

5. Abschnitt.

Gewölbe.

259
Allgemeines.

Die Gewölbe sind aus einzelnen, mehr oder weniger keilförmig gefalteten Theilen zusammengesetzte Bauconstructions, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Drücke auf die stützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verschiedenen Gewölbearten hier als bekannt voraussetzen, bemerken wir, daß wir uns im vorliegenden Abschnitt hauptsächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben beschäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

Der allgemeinen Untersuchung soll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird stets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbestück betrachtet werden, dessen Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, also gleich 1^m ist. Alsdann fällt die Kraftebene mit der mittleren lothrechten Ebene zusammen.

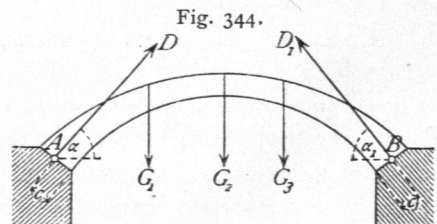
I. Kapitel.

Stützlinie und Mittelkraftslinie.

a) Allgemeines.

260.
Kämpfer-
drücke.

Für die Ermittlung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte und die Stabilitäts-Untersuchung desselben ist zunächst — genau wie bei den früher behandelten Bauconstructions — die Kenntniß der äußeren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, also der Belastungen und der Auflagerkräfte. Die Belastungen sind in den meisten Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu bestimmen. Schwieriger ist die Ermittlung der Auflagerkräfte oder, wie sie hier heißen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Constructions genügte zu deren Bestimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ist dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 344) betrachtet, so wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl



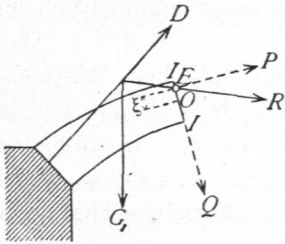
von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gefuchte Kämpferdruck ist; von diesen Kämpferdrücken ist aber jederseits weder Gröfse, noch Richtung, noch Angriffspunkt (*A*, bezw. *B*) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: *D*, *D*₁, *α*, *α*₁, *c*, *c*₁ (wenn *c* und *c*₁ die Abstände der Punkte *A* und *B* von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen fester Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung stellt, so ist die Ermittlung der Kämpferdrücke auf rein statischem Wege nicht möglich. Die Lösung der Aufgabe wird möglich, wenn man das Gewölbe als elastischen Bogen auffasst und annimmt, daß bei den durch die Belastungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anschließenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Diese mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, so daß jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden sind, die Aufgabe also gelöst werden kann.

Wir werden sehen, daß für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen fast stets eine ruhende Belastung in Frage kommt, die Elasticitätsgleichungen nicht aufgestellt zu werden brauchen. Vorläufig werde angenommen, daß die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt seien.

Ist Letzteres der Fall, so sind alle äusseren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; es können demnach die sämtlichen äusseren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, senkrecht zur Bildebene genommenen Querschnittes *II* des Gewölbes (Fig. 345) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

261.
Stützlinie.

Fig. 345.



Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbetheil, welcher links vom Querschnitte *II*, also zwischen dem linken Widerlager und dem Querschnitte *II* liegt, so sei *R* diese Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß im Querschnitt *II* eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche Gröfse, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengesetzten Sinn hat, wie die Kraft *R*. Mit der Kraft *R* kennt man also auch die Resultierende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man *R* in eine Seitenkraft *P*, welche parallel ist zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querschnitte gezogenen Tangente, und in eine zu ersterer senkrechte Seitenkraft *Q*, so heißt die erstere die Axialkraft, die zweite die Transversalkraft oder Querkraft. Die Querkraft ist für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von wesentlicher Bedeutung dagegen ist Gröfse und Lage von *P*. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querschnittes *II* erzeugten Druck-, bezw. Zugspannungen können ohne merkbareren Fehler nach den in Art. 110 (S. 85) für Stützen berechneten Gleichungen bestimmt werden. Man erhält demnach die Spannung *N* in einem um *z* von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 69

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{F}} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{F}} \right) \dots \dots \dots 367.$$

M ist das Moment der äusseren Kräfte für den Punkt *O*, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querschnitt *II* schneidet; es ist also hier *M* = *Pξ*, da *Q* in Bezug auf *O* kein Moment hat. Die positiven Werthe für *N* sind hier Druckbeanspruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

Von hervorragender Bedeutung für den Werth von N ist die GröÙe von ξ oder, was dasselbe ist, die Lage des Punktes E , des Schnittpunktes der Mittelkraft R mit dem von ihr beanspruchten Querschnitte. Man hat deshalb für die Punkte E eine besondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerschnitte von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden.

Den verschiedenen Belastungsarten entsprechen verschiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querschnitte; es folgt daraus, daß bei demselben Gewölbe jeder Belastungsart auch eine besondere Stützlinie entspricht.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 346), ermittelt die Kämpferdrücke (D und D_1), so wie die Belastungen der einzelnen Theile ($G_1, G_2, G_3 \dots G_6$) und setzt zunächst D mit der ersten Last G_1 zu einer Mittelkraft zusammen, diese letztere mit G_2 und fährt so bis zum rechten Kämpfer fort, so erhält man ein Vieleck $o I II III IV V VI 7$, welches man die Mittelkraftslinie oder das Resultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftslinie ergeben sich sofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querschnitten, hier die Punkte $o, 1, 2, 3, 4, 5$ und 7 . Je kleiner die einzelnen Theile des Gewölbes angenommen werden, desto mehr nähert sich die Mittelkraftslinie einer continuirlich verlaufenden Curve, der sog. Seilcurve.

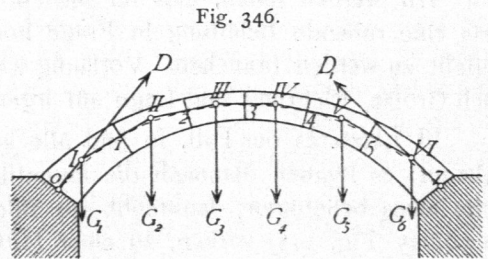


Fig. 346.

Die Ermittlung der Form und Lage der Stützlinie auf statischem Wege setzt nach Obigem die Kenntniß der Kämpferdrücke oder wenigstens dreier von den sechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach GröÙe, Richtung und Lage bestimmen; denn alsdann sind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweises auf unten stehende Quellen²⁷⁾ verweisend.

Bei constantem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche sich der Bogenaxe durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort »durchschnittlich« im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsummen deutet. Es ist also diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ist. Läßt sich demnach eine Stützlinie construiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, so wird diese die richtige sein.

Construirt man also die Mittellinie des Bogens derart, daß sie für die gegebene Belastung mit der unter gewissen Annahmen construirten (demnach möglichen) Stützlinie übereinstimmt, so ist diese Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belastung. Da es sich aber im Hochbau meistens um constante Belastungen handelt, so ist diese Ermittlung in der Regel genügend.

²⁷⁾ WINKLER, E. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

262.
Mittelkraftslinie
oder
Resultanten-
Polygon.

263.
Ergebnisse
der
Elasticitäts-
theorie.

Wir werden weiter unten sehen, daß es in vielen Fällen, in denen die Aufsuchung der genauen Stützlinie schwierig ist, genügt, gewisse Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Resultanten-Polygon construirt werden kann, so wird für alle diese Fälle zunächst das Resultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgesucht.

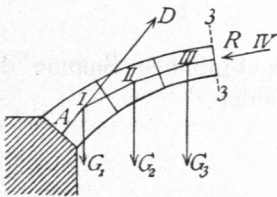
b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV* . . . in Fig. 346) giebt nach der Erklärung in Art. 262 (S. 248) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äußeren Kräfte. Es giebt also z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge 3 wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte D_1, G_4, G_5, G_6 ; da sämtliche äußere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge 3 wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derselben halten sich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben so verhält es sich auch mit jeder anderen Fuge.

264.
Horizontal Schub
im Gewölbe.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 347) und untersucht dessen Gleichgewichtszustand, so wirken auf denselben nicht nur die Kräfte D, G_1, G_2, G_3 ,

Fig. 347.

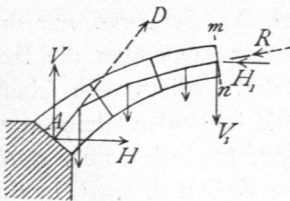


sondern auch die Kräfte, welche in der Fuge 3 vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren ist aber nach dem Vorstehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äußeren Kräfte, d. h. hier von D_1, G_4, G_5, G_6 . Diese fällt in die Linie *III IV* (Fig. 346). Wenn also die Mittelkraftslinie bekannt ist, so sind stets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewiesen wird, auch) Größe derjenigen Kraft bekannt, bzw. leicht zu

finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchstück übertragen wird. Alles Vorstehende gilt selbstverständlich auch, wenn die einzelnen Gewölbetheile unendlich schmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Die Kämpferdrücke D und D_1 haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieser Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger ansehen. Gerade diese wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die stützenden Seitenmauern nach außen, also schiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belastungen nur lothrecht wirken, so haben diese wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derselben Belastung gleiche Größe. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchstückes (Fig. 348) verlangt, daß die algebraische Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null sei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchstück sind aber die Seitenkräfte H und H_1 von D und R .

Fig. 348.



Es muß also stattfinden:

$$0 = H - H_1, \text{ woraus } H = H_1.$$

Da Schnitt *m n* beliebig gewählt war, so gilt das Vorstehende ganz allgemein.

Man nennt diese wagrechte Seitenkraft den Horizontal Schub des Bogens, bzw. des Gewölbes. Die