$$N_{max} = \frac{2\,P}{3\,x\,b}\,.$$

In ganz derſelben Weiſe kann man die Unterſuchung für eine Anzahl von Fugen führen.

2) Pfeiler. Die Stabilitätsunterſuchung eines zwiſchen zwei Gewölben befindlichen Mittelpfeilers wird entſprechend vorgenommen.

Die Punkte E können auch leicht graphiſch ermittelt werden, indem man R mit G_1 zu R' zuſammenſetzt und in gleicher Weiſe weiter für die verſchiedenen Fugen verfährt.

---

3. Kapitel.

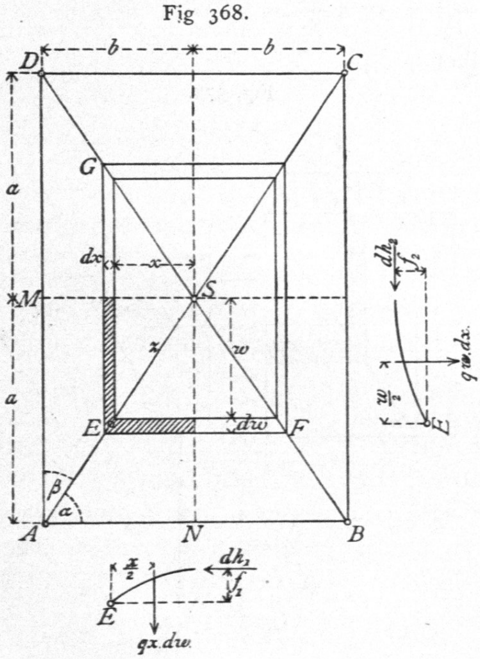
Kreuz- und Kuppelgewölbe.

a) Kreuzgewölbe.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder ſo, daſs die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe beſteht, oder ſo, daſs ſie im Grundriſs ſenkrecht oder nahezu ſenkrecht zu den Graten verlaufen. Das ſtatiſche Verhalten iſt bei den beiden Anordnungen verſchieden. 278. Lagerfugen.

1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel. Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen ſoll die vereinfachende, mit der Wirklichkeit genügend genau übereinſtimmende Annahme einer über die Grundfläche gleichmäſsig vertheilten Belaſtung g auf die Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittelung der Seilcurve und damit auch des Horizontalſchubes werden ſtets drei Punkte angenommen werden. Die gefundenen Horizontalſchübe ſind nur dann richtig, wenn die drei Punkte in jedem Gewölbetheil richtig angenommen ſind. Es können dann nach Obigem auch leicht die Gröſst- und Kleinſtwerthe der Horizontalſchübe ermittelt werden. 279. Lagerfugen parallel zur Axe der Kappen.

Fig 368.



Der nachfolgenden Unterſuchung ſoll ein Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt werden; die Anwendung für ein ſolches mit quadratiſchem Grundriſſe iſt dann leicht.

Zerlegt man jede Kappe durch ſenkrecht zur Längsaxe gelegte, lothrechte Ebenen in einzelne Streifen, welche im Grundriſs Paralleltrapeze bilden (Fig. 368), und betrachtet zwei ſolche Streifen $G\,E$ und $E\,F$, welche ſich im Punkte E des Grates treffen, ſo ergeben ſich die auf dieſe Streifen in ihren Scheiteln übertragenen Horizontalſchübe folgendermaſsen. Bezeichnet man die Pfeilhöhen der Seilcurven in den Streifen bezw. mit f_1 und f_2, die Horizontalſchübe mit bezw. $d\,h_1$ und $d\,h_2$, ſo erhält man nach Fig. 368

$$d\,h_1 = \frac{q\,x^2\,d\,w}{2\,f_1} \quad \text{und} \quad d\,h_2 = \frac{q\,w^2\,d\,x}{2\,f_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 377.$$

Der Punkt E iſt der gemeinſame Kämpferpunkt für die beiden Bogen $G\,E$ und $E\,F$; die in dieſem Punkte auf den Gratbogen von den beiden Bogen übertragenen Kräfte haben je eine wagrechte Seitenkraft, welche $d\,h_1$, bezw. $d\,h_2$ iſt, und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröſsen

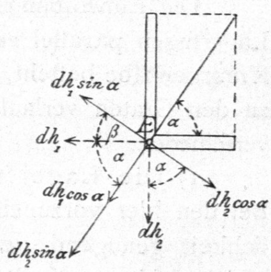
$$d\,v_1 = q\,x\,d\,w \quad \text{und} \quad d\,v_2 = q\,w\,d\,x$$

ſind. Die lothrechten Seitenkräfte addiren ſich einfach in E zu einer abwärts wirkenden Kraft:

$$\mathfrak{v} = q\,(x\,d\,w + w\,d\,x).$$

$\mathfrak{v}$ iſt alſo gleich dem halben Gewichte der anſchlieſsenden Streifen (gleich dem Gewichte der in Fig. 368 ſchraffirten Fläche). Die beiden wagrechten Kräfte zerlegen ſich (Fig. 369) in je eine Seitenkraft, welche in die Richtung der Diagonalen $A\,C$ fällt, und in eine Seitenkraft ſenkrecht zu der erſteren.

Fig. 369.



Soll die Mittelkraft von $d\,h_1$ und $d\,h_2$ in die lothrechte, durch die Diagonale gelegte Ebene fallen, ſo müſſen ſich die zuletzt genannten Seitenkräfte $d\,h_1 \sin\alpha$ und $d\,h_2 \cos\alpha$ aufheben; es muſs alſo

$$d\,h_1 \sin\alpha = d\,h_2 \cos\alpha$$

ſein, woraus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\,h_2}{d\,h_1} = \frac{w^2\,d\,x\,.\,f_1}{x^2\,d\,w\,.\,f_2}.$$

Nun iſt

$$w = x \operatorname{tg}\alpha \quad \text{und} \quad d\,w = \operatorname{tg}\alpha\,d\,x,$$

daher

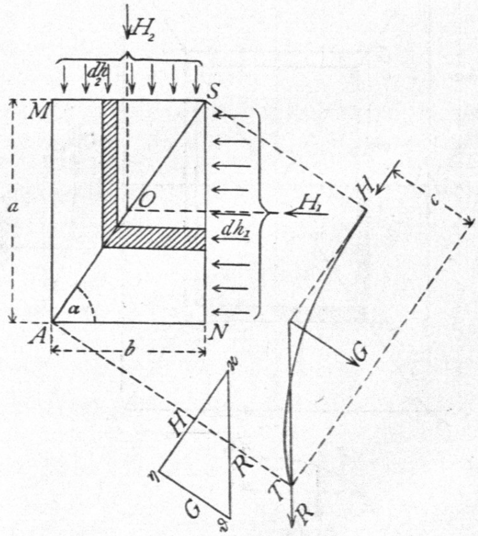
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2\alpha\,.\,d\,x\,.\,f_1}{x^2 \operatorname{tg}\alpha\,.\,d\,x\,.\,f_2} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{f_1}{f_2}.$$

Damit obige Bedingung erfüllt ſei, muſs daher

$$\frac{f_1}{f_2} = 1, \quad \text{d. h.} \quad f_1 = f_2$$

ſein. Soll alſo die Mittelkraft beider Horizontalkräfte im Grundriſs in die Richtung der Diagonalen fallen, ſo ſind für die Seilcurven der beiden zuſammengehörigen Streifen gleiche Pfeilhöhen einzuführen.

Fig. 370.



Betrachtet man nun ein Viertel des Gewölbes (Fig. 370), und zwar das Stück $M\,S\,N\,A$, ſo wirken auf daſſelbe die Belaſtung q für die Einheit der Grundfläche, alſo im Ganzen $G = q\,a\,b$ im Schwerpunkte O des Rechteckes $M\,S\,N\,A$; auſserdem wirken in den Scheiteln der einzelnen Gewölbeſtreifen die Kräfte $d\,h_1$, bezw. $d\,h_2$, endlich der Kämpferdruck auf den Gratbogen in A. Dieſe Kräfte müſſen den Gewölbetheil im Gleichgewicht halten. Die den einzelnen Streifen entſprechenden Seilcurven ſind, weil die Belaſtungen gleichmäſsig über die wagrechte Projection vertheilt ſind, Parabeln, und man kann annehmen, daſs ſich in allen Streifen desſelben Gewölbetheiles (ASB, bezw. ASD in Fig. 368) dieſelbe Seilcurve bildet. Dann iſt, wenn C_1 und C_2 noch zu beſtimmende Feſtwerthe ſind, bezw.

$$x^2 = C_1 f_1 \quad \text{und} \quad w^2 = C_2 f_2.$$

Werden dieſe Werthe in die Gleichung 377 eingeführt, ſo ergiebt ſich

$$d\,h_1 = \frac{q\,C_1\,d\,w}{2} \quad \text{und} \quad d\,h_2 = \frac{q\,C_2\,d\,x}{2} \quad \ldots\ldots \quad 378.$$

Damit iſt das bemerkenswerthe Ergebniſs gefunden, daſs die in den Scheiteln der Gewölbſtreifen wirkenden Horizontalkräfte auf die ganze Länge des Gewölbes für die Längeneinheit die gleiche Gröſse haben (conſtant ſind). Man erhält demnach die auf die geſammten Scheitelſtrecken SN, bezw. SM ausgeübten Horizontalkräfte zu

$$H_1 = \frac{q\,C_1\,a}{2} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q\,C_2\,b}{2} \quad \ldots\ldots \quad 379.$$

Dieſe Mittelkräfte liegen in den Mitten der bezüglichen Scheitelſtrecken, weil alle Einzelkräfte gleich groſs ſind. Beide Kräfte H_1 und H_2 ſchneiden ſich in der Mitte der Diagonale AS, d. h. in der Lothrechten des Punktes O. Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äuſserſten Gewölbeſtreifen (AB, bezw. AD) mit c bezeichnet, ſo iſt $b^2 = C_1 c$ und $a^2 = C_2 c$; hiernach wird

$$H_1 = \frac{q}{2}\,a\,\frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q}{2}\,b\,\frac{a^2}{c}.$$

H_1 und H_2 ſetzen ſich in ihrem Schnittpunkte zu einer Mittelkraft H zuſammen, welche im Grundriſs in die Richtung der Diagonalen AS fällt; dieſelbe iſt

$$H = H_1 \cos\alpha + H_2 \sin\alpha = \frac{q}{2\,c}\,a\,b\,(b\cos\alpha + a\sin\alpha).$$

Nun iſt $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; mithin wird

$$H = \frac{q\,a\,b\,(b^2+a^2)}{2\,c\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Dieſe Kraft H vereinigt ſich in der Lothrechten des Punktes O mit dem Gewichte $G = q\,a\,b$ zu der auf den Kämpfer wirkenden Mittelkraft. Damit iſt die auf einen jeden Eckpfeiler des rechteckigen Kreuzgewölbes wirkende Kraft gefunden; ſie hat eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröſsen ſind:

$$H = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2+b^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 380.$$

$$V = q\,a\,b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 381.$$

Wenn das Gewölbe quadratiſchen Grundriſs hat, ſo bleibt alles Vorſtehende giltig; nur iſt $b = a$ einzuführen, ſo daſs man erhält: Beim Kreuzgewölbe über quadratiſchem Raume mit einer Seitenlänge $2\,a$ iſt der Horizontalſchub im Grat

$$H = \frac{q\,a^3}{c\sqrt{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 382.$$

und die lothrechte auf jeden Pfeiler übertragene Kraft

$$V = q\,a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 383.$$

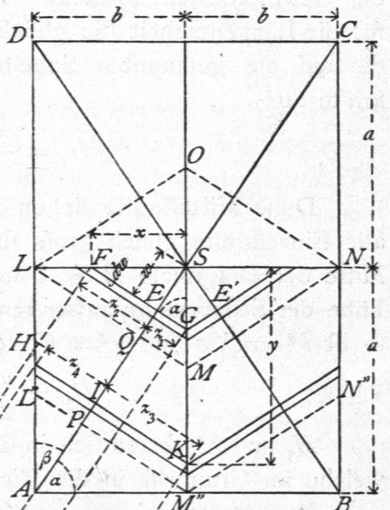
Die graphiſche Ermittelung von H läuft auf die Zerlegung von $G = q\,a\,b$

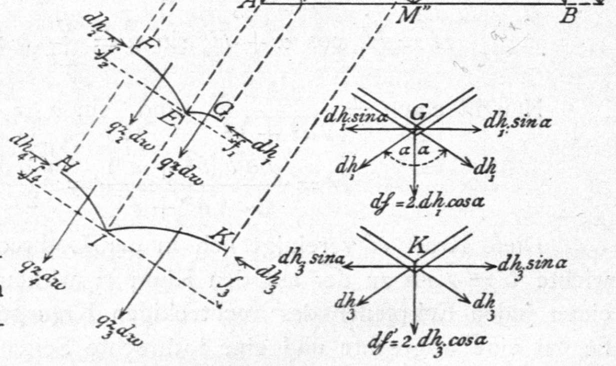
(bezw. $q\,a^2$) in die beiden Kräfte H und R hinaus. Ift in Fig. 370: $G = \eta\,\vartheta$, fo ift $\varkappa\,\eta = H$ und $\vartheta\,\varkappa = R$.

280. Lagerfugen fenkrecht zu den Graten.

2) Die Lagerfugen find im Grundrifs fenkrecht zu den Graten. Der Unterfuchung wird wieder ein Gewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt. Daffelbe werde durch lothrechte Ebenen, welche im Grundriffe fenkrecht zu den Graten gerichtet find, in Streifen zerlegt; dann befteht jeder Streifen aus zwei Theilen, welche fich im Grat treffen. Für jeden Theil ftellt der Grat den einen Stützpunkt dar; die anderen Stützpunkte werden bei den innerhalb des Viereckes $LMNO$ (Fig. 371) liegenden Streifen durch die entfprechenden Streifen der benachbarten Gewölbeviertel gebildet, bei den aufserhalb diefes Viereckes liegenden Streifen einerfeits durch die Streifen des benachbarten Gewölbeviertels, andererfeits oder beiderfeits durch die Gurtbogen AB, BC, CD, DA.

Fig. 371.





α) Es werde zuerft ein Streifen FEG aus dem Viereck $LMNO$ betrachtet. Die Belaftung für die Einheit der Grundfläche fei wiederum q; alsdann ift (Fig. 371)

$$d\,h_1 = \frac{q\,z_1^{\,2}\,d\,w}{2\,f_1} \quad \text{und} \quad d\,h_2 = \frac{q\,z_2^{\,2}\,d\,w}{2\,f_2}, \qquad 384.$$

wenn f_1 und f_2 die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven find. Im Punkte E wird auf den Grat nur eine lothrechte Kraft übertragen, falls $d\,h_1 = d\,h_2$, d. h. wenn $\frac{f_2}{f_1} = \frac{z_2^{\,2}}{z_1^{\,2}}$ ift. Nun ift

$$z_2 = w \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad z_1 = \frac{w}{\operatorname{tg} \alpha};$$

mithin mufs

$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

fein. Die Pfeilhöhen der Seilcurven müffen alfo in einem von der Grundform des Gewölbes abhängigen Verhältniffe ftehen.

Die im Punkte E auf den Gratbogen nun übertragene lothrechte Kraft ift $\mathfrak{v} = q\,d\,w\,(z_1 + z_2)$; diefelbe ift gleich dem Gewichte des Streifens FEG. Da aber $z_1 + z_2 = \frac{x}{\sin \alpha}$ ift, fo wird

$$\mathfrak{v} = \frac{q\,x\,d\,w}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 385.$$

Im Punkte G wirken die beiden wagrechten Kräfte $d\,h_1$ in den Richtungen der anfchliefsenden Streifen; fie zerlegen fich in je zwei Seitenkräfte, welche in der Längsrichtung der Kappe, bezw. fenkrecht zu diefer Richtung wirken. Die beiden letzteren haben je die Gröfse $d\,h_1 \sin \alpha$ und heben einander auf; die beiden erfteren fetzen fich zu einer Kraft $d\,\mathfrak{h} = 2\,d\,h_1 \cos \alpha$ zufammen. Wird für $d\,h_1$

der obige Werth eingeführt und beachtet, dafs $w = z_1 \operatorname{tg} \alpha$, alfo $d w = d z_1 \operatorname{tg} \alpha$ ift, fo ergiebt fich

$$d \mathfrak{h} = \frac{q z_1^2 \sin \alpha \, d z_1}{f_1}.$$

Unter gleichen Annahmen, wie in Art. 279 (S. 263), wird

$z_1^2 = C f_1$ und $d \mathfrak{h} = q C \sin \alpha \, d z_1$; ferner, weil $z_1 = \frac{x \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$, $d z_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} d x$,

$$d \mathfrak{h} = q C \cos^2 \alpha \, d x.$$

Jeder Doppelftreifen $E G E'$ innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = b$ übt eine wagrechte Kraft $d \mathfrak{h}$ auf den Scheitel des Gurtbogens aus. Die ganze Wirkung diefer Streifen ift alfo

$$\mathfrak{H}_1 = q C \cos^2 \alpha \, b = \frac{q C b^3}{(a^2 + b^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386.$$

β) Es werde nunmehr ein Streifen $H J K$ unterfucht, welcher aufserhalb des Viereckes $L M N O$ liegt, aber an der einen Seite fich gegen den entfprechenden Streifen des benachbarten Gewölbeviertels lehnt (Fig. 371). Die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven feien f_3 und f_4, die Horizontalfchübe $d h_3$ und $d h_4$; alsdann ift

$$d h_3 = \frac{q \, d w \, z_3^2}{2 f_3} \quad \text{und} \quad d h_4 = \frac{q \, d w \, z_4^2}{2 f_4}.$$

Wie oben mufs $d h_3 = d h_4$ fein, mithin $\frac{f_4}{f_3} = \frac{z_4^2}{z_3^2}$. Man erhält nach einfachen Umformungen

$$\frac{f_4}{f_3} = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{w_1} - 1 \right)^2.$$

Im Punkte K wirken wiederum zwei Kräfte $d h_3$, deren in die Längsrichtung der Gewölbekappe fallenden Seitenkräfte fich zufammenfetzen, während die beiden fenkrecht dazu gerichteten Seitenkräfte einander aufheben. Man erhält erftere zu

$$d \mathfrak{h}' = 2 \, d h_3 \cos \alpha = \frac{2 \cos \alpha}{2 f_3} q \, d w_1 \, z_3^2.$$

Es ift $S J = w_1$ gefetzt; dann wird

$$w_1 = z_3 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad d w_1 = d z_3 \operatorname{tg} \alpha;$$

und, wenn wiederum $z_3^2 = C f_3$ angenommen wird,

$$d \mathfrak{h}' = q C \sin \alpha \, d z_3.$$

Ferner ift (Fig. 371) $z_3 = y \cos \alpha$ und $d z_3 = \cos \alpha \, d y$, alfo

$$d \mathfrak{h}' = q C \sin \alpha \cos \alpha \, d y.$$

Die Summe aller Kräfte $d \mathfrak{h}'$, welche von den Streifen zwifchen $L M N$ und $L'' M'' N''$ (Fig. 371) ausgeübt werden, ift

$$\mathfrak{H}_2 = q C \sin \alpha \cos \alpha \int_{\frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}}^{a} d y = q C \sin \alpha \cos \alpha \left(a - \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} \right),$$

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{q b C (a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 387.$$

γ) Endlich wenden wir uns zu einem Streifen $F'' E'' G''$, der fich beiderfeits gegen die Gurtbogen ftützt; dabei wird die Annahme gemacht, dafs auch in den betreffenden Streifentheilen Seilcurven ftattfinden, bei denen an der Anfatzftelle an die Gurtbogen die Tangenten wagrecht find. Die beiden in E'' (Fig. 372) auf den Grat übertragenen wagrechten Kräfte sind, wenn die obigen Bezeichnungen (mit Abänderung der Zeiger) beibehalten werden,

$$d\,h_5 = \frac{q\,d\,\zeta\,z_5{}^2}{2\,f_5} \quad \text{und} \quad d\,h_6 = \frac{q\,d\,\zeta\,z_6{}^2}{2\,f_6};$$

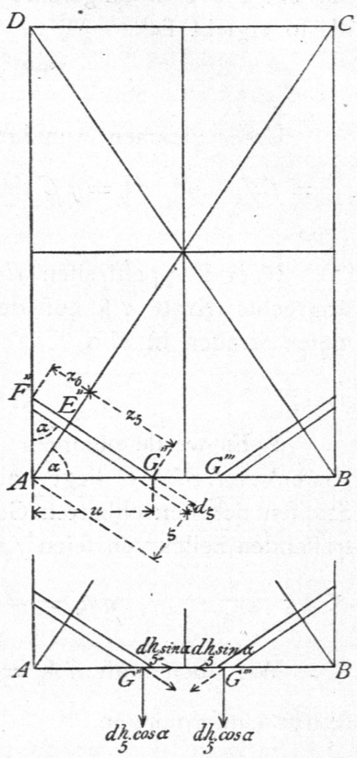
alsdann muss $\frac{f_6}{f_5} = \frac{z_6{}^2}{z_5{}^2} = \frac{b^4}{a^4}$ sein, damit sich in E'' die beiden wagrechten Kräfte aufheben; auf den Gratbogen wirkt dann nur eine lothrechte Kraft, welche gleich dem Gewichte des Streifens ist; dieselbe ist

$$\mathfrak{v}_1 = q\,d\,\zeta\,(z_5 + z_6) = \frac{q\,d\,\zeta\,u}{\sin\alpha},$$

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{q\,u\,d\,\zeta}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 388.$$

Das Gewicht eines um ζ von A entfernten Streifens ist also eben so grofs, wie dasjenige eines gleich weit von S entfernten Streifens der Grundfläche $L\,S\,M$ (Fig. 371).

Fig. 372.



Die im Punkte G'' auf den Gurtbogen ausgeübte Kraft $d\,h_5$ zerlegt sich in eine senkrecht zum Gurtbogen gerichtete Seitenkraft $d\,h_5 \cos\alpha$ und eine solche, welche im Grundriss in die Richtung des Gurtbogens fällt: $d\,h_5 \sin\alpha$. Letztere wird durch eine gleich grofse, entgegengesetzt gerichtete Seitenkraft im symmetrisch zur Mitte liegenden Punkte G''' aufgehoben; die erstere ist

$$d\,h_5 \cos\alpha = \frac{q\,d\,\zeta\,z_5{}^2}{2\,f_5}\cos\alpha = \frac{q\,u^2\,d\,u\,\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha}{2\,f_5} = \frac{q\,u^2\,a^2\,b^2\,d\,u}{2\,f_5\,(a^2+b^2)^2}.$$

Seitens des Kreuzgewölbes werden also auf den Gurtbogen $A\,B$ wagrechte Kräfte übertragen, und zwar im Scheitel die Einzelkraft $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$, welche unter Berücksichtigung der Ausdrücke 386 u. 387

$$\mathfrak{H} = \frac{q\,C\,b\,a^2}{a^2+b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 389.$$

ist, und aufserdem auf die laufende Einheit der wagrechten Projection des Gurtbogens

$$h = \frac{q\,u^2\,a^2\,b^2}{2\,f_5\,(a^2+b^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 390.$$

f_5 und u sind veränderlich. Wird die Pfeilhöhe f_3 der zum Streifen $L''\,M''$ gehörigen Seilcurve mit e bezeichnet, für welchen Streifen z_3 den Werth $a\cos\alpha$ annimmt, so ergiebt sich

$$a^2\cos^2\alpha = C\,e, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{a^2\cos^2\alpha}{e} = \frac{a^2\,b^2}{(a^2+b^2)\,e}, \quad \text{und es wird}$$

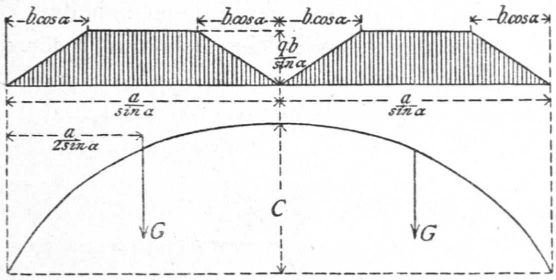
$$\mathfrak{H} = \frac{q\,a^4\,b^3}{e\,(a^2+b^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 391.$$

Die Kräfte $\mathfrak{H}$ und h werden entweder durch gleiche, entgegengesetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder sie müssen von der Mauer aufgenommen werden, gegen welche sich das Gewölbe setzt.

Die wagrechten, entsprechenden Kräfte gegen die Gurtbogen $A\,D$, bezw. $B\,C$ ergeben sich in ganz gleicher Weise.

δ) Die Belaſtung des Gratbogens iſt nach Vorſtehendem nur lothrecht. Von S bis Q (Fig. 371) beträgt die Laſt auf die Längeneinheit $\frac{q\,x}{\sin\alpha}$ (ſiehe Gleichung 385); in S iſt ſie Null; in Q iſt ſie $\frac{q\,b}{\sin\alpha}$; auf dieſer Strecke iſt ſie entſprechend den Ordinaten einer geraden Linie veränderlich. Auf der Strecke PA nimmt die Belaſtung nach demſelben Geſetze ab, nach welchem ſie auf der Strecke SQ zugenommen hatte; für P iſt ſie $\frac{q\,b}{\sin\alpha}$, für A Null (vergl. Gleichung 388). Auf der Strecke QP hat ſie überall den gleichen Werth $\frac{q\,b}{\sin\alpha}$. Die Geſetzmäſsigkeit der Belaſtung iſt durch die in Fig. 373 ſchraffirte Fläche dargeſtellt, in welcher an jeder Stelle die Ordinate die Gröſse der Laſt für die Längeneinheit des Gratbogens angiebt. Iſt jetzt die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich c, ſo ergiebt ſich als Horizontalſchub im Bogen

Fig. 373.



$$H = \frac{1}{c}\; G\; \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Es iſt

$$G = \frac{q\,b}{\sin\alpha}\left(\frac{a}{\sin\alpha} - b\cos\alpha\right) = q\,a\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 392.$$

Wird dieſer Werth in die Gleichung für H eingeführt, ſo erhält man als Seitenkräfte H und V der auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{q\,a\,b}{2\,c}\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = q\,a\,b\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 393.$$

für das Kreuzgewölbe über quadratiſchem Raume:

$$H = \frac{q\,a^3}{c\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = q\,a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 394.$$

Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte ſind alſo genau gleich groſs, mögen die Lagerfugen den Längsaxen der Kappen parallel laufen oder im Grundriſs ſenkrecht zu den Graten angeordnet ſein.

Man nehme H im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratbogens wirkend an.

b) Kuppelgewölbe.

Die Kuppelfläche entſteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Unterſuchungen ſollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, daſs die Belaſtung eine ruhende und über die einzelnen zwiſchen den Parallelkreiſen liegenden Ringe ſo vertheilt ſei, daſs ein jeder Ring entweder voll belaſtet oder ganz unbelaſtet iſt. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; es werden demnach die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben ſich 281. Vorausſetzungen.

dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande ſind, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

282. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

Es ſoll der Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel der Kuppel (Fig. 374) gelegt und die lothrechte Axe als Y-Axe, eine im Scheitel S ſenkrecht zu erſterer errichtete Axe als X-Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen $MNOP$ (Fig. 375), welches oben und unten durch Parallelkreiſe, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt iſt, wird auf ſeinen Gleichgewichtszuſtand unterſucht. Das Theilchen $MNOP$ iſt in Fig. 375 a in der Anſicht, in Fig. 375 b im Grundriſs, daneben im abgewickelten Zuſtande dargeſtellt. Auf MN wirkt für die Längeneinheit die Tangentialſpannung T, und da MN (vergl. den Grundriſs in Fig. 375 b) $x\,d\omega$ Längeneinheiten enthält, ſo wirkt auf MN die Kraft $T x\, d\omega$. Auf OP wirkt $(T + dT)(x + dx)\, d\omega$; auf MP und NO wirken die Ringſpannungen, welche für die Längeneinheit gleich R ſeien, alſo auf ds Längeneinheiten die Gröſse $R\, ds$ haben. Auſserdem wirkt noch die veränderliche Belaſtung p für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf $MNOP$ die Laſt $p\, ds\,.\,x\, d\omega$. Um ſämmtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermitteln wir die Mittelkraft der beiden Ringſpannungen $R\, ds$; ſie iſt

$$\mathfrak{H} = 2\, R\, ds \sin \frac{d\omega}{2},$$

und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ nahezu $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, wird

Fig. 374.

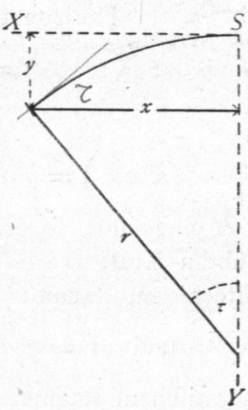
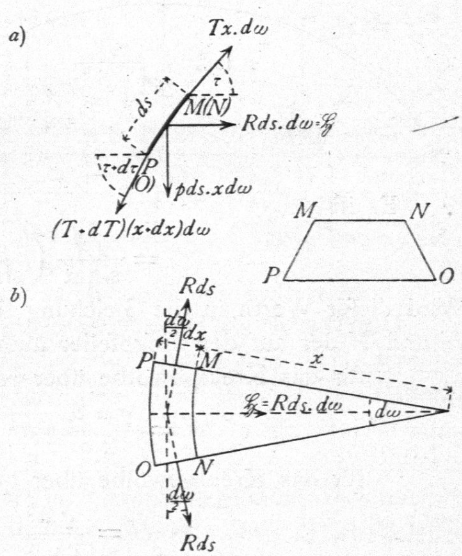


Fig. 375.



$$\mathfrak{H} = R\, ds\, d\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 395.$$

Die Aufſtellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für $MNOP$ ergiebt nun

$$0 = T x\, d\omega \cos\tau - (T + dT)(x + dx)\, d\omega \cos(\tau + d\tau) + R\, ds\, d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läſst die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, ſo bleibt

$$0 = T x \sin\tau\, d\tau - dT\, x \cos\tau - T\, dx \cos\tau + R\, ds = -d(T x \cos\tau) + R\, ds;$$

daher

$$R\, ds = d(T x \cos\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 396.$$

Ferner iſt

$$0 = p\, ds\, x\, d\omega - T x\, d\omega \sin\tau + (T + dT)(x + dx)\, d\omega \sin(\tau + d\tau);$$

$$\sin(\tau + d\tau) = \sin\tau + \cos\tau\, d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlaſſen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = p\, x\, ds + d(T x \sin\tau)$; daher

$$-p\, x\, ds = d(T x \sin\tau) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 397.$$

Die beiden Gleichungen 396 u. 397 geben Auffchlufs über die Gröfse der gleichzeitigen Werthe von T und R, welche irgend welchen Belaftungen und Gleichgewichtsflächen entfprechen.

Die erzeugende Linie ift bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden alfo erhalten, wenn in die Gleichungen 396 u. 397 für x und $d\,s$ die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreife entfprechen. Nach Fig. 374 ift $x = r \sin \tau$ und $d\,s = r\,d\,\tau$; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, dafs p für die ganze Kuppel conftant ift, 283. Kugelförmige Kuppel.

$$-p\,r \sin \tau \,.\, r\,d\,\tau = d\,(T\,r \sin \tau \sin \tau) \text{ und } \int_0^\tau d\,(T\,r \sin^2 \tau) = -p\,r^2 \int_0^\tau \sin \tau\,d\,\tau.$$

Als untere Grenze ift der Werth von τ und T einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entfpricht; hier ift diefer Endpunkt S, und es wird $\tau_0 = 0$; demnach ift

$$T\,r \sin^2 \tau = +p\,r^2 \Big(\cos \tau\Big)_0^\tau = -p\,r^2\,(1 - \cos \tau),$$

$$T = -\frac{p\,r\,(1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = -\frac{p\,r\,(1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = -\frac{p\,r}{1 + \cos \tau} \quad . \quad . \quad . \quad 398.$$

Wird diefer Werth in die Gleichung 396 für R eingefetzt, fo erhält man

$$R\,d\,s = R\,r\,d\,\tau = d\left(-\frac{p\,r}{1 + \cos \tau}\,r \sin \tau \cos \tau\right) = -p\,r^2\,d\,\frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau},$$

$$R = -p\,r\,\frac{\cos 2\,\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 399.$$

Die Werthe der Gleichungen 398 u. 399 gelten für oben gefchloffene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für $\tau = 0$ erhalten. Für letzteren Werth ift

$$T_0 = -\frac{p\,r}{2} \text{ und } R_0 = -\frac{p\,r}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 400.$$

d. h. die Meridianfpannungen und Ringfpannungen find für die Längeneinheit im Scheitel gleich grofs; es findet alfo dafelbft nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{p\,r}{2}$ für die Längeneinheit ftatt.

Für die Halbkugelkuppel ift am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher 284. Halbkugelkuppel.

$$T_{\frac{\pi}{2}} = -p\,r \text{ und } R_{\frac{\pi}{2}} = +p\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 401.$$

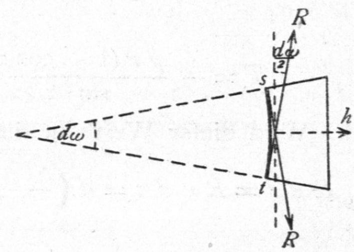
Die Meridianfpannung nimmt alfo vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{p\,r}{2}$ bis auf $p\,r$ zu, bleibt aber ftets Druck, da $1 + \cos \tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator ift T lothrecht gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ ift gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflagerdrücke darftellen. Es ift $\Sigma\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) = p\,r \,.\, 2\,r\,\pi = 2\,p\,r^2\,\pi$, und das ganze Kuppelgewicht ift gleich $\frac{4\,r^2\pi}{2}\,p = 2\,r^2 p\,\pi$. Die Ringfpannung R

geht vom Druck $\frac{p\,r}{2}$ im Scheitel zum Zug $p\,r$ am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu beſtimmenden Winkel durch Null. Iſt dieſer Winkel τ_1, ſo iſt $0 = p\,r\,\frac{\cos 2\,\tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$, woraus ſich ergiebt

$$\cos \tau_1 = 0{,}618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^0\,50' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 402.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 ſind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel gröſser ſind als τ_1, findet Zug ſtatt. Nimmt man auf die Zugfeſtigkeit des Mörtels keine Rückſicht, ſo können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne ſolchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht ſtattfinden; es iſt alſo ohne Hilfsconſtruction das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconſtructionen ſind entweder umgelegte eiſerne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leiſtet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R; auf dieſelbe wirken ſonach nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengeſetztem Sinne; dieſelben ſind bei Berechnung der Hintermauerung zu berückſichtigen. Betrachtet man ein Bogenſtück $s\,t$ (Fig. 376), welches zum Winkel $d\,\omega$ gehört, ſo iſt die Mittelkraft der beiden R die nach auſsen gerichtete Kraft h gleich $2\,R \sin \frac{d\,\omega}{2} = R\,d\,\omega$.

Fig. 376.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = -\frac{\cos 2\,\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \quad . \; . \; . \; . \quad 403.$$

ein; alsdann wird

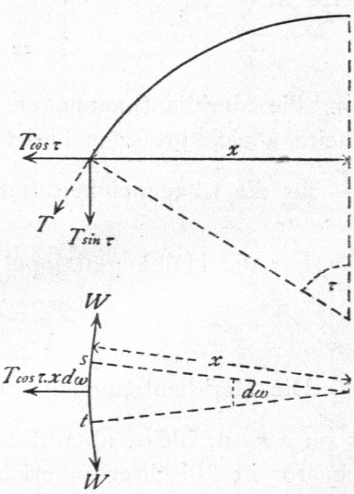
$$R = \mu\,p\,r \quad \text{und} \quad h = \mu\,p\,r\,d\,\omega \quad . \; . \; . \quad 404.$$

Für die Längeneinheit des $x\,d\,\omega$ langen Bogens iſt alſo die nach auſsen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringſpannungen

$$\mathfrak{h} = \frac{\mu\,p\,r\,d\,\omega}{x\,d\,\omega} = \frac{\mu\,p\,r}{x} \quad . \; . \; . \; . \quad 405.$$

Aus Vorſtehendem folgt noch, daſs bei der Halbkugelkuppel die Hintermauerung wenigſtens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muſs, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^0\,50'$ entſpricht.

Fig. 377.



Auſser den Kräften $\mathfrak{h}$ (nach Gleichung 405) wirken auf die Widerlager noch die Meridianſpannungen T, welche dem gröſsten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entſprechen. T hat eine wagrechte Seitenkraft $T \cos \tau$ und eine lothrechte Seitenkraft $T \sin \tau$. Die erſtere wird durch die Widerlager oder durch einen eiſernen Ring aufgehoben. Die Spannung in dieſem Ringe ergiebt ſich dann wie folgt. Auf den Bogen $s\,t$ (Fig. 377) von der Länge $x\,d\,\omega$ wirkt nach auſsen $T \cos \tau\, x\, d\,\omega$, und es ſoll dieſe Kraft durch die beiden Ringſpannungen W aufgehoben werden; es iſt demnach

$$T \cos \tau\, x\, d\,\omega = 2\, W \sin \frac{d\,\omega}{2} = W\, d\,\omega\,;$$

$$W = T\,x \cos \tau = \frac{p\,r\,r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{p\,r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \quad 406.$$

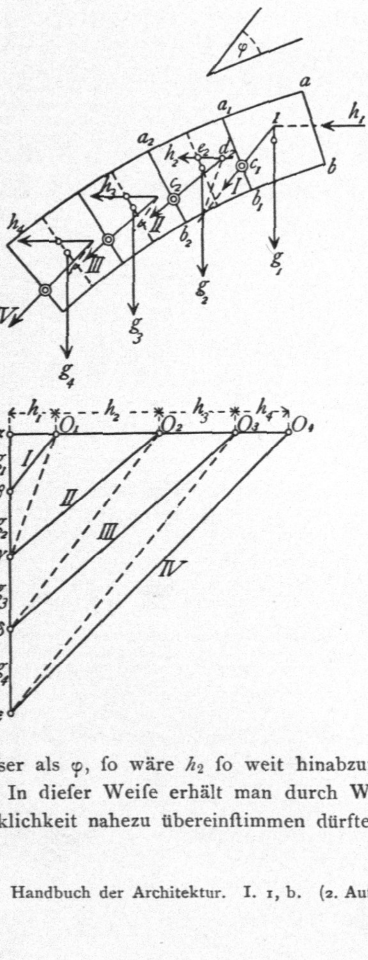
Die vorſtehend entwickelten Werthe für T und R entſprechen der Gleichgewichtsfläche. Man kann dieſe Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin ſind aber gröſsere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Seilcurven entſprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zuſammenfallen.

285. Graphiſche Ermittelung.

Die graphiſche Ermittelung der Werthe von T und R an den verſchiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weiſe durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbearten gezeigt iſt, indem man beſtimmte Bedingungen für die Stützlinie vorſchreibt. Man unterſucht zu dieſem Zwecke den einem Centriwinkel α entſprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus.

Stellt man die Bedingung, daſs die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben ſoll und kein Gleiten ſtattfinde, ſo erhält man eine ſolche, indem man vom oberſten Kuppelringe ausgeht, folgendermaſsen (Fig. 378). Die Belaſtung des oberſten, zu dem angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles ſei g_1 $(= \alpha\,\beta)$; auſser g_1 wirken auf dieſen Theil noch die beiden Spannungen $R\,ds$, welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Dieſe beiden $R\,ds$ werden genau, wie in Fig. 375, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derſelben Ebene wie g_1 liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel α gehörigen Kuppeltheil halbirt. Dieſe Mittelkraft iſt in Fig. 378 mit h_1 bezeichnet; h_1 iſt vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Gröſse und Lage von h_1 ſind unbekannt. Die Mittelkraft von h_1 und g_1 ſoll die Fuge $a_1\,b_1$ im inneren Drittel ſchneiden und mit der Senkrechten zu dieſer Fuge keinen gröſseren Winkel, als den Reibungswinkel φ einſchlieſsen. Man ziehe nun durch c_1, den unterſten Punkt des inneren Drittels der Fuge $a_1\,b_1$, eine Linie, die den Winkel φ mit der Senkrechten zur Fuge einſchlieſst; dieſe Linie ſchneide die Richtungslinie von g_1 in I; alsdann hat die durch I gelegte Kraft h_1 den kleinſten Werth, welcher obigen Bedingungen entſpricht. Rückte nämlich h_1 nach abwärts unter Beibehaltung von c_1, ſo würde h_1 (da ja g_1 denſelben Werth behält) gröſser werden; rückte gleichzeitig c_1 hinauf, ſo würde h_1 erſt recht gröſser. Rückten h_1 und c_1 gleich viel hinauf, ſo bliebe h_1 unverändert, behielte alſo den kleinſten Werth. Alles dies ergiebt ſich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreieckes für g_1, h_1 und Kraft I; h_1 kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch c_1 nach oben rückt, weil ſonſt der Winkel von I mit der Senkrechten zur Fuge gröſser als φ wird. — Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Mittellinie des erſten Steines oberhalb des inneren Drittels fiele, ſo wären an dieſer Stelle auch die Ringſpannungen nicht mehr im inneren Drittel; da auch dieſe im Drittel liegen ſollen, ſo würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den ſich dann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft I gegen die Fugenſenkrechte kleiner als φ würde.

Fig. 378.



Auf den zweiten Stein wirken nun I und g_2; auſserdem die Mittelkraft h_2 der Spannungen R im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von I und g_2 iſt aus dem Kraftpolygon zu entnehmen $(= O_1\,\gamma)$; ſie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien dieſer beiden Kräfte. Die Reſultirende dieſer Kraft und der Kraft h_2 ſoll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben ſo ſoll auch der Schnittpunkt von h_2 mit der punktirten Halbirungslinie dieſes Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinſte Werth von h_2, welcher dieſen Bedingungen entſpricht, iſt derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinſchwerlinie, d. h. durch e_2, geht, die Geſammtmittelkraft von I, g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2\,b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels ſchneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2, dem Schnittpunkte der Mittelkraft von I und g_2 mit h_2 ergiebt die Richtung der Geſammtmittelkraft II; die Gröſse erhält man durch Ziehen einer Linie $\gamma\,O_2$ durch γ parallel zur Richtungslinie von II. Der Winkel, welchen II mit der Fugenſenkrechten zu $a_2\,b_2$ einſchlieſst, iſt kleiner als φ, alſo die Conſtruction brauchbar. Wäre der Winkel gröſser als φ, ſo wäre h_2 ſo weit hinabzurücken und zu vergröſsern, bis der Winkel höchſtens gleich φ iſt. In dieſer Weiſe erhält man durch Weiterconſtruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinſtimmen dürfte.