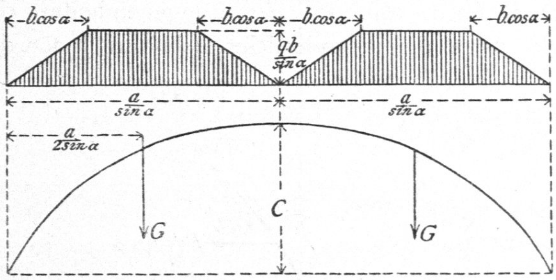
δ) Die Belaſtung des Gratbogens iſt nach Vorſtehendem nur lothrecht. Von S bis Q (Fig. 371) beträgt die Laſt auf die Längeneinheit $\frac{q\,x}{\sin\alpha}$ (ſiehe Gleichung 385); in S iſt ſie Null; in Q iſt ſie $\frac{q\,b}{\sin\alpha}$; auf dieſer Strecke iſt ſie entſprechend den Ordinaten einer geraden Linie veränderlich. Auf der Strecke PA nimmt die Belaſtung nach demſelben Geſetze ab, nach welchem ſie auf der Strecke SQ zugenommen hatte; für P iſt ſie $\frac{q\,b}{\sin\alpha}$, für A Null (vergl. Gleichung 388). Auf der Strecke QP hat ſie überall den gleichen Werth $\frac{q\,b}{\sin\alpha}$. Die Geſetzmäſsigkeit der Belaſtung iſt durch die in Fig. 373 ſchraffirte Fläche dargeſtellt, in welcher an jeder Stelle die Ordinate die Gröſse der Laſt für die Längeneinheit des Gratbogens angiebt. Iſt jetzt die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich c, ſo ergiebt ſich als Horizontalſchub im Bogen

Fig. 373.



$$H = \frac{1}{c}\,G\,\frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Es iſt

$$G = \frac{q\,b}{\sin\alpha}\left(\frac{a}{\sin\alpha} - b\cos\alpha\right) = q\,a\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 392.$$

Wird dieſer Werth in die Gleichung für H eingeführt, ſo erhält man als Seitenkräfte H und V der auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = q\,a\,b\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 393.$$

für das Kreuzgewölbe über quadratiſchem Raume:

$$H = \frac{q\,a^3}{c\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = q\,a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 394.$$

Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte ſind alſo genau gleich groſs, mögen die Lagerfugen den Längsaxen der Kappen parallel laufen oder im Grundriſs ſenkrecht zu den Graten angeordnet ſein.

Man nehme H im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratbogens wirkend an.

b) Kuppelgewölbe.

281. Vorausſetzungen.

Die Kuppelfläche entſteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Unterſuchungen ſollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, daſs die Belaſtung eine ruhende und über die einzelnen zwiſchen den Parallelkreiſen liegenden Ringe ſo vertheilt ſei, daſs ein jeder Ring entweder voll belaſtet oder ganz unbelaſtet iſt. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; es werden demnach die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben ſich dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande ſind, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

282. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

Es ſoll der Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel der Kuppel (Fig. 374) gelegt und die lothrechte Axe als Y-Axe, eine im Scheitel S ſenkrecht zu erſterer errichtete Axe als X-Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen $MNOP$ (Fig. 375), welches oben und unten durch Parallelkreiſe, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt iſt, wird auf ſeinen Gleichgewichtszuſtand unterſucht. Das Theilchen $MNOP$ iſt in Fig. 375 *a* in der Anſicht, in Fig. 375 *b* im Grundriſs, daneben im abgewickelten Zuſtande dargeſtellt. Auf MN wirkt für die Längeneinheit die Tangentialſpannung T, und da MN (vergl. den Grundriſs in Fig. 375 *b*) $x\,d\omega$ Längeneinheiten enthält, ſo wirkt auf MN die Kraft $T\,x\,d\omega$. Auf OP wirkt $(T + d\,T)(x + d\,x)\,d\,\omega$; auf MP und NO wirken die Ringſpannungen, welche für die Längeneinheit gleich R ſeien, alſo auf $d\,s$ Längeneinheiten die Gröſse $R\,d\,s$ haben. Auſserdem wirkt noch die veränderliche Belaſtung p für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf $MNOP$ die Laſt $p\,d\,s\,.\,x\,d\,\omega$. Um ſämmtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermitteln wir die Mittelkraft der beiden Ringſpannungen $R\,d\,s$; ſie iſt

$$\mathfrak{H} = 2\,R\,d\,s\,\sin\frac{d\,\omega}{2},$$

und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\,\omega}{2}$ nahezu $\sin\frac{d\,\omega}{2} = \frac{d\,\omega}{2}$, wird

Fig. 374.

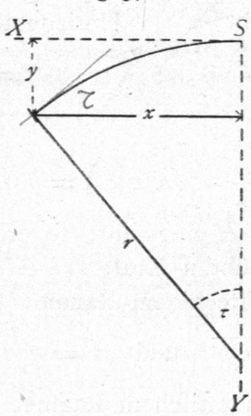
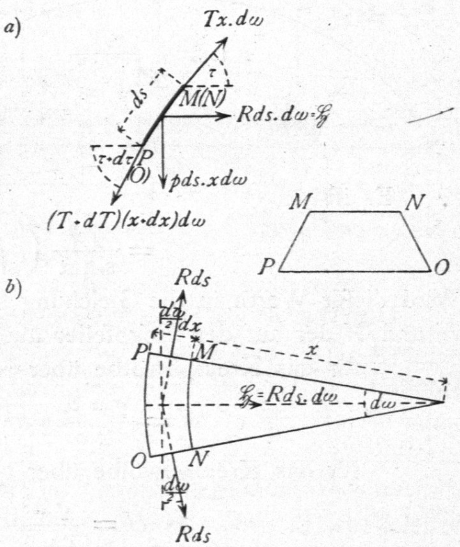


Fig. 375.



$$\mathfrak{H} = R\,d\,s\,d\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad 395.$$

Die Aufſtellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für $MNOP$ ergiebt nun

$$0 = T\,x\,d\,\omega\,\cos\tau - (T + d\,T)(x + d\,x)\,d\,\omega\,\cos(\tau + d\,\tau) + R\,d\,s\,d\,\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läſſt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, ſo bleibt

$$0 = T\,x\,\sin\tau\,d\,\tau - d\,T\,x\,\cos\tau - T\,d\,x\,\cos\tau + R\,d\,s = -\,d\,(T\,x\,\cos\tau) + R\,d\,s;$$

daher

$$R\,d\,s = d\,(T\,x\,\cos\tau) \quad . \quad . \quad . \quad 396.$$

Ferner iſt

$$0 = p\,d\,s\,x\,d\,\omega - T\,x\,d\,\omega.\,\sin\tau + (T + d\,T)(x + d\,x)\,d\,\omega\,\sin(\tau + d\,\tau);$$

$$\sin(\tau + d\,\tau) = \sin\tau + \cos\tau\,d\,\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlaſſen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p\,x\,d\,s + d\,(T\,x\,\sin\tau)$; daher

$$-\,p\,x\,d\,s = d\,(T\,x\,\sin\tau) \quad . \quad . \quad . \quad 397.$$

Die beiden Gleichungen 396 u. 397 geben Auffchlufs über die Gröfse der gleichzeitigen Werthe von T und R, welche irgend welchen Belaftungen und Gleichgewichtsflächen entfprechen.

283. Kugelförmige Kuppel.

Die erzeugende Linie ift bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden alfo erhalten, wenn in die Gleichungen 396 u. 397 für x und $d\,s$ die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreife entfprechen. Nach Fig. 374 ift $x = r \sin \tau$ und $d\,s = r\, d\,\tau$; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, dafs p für die ganze Kuppel conftant ift,

$$-p\, r \sin \tau \,.\, r\, d\,\tau = d\,(T\, r \sin \tau \sin \tau) \text{ und } \int_0^\tau d\,(T\, r \sin^2 \tau) = -p\, r^2 \int_0^\tau \sin \tau\, d\,\tau.$$

Als untere Grenze ift der Werth von τ und T einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entfpricht; hier ift diefer Endpunkt S, und es wird $\tau_0 = 0$; demnach ift

$$T\, r \sin^2 \tau = + p\, r^2 \left(\cos \tau\right)_0^\tau = - p\, r^2 (1 - \cos \tau),$$

$$T = -\frac{p\, r\,(1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = -\frac{p\, r\,(1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = -\frac{p\, r}{1 + \cos \tau} \quad . \;\; . \;\; . \quad 398.$$

Wird diefer Werth in die Gleichung 396 für R eingefetzt, fo erhält man

$$R\, d\, s = R\, r\, d\,\tau = d\left(-\frac{p\, r}{1 + \cos \tau}\, r \sin \tau \cos \tau\right) = -p\, r^2\, d\, \frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau},$$

$$R = -p\, r\, \frac{\cos 2\,\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad 399.$$

Die Werthe der Gleichungen 398 u. 399 gelten für oben gefchloffene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für $\tau = 0$ erhalten. Für letzteren Werth ift

$$T_0 = -\frac{p\, r}{2} \text{ und } R_0 = -\frac{p\, r}{2}, \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad 400.$$

d. h. die Meridianfpannungen und Ringfpannungen find für die Längeneinheit im Scheitel gleich grofs; es findet alfo dafelbft nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{p\, r}{2}$ für die Längeneinheit ftatt.

284. Halbkugelkuppel.

Für die Halbkugelkuppel ift am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher

$$T_{\frac{\pi}{2}} = -p\, r \text{ und } R_{\frac{\pi}{2}} = +p\, r \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad 401.$$

Die Meridianfpannung nimmt alfo vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{p\, r}{2}$ bis auf $p\, r$ zu, bleibt aber ftets Druck, da $1 + \cos \tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator ift T lothrecht gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ ift gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflagerdrücke darftellen. Es ift $\Sigma \left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) = p\, r \,.\, 2\, r\, \pi = 2\, p\, r^2\, \pi$, und das ganze Kuppelgewicht ift gleich $\frac{4\, r^2 \pi}{2}\, p = 2\, r^2 p\, \pi$. Die Ringfpannung R

geht vom Druck $\frac{p\,r}{2}$ im Scheitel zum Zug $p\,r$ am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu bestimmenden Winkel durch Null. Ist dieser Winkel τ_1, so ist $0 = p\,r\,\frac{\cos 2\,\tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$, woraus sich ergiebt

$$\cos \tau_1 = 0{,}618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^0\,50' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 402.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 sind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel gröfser sind als τ_1, findet Zug statt. Nimmt man auf die Zugfestigkeit des Mörtels keine Rücksicht, so können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne solchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht stattfinden; es ist also ohne Hilfsconstruction das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconstructionen sind entweder umgelegte eiserne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leistet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R; auf dieselbe wirken sonach nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengesetztem Sinne; dieselben sind bei Berechnung der Hintermauerung zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Bogenstück $s\,t$ (Fig. 376), welches zum Winkel $d\,\omega$ gehört, so ist die Mittelkraft der beiden R die nach aufsen gerichtete Kraft h gleich $2\,R \sin \frac{d\,\omega}{2} = R\,d\,\omega$.

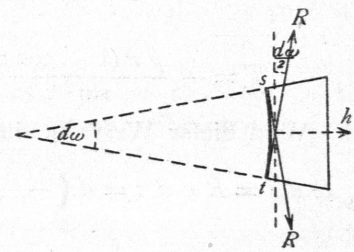


Fig. 376.

Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = -\frac{\cos 2\,\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 403.$$

ein; alsdann wird

$$R = \mu\,p\,r \quad \text{und} \quad h = \mu\,p\,r\,d\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad 404.$$

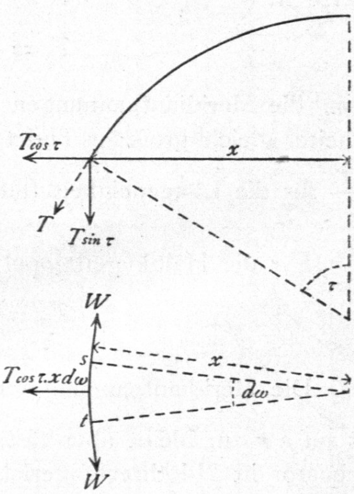
Für die Längeneinheit des $x\,d\,\omega$ langen Bogens ist also die nach aufsen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringspannungen

$$\mathfrak{h} = \frac{\mu\,p\,r\,d\,\omega}{x\,d\,\omega} = \frac{\mu\,p\,r}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 405.$$

Aus Vorstehendem folgt noch, dafs bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigstens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen mufs, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^0\,50'$ entspricht.

Aufser den Kräften $\mathfrak{h}$ (nach Gleichung 405) wirken auf die Widerlager noch die Meridianspannungen T, welche dem gröfsten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entsprechen. T hat eine wagrechte Seitenkraft $T \cos \tau$ und eine lothrechte Seitenkraft $T \sin \tau$. Die erstere wird durch die Widerlager oder durch einen eisernen Ring aufgehoben. Die Spannung in diesem Ringe ergiebt sich dann wie folgt. Auf den Bogen $s\,t$ (Fig. 377) von der Länge $x\,d\,\omega$ wirkt nach aufsen $T \cos \tau\,x\,d\,\omega$, und es soll diese Kraft durch die beiden Ringspannungen W aufgehoben werden; es ist demnach

Fig. 377.



$$T \cos \tau\,x\,d\,\omega = 2\,W \sin \frac{d\,\omega}{2} = W\,d\,\omega\,;$$

$$W = T\,x \cos \tau = \frac{p\,r\,r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{p\,r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \quad 406.$$

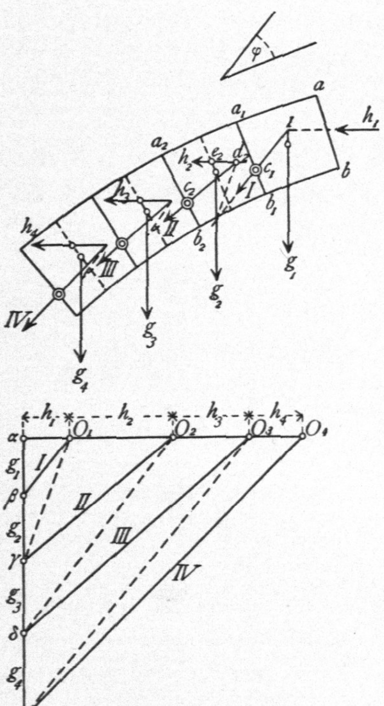
Die vorstehend entwickelten Werthe für T und R entsprechen der Gleichgewichtsfläche. Man kann diese Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin sind aber gröfsere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Seilcurven entsprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zusammenfallen.

285. Graphiſche Ermittelung.

Die graphiſche Ermittelung der Werthe von T und R an den verſchiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weiſe durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbearten gezeigt iſt, indem man beſtimmte Bedingungen für die Stützlinie vorſchreibt. Man unterſucht zu dieſem Zwecke den einem Centriwinkel α entſprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus.

Stellt man die Bedingung, daſs die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben ſoll und kein Gleiten ſtattfinde, ſo erhält man eine ſolche, indem man vom oberſten Kuppelringe ausgeht, folgendermaſsen (Fig. 378). Die Belaſtung des oberſten, zu dem angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles ſei g_1 ($= \alpha\,\beta$); auſser g_1 wirken auf dieſen Theil noch die beiden Spannungen $R\,ds$, welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Dieſe beiden $R\,ds$ werden genau, wie in Fig. 375, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derſelben Ebene wie g_1 liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel α gehörigen Kuppeltheil halbirt. Dieſe Mittelkraft iſt in Fig. 378 mit h_1 bezeichnet; h_1 iſt vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Gröſse und Lage von h_1 ſind unbekannt. Die Mittelkraft von h_1 und g_1 ſoll die Fuge $a_1\,b_1$ im inneren Drittel ſchneiden und mit der Senkrechten zu dieſer Fuge keinen gröſseren Winkel, als den Reibungswinkel φ einſchlieſsen. Man ziehe nun durch c_1, den unterſten Punkt des inneren Drittels der Fuge $a_1\,b_1$, eine Linie, die den Winkel φ mit der Senkrechten zur Fuge einſchlieſst; dieſe Linie ſchneide die Richtungslinie von g_1 in I; alsdann hat die durch I gelegte Kraft h_1 den kleinſten Werth, welcher obigen Bedingungen entſpricht. Rückte nämlich h_1 nach abwärts unter Beibehaltung von c_1, ſo würde h_1 (da ja g_1 denſelben Werth behält) gröſser werden; rückte gleichzeitig c_1 hinauf, ſo würde h_1 erſt recht gröſser. Rückten h_1 und c_1 gleich viel hinauf, ſo bliebe h_1 unverändert, behielte alſo den kleinſten Werth. Alles dies ergiebt ſich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreieckes für g_1, h_1 und Kraft I; h_1 kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch c_1 nach oben rückt, weil ſonſt der Winkel von I mit der Senkrechten zur Fuge gröſser als φ wird. — Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Mittellinie des erſten Steines oberhalb des inneren Drittels fiele, ſo wären an dieſer Stelle auch die Ringſpannungen nicht mehr im inneren Drittel; da auch dieſe im Drittel liegen ſollen, ſo würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den ſich dann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft I gegen die Fugenſenkrechte kleiner als φ würde.

Fig. 378.



Auf den zweiten Stein wirken nun I und g_2; auſserdem die Mittelkraft h_2 der Spannungen R im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von I und g_2 iſt aus dem Kraftpolygon zu entnehmen ($= O_1\,\gamma$); ſie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien dieſer beiden Kräfte. Die Reſultirende dieſer Kraft und der Kraft h_2 ſoll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben ſo ſoll auch der Schnittpunkt von h_2 mit der punktirten Halbirungslinie dieſes Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinſte Werth von h_2, welcher dieſen Bedingungen entſpricht, iſt derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinſchwerlinie, d. h. durch e_2, geht, die Geſammtmittelkraft von I, g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2\,b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels ſchneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2, dem Schnittpunkte der Mittelkraft von I und g_2 mit h_2 ergiebt die Richtung der Geſammtmittelkraft II; die Gröſse erhält man durch Ziehen einer Linie $\gamma\,O_2$ durch γ parallel zur Richtungslinie von II. Der Winkel, welchen II mit der Fugenſenkrechten zu $a_2\,b_2$ einſchlieſst, iſt kleiner als φ, alſo die Conſtruction brauchbar. Wäre der Winkel gröſser als φ, ſo wäre h_2 ſo weit hinabzurücken und zu vergröſsern, bis der Winkel höchſtens gleich φ iſt. In dieſer Weiſe erhält man durch Weiterconſtruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinſtimmen dürfte.