

$$N_{max} = \frac{2 P}{3 x b} .$$

In ganz derselben Weise kann man die Unterfuchung für eine Anzahl von Fugen führen.

2) Pfeiler. Die Stabilitätsunterfuchung eines zwischen zwei Gewölben befindlichen Mittelpfeilers wird entsprechend vorgenommen.

Die Punkte  $E$  können auch leicht graphisch ermittelt werden, indem man  $R$  mit  $G_1$  zu  $R'$  zusammensetzt und in gleicher Weise weiter für die verschiedenen Fugen verfährt.

### 3. Kapitel.

## Kreuz- und Kuppelgewölbe.

### a) Kreuzgewölbe.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder so, daß die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe besteht, oder so, daß sie im Grundriß senkrecht oder nahezu senkrecht zu den Graten verlaufen. Das statische Verhalten ist bei den beiden Anordnungen verschieden.

278.  
Lagerfugen.

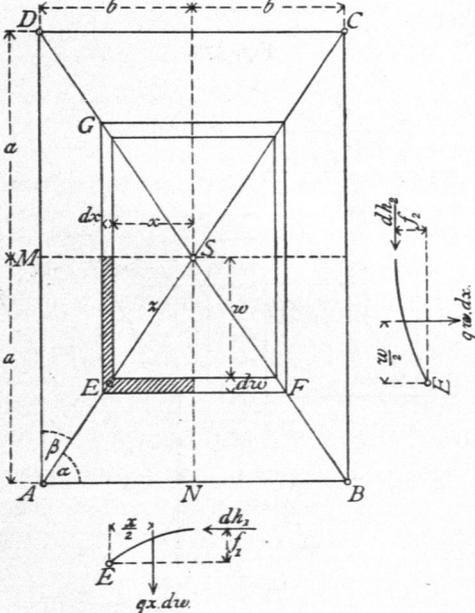
1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel. Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen soll die vereinfachende, mit der Wirklichkeit genügend genau übereinstimmende Annahme einer über die Grundfläche gleichmäßig vertheilten Belastung  $g$  auf die Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittlung der Seilcurve und damit auch des Horizontalschubes werden stets drei Punkte angenommen werden. Die gefundenen Horizontalschübe sind nur dann richtig, wenn die drei Punkte in jedem Gewölbetheil richtig angenommen sind. Es können dann nach Obigem auch leicht die Größt- und Kleinstwerthe der Horizontalschübe ermittelt werden.

279.  
Lagerfugen  
parallel  
zur Axe der  
Kappen.

Der nachfolgenden Unterfuchung soll ein Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt werden; die Anwendung für ein solches mit quadratischem Grundriß ist dann leicht.

Zerlegt man jede Kappe durch senkrecht zur Längsaxe gelegte, lothrechte Ebenen in einzelne Streifen, welche im Grundriß Paralleltrapeze bilden (Fig. 368), und betrachtet zwei solche Streifen  $GE$  und  $EF$ , welche sich im Punkte  $E$  des Grates treffen, so ergeben sich die auf diese Streifen in ihren Scheiteln übertragenen Horizontalschübe folgendermaßen. Bezeichnet man die Pfeilhöhen der Seilcurven in

Fig 368.



den Streifen bezw. mit  $f_1$  und  $f_2$ , die Horizontalschübe mit bezw.  $dh_1$  und  $dh_2$ , so erhält man nach Fig. 368

$$dh_1 = \frac{q x^2 dw}{2 f_1} \quad \text{und} \quad dh_2 = \frac{q w^2 dx}{2 f_2} \quad \dots \quad 377.$$

Der Punkt  $E$  ist der gemeinsame Kämpferpunkt für die beiden Bogen  $GE$  und  $EF$ ; die in diesem Punkte auf den Gratbogen von den beiden Bogen übertragenen Kräfte haben je eine wagrechte Seitenkraft, welche  $dh_1$ , bezw.  $dh_2$  ist, und eine lothrechte Seitenkraft, deren Größen

$$dv_1 = qx dw \quad \text{und} \quad dv_2 = qw dx$$

sind. Die lothrechten Seitenkräfte addiren sich einfach in  $E$  zu einer abwärts wirkenden Kraft:

$$v = q(x dw + w dx).$$

$v$  ist also gleich dem halben Gewichte der anschließenden Streifen (gleich dem Gewichte der in Fig. 368 schraffirten Fläche). Die beiden wagrechten Kräfte zerlegen sich (Fig. 369) in je eine Seitenkraft, welche in die Richtung der Diagonalen  $AC$  fällt, und in eine Seitenkraft senkrecht zu der ersteren. Soll die Mittelkraft von  $dh_1$  und  $dh_2$  in die lothrechte, durch die Diagonale gelegte Ebene fallen, so müssen sich die zuletzt genannten Seitenkräfte  $dh_1 \sin \alpha$  und  $dh_2 \cos \alpha$  aufheben; es muß also

$$dh_1 \sin \alpha = dh_2 \cos \alpha$$

fein, woraus

$$\text{tg } \alpha = \frac{dh_2}{dh_1} = \frac{w^2 dx \cdot f_1}{x^2 dw \cdot f_2}.$$

Nun ist

$$w = x \text{ tg } \alpha \quad \text{und} \quad dw = \text{tg } \alpha dx,$$

daher

$$\text{tg } \alpha = \frac{x^2 \text{tg }^2 \alpha \cdot dx \cdot f_1}{x^2 \text{tg } \alpha \cdot dx \cdot f_2} = \text{tg } \alpha \frac{f_1}{f_2}.$$

Damit obige Bedingung erfüllt sei, muß daher

$$\frac{f_1}{f_2} = 1, \quad \text{d. h.} \quad f_1 = f_2$$

fein. Soll also die Mittelkraft beider Horizontalkräfte im Grundriss in die Richtung der Diagonalen fallen, so sind für die Seilcurven der beiden zusammengehörigen Streifen gleiche Pfeilhöhen einzuführen.

Betrachtet man nun ein Viertel des Gewölbes (Fig. 370), und zwar das Stück  $MSNA$ , so wirken auf dasselbe die Belastung  $q$  für die Einheit der Grundfläche, also im Ganzen  $G = qab$  im Schwerpunkte  $O$  des Rechteckes  $MSNA$ ; außerdem wirken in den Scheiteln der einzelnen Gewölbefstreifen die Kräfte  $dh_1$ , bezw.  $dh_2$ , endlich der Kämpferdruck auf den Gratbogen in  $A$ . Diese Kräfte müssen den Ge-

Fig. 369.

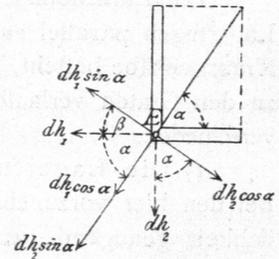
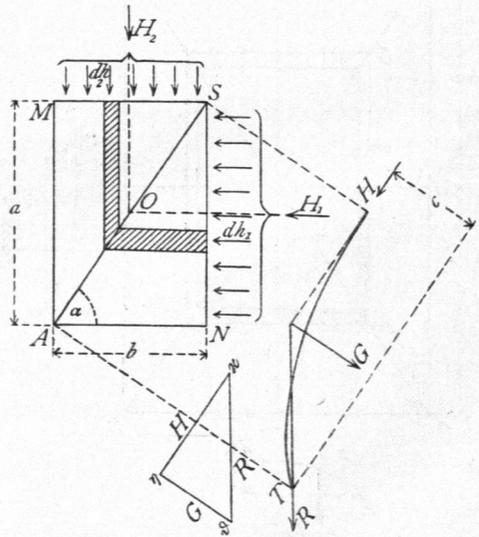


Fig. 370.



wölbetheil im Gleichgewicht halten. Die den einzelnen Streifen entsprechenden Seilcurven sind, weil die Belastungen gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilt sind, Parabeln, und man kann annehmen, dafs sich in allen Streifen deselben Gewölbetheiles (*ASB*, bezw. *ASD* in Fig. 368) dieselbe Seilcurve bildet. Dann ist, wenn  $C_1$  und  $C_2$  noch zu bestimmende Festwerthe sind, bezw.

$$x^2 = C_1 f_1 \quad \text{und} \quad w^2 = C_2 f_2.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung 377 eingeführt, so ergibt sich

$$d h_1 = \frac{q C_1 d w}{2} \quad \text{und} \quad d h_2 = \frac{q C_2 d x}{2} \quad \dots \quad 378.$$

Damit ist das bemerkenswerthe Ergebnifs gefunden, dafs die in den Scheiteln der Gewölbstreifen wirkenden Horizontalkräfte auf die ganze Länge des Gewölbes für die Längeneinheit die gleiche Gröfse haben (constant sind). Man erhält demnach die auf die gesammten Scheiteltrecken *SN*, bezw. *SM* ausgeübten Horizontalkräfte zu

$$H_1 = \frac{q C_1 a}{2} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q C_2 b}{2} \quad \dots \quad 379.$$

Diese Mittelkräfte liegen in den Mitten der bezüglichen Scheiteltrecken, weil alle Einzelkräfte gleich grofs sind. Beide Kräfte  $H_1$  und  $H_2$  schneiden sich in der Mitte der Diagonale *AS*, d. h. in der Lothrechten des Punktes *O*. Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äufsersten Gewölbstreifen (*AB*, bezw. *AD*) mit *c* bezeichnet, so ist  $b^2 = C_1 c$  und  $a^2 = C_2 c$ ; hiernach wird

$$H_1 = \frac{q}{2} a \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q}{2} b \frac{a^2}{c}.$$

$H_1$  und  $H_2$  setzen sich in ihrem Schnittpunkte zu einer Mittelkraft *H* zusammen, welche im Grundrifs in die Richtung der Diagonalen *AS* fällt; dieselbe ist

$$H = H_1 \cos \alpha + H_2 \sin \alpha = \frac{q}{2c} a b (b \cos \alpha + a \sin \alpha).$$

Nun ist  $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  und  $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ; mithin wird

$$H = \frac{q a b (b^2 + a^2)}{2 c \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Diese Kraft *H* vereinigt sich in der Lothrechten des Punktes *O* mit dem Gewichte  $G = q a b$  zu der auf den Kämpfer wirkenden Mittelkraft. Damit ist die auf einen jeden Eckpfeiler des rechteckigen Kreuzgewölbes wirkende Kraft gefunden; sie hat eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröfsen sind:

$$H = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots \quad 380.$$

$$V = q a b \quad \dots \quad 381.$$

Wenn das Gewölbe quadratischen Grundrifs hat, so bleibt alles Vorstehende giltig; nur ist  $b = a$  einzuführen, so dafs man erhält: Beim Kreuzgewölbe über quadratischem Raume mit einer Seitenlänge  $2a$  ist der Horizontalschub im Grat

$$H = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}}, \quad \dots \quad 382.$$

und die lothrechte auf jeden Pfeiler übertragene Kraft

$$V = q a^2 \quad \dots \quad 383.$$

Die graphische Ermittlung von *H* läuft auf die Zerlegung von  $G = q a b$



der obige Werth eingeführt und beachtet, daß  $w = z_1 \operatorname{tg} \alpha$ , also  $dw = dz_1 \operatorname{tg} \alpha$  ist, so ergibt sich

$$dh = \frac{q z_1^2 \sin \alpha dz_1}{f_1}.$$

Unter gleichen Annahmen, wie in Art. 279 (S. 263), wird

$$z_1^2 = C f_1 \text{ und } dh = q C \sin \alpha dz_1; \text{ ferner, weil } z_1 = \frac{x \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}, \quad dz_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} dx,$$

$$dh = q C \cos^2 \alpha dx.$$

Jeder Doppelfstreifen  $EGE'$  innerhalb der Grenzen  $x = 0$  bis  $x = b$  übt eine wagrechte Kraft  $dh$  auf den Scheitel des Gurtbogens aus. Die ganze Wirkung dieser Streifen ist also

$$\mathfrak{H}_1 = q C \cos^2 \alpha b = \frac{q C b^3}{(a^2 + b^2)} \dots \dots \dots 386.$$

β) Es werde nunmehr ein Streifen  $HJK$  untersucht, welcher außerhalb des Viereckes  $LMNO$  liegt, aber an der einen Seite sich gegen den entsprechenden Streifen des benachbarten Gewölbeviertels lehnt (Fig. 371). Die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven seien  $f_3$  und  $f_4$ , die Horizontalstöße  $dh_3$  und  $dh_4$ ; alsdann ist

$$dh_3 = \frac{q dw z_3^2}{2 f_3} \quad \text{und} \quad dh_4 = \frac{q dw z_4^2}{2 f_4}.$$

Wie oben muß  $dh_3 = dh_4$  sein, mithin  $\frac{f_4}{f_3} = \frac{z_4^2}{z_3^2}$ . Man erhält nach einfachen Umformungen

$$\frac{f_4}{f_3} = \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{w_1} - 1 \right)^2.$$

Im Punkte  $K$  wirken wiederum zwei Kräfte  $dh_3$ , deren in die Längsrichtung der Gewölbekappe fallenden Seitenkräfte sich zusammensetzen, während die beiden senkrecht dazu gerichteten Seitenkräfte einander aufheben. Man erhält erstere zu

$$dh' = 2 dh_3 \cos \alpha = \frac{2 \cos \alpha}{2 f_3} q dw_1 z_3^2.$$

Es ist  $SJ = w_1$  gesetzt; dann wird

$$w_1 = z_3 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad dw_1 = dz_3 \operatorname{tg} \alpha;$$

und, wenn wiederum  $z_3^2 = C f_3$  angenommen wird,

$$dh' = q C \sin \alpha dz_3.$$

Ferner ist (Fig. 371)  $z_3 = y \cos \alpha$  und  $dz_3 = \cos \alpha dy$ , also

$$dh' = q C \sin \alpha \cos \alpha dy.$$

Die Summe aller Kräfte  $dh'$ , welche von den Streifen zwischen  $LMN$  und  $L''M''N''$  (Fig. 371) ausgeübt werden, ist

$$\mathfrak{H}_2 = q C \sin \alpha \cos \alpha \int_{\frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}}^a dy = q C \sin \alpha \cos \alpha \left( a - \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} \right),$$

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{q b C (a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} \dots \dots \dots 387.$$

γ) Endlich wenden wir uns zu einem Streifen  $F''E''G''$ , der sich beiderseits gegen die Gurtbogen stützt; dabei wird die Annahme gemacht, daß auch in den betreffenden Streifentheilen Seilcurven stattfinden, bei denen an der Ansatzstelle an die Gurtbogen die Tangenten wagrecht sind. Die beiden in  $E''$  (Fig. 372) auf

den Grat übertragenen wagrechten Kräfte sind, wenn die obigen Bezeichnungen (mit Abänderung der Zeiger) beibehalten werden,

$$dh_5 = \frac{q d\zeta z_5^2}{2f_5} \quad \text{und} \quad dh_6 = \frac{q d\zeta z_6^2}{2f_6};$$

alsdann muß  $\frac{f_6}{f_5} = \frac{z_6^2}{z_5^2} = \frac{b^4}{a^4}$  sein, damit sich in  $E''$  die beiden wagrechten Kräfte aufheben; auf den Gratabogen wirkt dann nur eine lothrechte Kraft, welche gleich dem Gewichte des Streifens ist; dieselbe ist

$$v_1 = q d\zeta (z_5 + z_6) = \frac{q d\zeta u}{\sin \alpha},$$

$$v_1 = \frac{q u d\zeta}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 388.$$

Das Gewicht eines um  $\zeta$  von  $A$  entfernten Streifens ist also eben so groß, wie dasjenige eines gleich weit von  $S$  entfernten Streifens der Grundfläche  $LSM$  (Fig. 371).

Die im Punkte  $G''$  auf den Gurtbogen ausgeübte Kraft  $dh_5$  zerlegt sich in eine senkrecht zum Gurtbogen gerichtete Seitenkraft  $dh_5 \cos \alpha$  und eine solche, welche im Grundriß in die Richtung des Gurtbogens fällt:  $dh_5 \sin \alpha$ . Letztere wird durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Seitenkraft im symmetrisch zur Mitte liegenden Punkte  $G'''$  aufgehoben; die erstere ist

$$dh_5 \cos \alpha = \frac{q d\zeta z_5^2}{2f_5} \cos \alpha = \frac{q u^2 du \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2f_5} = \frac{q u^2 a^2 b^2 du}{2f_5 (a^2 + b^2)^2}.$$

Seitens des Kreuzgewölbes werden also auf den Gurtbogen  $AB$  wagrechte Kräfte übertragen, und zwar im Scheitel die Einzelkraft  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$ , welche unter Berücksichtigung der Ausdrücke 386 u. 387

$$\mathfrak{S} = \frac{q C b a^2}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots 389.$$

ist, und außerdem auf die laufende Einheit der wagrechten Projection des Gurtbogens

$$h = \frac{q u^2 a^2 b^2}{2f_5 (a^2 + b^2)^2} \dots \dots \dots 390.$$

$f_5$  und  $u$  sind veränderlich. Wird die Pfeilhöhe  $f_3$  der zum Streifen  $L''M''$  gehörigen Seilcurve mit  $e$  bezeichnet, für welchen Streifen  $z_3$  den Werth  $a \cos \alpha$  annimmt, so ergibt sich

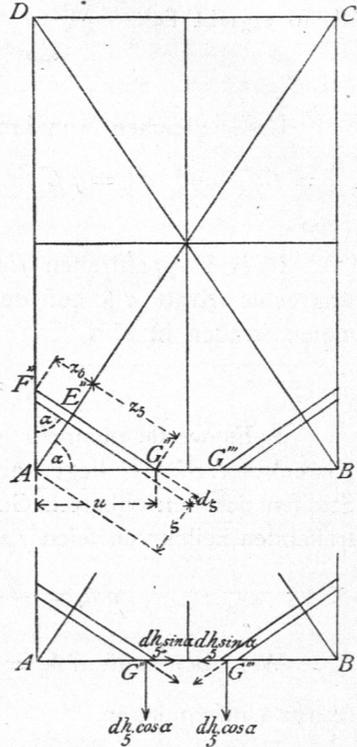
$$a^2 \cos^2 \alpha = C e, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{e} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2) e}, \quad \text{und es wird}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{q a^4 b^3}{e (a^2 + b^2)^2} \dots \dots \dots 391.$$

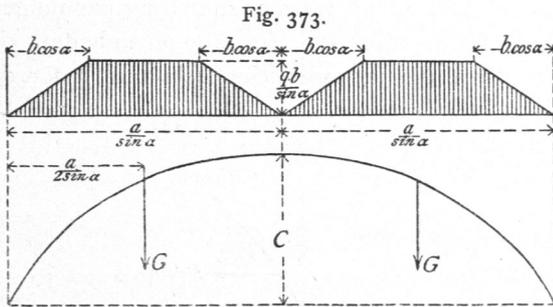
Die Kräfte  $\mathfrak{S}$  und  $h$  werden entweder durch gleiche, entgegengesetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder sie müssen von der Mauer aufgenommen werden, gegen welche sich das Gewölbe setzt.

Die wagrechten, entsprechenden Kräfte gegen die Gurtbogen  $AD$ , bzw.  $BC$  ergeben sich in ganz gleicher Weise.

Fig. 372.



δ) Die Belaftung des Gratbogens ist nach Vorstehendem nur lothrecht. Von  $S$  bis  $Q$  (Fig. 371) beträgt die Last auf die Längeneinheit  $\frac{q x}{\sin \alpha}$  (siehe Gleichung 385); in  $S$  ist sie Null; in  $Q$  ist sie  $\frac{q b}{\sin \alpha}$ ; auf dieser Strecke ist sie entsprechend den Ordinaten einer geraden Linie veränderlich. Auf der Strecke  $PA$  nimmt die Belaftung nach demselben Gesetze ab, nach welchem sie auf der Strecke  $SQ$  zugenommen hatte; für  $P$  ist sie  $\frac{q b}{\sin \alpha}$ , für  $A$  Null (vergl. Gleichung 388). Auf der Strecke  $QP$  hat sie überall den gleichen Werth  $\frac{q b}{\sin \alpha}$ . Die Gefetzmäßigkeit der Belaftung



ist durch die in Fig. 373 schraffierte Fläche dargestellt, in welcher an jeder Stelle die Ordinate die Größe der Last für die Längeneinheit des Gratbogens angiebt. Ist jetzt die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich  $c$ , so ergibt sich als Horizontalschub im Bogen

$$H = \frac{1}{c} G \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Es ist

$$G = \frac{q b}{\sin \alpha} \left( \frac{a}{\sin \alpha} - b \cos \alpha \right) = q a b . . . . . 392.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung für  $H$  eingeführt, so erhält man als Seitenkräfte  $H$  und  $V$  der auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = q a b; . . . . . 393.$$

für das Kreuzgewölbe über quadratischem Raume:

$$H = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = q a^2 . . . . . 394.$$

Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte sind also genau gleich groß, mögen die Lagerfugen den Längsaxen der Kappen parallel laufen oder im Grundriss senkrecht zu den Graten angeordnet sein.

Man nehme  $H$  im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratbogens wirkend an.

### b) Kuppelgewölbe.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Untersuchungen sollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, daß die Belaftung eine ruhende und über die einzelnen zwischen den Parallelkreisen liegenden Ringe so vertheilt sei, daß ein jeder Ring entweder voll belaftet oder ganz unbelaftet ist. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; es werden demnach die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben sich

281.  
Voraus-  
setzungen.