engl. *Short Term Debt*) zugeordnet, alle anderen Verpflichtungen fließen in der zweiten Variable ein, den langfristigen Verbindlichkeiten (engl. *Long Term Debt*). Erstere erhalten ein höheres Gewicht, weil sie zuerst zu bedienen sind. Zu bemerken ist weiters, dass der Ausfallpunkt vom Endzeitpunkt  $T$  abhängt, da auch die Höhe der Verbindlichkeiten vom gewählten Zeithorizont abhängt. Die Wahl von  $DP$  wurde nicht zufällig getroffen, sondern durch diverse empirische Studien untermauert. Damit kann nun die Variable eingeführt werden, die im KMV-Modell zur Berechnung des Risikos herangezogen wird: Die Entfernung zum Ausfall (engl. *Distance to Default*)  $DD$ , die über

$$DD = \frac{E(\ln(A_T)) - \ln(DP)}{\sigma \sqrt{T}}$$

gegeben ist. Die Distance to Default misst somit den (standardisierten) Abstand des erwarteten Werts der Aktiva von den Verpflichtungen (logarithmiert). Mithilfe von Gleichung 7.1 kann diese zu

$$DD = \frac{\ln(A_0/DP) + mT}{\sigma \sqrt{T}} \quad (7.2)$$

<sup>35</sup>Der Marktwert beschreibt den Preis, zu dem man ein Objekt oder ähnliches aktuell verkaufen kann. Der Buchwert hingegen ist derjenige Wert, der im Zuge einer Bilanzanalyse ermittelt wird.

umgeformt werden. Je größer der Zähler ist, desto unwahrscheinlicher ist ein Ausfall.

Da Ausfall genau dann eintritt, wenn der Wert der Aktiva  $A_T$  die Schranke  $DP$  unterschreitet (Ausfall kann nur zum Zeitpunkt  $T$  eintreten, siehe Kapitel 4.1.2), so gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$

$$\begin{aligned} p &= P(A_T < DP) \\ &= P\left(W(T) < \frac{\ln(DP/A_0) - mT}{\sigma \sqrt{T}}\right) \\ &\stackrel{(7.2)}{=} P(W(T) < -DD) = \Phi(-DD) \end{aligned}$$

Aufgrund dieses Zusammenhangs geht man davon aus, dass Unternehmen, die über eine gleiche Distance to Default verfügen auch die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit besitzen. Wurde  $DD$  berechnet werden alle Unternehmen mit annähernd gleicher Distance zu Default in einer Gruppe zusammengefasst und deren Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit wird als Schätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeit verwendet (*expected default frequency*). Die Aktualisierung dieser Größe erfolgt einmal pro Monat, daher können wesentlich bessere kurzfristige Prognosen zu Ausfallereignissen als zum Beispiel durch die Verwendung von Ratings abgegeben werden.

Wie schon im Kapitel über das Merton-Modell (Kapitel 4.1.2) hergeleitet unterstellt man den standardisierten logarithmierten Renditen des  $n$ -ten Unternehmens zum Zeitpunkt  $T$

$$V_n = \frac{\ln(A_{nT}/A_{n0}) - m_n T}{\sigma_n \sqrt{T}},$$

siehe Gleichung 4.12, ein Einfaktormodell der Form

$$V_n = b_n Y_n + \epsilon_n. \quad (7.3)$$

In der zweiten Ebene wird der Faktor  $Y_n$  in Abhängigkeit von Industriesektoren  $G_m, m = 1, \dots, m_0$  und Länderanteilen  $G_m, m = m_0 + 1, \dots, M$  gebracht:

$$Y_n = \sum_{m=1}^{m_0} w_{nm} G_m + \sum_{m=m_0+1}^M w_{nm} G_m$$

Die Gewichte  $w_{nm}$  beschreiben dabei die Abhängigkeit vom jeweiligen Sektor oder Land. Diese Industriesektor- und Länderanteile werden wiederum von globalen Faktoren  $H_r$  beeinflusst:

$$G_m = \sum_{r=1}^R a_{mr} H_r + \xi_m$$

Letztere sind unbeobachtbare, unkorrelierte Faktoren mit Varianz jeweils 1. Weiters seien  $\xi, \epsilon$  unkorreliert und unabhängig von  $H$ .

In Matrixschreibweise bedeutet dies zusammengefasst

$$V = BWG + \epsilon \quad (7.4)$$

$$= BW(AH + \xi) + \epsilon. \quad (7.5)$$

Für rechnerische Zwecke wird letzte Gleichung verwendet, aus ökonomischer Sicht ist Gleichung 7.4 praktischer, da Sektor- und Regionalindizes leichter zu interpretieren sind als globale Faktoren.

Standardisiert man die Asset-Log>Returns  $V_n$  über

$$\tilde{V}_n := \frac{V_n - E(V_n)}{\sigma_n},$$

so ergibt sich aus Gleichung 7.3

$$\tilde{V}_n = \frac{b_n}{\sigma_n} \tilde{Y}_n + \frac{\tilde{\epsilon}_n}{\sigma_n} \text{ mit } E(\tilde{Y}_n) = E(\tilde{\epsilon}_n) = 0.$$

Aufgrund der Unkorreliertheit der Residuen  $\epsilon_n$  kann die Asset-Korrelation zweier Unternehmen  $n, m$  via

$$\text{Corr}(\tilde{V}_n, \tilde{V}_m) = E(\tilde{V}_n \tilde{V}_m) = \frac{b_n b_m}{\sigma_n \sigma_m} E(\tilde{Y}_n \tilde{Y}_m) \quad (7.6)$$

berechnet werden. Nun führt man die Variable

$$R_n^2 := \frac{b_n^2}{\sigma_n^2} \cdot \text{Var}(V_n)$$

ein. Diese wird als systematischer Teil der standardisierten Varianz der  $V_n$  verstanden. Damit kann Gleichung 7.6 zu

$$\begin{aligned} \text{Corr}(\tilde{V}_n, \tilde{V}_m) &= \frac{R_n}{\sqrt{\text{Var}(Y_n)}} \frac{R_m}{\sqrt{\text{Var}(Y_m)}} E(\tilde{Y}_n \tilde{Y}_m) \\ &= \frac{R_n}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{Y}_n)}} \frac{R_m}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{Y}_m)}} E(\tilde{Y}_n \tilde{Y}_m) \end{aligned} \quad (7.7)$$

umgeformt werden. Die zweite Gleichheit gilt, da nach Konstruktion  $\text{Var}(Y_n) = \text{Var}(\tilde{Y}_n)$ . Führt man die Standardisierung im gesamten Mehrfaktormodell durch, so ergibt sich aus Gleichung 7.5

$$\tilde{V} = \tilde{B}W(A\tilde{H} + \tilde{\xi}) + \tilde{\epsilon} \text{ mit } E(\tilde{H}) = E(\tilde{\xi}) = E(\tilde{\epsilon}) = 0$$

Nun wird die Tatsache, dass  $\tilde{\xi}$  und  $\tilde{\epsilon}$  unkorreliert und von  $\tilde{H}$  unabhängig sind verwendet, um die Korrelation in Gleichung 7.7 zu berechnen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} E(\tilde{Y}\tilde{Y}^T) &= E\left(W(A\tilde{H} + \tilde{\xi})(W(A\tilde{H} + \tilde{\xi}))^T\right) \\ &= WE((A\tilde{H} + \tilde{\xi})(A\tilde{H} + \tilde{\xi})^T)W^T \\ &= W\left(AE(\tilde{H}\tilde{H}^T)A^T + \underbrace{AE(\tilde{H}\tilde{\xi}^T)}_{=0} + \underbrace{E(\tilde{\xi}\tilde{H}^T)A^T}_{=0} + E(\tilde{\xi}\tilde{\xi}^T)\right)W^T \end{aligned}$$

und damit

$$E(\tilde{Y}\tilde{Y}^T) = W \left( AE(\tilde{H}\tilde{H}^T)A^T + E(\tilde{\xi}\tilde{\xi}^T) \right) W^T$$

Diese Tatsache kann nun genutzt werden, um im KMV-Modell Asset-Korrelationen zu berechnen. Für den Fall, dass zwei Firmen in der KMV-Datenbank gespeichert sind stellt KMV ein Programm (*GCorr*) zur Verfügung, um deren Asset-Korrelationen zu berechnen.

Martin, Reitz und Wehn [2006] bemerken über die praktische Ausführung des Modells: „Das KMV-Modell erfordert eine ganze Reihe von historischen Daten und daraus abgeleiteten statistischen Schätzungen. Das entsprechende Datenmaterial wird vom Anbieter zur Verfügung gestellt. Beim Einsatz des Modells ist darauf zu achten, dass die Datengrundlage für das Modell [...] auch repräsentativ für das zu analysierende Portfolio ist; hier könnten sich sonst fehlerhafte Aussagen ergeben. Dem Nutzer des Modells kommt die Aufgabe zu, für jedes Unternehmen die verwendeten Gewichte innerhalb des Faktormodells festzulegen bzw. zu plausibilisieren. Des Weiteren sind die Volatilitäten der Firmenwerte zu bestimmen sowie die notwendigen Daten zu Berechnung des Default Points.“

## 7.2 CreditMetrics

CreditMetrics geht auf Gupton, Finger und Bhatia [1997] zurück und basiert ebenso wie das KMV-Modell auf dem Merton-Modell, stellt allerdings eine Erweiterung dessen dar. Dabei werden die Wertänderungen der Unternehmenswerte nicht nur in Beziehung zum Ausfallrisiko gestellt, es werden auch Ratingveränderungen miteinbezogen.

Im Gegensatz zum KMV-Modell gibt es für einen Kreditnehmer nicht nur die Möglichkeit von Ausfall und Nicht-Ausfall. Im CreditMetrics-Modell existieren verschiedene Ratingklassen mit sinkender Bonität. Die letzte Ratingsklasse entspricht dem Ausfall des Schuldners. Die Ausfallwahrscheinlichkeit kann als Wahrscheinlichkeit angegeben werden, in diese letzte Klasse zu migrieren.

Innerhalb einer Ratingklasse wird die Annahme getroffen, dass die einzelnen Kreditnehmer homogen bezüglich der Ausfall- und (Rating)migrationswahrscheinlichkeit sind. Dies stellt gleichzeitig den wichtigsten Unterschied zum KMV-Modell dar, wo kreditnehmerspezifische Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Eine Änderung der Kreditqualität des Kreditnehmers spiegelt sich in einer Änderung der Ratingklasse wider. Um die Wahrscheinlichkeiten der Migration von einer Klasse zu einer anderen zu erfassen wird eine sogenannte Migrationsmatrix verwendet. Deren Einträge werden durch historische Daten ermittelt.<sup>36</sup> Die Migrationsbewegungen zweier Schuldner sind im CreditMetrics-Modell nicht stochastisch unabhängig, für die Modellierung einer gemeinsamen Migrationsbewegung werden die (positiv korrelierten) Asset-Renditen verwendet, bei börsennotierten Unternehmen die Korrelation der Aktienkurse.

Auch in diesem Modell wird ein Zeithorizont  $[0, T]$  zu Beginn festgelegt, meist ein Jahr. Danach wird jedem der  $N$  Kreditnehmer eine Zufallsvariable (die logarithmierte Assetrendite)  $V_n, n =$

<sup>36</sup>Migrationsmatrizen von *Moody's* oder *Standard & Poor's* sind bereits in CreditMetrics eingebunden. Das bedeutet, dass insbesondere die Ausfallwahrscheinlichkeit im CreditMetrics-Modell als Input-Parameter gehandelt wird.

$1, \dots, N$ , zugewiesen. Da auch hier von einem Faktormodell ausgegangen wird tritt Ausfall genau dann ein, wenn diese Zufallsvariable eine bestimmte Grenze unterschreitet. Wie bereits in den vorherigen Kapiteln wird das Ausfallereignis durch den Ausfallindikator  $D_n$  beschrieben. Insgesamt gilt daher, siehe auch Gleichungen 4.3 sowie 4.4:

$$D_n = \begin{cases} 1, & V_n \leq \phi^{-1}(p_n) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $p_n$  die Ausfallwahrscheinlichkeit des  $n$ -ten Schuldners bezeichnet. Diese kann aus der Migrationsmatrix abgelesen werden.

Wie bereits erwähnt wäre im CreditMetrics-Modell die Ermittlung der Korrelation eines Schuldners zu allen anderen Kreditnehmern im Portfolio notwendig. Um die Rechenzeit zu verkürzen wird das Modell vereinfacht, indem jeder Kreditnehmer einem oder mehreren Sektoren  $p = 1, \dots, P$  zugeordnet wird.<sup>37</sup> Die dazugehörigen Sektorvariablen  $X = (X_1, \dots, X_p)$  seien multivariat normalverteilt mit Erwartungswert  $\mathbf{0}$  und Varianz-Kovarianz-Matrix  $\Gamma$ . Die Faktorladungen  $R_{np}$  des  $n$ -ten Kreditnehmers und des  $p$ -ten Sektors werden in der Matrix  $R \in \{-1, 1\}^{N \times P}$  zusammengefasst, wobei  $R_n^t \Gamma R_n < 1 \forall n = 1, \dots, N$  mit  $R_n := (R_{n1}, \dots, R_{nP})^t$  gilt. Mithilfe dessen wird das Faktormodell über

$$V_n = R_n^t X + \sqrt{1 - R_n^t \Gamma R_n} \epsilon_n,$$

wobei  $\epsilon_n \sim N(0, 1)$  und  $\epsilon$  und  $X$  unabhängig sind, definiert.<sup>38</sup> Der Wert  $\sqrt{1 - R_n^t \Gamma R_n}$  stellt dabei den Einfluss des idiosynkratischen Faktors  $\epsilon_n$  auf den Bonitätsindikator  $V_n$  dar. Aufgrund der Definition des Faktormodells ist  $V_n$  standardnormalverteilt, da  $\text{Var}(V_n) = R_n^t \Gamma R_n + (1 - R_n^t \Gamma R_n) = 1$ . Für die Korrelation zweier latenter Faktoren gilt

$$\text{Corr}(V_n, V_m) = R_n^t \Gamma R_m, \quad n, m = 1, \dots, N, n \neq m \quad (7.8)$$

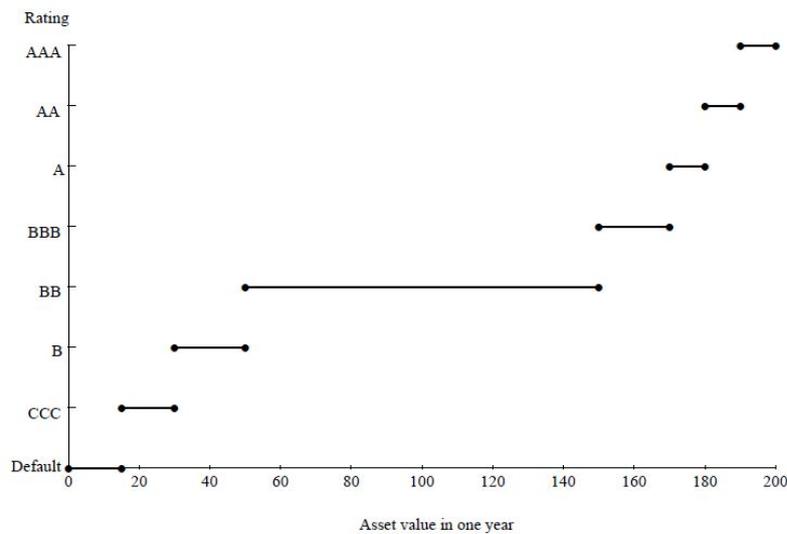
Da  $\text{Var}(V_n) = 1, n = 1, \dots, N$  ist dies auch gleichzeitig die Kovarianz von  $V_n$  und  $V_m$ . Im CreditMetrics-Modell werden die Faktorladungen  $R_n$  sowie die Korrelationsmatrix  $\Gamma$  als gegeben angenommen.

Nach Simulation der logarithmierten Asset-Renditen und Einteilung dieser in die verschiedenen Ratingklassen wird eine Neubewertung der Kredite durchgeführt. Dazu wird der Kapitalwert der Kredite, diskontiert mit den Forward-Rates der jeweiligen Ratingklasse, berechnet. Anhand der Barwerte dieser neu bewerteten Kredite können die Verlustverteilung des Portfolios und daraus viele Kennzahlen wie der Value at Risk oder der Expected Shortfall ermittelt werden. Um eine geeignete Approximationsgüte garantieren zu können erfordert das Modell eine hohe Anzahl an Monte-Carlo-Simulationen für  $V_n$ .

Im Folgenden werde ein Schuldner  $n$  fixiert, auf die Angabe des Index bei den Assetvariablen und Wahrscheinlichkeiten wird daher verzichtet. Die Grundidee um Ratingmigration zu erfassen besteht darin, eine Abbildung zwischen dem Assetwert  $V$  in (zum Beispiel) einem Jahr und dem Rating nach dieser Zeit zu bilden. Dabei bedient man sich sogenannter *asset levels*  $Z_{def}, Z_{CCC}, Z_B$  etc. Die Schwellenwerte geben jeweils den kleinsten und größten Assetwert an, zwischen denen ein Kreditnehmer in eine bestimmte Ratingkategorie fällt, siehe exemplarisch Abbildung 7.2.

<sup>37</sup>Wie schon im KMV-Modell wird zwischen Länder- und Industriesektoren unterschieden. Details können Gup-ton, Finger und Bhatia [1997], Kapitel 8.5.1 entnommen werden.

<sup>38</sup>Im Falle eines Sektors vereinfacht sich obige Beziehung zu  $V_n = \sqrt{\rho_n} Y + \sqrt{1 - \rho_n} \epsilon_n$  mit den bereits bekannten Eigenschaften.



**Abbildung 7.2:** Bedeutung der Asset Levels in CreditMetrics  
[in Anlehnung an Gupton, Finger und Bhatia [1997], S.86]

Wäre in diesem Fall der Assetwert nach einem Jahr 40, so entspräche dies einer Migration in die Ratingklasse B. Mithilfe dieser Idee kann auch die Grenze  $Z_{def}$  angegeben werden, unter die der Assetwert eines Schuldners fallen muss, um den Ausfall dieses Schuldners herbeizuführen.

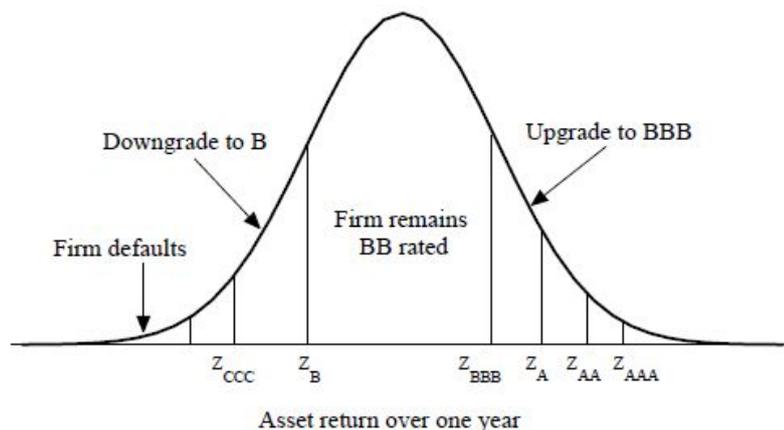
Da  $V$  standardnormalverteilt ist gilt:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ausfall}) &= p = P(V \leq Z_{def}) = \Phi(Z_{def}) \\
 P(\text{CCC}) &= P(Z_{def} < V \leq Z_{CCC}) = \Phi(Z_{CCC}) - \Phi(Z_{def}) \\
 P(\text{B}) &= P(Z_{CCC} < V \leq Z_B) = \Phi(Z_B) - \Phi(Z_{CCC}) \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Kennt man nun die Migrationswahrscheinlichkeiten, so können mithilfe dieser Beziehung iterativ die Schwellenwerte  $Z_{def}, Z_{CCC}, \dots$  bestimmt werden.

Zusammengefasst wird also die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung in Abschnitte gegliedert, sodass die Wahrscheinlichkeitsmasse innerhalb der jeweiligen Grenzen der Wahrscheinlichkeit, in diese Klasse zu migrieren entspricht, siehe Abbildung 7.3.

Die Vor- und Nachteile des Modells fassen Martin, Reitz und Wehn [2006] wie folgt zusammen: „Es können zahlreiche Informationen (z.B. CVaR, Erwartungswert und Standardabweichung der zukünftigen Marktwerte, Risikobeiträge einzelner Geschäfte, Diversifikationsgrad des Portfolios) [...] abgelesen werden. Die Methodik erfordert die Eingabe ratingabhängiger Forward-Zinskurven durch den Anwender und leistet insofern keinen Beitrag zur eigentlichen Bewertung des Kreditrisikos, lediglich zur Aggregation desselben. Die Stochastik zukünftiger Zinsänderungen wird ignoriert. [...] Zusätzliche Dimensionen wie etwa Größe oder Region finden keine Berücksichtigung, ebensowenig wie eine stochastische Modellierung des Exposure at Default. Die Verwendung von vorgegebenen Ausfallwahrscheinlichkeiten [...] kann dazu führen, dass die [...] Ausfallraten nicht korrekt geschätzt werden.“



**Abbildung 7.3:** Migrationswahrscheinlichkeiten in CreditMetrics  
[in Anlehnung an Gupton, Finger und Bhatia [1997], S.37]

### 7.3 Vergleich CreditMetrics/KMV-Modell

Bluhm, Overbeck und Wagner [2010] heben als die zwei wichtigsten Unterschiede zwischen den beiden Modellen folgendes hervor: Zum einen verwendet das KMV-Modell Buchwerte (engl. *asset returns*) zur Kalibrierung, das CreditMetrics-Modell hingegen den Wert des Eigenkapitals (engl. *equity value*). Dabei werden die Korrelationen zwischen equity returns als Näherungswerte für die Korrelationen von Buchwerten verwendet. Gupton, Finger und Bhatia [1997] wissen um den Nachteil, dass Unterschiede zwischen asset und equity returns nicht berücksichtigt werden, weisen aber darauf hin, dass dieses Verfahren wesentlich genauer ist als fixe Korrelationen anzunehmen.

Andererseits werden bei CreditMetrics gemeinsame Indizes für Sektoren und Länder verwendet, wohingegen dies im KMV-Modell getrennt betrachtet wird. Ein spanisches Bauunternehmen würde demnach bei CreditMetrics der spanischen Baubranche zugeordnet, im KMV-Modell würde ein Index für den Sitz in Spanien existieren und einer für die Baubranche.

McNeil, Frey und Embrechts [2005] gehen einen Schritt weiter und fassen ausgehend von den Unterschieden zwischen den beiden Modellen deren Vor- und Nachteile zusammen.

Das KMV-Modell hat den Vorteil, dass durch die Modellierung der erwarteten Ausfallhäufigkeit (und in weiterer Folge der Distance to Default) finanzielle Veränderungen eines Unternehmens wesentlich schneller berücksichtigt werden können als beispielsweise über Ratings. Weiters wird die makroökonomische Umwelt durch die Distance to Default sehr gut wiedergegeben. In Zeiten der Rezession nimmt diese generell niedrigere Werte an. Auch dieses Phänomen kann über historische Ratingveränderungen schlecht berücksichtigt werden.

Die Nachteile des KMV-Modells (die gleichzeitig die Vorteile von CreditMetrics darstellen) bestehen in der Sensitivität gegenüber globaler Über- und Unterreaktionen des Aktienmarktes. Während ein rating-basierter Ansatz für alle Firmen, für die ein internes Rating existiert, verwendet werden kann ist dies beim KMV-Modell nur für Firmen mit öffentlich gehandelten Aktien möglich.

# Kapitel 8

## Schlussfolgerungen

In dieser Arbeit werden das klassische Einfaktormodell vorgestellt und diverse Erweiterungen präsentiert. Diese bestehen zum einen im Fallenlassen diverser Annahmen im klassischen Modell wie das Nichteinbeziehen des Länderrisikos, der Abhängigkeit zwischen einzelnen Schuldnern, der Stochastizität diverser Parameter und dem Wegfallen der Normalverteilungsannahme für zentrale Variablen, zum anderen aber auch in der Erweiterung auf Mehrfaktormodelle, um eine Abhängigkeit der Bonitätsindikatoren von mehr als einem Faktor besser darstellen zu können.

Innerhalb des klassischen Einfaktormodells kann die Verlustverteilung in geschlossener Form in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit sowie der Assetkorrelation angegeben werden, ebenso wie bei einer Approximation durch ein unendlich großes Portfolio. Diese Tatsache macht sich auch das Einfaktormodell in Basel II zu Nutze und legt die Mindesteigenkapitalanforderungen für Kreditrisiko als angepassten Value at Risk des zuvor erwähnten Modells fest. Auch die drei Erweiterungen unter Einbeziehen des Länderrisikos, der Abhängigkeit zwischen einzelnen Schuldnern sowie der Stochastizität des ausfallbedrohten Betrags sowie der Verlustquote bei Eintritt des Ausfalls ermöglichen eine geschlossene Darstellung des Value at Risk des Verlustes. Durch Lösen eines Doppelintegrals via numerischer Integration kann auch im Fall eines Zweifaktormodells die Verlustverteilung berechnet werden. Wie sich zeigen lässt impliziert die Verwendung des Einfaktormodells anstelle des Zweifaktormodells einen höheren Kapitalbedarf.

Lässt man die Annahme der Normalverteilung für die zentralen Variablen im Einfaktormodell fallen und ersetzt diese durch die t-Verteilung mit unterschiedlicher Anzahl an Freiheitsgraden, so wird durch eine numerische Analyse ersichtlich, was die Theorie vorgibt: Für eine wachsende Anzahl an Freiheitsgraden nähert sich die t-Verteilung der Normalverteilung an, in vielen Fällen war dies bereits bei zehn Freiheitsgraden der Fall. Die empirische Analyse zeigte, dass keine generelle Aussage über die Beziehung des Value at Risk der t-Verteilung und der Standardnormalverteilung getroffen werden kann. Je nach Werten für die Assetkorrelation, die Ausfallwahrscheinlichkeit und das Konfidenzniveau liegt der Wert des Value at Risk im Fall der t-Verteilung über beziehungsweise unter dem der Standardnormalverteilung. Der erwartete Verlust bei Überschreitung des Value at Risk (Expected Shortfall) zu den Niveaus  $\alpha = 0.90$  und  $0.95$  sank bei den betrachteten Beispielen für steigende Anzahl an Freiheitsgraden. Weiters konnte anhand zweier Beispiele gezeigt werden, dass der relative Unterschied der t-Verteilung zur Standardnormalverteilung unabhängig von der Größe des betrachteten Portfolios ist.

In einem generellen Mehrfaktormodell kann durch die Verwendung von Copulas von der Annahme der Normalverteilung abgewichen werden. Die Auswirkung auf das betrachtete Modell kann insbesondere durch Angabe der oberen und unteren Tail-Abhängigkeit wiedergegeben werden. Die Relevanz der Faktormodelle im Kreditrisikobereich zeigt sich auch durch Betrachtung der gängigsten Industriemodelle (KMV-Modell, CreditMetrics).

Eine große Lücke in der bestehenden Literatur besteht in der numerischen Untersuchung des Einfaktormodells mithilfe empirischer Daten. Es ist sehr schwer geeignetes Datenmaterial zu finden und das existierende Material erfüllt oft nicht die Annahmen, die in den einzelnen Modellen getroffen werden. Daher greifen viele Autoren auf simulierte Daten zurück, so wie es auch in dieser Arbeit geschieht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass aufgrund der guten analytischen Handhabbarkeit das klassische Einfaktormodell mit Annahme der Normalverteilung theoretisch am besten erforscht ist- dieses wird auch in der Praxis neben den gängigsten Industriemodellen am häufigsten verwendet. Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass Missachtung oder Fehlspezifikation diverser Abhängigkeiten zur Unterschätzung des Risikos eines Portfolios führen können. Die hier vorgestellten Modelle zeigen daher diverse Möglichkeiten auf, das klassische Einfaktormodell zu erweitern, um das tatsächliche Risiko eines Portfolios besser abbilden zu können.

# Literatur

- [1] Peter Albrecht. *Kreditrisiken - Modellierung und Management: Ein Überblick*. GRIR, 1. Jahrgang, S. 22-152. 2005.
- [2] Basel Committee on Bank Supervision. *The New Basel Capital Accord. Second Consultative Paper*. Abgerufen am 16. Februar 2017 unter <http://www.bis.org/bcbs/bcbscp2.htm>. 2001.
- [3] Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht. *Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen*. Abgerufen am 16. Februar 2017 unter <http://www.bis.org/publ/bcbs107ger.pdf>. 2004.
- [4] Christian Bluhm, Ludger Overbeck und Christoph Wagner. *Introduction to Credit Risk Modeling*. Chapman & Hall/CRC, 2010.
- [5] Timurs Butenko. *Portfolio Credit Risk Modelling. A Review of Two Approaches*. Masterarbeit, ETH Zürich. 2014.
- [6] Juan C. G. Cespedes und David G. Martin. *The two-factor model for credit risk: A comparison with the BIS II one-factor model*. BBVA. Abgerufen am 16. Februar 2017 unter <http://www.risklab.es/es/seminarios/pasados/noviembre2002-paper.pdf>. 2002.
- [7] Sanjiv R. Das, Laurence Freed, Gary Geng und Nikunj Kapadia. *Correlated Default Risk*. The Journal of Fixed Income, Vol. 16, No.2: pp. 7-32. 2006.
- [8] Eranda Dragoti-Cela. *Risikothorie- und Management*. Skriptum zur Vorlesung Risikothorie- und Management an der TU Graz. 2009.
- [9] Andreas Eberle. *Stochastische Prozesse*. Skriptum zur Vorlesung Stochastische Prozesse an der Universität Bonn, abgerufen am 24. Mai 2017 unter [https://wt.iam.uni-bonn.de/fileadmin/WT/Inhalt/people/Andreas\\_Eberle/StochProcesses/SPSkript2014.pdf](https://wt.iam.uni-bonn.de/fileadmin/WT/Inhalt/people/Andreas_Eberle/StochProcesses/SPSkript2014.pdf). 2014.
- [10] Johanna Eckert. *Kreditportfoliomodellierung*. Springer Verlag, 2016.
- [11] Paul Embrechts, Alexander McNeil und Daniel Straumann. *Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls*. in M.A.H. Dempster. Risk Management: Value at Risk and Beyond, Cambridge University Press. 1998.
- [12] Susanne Emmer und Dirk Tasche. *Calculating credit risk capital charges with the one-factor model*. Journal of Risk 7, pp. 85-101. 2005.
- [13] Dirk Engel. *Copulas und Abhängigkeit*. Folien zur Vorlesung Statistik 2 am Karlsruher Institut für Technologie. Abgerufen am 19. Februar 2017 unter <http://www.math.kit.edu/stoch/lehre/mathstat2007w/media/copulas.pdf>. 2007.
- [14] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Volume II, John Wiley & Sons, New York. 1971.

- [15] Ines Filipovic. *Das Merton-Modell und seine Anwendungen in der Praxis*. Masterarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz. 2016.
- [16] Rüdiger Frey, Alexander J. McNeil und Mark A. Nyfeler. *Copulas and Credit Models*. 2001.
- [17] Kay Giesecke. *Credit Risk Modelling and Valuation: An Introduction*. Credit Risk: Models and Management, Vol. 2, Riskbooks, London. 2004.
- [18] Michael B. Gordy. *A Risk-Factor Model Foundation for Ratings-Based Bank Capital Rules*. Journal of Financial Intermediation, Volume 12, Issue 3, pp. 199–232. 2003.
- [19] Michael B. Gordy und Eva Lütkebohmert. *Granularity adjustment for Basel II*. Bundesbank Series 2 Discussion Paper No. 2007,01. 2007.
- [20] Christian Gourieroux, Jean-Paul Laurent und Olivier Scaillet. *Sensitivity Analysis of Values at Risk*. Journal of Empirical Finance 7, 225–245. 2000.
- [21] Greg M. Gupton, Christopher C. Finger und Mickey Bhatia. *CreditMetrics: Technical Document*. J.P. Morgan & Co., New York. 1997.
- [22] Jan Hahne und Wolfgang Tischer. *Quantitatives Risikomanagement: Korrelation und Abhängigkeit, Eigenschaften und Irrtümer*. Abgerufen am 21. Februar 2017 unter <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~ruediger/pages/lehre/ss11/risikomanagement/AusarbeitungHahneTischer.pdf>. 2011.
- [23] Andreas Henking, Christian Bluhm und Ludwig Fahrmeir. *Kreditrisikomessung: Statistische Grundlagen, Methoden und Modellierung*. Springer-Verlag, 2006.
- [24] Irmtraud Königshofer. *Kreditrisiko unter besonderer Berücksichtigung der Neuregelung der Vorschriften des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht*. Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz. 2003.
- [25] Paul H. Kupiec. *A Generalized Single Common Factor Model of Portfolio Credit Risk*. The Journal of Derivatives, Vol. 15, No.3, pp. 25-40. 2007.
- [26] David Lando. *Credit Risk Modeling*. Princeton University Press, 2004.
- [27] Marcus R.W. Martin, Stefan Reitz und Carsten S. Wehn. *Kreditderivate und Kreditrisikomodelle*. Vieweg, 2006.
- [28] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey und Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Univ. Press. 2005.
- [29] Christian Meier. *Risikotreiber in einem Kreditportfolio: Von den Risikogewichten in Basel II zu einem umfassenden Kreditrisikomodell*. Der Schweizer Treuhänder : Monatsschrift für Wirtschaftsprüfung, Rechnungswesen, Unternehmens- und Steuerberatung, Bd. 78, 4, S. 255-260. 2004.
- [30] Österreichische Nationalbank und Finanzmarktaufsicht. *Leitfaden zur Gesamtbankrisikosteuerung*. Abgerufen am 16. Februar 2017 unter [https://www.oenb.at/dam/jcr:a38719b9-da5b.../icaap\\_leitfaden\\_tcm14-38311.pdf](https://www.oenb.at/dam/jcr:a38719b9-da5b.../icaap_leitfaden_tcm14-38311.pdf). 2006.
- [31] Johanna Neslehova. *Einführung in Copulas*. Abgerufen am 16. Februar 2017 unter [http://www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/verein/2006\\_Dresdner\\_Forum/2006\\_johanna\\_neslehova.pdf](http://www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/verein/2006_Dresdner_Forum/2006_johanna_neslehova.pdf). 2006.

- [32] Dong H. Oh und Andrew J. Patton. *Modelling Dependence in High Dimensions with Factor Copulas*. Finance and Economics Discussion Series 2015-051. Washington: Board of Governors of the Federal Reserve System. 2015.
- [33] Daniel Rösch und Harald Scheule. *A Multi-Factor Approach for Systematic Default and Recovery Risk*. aus: Bernd Engelmann und Robert Rauhmeier: *The Basel II Risk Parameters*, 2011, Springer. 2005.
- [34] Philipp J. Schönbucher. *Factor Models for Portfolio Credit risk*. Journal of Risk Finance, Vol. 3, No.1 , pp. 45-56. 2001.
- [35] Robert Schwarz. *Kreditrisikomodelle*. Working Paper Series by the University of Applied Sciences of bfi Vienna, Number 3/2004. 2004.
- [36] Stoyan V. Stoyanov, Svetlozar T. Rachev, Boryana Racheva-Iotova und Frank J. Fabozzi. *Fat-tailed models for risk estimation*. KIT, Karlsruhe, Working paper series in economics; 30. 2011.
- [37] Oldrich A. Vasicek. *Limiting Loan Loss Probability Distribution*. Finance, Economics and Mathematics, John Wiley and Sons, Inc, USA. 1991.
- [38] Uwe Wehrspohn. *Analytic loss distributions of heterogeneous portfolios in the asset value credit risk model*. SSRN Electronic Journal. 2003.
- [39] Thomas C. Wilson. *Portfolio Credit Risk*. FRBNY Economic Policy Review. 1998.