

## 5. Abschnitt.

## Gewölbe.

259  
Allgemeines.

Die Gewölbe sind aus einzelnen, mehr oder weniger keilförmig gefalteten Theilen zusammengesetzte Bauconstructions, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Drücke auf die stützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verschiedenen Gewölbearten hier als bekannt voraussetzen, bemerken wir, daß wir uns im vorliegenden Abschnitt hauptsächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben beschäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

Der allgemeinen Untersuchung soll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird stets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbestück betrachtet werden, dessen Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, also gleich 1<sup>m</sup> ist. Alsdann fällt die Kraftebene mit der mittleren lothrechten Ebene zusammen.

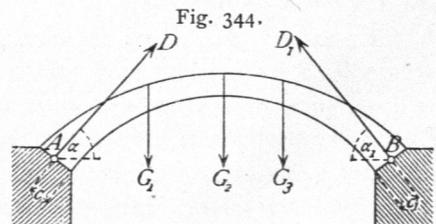
## I. Kapitel.

## Stützlinie und Mittelkraftslinie.

## a) Allgemeines.

260.  
Kämpfer-  
drücke.

Für die Ermittlung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte und die Stabilitäts-Untersuchung desselben ist zunächst — genau wie bei den früher behandelten Bauconstructions — die Kenntniß der äußeren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, also der Belastungen und der Auflagerkräfte. Die Belastungen sind in den meisten Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu bestimmen. Schwieriger ist die Ermittlung der Auflagerkräfte oder, wie sie hier heißen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Constructions genügte zu deren Bestimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ist dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 344) betrachtet, so wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl



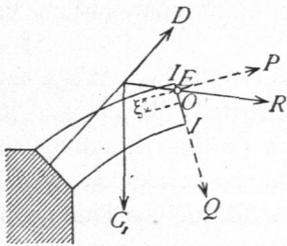
von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gefuchte Kämpferdruck ist; von diesen Kämpferdrücken ist aber jederseits weder Gröfse, noch Richtung, noch Angriffspunkt (*A*, bezw. *B*) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: *D*, *D*<sub>1</sub>, *α*, *α*<sub>1</sub>, *c*, *c*<sub>1</sub> (wenn *c* und *c*<sub>1</sub> die Abstände der Punkte *A* und *B* von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen fester Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung stellt, so ist die Ermittlung der Kämpferdrücke auf rein statischem Wege nicht möglich. Die Lösung der Aufgabe wird möglich, wenn man das Gewölbe als elastischen Bogen auffasst und annimmt, dafs bei den durch die Belastungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anschliessenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Diese mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, so dafs jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden sind, die Aufgabe also gelöst werden kann.

Wir werden sehen, dafs für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen fast stets eine ruhende Belastung in Frage kommt, die Elasticitätsgleichungen nicht aufgestellt zu werden brauchen. Vorläufig werde angenommen, dafs die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt seien.

Ist Letzteres der Fall, so sind alle äufseren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; es können demnach die sämtlichen äufseren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, senkrecht zur Bildebene genommenen Querschnittes *II* des Gewölbes (Fig. 345) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

261.  
Stützlinie.

Fig. 345.



Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbetheil, welcher links vom Querschnitte *II*, also zwischen dem linken Widerlager und dem Querschnitte *II* liegt, so sei *R* diese Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß im Querschnitt *II* eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche Gröfse, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengesetzten Sinn hat, wie die Kraft *R*. Mit der Kraft *R* kennt man also auch die Resultierende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man *R* in eine Seitenkraft *P*, welche parallel ist zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querschnitte gezogenen Tangente, und in eine zu ersterer senkrechte Seitenkraft *Q*, so heifst die erstere die Axialkraft, die zweite die Transversalkraft oder Querkraft. Die Querkraft ist für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von wesentlicher Bedeutung dagegen ist Gröfse und Lage von *P*. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querschnittes *II* erzeugten Druck-, bezw. Zugspannungen können ohne merkbareren Fehler nach den in Art. 110 (S. 85) für Stützen berechneten Gleichungen bestimmt werden. Man erhält demnach die Spannung *N* in einem um *z* von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 69

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{F}} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{F}} \right) \dots \dots \dots 367.$$

*M* ist das Moment der äufseren Kräfte für den Punkt *O*, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querschnitt *II* schneidet; es ist also hier *M* = *Pξ*, da *Q* in Bezug auf *O* kein Moment hat. Die positiven Werthe für *N* sind hier Druckbeanspruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

Von hervorragender Bedeutung für den Werth von  $N$  ist die GröÙe von  $\xi$  oder, was dasselbe ist, die Lage des Punktes  $E$ , des Schnittpunktes der Mittelkraft  $R$  mit dem von ihr beanspruchten Querschnitte. Man hat deshalb für die Punkte  $E$  eine besondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerschnitte von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden.

Den verschiedenen Belastungsarten entsprechen verschiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querschnitte; es folgt daraus, daß bei demselben Gewölbe jeder Belastungsart auch eine besondere Stützlinie entspricht.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 346), ermittelt die Kämpferdrücke ( $D$  und  $D_1$ ), so wie die Belastungen der einzelnen Theile ( $G_1, G_2, G_3 \dots G_6$ ) und setzt zunächst  $D$  mit der ersten Last  $G_1$  zu einer Mittelkraft zusammen, diese letztere mit  $G_2$  und fährt so bis zum rechten Kämpfer fort, so erhält man ein Vieleck  $o III III IV V VI 7$ , welches man die Mittelkraftslinie oder das Resultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftslinie ergeben sich sofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querschnitten, hier die Punkte  $o, 1, 2, 3, 4, 5$  und  $7$ . Je kleiner die einzelnen Theile des Gewölbes angenom-

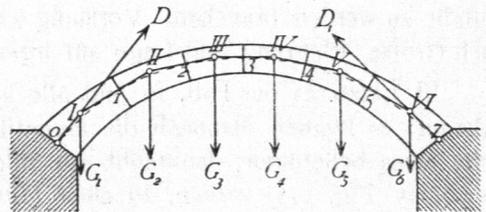
men werden, desto mehr nähert sich die Mittelkraftslinie einer continuirlich verlaufenden Curve, der sog. Seilcurve.

Die Ermittlung der Form und Lage der Stützlinie auf statischem Wege setzt nach Obigem die Kenntniß der Kämpferdrücke oder wenigstens dreier von den sechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach GröÙe, Richtung und Lage bestimmen; denn alsdann sind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweises auf unten stehende Quellen<sup>27)</sup> verweisend.

Bei constantem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche sich der Bogenaxe durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort »durchschnittlich« im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsummen deutet. Es ist also diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ist. Läßt sich demnach eine Stützlinie construiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, so wird diese die richtige sein.

Construirt man also die Mittellinie des Bogens derart, daß sie für die gegebene Belastung mit der unter gewissen Annahmen construirten (demnach möglichen) Stützlinie übereinstimmt, so ist diese Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belastung. Da es sich aber im Hochbau meistens um constante Belastungen handelt, so ist diese Ermittlung in der Regel genügend.

Fig. 346.



262.  
Mittelkraftslinie  
oder  
Resultanten-  
Polygon.

263.  
Ergebnisse  
der  
Elasticitäts-  
theorie.

27) WINKLER, E. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199.  
Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

Wir werden weiter unten sehen, daß es in vielen Fällen, in denen die Aufsuchung der genauen Stützlinie schwierig ist, genügt, gewisse Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Resultanten-Polygon construirt werden kann, so wird für alle diese Fälle zunächst das Resultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgesucht.

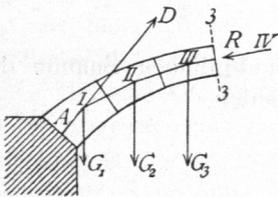
**b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.**

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV* . . . in Fig. 346) giebt nach der Erklärung in Art. 262 (S. 248) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äußeren Kräfte. Es giebt also z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge 3 wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte  $D_1, G_4, G_5, G_6$ ; da sämtliche äußere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge 3 wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derselben halten sich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben so verhält es sich auch mit jeder anderen Fuge.

264.  
Horizontal Schub  
im Gewölbe.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 347) und untersucht dessen Gleichgewichtszustand, so wirken auf denselben nicht nur die Kräfte  $D, G_1, G_2, G_3$ ,

Fig. 347.

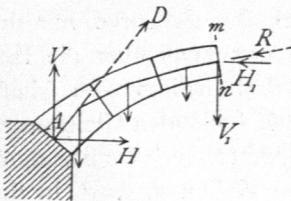


sondern auch die Kräfte, welche in der Fuge 3 vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren ist aber nach dem Vorstehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äußeren Kräfte, d. h. hier von  $D_1, G_4, G_5, G_6$ . Diese fällt in die Linie *III IV* (Fig. 346). Wenn also die Mittelkraftslinie bekannt ist, so sind stets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewiesen wird, auch) Größe derjenigen Kraft bekannt, bzw. leicht zu

finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchstück übertragen wird. Alles Vorstehende gilt selbstverständlich auch, wenn die einzelnen Gewölbetheile unendlich schmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Die Kämpferdrücke  $D$  und  $D_1$  haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieser Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger ansehen. Gerade diese wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die stützenden Seitenmauern nach außen, also schiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belastungen nur lothrecht wirken, so haben diese wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derselben Belastung gleiche Größe. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchstückes (Fig. 348) verlangt, daß die algebraische Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null sei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchstück sind aber die Seitenkräfte  $H$  und  $H_1$  von  $D$  und  $R$ .

Fig. 348.



Es muß also stattfinden:

$$0 = H - H_1, \text{ woraus } H = H_1.$$

Da Schnitt *mn* beliebig gewählt war, so gilt das Vorstehende ganz allgemein.

Man nennt diese wagrechte Seitenkraft den Horizontal Schub des Bogens, bzw. des Gewölbes. Die

Ermittlung der Gröfse und Lage dieses Horizontalschubes ist die wichtigste Aufgabe bei der Stabilitäts-Untersuchung der Gewölbe.

Die Gröfse des Horizontalschubes ist fowohl von der Belastung, wie auch von der Form und Lage der Mittelkraftslinie, bzw. Seilcurve abhängig. Diese Abhängigkeit stellt sich folgendermassen dar.

Es sei  $ACB$  (Fig. 349) die Seilcurve. Legt man durch denjenigen Punkt derselben, in welchem die Tangente wagrecht ist, d. h. durch den Scheitel, einen Schnitt  $II$  und untersucht das Gleichgewicht des Gewölbestückes an der einen Seite dieses Schnittes, etwa des Stückes  $AC$ , so mufs, wie eben entwickelt, die Kraft, welche in  $II$  auf das Bogenstück übertragen wird, in die Richtung der Tangente fallen, demnach wagrecht sein. Diese Kraft ist also das gefuchte  $H$ . Da auch  $A$  ein Punkt der Seilcurve ist, so mufs durch  $A$  die Mittelkraft aller derjenigen Kräfte gehen, welche rechts von der Kämpferfuge wirken, d. h. die Mittelkraft von  $\Sigma(G)$  und  $H$ ; diese Mittelkraft mufs demnach für  $A$  als Drehpunkt das statische Moment Null haben. Da nun das statische Moment der Mittelkraft stets gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte ist, so mufs auch stattfinden:

$$x_0 \Sigma(G) - H = y \ 0,$$

woraus folgt

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h} \dots \dots \dots 368.$$

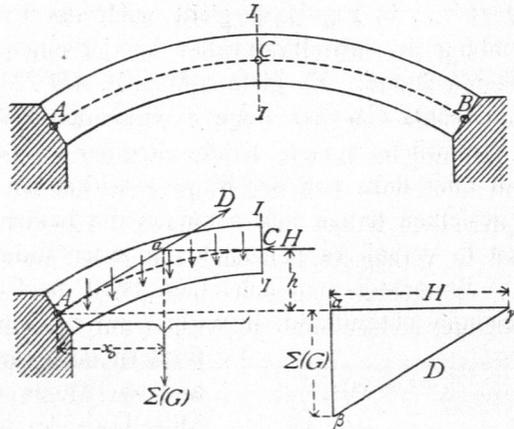
Die wichtige Gleichung 368 giebt also die Gröfse des Horizontalschubes für beliebige Belastung, wenn die Lage der Seilcurve, bzw. der Mittelkraftslinie bekannt ist. Alsdann ergibt sich die Gröfse von  $H$  auch graphisch leicht.

Man ermittle die Mittelkraft  $\Sigma(G)$  aller an der einen Seite des durch den Scheitel gelegten Schnittes  $II$  wirkenden Lasten (Fig. 349); alsdann wirken auf das Gewölbestück drei Kräfte:  $\Sigma(G)$ ,  $H$  und  $D$ . Da dieselben das Gewölbestück im Gleichgewicht halten, so schneiden sich ihre Richtungslinien in einem Punkte, d. h.  $D$  mufs durch den Punkt  $a$  gehen, in welchem sich die Richtungen von  $H$  und  $\Sigma(G)$  schneiden. Da  $D$  auch durch  $A$  geht, so ist die Richtung von  $D$  durch Linie  $Aa$  bestimmt. Nun halten sich in  $a$  drei Kräfte das Gleichgewicht, deren Richtungen bekannt sind, von deren einer [ $\Sigma(G)$ ] auch die Gröfse bekannt ist. Man trage  $\Sigma(G)$  nach beliebigem Mafsstabe auf ( $= \alpha \beta$ ) und ziehe durch  $\alpha$  und  $\beta$  Parallelen zu bezw. den Richtungen von  $H$  und  $D$ ; alsdann erhält man

$$H = \gamma \alpha \quad \text{und} \quad D = \beta \gamma.$$

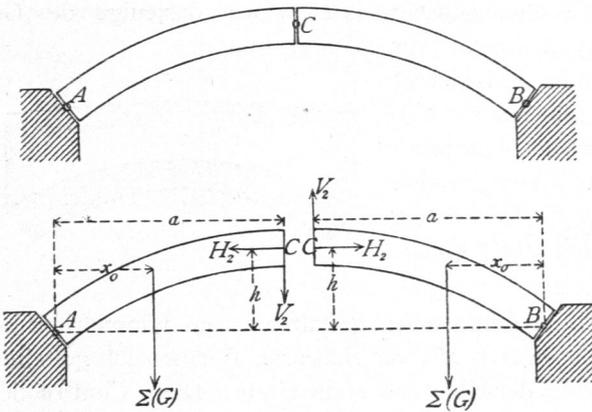
Wie in Art. 260 (S. 246) gezeigt, giebt die Statik fester Körper für die Ermittlung der unbekanntten äufseren Kräfte und damit auch der Seilcurve nur drei Gleichungen, während sechs Unbekannte vorhanden sind. Man kann aber die Seilcurve dadurch fest legen, dafs man durch die Construction drei Bedingungen schafft, welche durch drei Gleichungen ausgedrückt werden und so die fehlenden Gleichungen bieten. Am einfachsten geschieht dies, indem man drei Punkte vorschreibt, durch welche die Seilcurve gehen mufs, etwa durch Einlegen von Keilen u. f. w. in drei

Fig. 349.



265.  
Seilcurve durch  
drei  
gegebene Punkte.

Fig. 350.



Fugen (Fig. 350). Wenn also drei Punkte vorgeschrieben sind, durch welche die Seilcurve verlaufen muſs, ſo iſt der ganze Lauf der Seilcurve und damit auch die Gröſſe des Horizontalſchubes gegeben. Auch wenn zwei Punkte der Seilcurve und auſerdem in einem dieſer Punkte die Richtung beſtimmt iſt, welche die Tangente an die Curve haben ſoll, iſt Alles bekannt. Wird die Seilcurve in dieſer Weiſe feſt gelegt, ſo wirken die beiden

Theile des Gewölbes auf einander genau eben ſo, wie die beiden Theile eines Sprengwerkdaches (ſiehe Art. 208, S. 191).

Zur bequemen Löſung mancher Aufgaben kann folgender Satz benutzt werden: Wenn bei einem Gewölbe zwei Kämpferpunkte und ein Scheitelpunkt für den Verlauf der Seilcurve vorgeschrieben ſind, wenn ferner die Kämpferpunkte und die Be- laſtung ſymmetriſch zur Scheitel-Lothrechten ſind, ſo verläuft die ganze Seilcurve, bezw. Mittelkraftslinie ſymmetriſch zu dieſer Linie, ſo iſt alſo auch die Tangente an die Seilcurve im Scheitel wagrecht. Es genügt demnach, für ein ſolches Ge- wölbe eine Hälfte zu unterſuchen.

Betrachtet man nämlich zunächſt (Fig. 350) die linke Gewölbehälfte und nimmt dabei allgemein an, daſs die von der rechten Hälfte im Scheitel übertragene Kraft die Seitenkräfte  $H_2$  und  $V_2$  habe, ſo muſs, weil die Mittelkraft von  $\Sigma(G)$ ,  $H_2$  und  $V_2$  durch  $A$  verläuft,

$$0 = V_2 a - H_2 h + x_0 \Sigma(G)$$

fein. Wird die rechte Gewölbehälfte betrachtet, ſo wirken auf dieſelbe im Scheitel  $H_2$  und  $V_2$  in gleicher Gröſſe, aber in entgegengeſetztem Sinne, wie auf die linke Hälfte; der Symmetrie wegen iſt die Be- laſtung dieſer Hälfte ebenfalls  $\Sigma(G)$  im Ab- ſtande  $x_0$  vom Kämpfer  $B$ ; mithin findet ſtatt:

$$0 = V_2 a + H_2 h - x_0 \Sigma(G).$$

Die Addition beider Gleichungen giebt:  $0 = V_2 \cdot 2 a$ , woraus

$$V_2 = 0$$

folgt. Demnach iſt die Kraft, welche die beiden Gewölbehälften im Scheitel auf einander übertragen, in der That wagrecht, alſo iſt auch die Tangente an die Mittel- kraftslinie im Scheitel wagrecht, womit obiger Satz erwieſen iſt.

Man findet die Gröſſe von  $H_2 = H$  leicht zu

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h} \dots \dots \dots 369.$$

Wenn für die Seilcurve drei Punkte oder zwei Punkte und eine Richtung vor- geſchrieben ſind, ſo iſt nach Vorſtendem der Verlauf der Seilcurve beſtimmt; als- dann muſs alſo auch eine graphiſche Conſtruction dieſer Linie möglich ſein. Es iſt oft wünſchenswerth, den ganzen Verlauf derſelben zu kennen, und es ſoll deſhalb nachſtehend gezeigt werden, wie die Seilcurve, bezw. Gleichgewichtslinie conſtruirt wird. Bei allen ſolchen Unterſuchungen iſt es zweckmäſſig, die Laſten durch

Flächen darzustellen. Man denkt sich zu diesem Zwecke die gegebenen Nutzlasten durch Mauerkörper von demselben Einheitsgewichte ersetzt, wie dasjenige des Gewölbes ist. Wenn die Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit ( $= 1^m$ ) ist, so bedeutet demnach  $1^{qm}$  in der Ansicht  $1^{cbm}$  Mauerwerk, also ein entsprechendes Gewicht. Diese in Mauerwerk verwandelte Nutzlast kommt zu dem Eigengewichte des Gewölbes hinzu, so das man als Darstellung der Belastung etwa die in Fig. 351 schraffierte Fläche erhält.

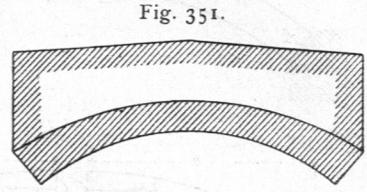


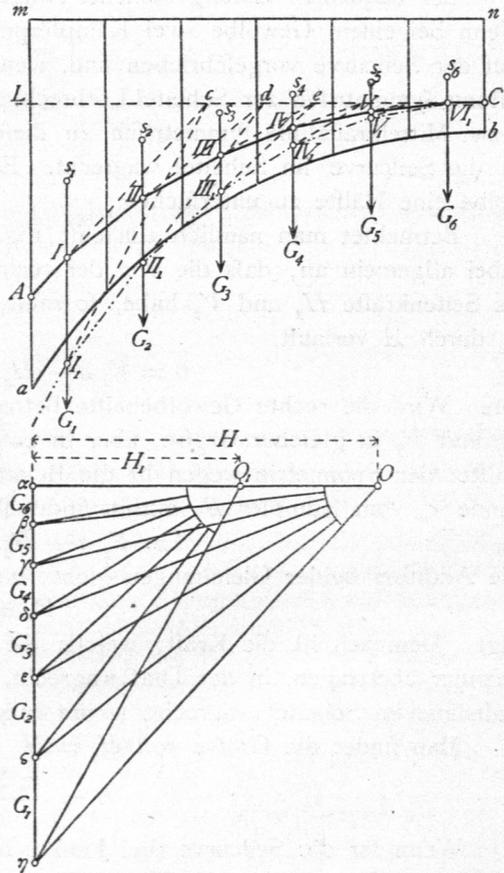
Fig. 351.

266.  
Seilcurve für  
symmetrisch  
zur Scheitel-  
Lothrechten an-  
geordneten  
u. belasteten  
Bogen.

Bei dem zur Scheitel-Lothrechten symmetrisch gefalteten und symmetrisch belasteten Bogen, bzw. Gewölbe ist nach Art. 265 die Seilcurve symmetrisch gefaltet; mithin ist es ausreichend, eine Hälfte derselben zu construiren. Diese Construction ist in Fig. 352 vorgeführt. Die Belastungsfläche sei  $abnm$ , und es sei vorgeschrieben, das die Mittelkraftslinie durch  $C$  und  $A$  gehe, außerdem in  $C$  wagrecht sei.

Man zerlege nun die Belastungsfläche in eine Anzahl lothrechter Lamellen, deren Gewichte  $G_6, G_5, G_4 \dots G_1$  leicht durch Multiplication der Flächengrößen der einzelnen Lamellen mit der (senkrecht zur Bildfläche gedachten) Einheit und dem Einheitsgewichte der Belastung ermittelt werden. Diese Gewichte haben ihre Angriffspunkte in den Schwerpunkten  $s_6, s_5, s_4 \dots s_1$  der einzelnen Lamellen. Die Gewichte  $G_6, G_5, G_4 \dots G_1$  werden nun zu einem Kraftpolygon  $\alpha \beta \gamma \dots \eta$  an einander getragen und die im Punkte  $C$  wirkende wagrechte Kraft zunächst beliebig mit  $H_1 = O_1 \alpha$  angenommen; die Zusammensetzung derselben mit  $G_6$  ergibt als Mittelkraft  $O_1 \beta$ , welche Kraft durch den Schnittpunkt  $VI_1$  von  $H_1$  und  $G_6$  geht. Die weitere Zusammensetzung dieser und der folgenden Mittelkräfte mit  $G_5, G_4 \dots$  ergibt das Polygon  $VI_1 V_1 IV_1 III_1 II_1 I_1$ , welches in Fig. 352 strichpunktirt ist. Dasselbe wird allgemein nicht durch  $A$  gehen, ist also noch nicht die richtige Mittelkraftslinie. Um dieselbe aus der verzeichneten zu finden, benutzen wir, da die Mittelkraftslinie ein Seilpolygon ist, den in Art. 20 (S. 15) bewiesenen Satz VII. Es liegen hier, da die Mittelkraft in  $C$  wagrecht ist, die zwei Pole, sowohl der zur richtigen, wie der zur unrichtigen Mittelkraftslinie gehörige, auf der durch  $\alpha$  gezogenen Wagrechten; die Verbindungslinie beider Pole ist also eine Wagrechte; beide Mittelkraftslinien gehen durch  $C$ . In diesem Punkte schneiden sich daher die beiden ersten Seilpolygoneiten. Alle gleichvielten Seilpolygoneiten schneiden sich demnach auf einer durch  $C$  gelegten Wagrechten  $CL$ . Die auf  $G_1$  folgende Seite der richtigen Mittelkraftslinie geht nach der Annahme durch  $A$ ; außerdem durch den Punkt  $c$ , in welchem die auf  $G_1$  folgende Seite des unrichtigen Polygons die Linie  $CL$  schneidet. Die Verbindungslinie  $Ac$  ergibt also die richtige Seite. Dieselbe ist bis zur Lothrechten von  $G_1$  ausgezogen. Die Seilpolygoneite zwischen  $G_1$  und  $G_2$  geht einmal durch  $I$ , ferner nach obigem Satze durch  $d$ , ist also  $III d$ . In dieser

Fig. 352.



richtigen Mittelkraftslinie geht nach der Annahme durch  $A$ ; außerdem durch den Punkt  $c$ , in welchem die auf  $G_1$  folgende Seite des unrichtigen Polygons die Linie  $CL$  schneidet. Die Verbindungslinie  $Ac$  ergibt also die richtige Seite. Dieselbe ist bis zur Lothrechten von  $G_1$  ausgezogen. Die Seilpolygoneite zwischen  $G_1$  und  $G_2$  geht einmal durch  $I$ , ferner nach obigem Satze durch  $d$ , ist also  $III d$ . In dieser

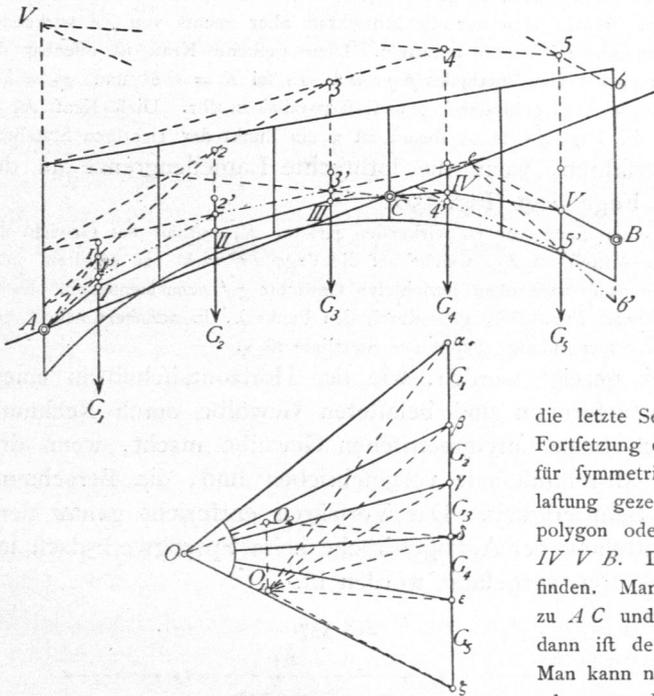
Weife erhält man die richtige Mittelkraftslinie  $A I II III IV V VI C$ . Der zugehörige Werth von  $H$  wird erhalten, indem man durch  $\eta$  eine Linie parallel zu  $A c$  zieht und den Schnittpunkt  $O$  derselben mit der durch  $\alpha$  gehenden Wagrechten auffucht. Es wird  $O \alpha = H$ ;  $O$  ist außerdem der Pol der Mittelkraftslinie. Die Größen der einzelnen Mittelkräfte werden durch die Strahlen  $O \alpha, O \beta, O \gamma \dots$  dargestellt.

Bei einem beliebig gestalteten Bogen mit beliebiger Belaftung (Fig. 353) ergibt sich die Mittelkraftslinie, welche durch drei vorgeschriebene Punkte verläuft, wie folgt.

Die Lasten seien  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ ; alsdann wird zunächst das Kraftpolygon  $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta$  und für einen beliebig angenommenen Pol  $O_1$  ein Seilpolygon construiert, welches letztere durch einen der gegebenen Punkte, etwa  $A$ , gehen möge ( $A I 2 3 4 5 6$ ). Allgemein wird dasselbe nicht durch die beiden anderen vorgeschriebenen Punkte  $B$  und  $C$  gehen, ist also noch nicht das richtige. Wir construiern nun zunächst ein zweites Seilpolygon, welches durch  $A$  und  $C$  geht, indem wir einen neuen Pol  $O_2$  annehmen, durch  $A$  eine Linie parallel zu  $O_1 O_2$  ziehen und nun dieses Seilpolygon nach dem Satze VII in Art. 20 (S. 15) ermitteln. Der Einfachheit halber nehmen wir den Pol  $O_2$  in der gleichen Lothrechten mit  $O_1$  an; alsdann ist die Schnittlinie der gleichvielten Seiten des bereits construirten und des gefuchten Seilpolygons die durch  $A$  gelegte Lothrechte  $A V$ . Man erhält, indem man zunächst diejenige Seite des neuen Seilpolygons ermittelt, welche durch  $C$  geht, das strichpunktirte Seilpolygon  $A I' 2' 3' 4' 5' 6'$ , welches durch  $A$  und  $C$ , aber nicht durch  $B$  geht. Das endgiltig richtige Seilpolygon geht nun jedenfalls durch  $A$  und  $C$ ; die gleichvielten Seiten des richtigen und des strichpunktirten Polygons schneiden sich auf einer Linie, welche der Verbindungslinie des richtigen Poles mit dem Pol  $O_2$  parallel ist. Diese Linie geht jedenfalls durch  $A$ , weil sich in  $A$  zwei gleichvielte Seilpolygonseiten schneiden, und aus gleichem Grunde durch  $C$ ; mithin ist  $A C$  diese Linie. Man ziehe also  $A C$ , ermittle den Schnittpunkt der auf die letzte Last  $G_5$  folgenden Seite des strichpunktirten Seilpolygons mit  $A C$ , d. h.  $e$ , verbinde  $e$  mit  $B$ ; alsdann ist  $e B$

267.  
Mittelkraftslinie  
für un-  
symmetrischen  
Bogen.

Fig. 353.



die letzte Seite des richtigen Seilpolygons. Die Fortsetzung der Construction entspricht genau der für symmetrischen Bogen und symmetrische Belastung gezeigten und ergibt das richtige Seilpolygon oder die Mittelkraftslinie  $A I II III C IV V B$ . Der richtige Pol  $O$  ist nun leicht zu finden. Man ziehe durch  $O_2$  eine Linie parallel zu  $A C$  und durch  $\zeta$  eine Parallele zu  $B e$ ; alsdann ist der Schnittpunkt beider der Punkt  $O$ . Man kann natürlich auch sofort nach der Ermittlung von  $B e$  diesen Pol auffuchen und dann die

Mittelkraftslinie in gewöhnlicher Weise construiern, wobei die erste Seite durch  $A$  gelegt wird.

Bei der Verzeichnung der Mittelkraftslinie handelt es sich meistens darum, aus dieser Linie die Stützlinie zu construiern, d. h. die Punkte zu finden, in denen die einzelnen Gewölbefugen von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden (siehe Art. 261, S. 247). Da aber die Gewölbefugen nicht, wie in Fig. 352 u. 353 angenommen war, lothrecht sind, sondern radial verlaufen, so ist eine Verbesserung nöthig. Man kann zunächst auf die wirkliche Fugenlage dadurch leicht Rücksicht nehmen, dass man die Lamellengrenzen entsprechend der Anordnung der Fugen wählt (Fig. 354). Das Verfahren zur Ermittlung der Gleichgewichtslinie bleibt

268.  
Verbesserungen.

Fig. 354.

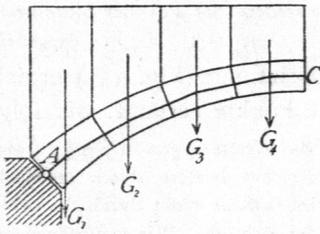


Fig. 355.

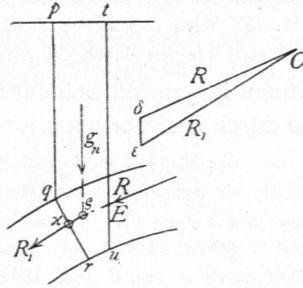
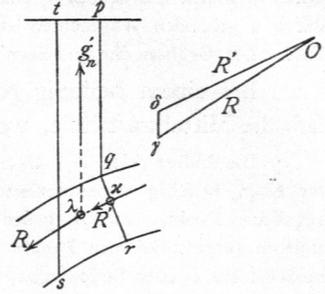


Fig. 356.



genau, wie oben gezeigt; nur ist die Ermittlung der Schwerpunkte für die einzelnen Lamellen etwas umständlicher als dort.

Es können aber auch die Constructionen in Fig. 352 u. 353 benutzt werden, wenn nur die nachstehend beschriebenen Verbesserungen vorgenommen werden.

Es sei die der richtigen Fugentheilung entsprechende Lamellengrenze  $pqr$  (Fig. 355); bei der lothrechten Theilung sei  $tu$  als Grenze angenommen und dabei sei die Kraft  $R$ , welche  $tu$  in  $E$  schneidet, als Mittelkraft aller rechts von  $tu$  wirkenden äußeren Kräfte gefunden. Um nun den Punkt der Stützlinie zu finden, welcher in  $qr$  liegt, braucht man nur die Mittelkraft aller rechts von  $qr$  wirkenden Kräfte aufzufuchen und deren Schnittpunkt mit  $qr$  zu ermitteln. Diese gefuchte Kraft ist offenbar die Mittelkraft von  $R$  und dem Gewichte  $g_n$  des Gewölbetheiles  $pqrut$ . Es sei  $R = O\delta$  und  $g_n = \delta\varepsilon$ ; alsdann ist die gefuchte Mittelkraft  $R_1 = O\varepsilon$ , geht durch  $\rho$  und ist parallel zu  $O\varepsilon$ . Diese Kraft  $R_1$  ist in Fig. 355 gezeichnet; sie schneidet die Fuge  $qr$  in  $x$ , sonach ist  $x$  ein Punkt der richtigen Stützlinie.

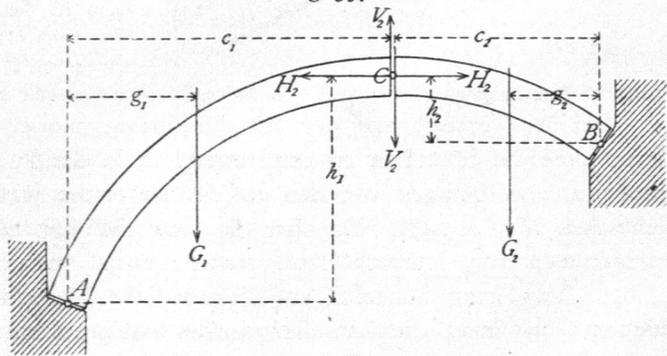
Ganz ähnlich ist zu verfahren, wenn die lothrechte Lamellengrenze an der anderen Seite der wirklichen Fuge liegt (Fig. 356).

Die Mittelkraft aller an der einen Seite von  $ts$  wirkenden Kräfte,  $R$ , enthält das Gewicht des Stückes  $tsrq\phi$  bereits; um also die Mittelkraft  $R_1$ , welche auf die Fuge  $qr$  wirkt, zu erhalten, muß man  $R$  mit dem negativ genommenen, also nach oben gerichteten Gewichte  $g_n'$  zusammensetzen. Es sei  $R = O\gamma$  und  $g_n' = \gamma\delta$ ; alsdann wird  $R' = O\delta$ , geht durch den Punkt  $\lambda$ , in welchem sich  $R$  und  $g_n'$  schneiden, und ist parallel zu  $O\delta$ . Der richtige Punkt der Stützlinie ist  $x$ .

In Art. 265 (S. 250) ist gezeigt worden, wie der Horizontalschub in einem symmetrisch zur Scheitelfuge geformten und belasteten Gewölbe durch Rechnung gefunden werden kann. Auch beim unsymmetrischen Gewölbe macht, wenn drei Punkte für den Verlauf der Mittelkraftslinie vorgeschrieben sind, die Berechnung des Horizontalschubes keine Schwierigkeit. Das Verfahren entspricht genau demjenigen, welches für die Ermittlung der Auflagerdrücke beim Sprengwerksdach mit drei Gelenken in Art. 209 (S. 192) vorgeführt worden ist.

Die Mittelkräfte der Laften auf dem linken, bezw. rechten Gewölbetheile seien  $G_1$ , bezw.  $G_2$ , die Entfernungen dieser Laften von den Kämpferpunkten seien bezw.  $g_1$  und  $g_2$  (Fig. 357). Die beiden Theile übertragen im Punkte  $C$  auf einander eine Kraft, deren Seitenkräfte bezw.  $V_2$  und  $H_2$

Fig. 357.



269.  
Horizontalschub  
im un-  
symmetrischen  
Gewölbe.

feien. Alsdann ergibt die Betrachtung der Gleichgewichtszustände beider Gewölbetheile die Gleichungen:

$$\begin{aligned} H_2 h_1 + V_2 c_1 &= G_1 g_1 \text{ (linker Theil, Drehpunkt } A); \\ H_2 h_2 - V_2 c_2 &= G_2 g_2 \text{ (rechter Theil, Drehpunkt } B). \end{aligned}$$

Man erhält

$$H_2 = H = \frac{G_1 g_1 c_2 + G_2 g_2 c_1}{h_1 c_2 + h_2 c_1} \dots \dots \dots 370.$$

2. Kapitel.

**Tonnen- und Kappengewölbe.**

Die Zerstörung des Gewölbes kann erfolgen:

- 1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äußere Kante,
- 2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und
- 3) durch Zerdrücken der Wölbsteine.

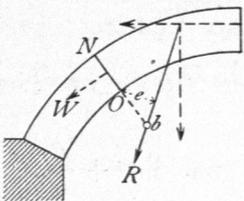
Wenn die Lage der Stützlinie bekannt ist, so können alle auf die Stabilität des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Dabei ist zu beachten, daß, falls für den Verlauf der Mittelkraftslinie drei Punkte vorgeschrieben sind, welche in Fugen liegen, dieselben entsprechend der für die Stützlinie gegebenen Erklärung auch Punkte der Stützlinie sind.

Im Hochbau handelt es sich fast stets nur um die Ermittlung des im Gewölbe wirkenden Horizontalschubes, weil diese Kraft hauptsächlich die Mauern, welche das Gewölbe, bezw. den Bogen stützen, gefährdet. Wäre die Stützlinie bekannt, so wäre auch der Horizontalschub bekannt. Die Ermittlung der genauen Lage derselben ist aber nach Art. 260 (S. 246) nur mittels der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe möglich, und es ist diese Ermittlung sehr umständlich. Es ist aber auch ausreichend, gewisse Grenzlagen für die Stützlinie und damit gewisse Grenzwerte für den Horizontalschub fest zu legen.

Soll das Gewölbe (Fig. 358) stabil sein, so muß die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen.

Wenn die Resultirende  $R$  aller an der einen Seite des Querschnittes  $NO$  wirkenden Kräfte die Verlängerung des Querschnittes etwa im Punkte  $b$  schneidet, so hat diese Kraft in Bezug auf  $O$  ein Moment  $M = Re$ , welches eine Drehung des oberhalb  $NO$  liegenden Gewölbetheiles um  $O$  erstrebt. Diese Drehung kann nur durch eine andere, entgegengesetzt drehende Kraft  $W$  (in Fig. 358 punktirt) aufgehoben werden, d. h. durch einen Zugwiderstand der Gewölbefasern. Die Wölbsteine können aber einen solchen, wenn von der Zugfestigkeit des Mörtels abgesehen wird, nicht leisten, so daß also keine Kraft vorhanden ist, welche das Gleichgewicht herstellen könnte. Der oberhalb der Fuge  $NO$  befindliche Gewölbetheil würde demnach um  $O$  kanten und einstürzen. Eine Aufhebung der Kraft  $R$  ist erst möglich, wenn dieselbe den Querschnitt  $NO$  schneidet; alsdann erzeugt sie in den einzelnen Theilen des Querschnittes Druckspannungen, welche  $R$  aufheben. Soll also das Gewölbe nicht um  $O$  kanten,

Fig. 358.



270.  
Stabilität

271.  
Stabilität  
gegen  
Kanten.

Der oberhalb der Fuge  $NO$  befindliche Gewölbetheil würde demnach um  $O$  kanten und einstürzen. Eine Aufhebung der Kraft  $R$  ist erst möglich, wenn dieselbe den Querschnitt  $NO$  schneidet; alsdann erzeugt sie in den einzelnen Theilen des Querschnittes Druckspannungen, welche  $R$  aufheben. Soll also das Gewölbe nicht um  $O$  kanten,