

## 5. Abschnitt.

## Gewölbe.

259  
Allgemeines.

Die Gewölbe sind aus einzelnen, mehr oder weniger keilförmig gefalteten Theilen zusammengesetzte Bauconstructions, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Drücke auf die stützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verschiedenen Gewölbearten hier als bekannt voraussetzen, bemerken wir, daß wir uns im vorliegenden Abschnitt hauptsächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben beschäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

Der allgemeinen Untersuchung soll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird stets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbestück betrachtet werden, dessen Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, also gleich 1<sup>m</sup> ist. Alsdann fällt die Kräfteebene mit der mittleren lothrechten Ebene zusammen.

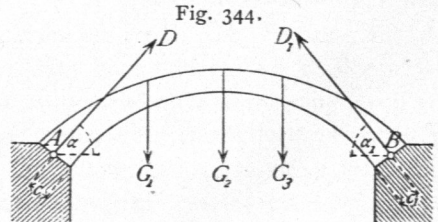
## I. Kapitel.

## Stützlinie und Mittelkraftslinie.

## a) Allgemeines.

260.  
Kämpferdrücke.

Für die Ermittlung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte und die Stabilitäts-Untersuchung desselben ist zunächst — genau wie bei den früher behandelten Bauconstructions — die Kenntniss der äußeren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, also der Belastungen und der Auflagerkräfte. Die Belastungen sind in den meisten Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu bestimmen. Schwieriger ist die Ermittlung der Auflagerkräfte oder, wie sie hier heißen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Constructions genügte zu deren Bestimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ist dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 344) betrachtet, so wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl



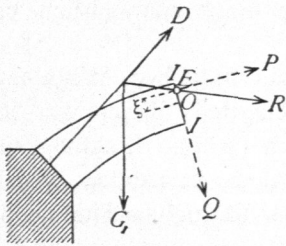
von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gefuchte Kämpferdruck ist; von diesen Kämpferdrücken ist aber jederseits weder Gröfse, noch Richtung, noch Angriffspunkt (*A*, bezw. *B*) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: *D*, *D*<sub>1</sub>, *α*, *α*<sub>1</sub>, *c*, *c*<sub>1</sub> (wenn *c* und *c*<sub>1</sub> die Abstände der Punkte *A* und *B* von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen fester Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung stellt, so ist die Ermittlung der Kämpferdrücke auf rein statischem Wege nicht möglich. Die Lösung der Aufgabe wird möglich, wenn man das Gewölbe als elastischen Bogen auffasst und annimmt, dafs bei den durch die Belastungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anschliessenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Diese mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, so dafs jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden sind, die Aufgabe also gelöst werden kann.

Wir werden sehen, dafs für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen fast stets eine ruhende Belastung in Frage kommt, die Elasticitätsgleichungen nicht aufgestellt zu werden brauchen. Vorläufig werde angenommen, dafs die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt seien.

Ist Letzteres der Fall, so sind alle äufseren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; es können demnach die sämtlichen äufseren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, senkrecht zur Bildebene genommenen Querschnittes *II* des Gewölbes (Fig. 345) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

261.  
Stützlinie.

Fig. 345.



Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbetheil, welcher links vom Querschnitt *II*, also zwischen dem linken Widerlager und dem Querschnitt *II* liegt, so sei *R* diese Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß im Querschnitt *II* eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche Gröfse, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengesetzten Sinn hat, wie die Kraft *R*. Mit der Kraft *R* kennt man also auch die Resultierende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man *R* in eine Seitenkraft *P*, welche parallel ist zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querschnitt gezogenen Tangente, und in eine zu ersterer senkrechte Seitenkraft *Q*, so heißt die erstere die Axialkraft, die zweite die Transversalkraft oder Querkraft. Die Querkraft ist für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von wesentlicher Bedeutung dagegen ist Gröfse und Lage von *P*. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querschnittes *II* erzeugten Druck-, bezw. Zugspannungen können ohne merkbareren Fehler nach den in Art. 110 (S. 85) für Stützen berechneten Gleichungen bestimmt werden. Man erhält demnach die Spannung *N* in einem um *z* von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 69

$$N = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{F}} = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{F}} \right) \dots \dots \dots 367.$$

*M* ist das Moment der äufseren Kräfte für den Punkt *O*, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querschnitt *II* schneidet; es ist also hier *M* = *Pξ*, da *Q* in Bezug auf *O* kein Moment hat. Die positiven Werthe für *N* sind hier Druckbeanspruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

Von hervorragender Bedeutung für den Werth von  $N$  ist die GröÙe von  $\xi$  oder, was dasselbe ist, die Lage des Punktes  $E$ , des Schnittpunktes der Mittelkraft  $R$  mit dem von ihr beanspruchten Querschnitte. Man hat deshalb für die Punkte  $E$  eine besondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerschnitte von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden.

Den verschiedenen Belastungsarten entsprechen verschiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querschnitte; es folgt daraus, daß bei demselben Gewölbe jeder Belastungsart auch eine besondere Stützlinie entspricht.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 346), ermittelt die Kämpferdrücke ( $D$  und  $D_1$ ), so wie die Belastungen der einzelnen Theile ( $G_1, G_2, G_3 \dots G_6$ ) und setzt zunächst  $D$  mit der ersten Last  $G_1$  zu einer Mittelkraft zusammen, diese letztere mit  $G_2$  und fährt so bis zum rechten Kämpfer fort, so erhält man ein Vieleck  $o III III IV V VI 7$ , welches man die Mittel-

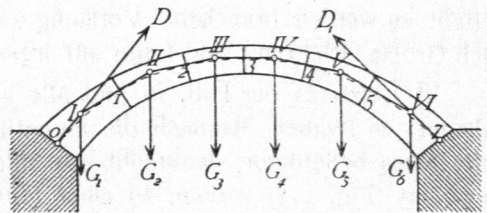
kraftsline oder das Resultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftsline ergeben sich sofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querschnitten, hier die Punkte  $o, 1, 2, 3, 4, 5$  und  $7$ . Je kleiner die einzelnen Theile des Gewölbes angenommen werden, desto mehr nähert sich die Mittelkraftsline einer continuirlich verlaufenden Curve, der sog. Seilcurve.

Die Ermittlung der Form und Lage der Stützlinie auf statischem Wege setzt nach Obigem die Kenntniß der Kämpferdrücke oder wenigstens dreier von den sechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach GröÙe, Richtung und Lage bestimmen; denn alsdann sind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweises auf unten stehende Quellen<sup>27)</sup> verweisend.

Bei constantem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche sich der Bogenaxe durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort »durchschnittlich« im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsummen deutet. Es ist also diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ist. Läßt sich demnach eine Stützlinie construiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, so wird diese die richtige sein.

Construirt man also die Mittellinie des Bogens derart, daß sie für die gegebene Belastung mit der unter gewissen Annahmen construirt (demnach möglichen) Stützlinie übereinstimmt, so ist diese Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belastung. Da es sich aber im Hochbau meistens um constante Belastungen handelt, so ist diese Ermittlung in der Regel genügend.

Fig. 346.



262.  
Mittelkraftsline  
oder  
Resultanten-  
Polygon.

263.  
Ergebnisse  
der  
Elasticitäts-  
theorie.

<sup>27)</sup> WINKLER, E. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199.  
Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

Wir werden weiter unten sehen, daß es in vielen Fällen, in denen die Aufsuchung der genauen Stützlinie schwierig ist, genügt, gewisse Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Resultanten-Polygon construirt werden kann, so wird für alle diese Fälle zunächst das Resultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgesucht.

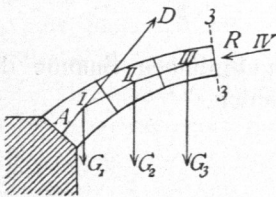
**b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.**

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV* . . . in Fig. 346) giebt nach der Erklärung in Art. 262 (S. 248) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äußeren Kräfte. Es giebt also z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge 3 wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte  $D_1, G_4, G_5, G_6$ ; da sämtliche äußere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge 3 wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derselben halten sich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben so verhält es sich auch mit jeder anderen Fuge.

264.  
Horizontal Schub  
im Gewölbe.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 347) und untersucht dessen Gleichgewichtszustand, so wirken auf denselben nicht nur die Kräfte  $D, G_1, G_2, G_3$ ,

Fig. 347.

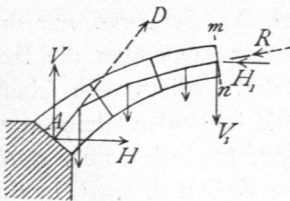


sondern auch die Kräfte, welche in der Fuge 3 vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren ist aber nach dem Vorstehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äußeren Kräfte, d. h. hier von  $D_1, G_4, G_5, G_6$ . Diese fällt in die Linie *III IV* (Fig. 346). Wenn also die Mittelkraftslinie bekannt ist, so sind stets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewiesen wird, auch) Größe derjenigen Kraft bekannt, bzw. leicht zu

finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchstück übertragen wird. Alles Vorstehende gilt selbstverständlich auch, wenn die einzelnen Gewölbetheile unendlich schmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Die Kämpferdrücke  $D$  und  $D_1$  haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieser Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger ansehen. Gerade diese wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die stützenden Seitenmauern nach außen, also schiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belastungen nur lothrecht wirken, so haben diese wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derselben Belastung gleiche Größe. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchstückes (Fig. 348) verlangt, daß die algebraische Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null sei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchstück sind aber die Seitenkräfte  $H$  und  $H_1$  von  $D$  und  $R$ .

Fig. 348.



Es muß also stattfinden:

$$0 = H - H_1, \text{ woraus } H = H_1.$$

Da Schnitt  $m n$  beliebig gewählt war, so gilt das Vorstehende ganz allgemein.

Man nennt diese wagrechte Seitenkraft den Horizontal Schub des Bogens, bzw. des Gewölbes. Die

Ermittlung der Größe und Lage dieses Horizontalschubes ist die wichtigste Aufgabe bei der Stabilitäts-Untersuchung der Gewölbe.

Die Größe des Horizontalschubes ist sowohl von der Belastung, wie auch von der Form und Lage der Mittelkraftslinie, bzw. Seilcurve abhängig. Diese Abhängigkeit stellt sich folgendermaßen dar.

Es sei  $ACB$  (Fig. 349) die Seilcurve. Legt man durch denjenigen Punkt derselben, in welchem die Tangente wagrecht ist, d. h. durch den Scheitel, einen Schnitt  $II$  und untersucht das Gleichgewicht des Gewölbestückes an der einen Seite dieses Schnittes, etwa des Stückes  $AC$ , so muß, wie eben entwickelt, die Kraft, welche in  $II$  auf das Bogenstück übertragen wird, in die Richtung der Tangente fallen, demnach wagrecht sein. Diese Kraft ist also das gefuchte  $H$ . Da auch  $A$  ein Punkt der Seilcurve ist, so muß durch  $A$  die Mittelkraft aller derjenigen Kräfte gehen, welche rechts von der Kämpferfuge wirken, d. h. die Mittelkraft von  $\Sigma(G)$  und  $H$ ; diese Mittelkraft muß demnach für  $A$  als Drehpunkt das statische Moment Null haben. Da nun das statische Moment der Mittelkraft stets gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte ist, so muß auch stattfinden:

$$x_0 \Sigma(G) - H = 0,$$

woraus folgt

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h} \dots \dots \dots 368.$$

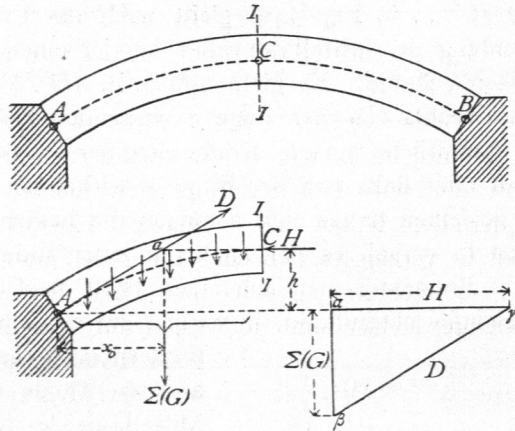
Die wichtige Gleichung 368 giebt also die Größe des Horizontalschubes für beliebige Belastung, wenn die Lage der Seilcurve, bzw. der Mittelkraftslinie bekannt ist. Alsdann ergibt sich die Größe von  $H$  auch graphisch leicht.

Man ermittle die Mittelkraft  $\Sigma(G)$  aller an der einen Seite des durch den Scheitel gelegten Schnittes  $II$  wirkenden Lasten (Fig. 349); alsdann wirken auf das Gewölbestück drei Kräfte:  $\Sigma(G)$ ,  $H$  und  $D$ . Da dieselben das Gewölbestück im Gleichgewicht halten, so schneiden sich ihre Richtungslinien in einem Punkte, d. h.  $D$  muß durch den Punkt  $a$  gehen, in welchem sich die Richtungen von  $H$  und  $\Sigma(G)$  schneiden. Da  $D$  auch durch  $A$  geht, so ist die Richtung von  $D$  durch Linie  $Aa$  bestimmt. Nun halten sich in  $a$  drei Kräfte das Gleichgewicht, deren Richtungen bekannt sind, von deren einer [ $\Sigma(G)$ ] auch die Größe bekannt ist. Man trage  $\Sigma(G)$  nach beliebigem Maßstabe auf ( $= \alpha \beta$ ) und ziehe durch  $\alpha$  und  $\beta$  Parallelen zu bzw. den Richtungen von  $H$  und  $D$ ; alsdann erhält man

$$H = \gamma \alpha \quad \text{und} \quad D = \beta \gamma.$$

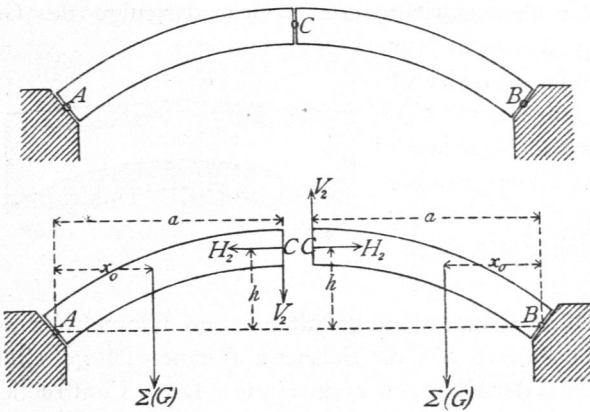
Wie in Art. 260 (S. 246) gezeigt, giebt die Statik fester Körper für die Ermittlung der unbekannteren äußeren Kräfte und damit auch der Seilcurve nur drei Gleichungen, während sechs Unbekannte vorhanden sind. Man kann aber die Seilcurve dadurch fest legen, daß man durch die Construction drei Bedingungen schafft, welche durch drei Gleichungen ausgedrückt werden und so die fehlenden Gleichungen bieten. Am einfachsten geschieht dies, indem man drei Punkte vorschreibt, durch welche die Seilcurve gehen muß, etwa durch Einlegen von Keilen u. s. w. in drei

Fig. 349.



265.  
Seilcurve durch  
drei  
gegebene Punkte.

Fig. 350.



Fugen (Fig. 350). Wenn also drei Punkte vorgeschrieben sind, durch welche die Seilcurve verlaufen muſs, ſo iſt der ganze Lauf der Seilcurve und damit auch die Gröſſe des Horizontalſchubes gegeben. Auch wenn zwei Punkte der Seilcurve und auſerdem in einem dieſer Punkte die Richtung beſtimmt iſt, welche die Tangente an die Curve haben ſoll, iſt Alles bekannt. Wird die Seilcurve in dieſer Weiſe feſt gelegt, ſo wirken die beiden

Theile des Gewölbes auf einander genau eben ſo, wie die beiden Theile eines Sprengwerkdaches (ſiehe Art. 208, S. 191).

Zur bequemen Löſung mancher Aufgaben kann folgender Satz benutzt werden: Wenn bei einem Gewölbe zwei Kämpferpunkte und ein Scheitelpunkt für den Verlauf der Seilcurve vorgeschrieben ſind, wenn ferner die Kämpferpunkte und die Be- laſtung ſymmetriſch zur Scheitel-Lothrechten ſind, ſo verläuft die ganze Seilcurve, bezw. Mittelkraftsline ſymmetriſch zu dieſer Linie, ſo iſt alſo auch die Tangente an die Seilcurve im Scheitel wagrecht. Es genügt demnach, für ein ſolches Ge- wölbe eine Hälfte zu unterſuchen.

Betrachtet man nämlich zunächſt (Fig. 350) die linke Gewölbehälfte und nimmt dabei allgemein an, daſs die von der rechten Hälfte im Scheitel übertragene Kraft die Seitenkräfte  $H_2$  und  $V_2$  habe, ſo muſs, weil die Mittelkraft von  $\Sigma(G)$ ,  $H_2$  und  $V_2$  durch  $A$  verläuft,

$$0 = V_2 a - H_2 h + x_0 \Sigma(G)$$

fein. Wird die rechte Gewölbehälfte betrachtet, ſo wirken auf dieſelbe im Scheitel  $H_2$  und  $V_2$  in gleicher Gröſſe, aber in entgegengesetztem Sinne, wie auf die linke Hälfte; der Symmetrie wegen iſt die Be- laſtung dieſer Hälfte ebenfalls  $\Sigma(G)$  im Ab- ſtande  $x_0$  vom Kämpfer  $B$ ; mithin findet ſtatt:

$$0 = V_2 a + H_2 h - x_0 \Sigma(G).$$

Die Addition beider Gleichungen giebt:  $0 = V_2 \cdot 2 a$ , woraus

$$V_2 = 0$$

folgt. Demnach iſt die Kraft, welche die beiden Gewölbehälften im Scheitel auf einander übertragen, in der That wagrecht, alſo iſt auch die Tangente an die Mittel- kraftsline im Scheitel wagrecht, womit obiger Satz erwieſen iſt.

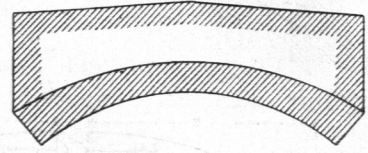
Man findet die Gröſſe von  $H_2 = H$  leicht zu

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h} \dots \dots \dots 369.$$

Wenn für die Seilcurve drei Punkte oder zwei Punkte und eine Richtung vor- geschrieben ſind, ſo iſt nach Vorſtendem der Verlauf der Seilcurve beſtimmt; als- dann muſs alſo auch eine graphiſche Conſtruction dieſer Linie möglich ſein. Es iſt oft wünſchenswerth, den ganzen Verlauf derſelben zu kennen, und es ſoll deſhalb nachſtehend gezeigt werden, wie die Seilcurve, bezw. Gleichgewichtslinie conſtruirt wird. Bei allen ſolchen Unterſuchungen iſt es zweckmäſſig, die Laſten durch

Flächen darzustellen. Man denkt sich zu diesem Zwecke die gegebenen Nutzlasten durch Mauerkörper von demselben Einheitsgewichte ersetzt, wie dasjenige des Gewölbes ist. Wenn die Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit ( $= 1^m$ ) ist, so bedeutet demnach  $1^{qm}$  in der Ansicht  $1^{cbm}$  Mauerwerk, also ein entsprechendes Gewicht. Diese in Mauerwerk verwandelte Nutzlast kommt zu dem Eigengewichte des Gewölbes hinzu, so das man als Darstellung der Belastung etwa die in Fig. 351 schraffierte Fläche erhält.

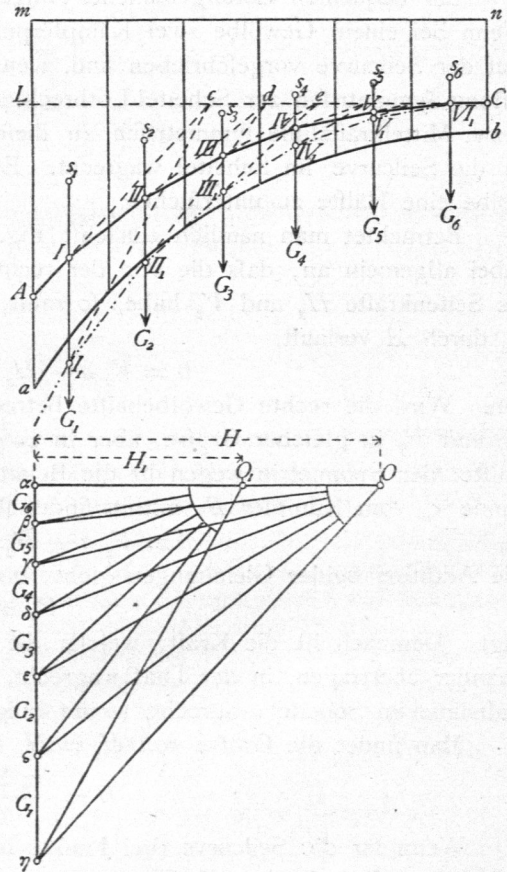
Fig. 351.



266.  
Seilcurve für  
symmetrisch  
zur Scheitel-  
Lothrechten an-  
geordneten  
u. belasteten  
Bogen.

Bei dem zur Scheitel-Lothrechten symmetrisch gefalteten und symmetrisch belasteten Bogen, bzw. Gewölbe ist nach Art. 265 die Seilcurve symmetrisch gefaltet; mithin ist es ausreichend, eine Hälfte derselben zu construiren. Diese Construction ist in Fig. 352 vorgeführt. Die Belastungsfläche sei  $abnm$ , und es sei vorgeschrieben, das die Mittelkraftslinie durch  $C$  und  $A$  gehe, außerdem in  $C$  wagrecht sei.

Fig. 352.



Man zerlege nun die Belastungsfläche in eine Anzahl lothrechter Lamellen, deren Gewichte  $G_6, G_5, G_4 \dots G_1$  leicht durch Multiplication der Flächengrößen der einzelnen Lamellen mit der (senkrecht zur Bildfläche gedachten) Einheit und dem Einheitsgewichte der Belastung ermittelt werden. Diese Gewichte haben ihre Angriffspunkte in den Schwerpunkten  $s_6, s_5, s_4 \dots s_1$  der einzelnen Lamellen. Die Gewichte  $G_6, G_5, G_4 \dots G_1$  werden nun zu einem Kraftpolygon  $\alpha \beta \gamma \dots \eta$  an einander getragen und die im Punkte  $C$  wirkende wagrechte Kraft zunächst beliebig mit  $H_1 = O_1 \alpha$  angenommen; die Zusammensetzung derselben mit  $G_6$  ergibt als Mittelkraft  $O_1 \beta$ , welche Kraft durch den Schnittpunkt  $V_1$  von  $H_1$  und  $G_6$  geht. Die weitere Zusammensetzung dieser und der folgenden Mittelkräfte mit  $G_5, G_4 \dots$  ergibt das Polygon  $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6 V_7 V_8$ , welches in Fig. 352 strichpunktirt ist. Dasselbe wird allgemein nicht durch  $A$  gehen, ist also noch nicht die richtige Mittelkraftslinie. Um dieselbe aus der verzeichneten zu finden, benutzen wir, da die Mittelkraftslinie ein Seilpolygon ist, den in Art. 20 (S. 15) bewiesenen Satz VII. Es liegen hier, da die Mittelkraft in  $C$  wagrecht ist, die zwei Pole, sowohl der zur richtigen, wie der zur unrichtigen Mittelkraftslinie gehörige, auf der durch  $\alpha$  gezogenen Wagrechten; die Verbindungslinie beider Pole ist also eine Wagrechte; beide Mittelkraftslinien gehen durch  $C$ . In diesem Punkte schneiden sich daher die beiden ersten Seilpolygonseiten. Alle gleichvielten Seilpolygonseiten schneiden sich demnach auf einer durch  $C$  gelegten Wagrechten  $CL$ . Die auf  $G_1$  folgende Seite der richtigen Mittelkraftslinie geht nach der Annahme durch  $A$ ; außerdem durch den Punkt  $c$ , in welchem die auf  $G_1$  folgende Seite des unrichtigen Polygons die Linie  $CL$  schneidet. Die Verbindungslinie  $Ac$  ergibt also die richtige Seite. Dieselbe ist bis zur Lothrechten von  $G_1$  ausgezogen. Die Seilpolygonseite zwischen  $G_1$  und  $G_2$  geht einmal durch  $I$ , ferner nach obigem Satze durch  $d$ , ist also  $III d$ . In dieser

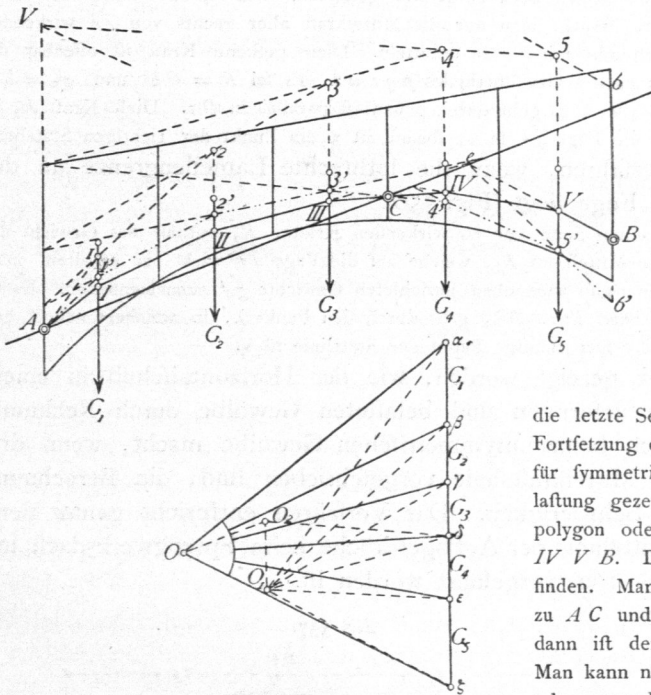
Weife erhält man die richtige Mittelkraftslinie  $A I II III IV V VI C$ . Der zugehörige Werth von  $H$  wird erhalten, indem man durch  $\eta$  eine Linie parallel zu  $A c$  zieht und den Schnittpunkt  $O$  derselben mit der durch  $\alpha$  gehenden Wagrechten auffucht. Es wird  $O \alpha = H$ ;  $O$  ist außerdem der Pol der Mittelkraftslinie. Die Größen der einzelnen Mittelkräfte werden durch die Strahlen  $O \alpha, O \beta, O \gamma \dots$  dargestellt.

Bei einem beliebig gestalteten Bogen mit beliebiger Belaftung (Fig. 353) ergibt sich die Mittelkraftslinie, welche durch drei vorgeschriebene Punkte verläuft, wie folgt.

Die Lasten seien  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ ; alsdann wird zunächst das Kraftpolygon  $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon \zeta$  und für einen beliebig angenommenen Pol  $O_1$  ein Seilpolygon construiert, welches letztere durch einen der gegebenen Punkte, etwa  $A$ , gehen möge ( $A I 2 3 4 5 6$ ). Allgemein wird dasselbe nicht durch die beiden anderen vorgeschriebenen Punkte  $B$  und  $C$  gehen, ist also noch nicht das richtige. Wir construire nun zunächst ein zweites Seilpolygon, welches durch  $A$  und  $C$  geht, indem wir einen neuen Pol  $O_2$  annehmen, durch  $A$  eine Linie parallel zu  $O_1 O_2$  ziehen und nun dieses Seilpolygon nach dem Satze VII in Art. 20 (S. 15) ermitteln. Der Einfachheit halber nehmen wir den Pol  $O_2$  in der gleichen Lothrechten mit  $O_1$  an; alsdann ist die Schnittlinie der gleichvielten Seiten des bereits construirten und des gefuchten Seilpolygons die durch  $A$  gelegte Lothrechte  $A V$ . Man erhält, indem man zunächst diejenige Seite des neuen Seilpolygons ermittelt, welche durch  $C$  geht, das strichpunktirte Seilpolygon  $A I' 2' 3' 4' 5' 6'$ , welches durch  $A$  und  $C$ , aber nicht durch  $B$  geht. Das endgiltig richtige Seilpolygon geht nun jedenfalls durch  $A$  und  $C$ ; die gleichvielten Seiten des richtigen und des strichpunktirten Polygons schneiden sich auf einer Linie, welche der Verbindungslinie des richtigen Poles mit dem Pol  $O_2$  parallel ist. Diese Linie geht jedenfalls durch  $A$ , weil sich in  $A$  zwei gleichvielte Seilpolygonseiten schneiden, und aus gleichem Grunde durch  $C$ ; mithin ist  $A C$  diese Linie. Man ziehe also  $A C$ , ermittle den Schnittpunkt der auf die letzte Last  $G_5$  folgenden Seite des strichpunktirten Seilpolygons mit  $A C$ , d. h.  $e$ , verbinde  $e$  mit  $B$ ; alsdann ist  $e B$

267.  
Mittelkraftslinie  
für un-  
symmetrischen  
Bogen.

Fig. 353.



die letzte Seite des richtigen Seilpolygons. Die Fortsetzung der Construction entspricht genau der für symmetrischen Bogen und symmetrische Belaftung gezeigten und ergibt das richtige Seilpolygon oder die Mittelkraftslinie  $A I II III C IV V B$ . Der richtige Pol  $O$  ist nun leicht zu finden. Man ziehe durch  $O_2$  eine Linie parallel zu  $A C$  und durch  $\zeta$  eine Parallele zu  $B e$ ; alsdann ist der Schnittpunkt beider der Punkt  $O$ . Man kann natürlich auch sofort nach der Ermittlung von  $B e$  diesen Pol auffuchen und dann die

Mittelkraftslinie in gewöhnlicher Weise construire, wobei die erste Seite durch  $A$  gelegt wird.

Bei der Verzeichnung der Mittelkraftslinie handelt es sich meistens darum, aus dieser Linie die Stützlinie zu construire, d. h. die Punkte zu finden, in denen die einzelnen Gewölbefugen von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden (siehe Art. 261, S. 247). Da aber die Gewölbefugen nicht, wie in Fig. 352 u. 353 angenommen war, lothrecht sind, sondern radial verlaufen, so ist eine Verbesserung nöthig. Man kann zunächst auf die wirkliche Fugenlage dadurch leicht Rücksicht nehmen, dass man die Lamellengrenzen entsprechend der Anordnung der Fugen wählt (Fig. 354). Das Verfahren zur Ermittlung der Gleichgewichtslinie bleibt

268.  
Verbesserungen.



Fig. 354.

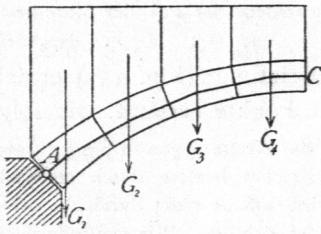


Fig. 355.

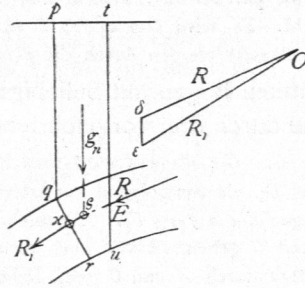
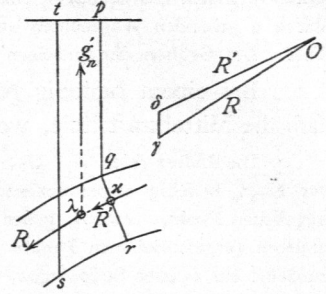


Fig. 356.



genau, wie oben gezeigt; nur ist die Ermittlung der Schwerpunkte für die einzelnen Lamellen etwas umständlicher als dort.

Es können aber auch die Constructions in Fig. 352 u. 353 benutzt werden, wenn nur die nachstehend beschriebenen Verbesserungen vorgenommen werden.

Es sei die der richtigen Fugentheilung entsprechende Lamellengrenze  $pqr$  (Fig. 355); bei der lothrechten Theilung sei  $tu$  als Grenze angenommen und dabei sei die Kraft  $R$ , welche  $tu$  in  $E$  schneidet, als Mittelkraft aller rechts von  $tu$  wirkenden äußeren Kräfte gefunden. Um nun den Punkt der Stützlinie zu finden, welcher in  $qr$  liegt, braucht man nur die Mittelkraft aller rechts von  $qr$  wirkenden Kräfte aufzufuchen und deren Schnittpunkt mit  $qr$  zu ermitteln. Diese gefuchte Kraft ist offenbar die Mittelkraft von  $R$  und dem Gewichte  $g_n$  des Gewölbetheiles  $pqrut$ . Es sei  $R = O\delta$  und  $g_n = \delta\varepsilon$ ; alsdann ist die gefuchte Mittelkraft  $R_1 = O\varepsilon$ , geht durch  $\rho$  und ist parallel zu  $O\varepsilon$ . Diese Kraft  $R_1$  ist in Fig. 355 gezeichnet; sie schneidet die Fuge  $qr$  in  $x$ , sonach ist  $x$  ein Punkt der richtigen Stützlinie.

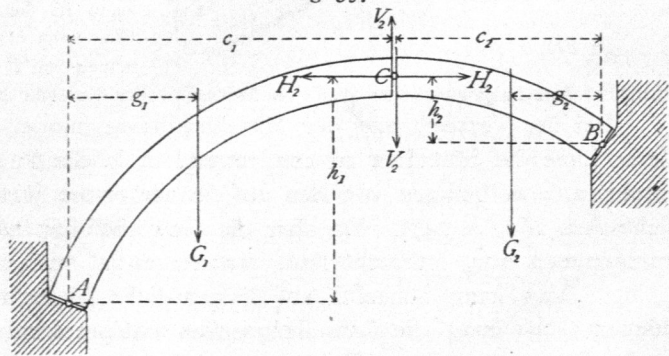
Ganz ähnlich ist zu verfahren, wenn die lothrechte Lamellengrenze an der anderen Seite der wirklichen Fuge liegt (Fig. 356).

Die Mittelkraft aller an der einen Seite von  $ts$  wirkenden Kräfte,  $R$ , enthält das Gewicht des Stückes  $tsrq\phi$  bereits; um also die Mittelkraft  $R_1$ , welche auf die Fuge  $qr$  wirkt, zu erhalten, muß man  $R$  mit dem negativ genommenen, also nach oben gerichteten Gewichte  $g_n'$  zusammensetzen. Es sei  $R = O\gamma$  und  $g_n' = \gamma\delta$ ; alsdann wird  $R' = O\delta$ , geht durch den Punkt  $\lambda$ , in welchem sich  $R$  und  $g_n'$  schneiden, und ist parallel zu  $O\delta$ . Der richtige Punkt der Stützlinie ist  $x$ .

In Art. 265 (S. 250) ist gezeigt worden, wie der Horizontalschub in einem symmetrisch zur Scheitelfuge geformten und belasteten Gewölbe durch Rechnung gefunden werden kann. Auch beim unsymmetrischen Gewölbe macht, wenn drei Punkte für den Verlauf der Mittelkraftslinie vorgeschrieben sind, die Berechnung des Horizontalschubes keine Schwierigkeit. Das Verfahren entspricht genau demjenigen, welches für die Ermittlung der Auflagerdrücke beim Sprengwerksdach mit drei Gelenken in Art. 209 (S. 192) vorgeführt worden ist.

Die Mittelkräfte der Laften auf dem linken, bezw. rechten Gewölbetheile seien  $G_1$ , bezw.  $G_2$ , die Entfernungen dieser Laften von den Kämpferpunkten seien bezw.  $g_1$  und  $g_2$  (Fig. 357). Die beiden Theile übertragen im Punkte  $C$  auf einander eine Kraft, deren Seitenkräfte bezw.  $V_2$  und  $H_2$

Fig. 357.



269.  
Horizontalschub  
im un-  
symmetrischen  
Gewölbe.

feien. Alsdann ergibt die Betrachtung der Gleichgewichtszustände beider Gewöltheile die Gleichungen:

$$\begin{aligned} H_2 h_1 + V_2 c_1 &= G_1 g_1 \text{ (linker Theil, Drehpunkt } A); \\ H_2 h_2 - V_2 c_2 &= G_2 g_2 \text{ (rechter Theil, Drehpunkt } B). \end{aligned}$$

Man erhält

$$H_2 = H = \frac{G_1 g_1 c_2 + G_2 g_2 c_1}{h_1 c_2 + h_2 c_1} \dots \dots \dots 370.$$

2. Kapitel.

**Tonnen- und Kappengewölbe.**

Die Zerstörung des Gewölbes kann erfolgen:

- 1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äußere Kante,
- 2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und
- 3) durch Zerdrücken der Wölbsteine.

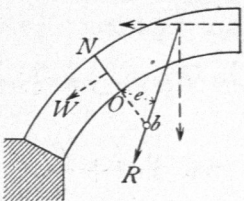
Wenn die Lage der Stützlinie bekannt ist, so können alle auf die Stabilität des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Dabei ist zu beachten, daß, falls für den Verlauf der Mittelkraftslinie drei Punkte vorgeschrieben sind, welche in Fugen liegen, dieselben entsprechend der für die Stützlinie gegebenen Erklärung auch Punkte der Stützlinie sind.

Im Hochbau handelt es sich fast stets nur um die Ermittlung des im Gewölbe wirkenden Horizontalschubes, weil diese Kraft hauptsächlich die Mauern, welche das Gewölbe, bezw. den Bogen stützen, gefährdet. Wäre die Stützlinie bekannt, so wäre auch der Horizontalschub bekannt. Die Ermittlung der genauen Lage derselben ist aber nach Art. 260 (S. 246) nur mittels der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe möglich, und es ist diese Ermittlung sehr umständlich. Es ist aber auch ausreichend, gewisse Grenzlagen für die Stützlinie und damit gewisse Grenzwerte für den Horizontalschub fest zu legen.

Soll das Gewölbe (Fig. 358) stabil sein, so muß die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen.

Wenn die Resultirende  $R$  aller an der einen Seite des Querschnittes  $NO$  wirkenden Kräfte die Verlängerung des Querschnittes etwa im Punkte  $b$  schneidet, so hat diese Kraft in Bezug auf  $O$  ein Moment  $M = Re$ , welches eine Drehung des oberhalb  $NO$  liegenden Gewölbetheiles um  $O$  erstrebt. Diese Drehung kann nur durch eine andere, entgegengesetzt drehende Kraft  $W$  (in Fig. 358 punktirt) aufgehoben werden, d. h. durch einen Zugwiderstand der Gewölbefasern. Die Wölbsteine können aber einen solchen, wenn von der Zugfestigkeit des Mörtels abgesehen wird, nicht leisten, so daß also keine Kraft vorhanden ist, welche das Gleichgewicht herstellen könnte. Der oberhalb der Fuge  $NO$  befindliche Gewölbetheil würde demnach um  $O$  kanten und einstürzen. Eine Aufhebung der Kraft  $R$  ist erst möglich, wenn dieselbe den Querschnitt  $NO$  schneidet; alsdann erzeugt sie in den einzelnen Theilen des Querschnittes Druckspannungen, welche  $R$  aufheben. Soll also das Gewölbe nicht um  $O$  kanten,

Fig. 358.



270.  
Stabilität

271.  
Stabilität  
gegen  
Kanten.

Der oberhalb der Fuge  $NO$  befindliche Gewölbetheil würde demnach um  $O$  kanten und einstürzen. Eine Aufhebung der Kraft  $R$  ist erst möglich, wenn dieselbe den Querschnitt  $NO$  schneidet; alsdann erzeugt sie in den einzelnen Theilen des Querschnittes Druckspannungen, welche  $R$  aufheben. Soll also das Gewölbe nicht um  $O$  kanten,

so muß der Schnittpunkt der Mittelkraft  $R$  mit dem Querschnitte, d. h. der Schnittpunkt der Stützlinie mit dem Querschnitte, in das Gewölbe fallen. Was aber vom Querschnitt  $NO$  gilt, gilt von allen Querschnitten. Das Gewölbe ist also nur dann gegen Kanten stabil, wenn die Stützlinie ganz im Gewölbe liegt.

272.  
Stabilität  
gegen  
Zerdrücken.

In Art. 110 bis 114 (S. 85 bis 92) ist nachgewiesen worden, wie sich die Spannungen für Stützen ergeben, falls auf dieselben Axialkräfte und Momente wirken. Mit für die Praxis hinreichender Genauigkeit können die dort gefundenen Formeln auch gebraucht werden, um die Spannungsvertheilung in den Gewölbefugen zu ermitteln. Die Spannung in einem Punkte, welcher um  $z$  von der senkrecht zur Bildebene errichteten Schwerpunktsaxe des Querschnittes absteht, ist demnach nach Gleichung 69

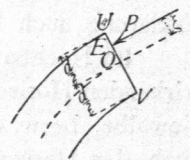
$$N = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{F \xi z}{\mathcal{I}} \right).$$

Hier handelt es sich nur um rechteckige Querschnitte von der Höhe  $d$  und der Breite 1 (senkrecht zur Bildebene); mithin ist  $F = d \cdot 1$  und  $\mathcal{I} = \frac{d^3}{12}$ ; daher

$$N = \frac{P}{d} \left( 1 + \frac{12 \xi z}{d^2} \right) \dots \dots \dots 371.$$

Da  $P$  hier stets Druck ist und wir  $P$  als positiv einführen, so bedeuten die positiven Werthe von  $N$  Druck, die negativen Werthe Zug. Der größte Druck  $N_{max}$  findet bei der in Fig. 359 gezeichneten Lage der Kraft  $P$  in den Punkten  $U$  statt, für welche  $z$  seinen größten Werth  $\frac{d}{2}$  hat; der kleinste Druck  $N_{min}$  in den

Fig. 359.



Punkten  $V$ , für welche  $z$  seinen kleinsten Werth  $-\frac{d}{2}$  hat; demnach wird

$$N_{max} = \frac{P}{d} \left( 1 + \frac{12 \xi d}{2 d^2} \right) = \frac{P}{d} \left( 1 + \frac{6 \xi}{d} \right) \quad \text{und} \quad N_{min} = \frac{P}{d} \left( 1 - \frac{6 \xi}{d} \right) \dots \dots 372.$$

$N_{min}$  wird zu Null, wenn  $1 - \frac{6 \xi}{d} = 0$ , d. h. wenn  $\xi = \frac{d}{6}$  ist.

In den am wenigsten gedrückten Punkten  $V$  findet also die Spannung Null statt, wenn die Mittelkraft den Querschnitt in der Höhe  $\frac{d}{6}$  über der Mittellinie des Gewölbes schneidet. Schneidet die Kraft  $P$ , also die Stützlinie, den Querschnitt unterhalb  $O$ , so ergibt sich leicht aus Gleichung 371 (indem man  $-\xi$  statt  $+\xi$  einführt), daß der größte Druck in den Punkten  $V$ , der größte Zug in den Punkten  $U$  stattfindet. In  $U$  findet demnach die Spannung Null statt, wenn die Stützlinie den Querschnitt in dem Abstände  $\frac{d}{6}$  unterhalb der Schwerpunktsaxe schneidet.

$N_{max}$  und  $N_{min}$  haben gleiches Vorzeichen für diejenigen Werthe von  $\xi$ , für welche gleichzeitig stattfindet

$$1 + \frac{6 \xi}{d} > 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{6 \xi}{d} > 0, \quad \text{d. h. für } \xi > -\frac{d}{6} \quad \text{und} \quad \xi < +\frac{d}{6}.$$

So lange also der Schnittpunkt der Mittelkraft nicht weiter von der Gewölbemittellinie entfernt ist, als  $\frac{d}{6}$ , d. h. so lange der Schnittpunkt im inneren Gewölbe-

drittel liegt, haben  $N_{max}$  und  $N_{min}$  gleiches Vorzeichen, sind demnach  $N_{max}$  und  $N_{min}$  Druck; dann findet aber im ganzen Querschnitte nur Druck statt. (Vergl. Art. 112, S. 88.)

Ist dagegen  $\xi$  größer als  $\frac{d}{6}$ , so findet in der am meisten gezogenen Faser Zugbeanspruchung statt; dann gilt die Gleichung 371 für die Druckvertheilung nicht mehr, weil diese unter der Annahme einer Beanspruchung aller Querschnittspunkte entwickelt worden ist; falls aber hier einzelne Punkte des Querschnittes auf Zug beansprucht werden, so findet entweder ein Klaffen der Fugen oder ein unthätiges Aneinanderliegen der Steine statt. Die dann geltenden Gleichungen sind in Art. 113 (S. 89) entwickelt. Falls  $\xi$  größer als  $\frac{d}{6}$  ist, mit anderen Worten, falls die Stützlinie einen Querschnitt außerhalb des inneren Drittels schneidet, etwa im Abstände  $c$  von den zunächst gelegenen äußeren Punkten, so vertheilt sich nach Gleichung 78 (S. 91) der Druck  $P$  auf eine Breite  $3c$ , wobei der Maximaldruck doppelt so groß ist, als wenn sich der Druck über die gedrückte Fläche gleichmäßig vertheilt. Wir erhalten also (Alles auf Centimeter bezogen)

$$N_{max} = \frac{2P}{3 \cdot 100 \cdot c} \dots \dots \dots 373.$$

Wird die größte, im Wölbmaterial zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit mit  $K$  bezeichnet, so kann Gleichung 373 benutzt werden, um zu ermitteln, wie weit sich die Stützlinie der inneren oder äußeren Gewölbelaibung nähern darf. Man erhält als Bedingungsleichung:

$$K = \frac{2P}{300c}, \text{ woraus } c = \frac{2P}{300K} \dots \dots \dots 374.$$

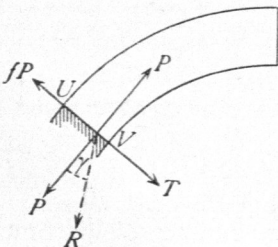
Damit haben wir die Bedingung für die Stabilität des Gewölbes gegen Druck gefunden: Soll das Gewölbe genügende Sicherheit gegen Druck bieten, so darf der Abstand der Stützlinie von den Gewölbelaibungen an keiner Stelle kleiner werden,

als  $\frac{2P}{300K}$ .

Da  $P$  für die verschiedenen Gewölbefellen verschiedene Werthe hat, so ergeben sich für dieselben auch verschiedene Größen von  $c$ . Meistens wird es jedoch genügen, den Maximalwerth von  $P$ , der sich an den Kämpfern ergibt, einzusetzen und dann den für  $c$  erhaltenen Werth im ganzen Gewölbe gleich groß anzunehmen. Man kann in dieser Weise leicht die beiden Linien construiren, zwischen denen die Stützlinie verlaufen soll.

Die Forderung, dass in allen Punkten sämtlicher Querschnitte nur Druckbeanspruchung stattfinden soll, ist erfüllt, wenn sämtliche Querschnitte von ihren

Fig. 360.



zugehörigen Mittelkräften im inneren Gewölbbedrittel geschnitten werden, d. h. wenn die ganze Stützlinie im inneren Drittel verläuft.

Der Einsturz des Gewölbes kann endlich auch dadurch verursacht werden, dass ein Theil desselben längs des anderen gleitet. Es sei die Mittelkraft aller auf den Gewölbetheil oberhalb der Fuge  $UV$  (Fig. 360) wirkenden Kräfte gleich  $R$ ; alsdann ist Gleichgewicht nur möglich, wenn Seitens der Fuge eine genau gleich

273.  
Stabilität  
gegen  
Gleiten.

große und gleich gerichtete Kraft mit entgegengesetztem Sinne auf den betreffenden Gewölbetheil wirkt. Wir zerlegen  $R$  in eine Axialkraft  $P = R \cos \gamma$  und eine Querkraft  $T = R \sin \gamma$ . Die Axialkraft  $P$  wird, wenn ihr Schnittpunkt mit der Fuge nicht zu nahe an die Laibungen fällt, durch die senkrecht zum Querschnitt gerichteten axialen Spannungen, die Querkraft  $T$  wird durch den Reibungswiderstand an der Berührungsfläche  $UV$  aufgehoben. Nennt man den Reibungs-Coefficienten  $f$ , so ist der Reibungswiderstand  $W = f P = f R \cos \gamma$ . Größer kann  $W$  nicht werden; Gleichgewicht gegen Verschieben ist also nur möglich, wenn stattfindet:  $T \leq f R \cos \gamma$ , d. h.  $R \sin \gamma \leq f R \cos \gamma$  und  $\text{tg } \gamma \leq f$ .

Wird der Reibungswinkel mit  $\varphi$  bezeichnet, so ist  $f = \text{tg } \varphi$ , und es heißt alsdann die Bedingungs-gleichung für das Gleichgewicht:

$$\text{tg } \gamma \leq \text{tg } \varphi \text{ oder } \gamma \leq \varphi \dots \dots \dots 375.$$

Sobald  $\gamma$  größer wird, als der Reibungswinkel, kann  $T$  nicht aufgehoben werden, und es findet dann ein Abgleiten des betrachteten Gewölbetheiles statt.

Dieselbe Schlussfolgerung gilt auch, falls  $R$  nach oben um den Winkel  $\gamma$  von der Senkrechten zur Fuge abweicht; nur ist dann das Bestreben vorhanden, den oberen Gewölbetheil nach außen zu verschieben. Was für die Fuge  $UV$  gilt, gilt für alle Fugen, so daß folgendes Gesetz ermittelt ist: Soll das Gewölbe gegen Gleiten stabil sein, so darf an keiner Stelle der Winkel, welchen die Mittelkraftslinie mit der betreffenden Fugen senkrechten bildet, größer sein, als der Reibungswinkel für die betreffenden Materialien.

In den meisten Fällen kann man ohne großen Fehler statt der Mittelkraftslinie die Stützlinie einführen und als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes angeben, daß die Tangente an die Stützlinie nirgends einen Winkel mit der Fugen senkrechten einschließt, welcher größer ist, als der Reibungswinkel.

Man kann den Reibungs-Coefficienten  $f$  zwischen 0,6 und 0,75 liegend annehmen, welchen Werthen die Winkel  $\varphi = 31$  bis 37 Grad entsprechen. Bei frischem Mörtel kann der Winkel  $\varphi$  bis auf 27 Grad hinabgehen ( $f$  bis auf 0,51). Die Tangenten an die Stützlinie bilden aber nur selten so große Winkel mit den Fugen senkrechten, so daß, wenigstens im eigentlichen Gewölbe, die Stabilität gegen Gleiten selten in Frage kommt.

Betrachtet man die eine Hälfte eines symmetrisch gestalteten und symmetrisch belasteten Gewölbes (Fig. 361), auf welche außer der Belastung  $G$  nur noch der Horizontalschub  $H$  im Scheitel wirkt, und nimmt zunächst als Angriffspunkt von  $H$  den Punkt  $C$  beliebig und außerdem an, daß die Stützlinie die Kämpferfuge in  $A$  schneide, so geht die Mittelkraft von  $G$  und  $H$  durch  $A$ , und es ist nach Art. 265 (S. 250)

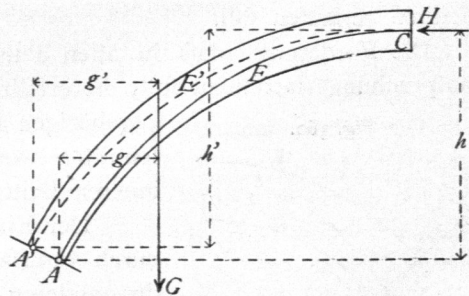
$$H = \frac{G g}{h}$$

Diesen Annahmen, bzw. diesem Werthe des Horizontalschubes entspricht eine ganz bestimmte Stützlinie, etwa  $CEA$ , die in Fig. 361 ausgezogen ist.

Construirt man ein zweites Mal unter Beibehaltung des Punktes  $C$  die Stütz-

274.  
Grenzlagen der  
Stützlinie und  
Grenzwerte  
des Horizontal-  
schubes.

Fig. 361.



linie für einen anderen Kämpferpunkt, etwa  $A'$ , so ergibt sich etwa die punktirte Stützlinie  $C E' A'$ , und es wird der zugehörige Horizontalschub

$$H' = G \frac{g'}{h'}.$$

Da  $\frac{g'}{h'} > \frac{g}{h}$ , so ist auch  $H' > H$ .

Man sieht, einer Vergrößerung des Horizontalschubes entspricht ein Flacherwerden der Stützlinie, und es ergibt sich in gleicher Weise, daß einer Verringerung von  $H$  ein Steilerwerden der Stützlinie entspricht. Es sind nun offenbar sehr viele Stützlinien möglich, welche sämtlich durch  $C$  gehen und ganz im Gewölbe verlaufen, demnach mit der Stabilität desselben vereinbar sind. Dem kleinsten Werthe von  $H$  mit dem Angriffspunkt  $C$  entspricht diejenige dieser Stützlinien, welche an irgend einer Stelle die innere Gewölbelaibung berührt ( $C F A$  in Fig. 362); denn eine weitere Verringerung von  $H$  würde zur Folge haben, daß die Stützlinie bei  $F$

Fig. 362.

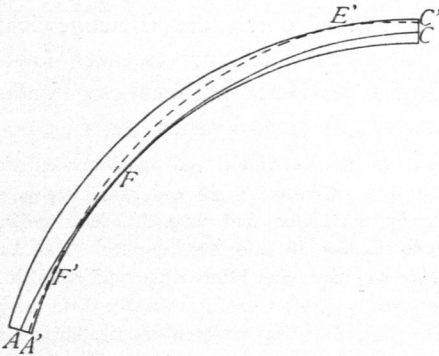
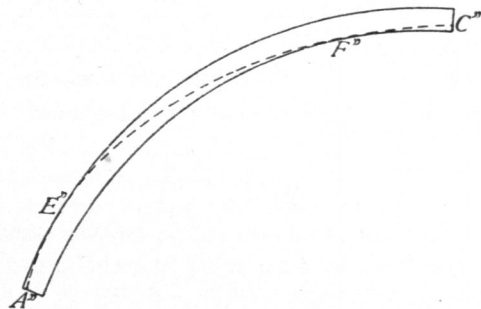


Fig. 363.



nach innen aus dem Gewölbe herausfiel. Nun kann aber jeder Punkt der Scheitelfuge Angriffspunkt der Kraft  $H$  sein; es steht also nichts im Wege, einen anderen, höheren Punkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt von  $H$  anzunehmen, mithin die ganze Stützlinie um das entsprechende Stück parallel sich selbst nach oben zu verschieben. Jetzt kann der Horizontalschub weiter verringert werden, und man kann damit so weit fortfahren, bis die Stützlinie gleichzeitig die äußere und die innere Laibung berührt. Diese Stützlinie sei etwa  $C' E' F' A'$ . Eine weitere Verringerung von  $H$  hat die Folge, daß die Stützlinie bei  $F'$  das Gewölbe verläßt; ein weiteres Hinauffchieben der Stützlinie ist auch nicht möglich, weil bei einem solchen — sollte es so weit fortgesetzt werden, daß bei  $F'$  die Stützlinie wieder in das Gewölbe fällt — bereits vorher die Stützlinie bei  $E'$  außerhalb des Gewölbes gefallen wäre.

Die gezeichnete Stützlinie  $C' E' F' A'$  entspricht also dem Minimum von  $H$  und heißt deshalb die Minimalstützlinie. Es ergibt sich demnach: Die Minimalstützlinie hat jederseits mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemein, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der äußeren Laibung über denjenigen mit der inneren Laibung.

Bei flachen Bogen fällt gewöhnlich der Berührungspunkt mit der äußeren Laibung in die Scheitelfuge, derjenige mit der inneren Laibung jederseits in die Kämpferfuge; die beiden Berührungspunkte mit der äußeren Laibung können zusammenfallen.

In gleicher Weise erhält man die Stützlinie, welche dem Maximum von  $H$  entspricht, die Maximalstützlinie ( $C'' F'' E'' A''$  in Fig. 363). Die Maximalstützlinie hat jederseits des Scheitels mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinsam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der inneren Laibung über denjenigen mit der äußeren Laibung; die beiden ersteren können zusammenfallen.

Bei flachen Bogen fallen die beiden Berührungspunkte mit der inneren Laibung in die Scheitelfuge, die Berührungspunkte mit der äußeren Laibung in die Kämpferfugen.

In Fig. 364 ist  $CA$  die Minimal-,  $C'A'$  die Maximalstützlinie. Die entsprechenden Werthe von  $H$  sind

$$H_{min} = \frac{Gg}{h} \quad \text{und} \quad H_{max} = \frac{Gg'}{h'} \quad . \quad 376.$$

Wenn wir demnach auch die wirkliche Lage der Stützlinie und die wirkliche GröÙe von  $H$  durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht ermitteln können, so haben wir jetzt doch Grenzen sowohl für die Lage der Stützlinie, als auch für die GröÙe des Horizontalschubes gefunden. Der Horizontalschub kann nicht größer sein, als  $H_{max}$ , nicht kleiner, als  $H_{min}$ .

Fallen Maximal- und Minimalstützlinie nicht zusammen, so ist eine Anzahl von Stützlinien möglich, welche solchen Werthen des Horizontalschubes entsprechen, die zwischen  $H_{max}$  und  $H_{min}$  liegen. Je größer der Unterschied dieser beiden Werthe ist, desto mehr Stützlinien sind möglich, desto größere Aenderung darf  $H$  erleiden, ehe das Gewölbe einstürzt, desto stabiler ist also das Gewölbe. Man kann demnach schließen: Ein Gewölbe ist stabil, wenn eine Maximal- und eine Minimalstützlinie möglich ist und beide nicht zusammenfallen. Die Stabilität ist um so größer, je größer die Unterschiede dieser beiden Stützlinien sind, bzw. je größer der Unterschied  $H_{max} - H_{min}$  ist. Um demnach die Stabilität eines Gewölbes gegen Umkanten nachzuweisen, genügt die Einzeichnung der Maximal- und Minimalstützlinie und die Untersuchung, ob dieselben zusammenfallen oder nicht.

275.  
Praktische  
Grenzlagen  
der  
Stützlinie.

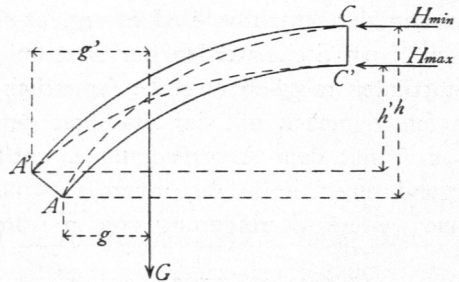
Im vorhergehenden Artikel war absolut festes Material angenommen, und es konnte deshalb eine Berührung der Stützlinie und der Gewölbelaibung als möglich vorausgesetzt werden. In Wirklichkeit darf nach Art. 272 (S. 256) die Stützlinie nicht näher an die Laibungen treten, als daß der Abstand noch  $c = \frac{2P}{300K}$  ist. Bei einer Berührung der Laibung durch die Stützlinie würde an dieser Stelle  $c = 0$ , und da nach Gleichung 373:  $N_{max} = \frac{2P}{300c}$  ist, hier  $N_{max} = \frac{2P}{0} = \infty$  sein.

Man stellt deshalb die Bedingung, daß eine Maximal- und eine Minimalstützlinie möglich sei, welche wenigstens um  $\frac{2P}{300K}$  von den Gewölbelaibungen abstehen, und daß diese beiden nicht zusammenfallen.

Wenn im inneren Drittel des Gewölbes, in der sog. Kernfläche, eine Maximal- und eine Minimalstützlinie möglich ist und beide nicht zusammenfallen, so ist dies noch günstiger.

Die Stabilität gegen Gleiten erfordert, daß die Tangente an die Stützlinie an keiner Stelle einen größeren, als den Reibungswinkel mit der Fugenfenkrechten mache. Dieser Bedingung müssen also auch die Maximal- und Minimalstützlinie genügen.

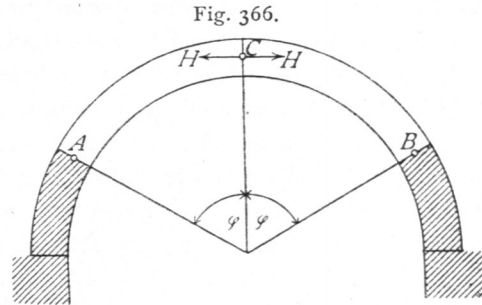
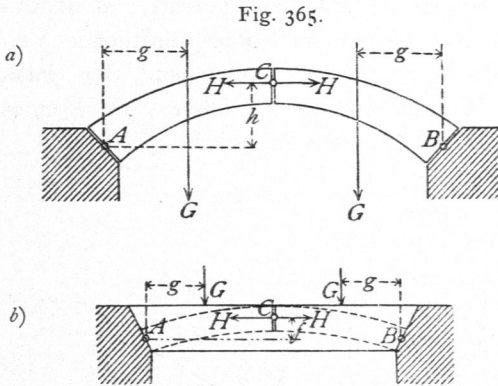
Fig. 364.



Für einige häufig vorkommende Bogenformen ergeben sich die Horizontalstöße unter Annahme symmetrischer Form und Belastung, so wie unter der weiteren Annahme einer mittleren Stützlinie folgendermaßen.

276.  
Horizontalstöße  
für verschiedene  
Bogenformen.

1) Flachbogen (Fig. 365 a). Nach Früherem ist  $H = \frac{Gg}{h}$ .



2) Scheitrechter Bogen. Man kann die Tragfähigkeit des scheitrechten Bogens als eben so groß annehmen, wie diejenige eines Flachbogens, dessen Mittelpunkt auf der Lothrechten der Scheitelfuge liegt und dessen innere Laibung durch die unteren Punkte der Kämpferfugen, dessen äußere Laibung durch den obersten Punkt der Scheitelfuge geht. Dann wird nach Fig. 365 b

$$H = \frac{Gg}{f}$$

3) Halbkreisbogen. Eine halbkreisförmige Mittelkraftslinie für lothrechte (hier nur in Betracht kommende) Belastung giebt es nicht; denn bei derselben müßte die Tangente an jedem Kämpfer, also auch die Mittelkraft an dieser Stelle, lothrecht sein. Da aber die Mittelkraft stets eine wagrechte Seitenkraft (den Horizontalstöß) hat, so kann sie nie lothrecht sein. Deshalb kann die Mittelkraftslinie nicht einen vollen Halbkreis vorstellen. Man muß daher die unteren Theile des Bogens als zum Widerlager gehörig betrachten und berechnet den Horizontalstöß H für den zwischengepannten Flachbogen (Fig. 366). Der Winkel φ wird zweckmäßig etwa gleich 60 Grad gewählt; H ergibt sich dann, wie unter 1.

Bei den Widerlagern, bezw. Mittelpfeilern der Gewölbe kann man, genau wie bei den Gewölben selbst, von einer Stützlinie sprechen, wenn man dieselbe als Gesamtheit der Punkte erklärt, in welchen die einzelnen Querschnitte der Widerlager, bezw. Pfeiler von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden. Alsdann gelten die in Art. 270 bis 273 (S. 255 bis 257) aufgestellten Sätze auch hier und können folgendermaßen ausgesprochen werden: Soll das Widerlager, bezw. der Pfeiler gegen Kanten, Zerdrücken und Gleiten stabil sein, so muß die Stützlinie ganz im Widerlager, bezw. Pfeiler liegen, darf die Mittelkraft an keiner Querschnittsstelle eine größere Druckbeanspruchung erzeugen, als der Baustoff gestattet, und darf endlich der Winkel der Mittelkraft mit der Senkrechten zur Fuge an keiner Stelle größer sein, als der Reibungswinkel.

277.  
Stabilität  
der  
Widerlager  
und  
Pfeiler.

1) Widerlager. Die von dem Gewölbe auf ein Widerlager ausgeübte Kraft R ist nach Größe und Richtung gleich dem Kämpferdruck, welcher auf das Gewölbe wirkt, dem Sinne nach demselben entgegengesetzt. Wenn R bekannt oder an-



genommen ist, so kann die entsprechende Widerlager-Stützlinie leicht durch Zusammenfassung dieser Kraft  $R$  mit den Widerlagerlasten construirt werden. Für  $R$  und  $H$  sind aber nach Obigem nur gewisse Grenzen bekannt. Wenn nun das Widerlager für die Grenzwerte von  $H$  stabil ist, so offenbar auch für die Mittelwerte. Ist es also möglich, für den Maximal- und Minimalwerth von  $H$  je eine Widerlagerstützlinie zu construiren, welche obigen Bedingungen genügt, so ist das Widerlager stabil. Da die Maximalwerte von  $H$  nur in Folge künstlicher Vergrößerung des Horizontal Schubes auftreten, so ist es meistens ausreichend, den Nachweis unter Zugrundelegung eines mittleren Werthes von  $H$  zu führen, d. h. eines solchen Werthes, welcher einer mittleren Gewölbstützlinie entspricht.

Auf dem Wege der Rechnung kann man die Stabilität des Widerlagers folgendermaßen untersuchen. Man sucht die Punkte, in welchen die Stützlinie die einzelnen Fugen schneidet, und ermittelt die in denselben hervorgerufenen Druckspannungen. Die Untersuchung soll für die Fuge  $II$  (Fig. 367) gezeigt werden. Die Mittelkraft aller oberhalb von  $II$  wirkenden Kräfte schneide die Fuge im Punkte  $E$ ; dann ist  $E$  ein Punkt der Stützlinie. Die Lage von  $E$  ist bekannt, wenn  $x$ , der Abstand von der äußeren Mauerseite, bekannt ist. Auf das Widerlager wirken in  $A$ : der Kämpferdruck  $R$ , dessen wagrechte, bzw. lothrechte Seitenkraft  $H$ , bzw.  $V$  ist. Es ist  $H = \frac{Gg}{h}$  und

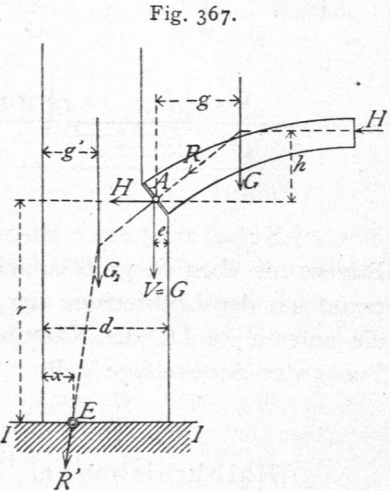


Fig. 367.

$V = G$ . Außer diesen Kräften wirkt als belastend auf die Fuge  $II$  noch das Gewicht der Mauer, so weit sie oberhalb  $II$  liegt, d. h.  $G_1$ . Die Mittelkraft von  $H$ ,  $V (= G)$  und  $G_1$  ist  $R'$ , und diese Kraft geht durch  $E$ , hat also für den Drehpunkt  $E$  das statische Moment Null. Demnach ist auch die algebraische Summe der statischen Momente der Einzelkräfte für  $E$  als Drehpunkt gleich Null, also

$$0 = G_1(g' - x) + G(d - e - x) - Hr,$$

woraus

$$x = \frac{G_1 g' + G(d - e) - Hr}{G + G_1}$$

folgt. Wenn sich für  $x$  ein negativer Werth ergibt, so bedeutet dies, daß die Kraft  $R'$  den Querschnitt links von der Außenseite der Mauer schneidet, daß also Kanten eintreten muß.

Die lothrechte Seitenkraft der Mittelkraft  $R'$  ist offenbar  $P = G_1 + G$ . Nachdem in  $E$  der Schnittpunkt der Mittelkraft mit der Fuge gefunden ist, kann man die größte in der Fuge durch diese Belastung erzeugte Druckspannung ermitteln, wie in Art. 113 bis 116 (S. 89 bis 94) für verschiedene Querschnittsformen gezeigt ist. Wenn der Querschnitt ein Rechteck von der Länge  $b$  (senkrecht zur Bildfläche gemessen) ist und die Kraftebene denselben in der Hauptaxe schneidet, so ist für

$$x < \frac{d}{3}$$

$$N_{max} = \frac{2 P}{3 x b} .$$

In ganz derselben Weise kann man die Unterfuchung für eine Anzahl von Fugen führen.

2) Pfeiler. Die Stabilitätsunterfuchung eines zwischen zwei Gewölben befindlichen Mittelpfeilers wird entsprechend vorgenommen.

Die Punkte  $E$  können auch leicht graphisch ermittelt werden, indem man  $R$  mit  $G_1$  zu  $R'$  zusammensetzt und in gleicher Weise weiter für die verschiedenen Fugen verfährt.

### 3. Kapitel.

## Kreuz- und Kuppelgewölbe.

### a) Kreuzgewölbe.

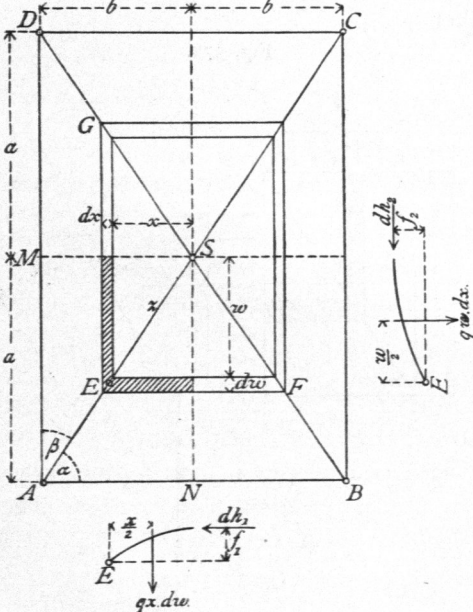
Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder so, daß die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe besteht, oder so, daß sie im Grundriß senkrecht oder nahezu senkrecht zu den Graten verlaufen. Das statische Verhalten ist bei den beiden Anordnungen verschieden.

278.  
Lagerfugen.

1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel. Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen soll die vereinfachende, mit der Wirklichkeit genügend genau übereinstimmende Annahme einer über die Grundfläche gleichmäßig vertheilten Belastung  $g$  auf die Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittlung der Seilcurve und damit auch des Horizontalschubes werden stets drei Punkte angenommen werden. Die gefundenen Horizontalschübe sind nur dann richtig, wenn die drei Punkte in jedem Gewölbetheil richtig angenommen sind. Es können dann nach Obigem auch leicht die Größt- und Kleinstwerthe der Horizontalschübe ermittelt werden.

279.  
Lagerfugen parallel zur Axe der Kappen.

Fig 368.



Die gefundenen Horizontalschübe sind nur dann richtig, wenn die drei Punkte in jedem Gewölbetheil richtig angenommen sind. Es können dann nach Obigem auch leicht die Größt- und Kleinstwerthe der Horizontalschübe ermittelt werden.

Der nachfolgenden Unterfuchung soll ein Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt werden; die Anwendung für ein solches mit quadratischem Grundriß ist dann leicht.

Zerlegt man jede Kappe durch senkrecht zur Längsaxe gelegte, lothrechte Ebenen in einzelne Streifen, welche im Grundriß Paralleltrapeze bilden (Fig. 368), und betrachtet zwei solche Streifen  $GE$  und  $EF$ , welche sich im Punkte  $E$  des Grates treffen, so ergeben sich die auf diese Streifen in ihren Scheiteln übertragenen Horizontalschübe folgendermaßen. Bezeichnet man die Pfeilhöhen der Seilcurven in

den Streifen bezw. mit  $f_1$  und  $f_2$ , die Horizontalfchübe mit bezw.  $dh_1$  und  $dh_2$ , fo erhält man nach Fig. 368

$$dh_1 = \frac{q x^2 dw}{2 f_1} \quad \text{und} \quad dh_2 = \frac{q w^2 dx}{2 f_2} \quad \dots \quad 377.$$

Der Punkt  $E$  ift der gemeinfame Kämpferpunkt für die beiden Bogen  $GE$  und  $EF$ ; die in diefem Punkte auf den Gratabogen von den beiden Bogen übertragenen Kräfte haben je eine wagrechte Seitenkraft, welche  $dh_1$ , bezw.  $dh_2$  ift, und eine lothrechte Seitenkraft, deren Größen

$$dv_1 = qx dx \quad \text{und} \quad dv_2 = qw dx$$

find. Die lothrechten Seitenkräfte addiren fich einfach in  $E$  zu einer abwärts wirkenden Kraft:

$$v = q (x dx + w dx).$$

$v$  ift also gleich dem halben Gewichte der anschließenden Streifen (gleich dem Gewichte der in Fig. 368 fchraffirten Fläche). Die beiden wagrechten Kräfte zerlegen fich (Fig. 369) in je eine Seitenkraft, welche in die Richtung der Diagonalen  $AC$  fällt, und in eine Seitenkraft fenkrecht zu der erfteren. Soll die Mittelkraft von  $dh_1$  und  $dh_2$  in die lothrechte, durch die Diagonale gelegte Ebene fallen, fo müffen fich die zuletzt genannten Seitenkräfte  $dh_1 \sin \alpha$  und  $dh_2 \cos \alpha$  aufheben; es muß also

$$dh_1 \sin \alpha = dh_2 \cos \alpha$$

fein, woraus

$$\text{tg } \alpha = \frac{dh_2}{dh_1} = \frac{w^2 dx \cdot f_1}{x^2 dw \cdot f_2}.$$

Nun ift

$$w = x \text{ tg } \alpha \quad \text{und} \quad dw = \text{tg } \alpha dx,$$

daher

$$\text{tg } \alpha = \frac{x^2 \text{tg }^2 \alpha \cdot dx \cdot f_1}{x^2 \text{tg } \alpha \cdot dx \cdot f_2} = \text{tg } \alpha \frac{f_1}{f_2}.$$

Damit obige Bedingung erfüllt fei, muß daher

$$\frac{f_1}{f_2} = 1, \quad \text{d. h.} \quad f_1 = f_2$$

fein. Soll also die Mittelkraft beider Horizontalkräfte im Grundriß in die Richtung der Diagonalen fallen, fo find für die Seilcurven der beiden zusammengehörigen Streifen gleiche Pfeilhöhen einzuführen.

Betrachtet man nun ein Viertel des Gewölbes (Fig. 370), und zwar das Stück  $MSNA$ , fo wirken auf daffelbe die Belastung  $q$  für die Einheit der Grundfläche, also im Ganzen  $G = qab$  im Schwerpunkte  $O$  des Rechteckes  $MSNA$ ; außerdem wirken in den Scheiteln der einzelnen Gewölbefstreifen die Kräfte  $dh_1$ , bezw.  $dh_2$ , endlich der Kämpferdruck auf den Gratabogen in  $A$ . Diefe Kräfte müffen den Ge-

Fig. 369.

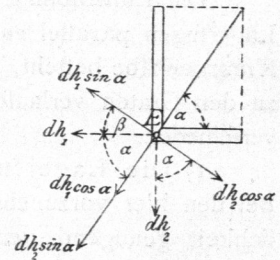
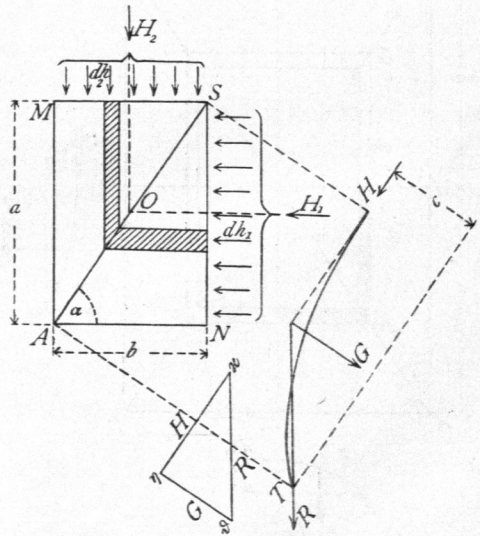


Fig. 370.



wölbetheil im Gleichgewicht halten. Die den einzelnen Streifen entsprechenden Seilcurven sind, weil die Belastungen gleichmäÙig über die wagrechte Projection vertheilt sind, Parabeln, und man kann annehmen, daÙ sich in allen Streifen deselben Gewölbetheiles (*ASB*, bezw. *ASD* in Fig. 368) dieselbe Seilcurve bildet. Dann ist, wenn  $C_1$  und  $C_2$  noch zu bestimmende Festwerthe sind, bezw.

$$x^2 = C_1 f_1 \quad \text{und} \quad w^2 = C_2 f_2.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung 377 eingeführt, so ergibt sich

$$d h_1 = \frac{q C_1 d w}{2} \quad \text{und} \quad d h_2 = \frac{q C_2 d x}{2} \quad \dots \quad 378.$$

Damit ist das bemerkenswerthe Ergebniss gefunden, daÙ die in den Scheiteln der Gewölbstreifen wirkenden Horizontalkräfte auf die ganze Länge des Gewölbes für die Längeneinheit die gleiche GröÙe haben (constant sind). Man erhält demnach die auf die gesammten Scheiteltrecken *SN*, bezw. *SM* ausgeübten Horizontalkräfte zu

$$H_1 = \frac{q C_1 a}{2} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q C_2 b}{2} \quad \dots \quad 379.$$

Diese Mittelkräfte liegen in den Mitten der bezüglichlichen Scheiteltrecken, weil alle Einzelkräfte gleich groÙ sind. Beide Kräfte  $H_1$  und  $H_2$  schneiden sich in der Mitte der Diagonale *AS*, d. h. in der Lothrechten des Punktes *O*. Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äußersten Gewölbstreifen (*AB*, bezw. *AD*) mit *c* bezeichnet, so ist  $b^2 = C_1 c$  und  $a^2 = C_2 c$ ; hiernach wird

$$H_1 = \frac{q}{2} a \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q}{2} b \frac{a^2}{c}.$$

$H_1$  und  $H_2$  setzen sich in ihrem Schnittpunkte zu einer Mittelkraft *H* zusammen, welche im GrundriÙ in die Richtung der Diagonalen *AS* fällt; dieselbe ist

$$H = H_1 \cos \alpha + H_2 \sin \alpha = \frac{q}{2c} a b (b \cos \alpha + a \sin \alpha).$$

Nun ist  $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  und  $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ; mithin wird

$$H = \frac{q a b (b^2 + a^2)}{2 c \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Diese Kraft *H* vereinigt sich in der Lothrechten des Punktes *O* mit dem Gewichte  $G = q a b$  zu der auf den Kämpfer wirkenden Mittelkraft. Damit ist die auf einen jeden Eckpfeiler des rechteckigen Kreuzgewölbes wirkende Kraft gefunden; sie hat eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft, deren GröÙen sind:

$$H = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots \quad 380.$$

$$V = q a b \quad \dots \quad 381.$$

Wenn das Gewölbe quadratischen GrundriÙs hat, so bleibt alles Vorstehende giltig; nur ist  $b = a$  einzuführen, so daÙ man erhält: Beim Kreuzgewölbe über quadratischem Raume mit einer Seitenlänge  $2a$  ist der Horizontalschub im Grat

$$H = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}}, \quad \dots \quad 382.$$

und die lothrechte auf jeden Pfeiler übertragene Kraft

$$V = q a^2 \quad \dots \quad 383.$$

Die graphische Ermittlung von *H* läuft auf die Zerlegung von  $G = q a b$

(bezw.  $q a^2$ ) in die beiden Kräfte  $H$  und  $R$  hinaus. Ist in Fig. 370:  $G = \eta \vartheta$ , so ist  $x \eta = H$  und  $\vartheta x = R$ .

280.  
Lagerfugen  
senkrecht  
zu den  
Graten.

2) Die Lagerfugen sind im Grundriss senkrecht zu den Graten. Der Unterfuchung wird wieder ein Gewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt. Dasselbe werde durch lothrechte Ebenen, welche im Grundriss senkrecht zu den Graten gerichtet sind, in Streifen zerlegt; dann besteht jeder Streifen aus zwei Theilen, welche sich im Grat treffen. Für jeden Theil stellt der Grat den einen Stützpunkt dar; die anderen Stützpunkte werden bei den innerhalb des Vierecks  $LMNO$  (Fig. 371) liegenden Streifen durch die entsprechenden Streifen der benachbarten Gewölbeviertel gebildet, bei den außerhalb dieses Vierecks liegenden Streifen einerseits durch die Streifen des benachbarten Gewölbeviertels, andererseits oder beiderseits durch die Gurtbogen  $AB, BC, CD, DA$ .

α) Es werde zuerst ein Streifen  $FEG$  aus dem Viereck  $LMNO$  betrachtet. Die Belaftung für die Einheit der Grundfläche sei wiederum  $q$ ; alsdann ist (Fig. 371)

$$dh_1 = \frac{q z_1^2 dw}{2 f_1} \quad \text{und} \quad dh_2 = \frac{q z_2^2 dw}{2 f_2}, \quad 384.$$

wenn  $f_1$  und  $f_2$  die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven sind. Im Punkte  $E$  wird auf den Grat nur eine lothrechte Kraft übertragen, falls  $dh_1 = dh_2$ , d. h.

wenn  $\frac{f_2}{f_1} = \frac{z_2^2}{z_1^2}$  ist. Nun ist

$$z_2 = w \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad z_1 = \frac{w}{\operatorname{tg} \alpha};$$

mithin muß

$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

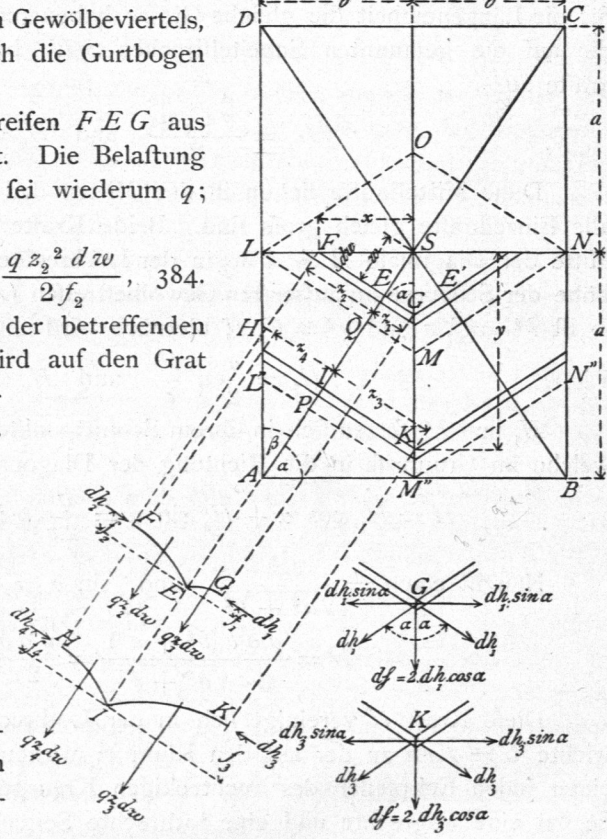
sein. Die Pfeilhöhen der Seilcurven müssen also in einem von der Grundform des Gewölbes abhängigen Verhältnisse stehen.

Die im Punkte  $E$  auf den Gratbogen nun übertragene lothrechte Kraft ist  $v = q dw (z_1 + z_2)$ ; dieselbe ist gleich dem Gewichte des Streifens  $FEG$ . Da aber  $z_1 + z_2 = \frac{x}{\sin \alpha}$  ist, so wird

$$v = \frac{q x dw}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 385.$$

Im Punkte  $G$  wirken die beiden wagrechten Kräfte  $dh_1$  in den Richtungen der anschließenden Streifen; sie zerlegen sich in je zwei Seitenkräfte, welche in der Längsrichtung der Kappe, bezw. senkrecht zu dieser Richtung wirken. Die beiden letzteren haben je die Größe  $dh_1 \sin \alpha$  und heben einander auf; die beiden ersteren setzen sich zu einer Kraft  $dh = 2 dh_1 \cos \alpha$  zusammen. Wird für  $dh_1$

Fig. 371.



der obige Werth eingeführt und beachtet, daß  $w = z_1 \operatorname{tg} \alpha$ , also  $dw = dz_1 \operatorname{tg} \alpha$  ist, so ergibt sich

$$dh = \frac{q z_1^2 \sin \alpha dz_1}{f_1}.$$

Unter gleichen Annahmen, wie in Art. 279 (S. 263), wird

$$z_1^2 = C f_1 \text{ und } dh = q C \sin \alpha dz_1; \text{ ferner, weil } z_1 = \frac{x \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}, \quad dz_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} dx,$$

$$dh = q C \cos^2 \alpha dx.$$

Jeder Doppelfstreifen  $EGE'$  innerhalb der Grenzen  $x = 0$  bis  $x = b$  übt eine wagrechte Kraft  $dh$  auf den Scheitel des Gurtbogens aus. Die ganze Wirkung dieser Streifen ist also

$$H_1 = q C \cos^2 \alpha b = \frac{q C b^3}{(a^2 + b^2)} \dots \dots \dots 386.$$

β) Es werde nunmehr ein Streifen  $HJK$  untersucht, welcher außerhalb des Viereckes  $LMNO$  liegt, aber an der einen Seite sich gegen den entsprechenden Streifen des benachbarten Gewölbeviertels lehnt (Fig. 371). Die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven seien  $f_3$  und  $f_4$ , die Horizontalstöße  $dh_3$  und  $dh_4$ ; alsdann ist

$$dh_3 = \frac{q dw z_3^2}{2 f_3} \quad \text{und} \quad dh_4 = \frac{q dw z_4^2}{2 f_4}.$$

Wie oben muß  $dh_3 = dh_4$  sein, mithin  $\frac{f_4}{f_3} = \frac{z_4^2}{z_3^2}$ . Man erhält nach einfachen Umformungen

$$\frac{f_4}{f_3} = \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{w_1} - 1 \right)^2.$$

Im Punkte  $K$  wirken wiederum zwei Kräfte  $dh_3$ , deren in die Längsrichtung der Gewölbekappe fallenden Seitenkräfte sich zusammensetzen, während die beiden senkrecht dazu gerichteten Seitenkräfte einander aufheben. Man erhält erstere zu

$$dh' = 2 dh_3 \cos \alpha = \frac{2 \cos \alpha}{2 f_3} q dw_1 z_3^2.$$

Es ist  $SJ = w_1$  gesetzt; dann wird

$$w_1 = z_3 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad dw_1 = dz_3 \operatorname{tg} \alpha;$$

und, wenn wiederum  $z_3^2 = C f_3$  angenommen wird,

$$dh' = q C \sin \alpha dz_3.$$

Ferner ist (Fig. 371)  $z_3 = y \cos \alpha$  und  $dz_3 = \cos \alpha dy$ , also

$$dh' = q C \sin \alpha \cos \alpha dy.$$

Die Summe aller Kräfte  $dh'$ , welche von den Streifen zwischen  $LMN$  und  $L''M''N''$  (Fig. 371) ausgeübt werden, ist

$$H_2 = q C \sin \alpha \cos \alpha \int_{\frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}}^a dy = q C \sin \alpha \cos \alpha \left( a - \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} \right),$$

$$H_2 = \frac{q b C (a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} \dots \dots \dots 387.$$

γ) Endlich wenden wir uns zu einem Streifen  $F''E''G''$ , der sich beiderseits gegen die Gurtbogen stützt; dabei wird die Annahme gemacht, daß auch in den betreffenden Streifentheilen Seilcurven stattfinden, bei denen an der Ansatzstelle an die Gurtbogen die Tangenten wagrecht sind. Die beiden in  $E''$  (Fig. 372) auf

den Grat übertragenen wagrechten Kräfte find, wenn die obigen Bezeichnungen (mit Abänderung der Zeiger) beibehalten werden,

$$dh_5 = \frac{q d \zeta z_5^2}{2 f_5} \quad \text{und} \quad dh_6 = \frac{q d \zeta z_6^2}{2 f_6};$$

alsdann muſs  $\frac{f_6}{f_5} = \frac{z_6^2}{z_5^2} = \frac{b^4}{a^4}$  ſein, damit ſich in  $E''$  die beiden wagrechten Kräfte aufheben; auf den Grattbogen wirkt dann nur eine lothrechte Kraft, welche gleich dem Gewichte des Streifens iſt; dieſelbe iſt

$$v_1 = q d \zeta (z_5 + z_6) = \frac{q d \zeta u}{\sin \alpha},$$

$$v_1 = \frac{q u d \zeta}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 388.$$

Das Gewicht eines um  $\zeta$  von  $A$  entfernten Streifens iſt alſo eben ſo groſs, wie dasjenige eines gleich weit von  $S$  entfernten Streifens der Grundfläche  $L S M$  (Fig. 371).

Die im Punkte  $G''$  auf den Gurtbogen ausgeübte Kraft  $dh_5$  zerlegt ſich in eine fenkrecht zum Gurtbogen gerichtete Seitenkraft  $dh_5 \cos \alpha$  und eine ſolche, welche im Grundriſs in die Richtung des Gurtbogens fällt:  $dh_5 \sin \alpha$ . Letztere wird durch eine gleich groſſe, entgegengesetzt gerichtete Seitenkraft im ſymmetriſch zur Mitte liegenden Punkte  $G'''$  aufgehoben; die erſtere iſt

$$dh_5 \cos \alpha = \frac{q d \zeta z_5^2}{2 f_5} \cos \alpha = \frac{q u^2 du \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2 f_5} = \frac{q u^2 a^2 b^2 du}{2 f_5 (a^2 + b^2)^2}.$$

Seitens des Kreuzgewölbes werden alſo auf den Gurtbogen  $AB$  wagrechte Kräfte übertragen, und zwar im Scheitel die Einzelkraft  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ , welche unter Berücksichtigung der Ausdrücke 386 u. 387

$$\mathfrak{H} = \frac{q C b a^2}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots 389.$$

iſt, und auſerdem auf die laufende Einheit der wagrechten Projection des Gurtbogens

$$h = \frac{q u^2 a^2 b^2}{2 f_5 (a^2 + b^2)^2} \dots \dots \dots 390.$$

$f_5$  und  $u$  ſind veränderlich. Wird die Pfeilhöhe  $f_3$  der zum Streifen  $L'' M''$  gehörigen Seilcurve mit  $e$  bezeichnet, für welchen Streifen  $z_3$  den Werth  $a \cos \alpha$  annimmt, ſo ergibt ſich

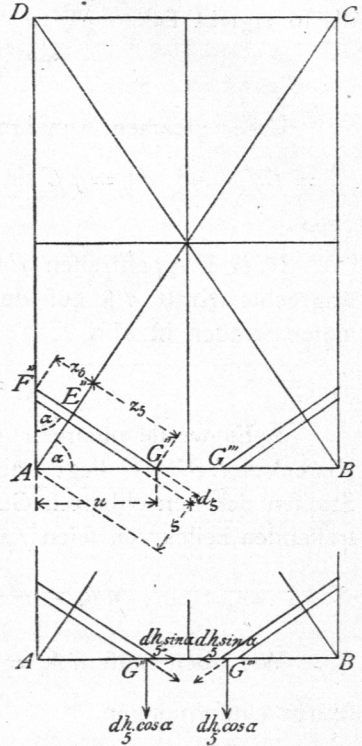
$$a^2 \cos^2 \alpha = C e, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{e} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2) e}, \quad \text{und es wird}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{q a^4 b^3}{e (a^2 + b^2)^2} \dots \dots \dots 391.$$

Die Kräfte  $\mathfrak{H}$  und  $h$  werden entweder durch gleiche, entgegengesetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder ſie müſſen von der Mauer aufgenommen werden, gegen welche ſich das Gewölbe ſetzt.

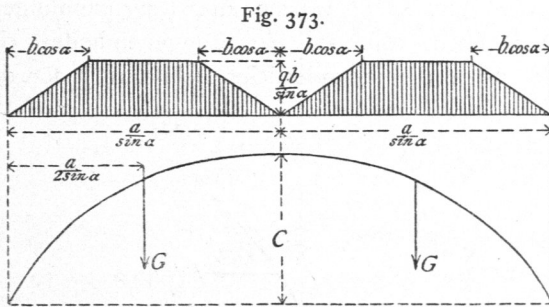
Die wagrechten, entſprechenden Kräfte gegen die Gurtbogen  $AD$ , bzw.  $BC$  ergeben ſich in ganz gleicher Weiſe.

Fig. 372.



δ) Die Belaftung des Gratbogens ist nach Vorstehendem nur lothrecht. Von  $S$  bis  $Q$  (Fig. 371) beträgt die Last auf die Längeneinheit  $\frac{q x}{\sin \alpha}$  (siehe Gleichung 385); in  $S$  ist sie Null; in  $Q$  ist sie  $\frac{q b}{\sin \alpha}$ ; auf dieser Strecke ist sie entsprechend den Ordinaten einer geraden Linie veränderlich. Auf der Strecke  $PA$  nimmt die Belaftung nach demselben Gesetze ab, nach welchem sie auf der Strecke  $SQ$  zugenommen hatte; für  $P$  ist sie  $\frac{q b}{\sin \alpha}$ , für  $A$  Null (vergl. Gleichung 388). Auf der Strecke  $QP$  hat sie überall den gleichen Werth  $\frac{q b}{\sin \alpha}$ .

Die Gefetzmäßigkeit der Belaftung ist durch die in Fig. 373 schraffierte Fläche dargestellt, in welcher an jeder Stelle die Ordinate die Größe der Last für die Längeneinheit des Gratbogens angiebt. Ist jetzt die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich  $c$ , so ergibt sich als Horizontalschub im Bogen



$$H = \frac{1}{c} G \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Es ist

$$G = \frac{q b}{\sin \alpha} \left( \frac{a}{\sin \alpha} - b \cos \alpha \right) = q a b . . . . . 392.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung für  $H$  eingeführt, so erhält man als Seitenkräfte  $H$  und  $V$  der auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = q a b ; . . . . . 393.$$

für das Kreuzgewölbe über quadratischem Raume:

$$H = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = q a^2 . . . . . 394.$$

Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte sind also genau gleich groß, mögen die Lagerfugen den Längsaxen der Kappen parallel laufen oder im Grundriss senkrecht zu den Graten angeordnet sein.

Man nehme  $H$  im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratbogens wirkend an.

### b) Kuppelgewölbe.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Untersuchungen sollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, daß die Belaftung eine ruhende und über die einzelnen zwischen den Parallelkreisen liegenden Ringe so vertheilt sei, daß ein jeder Ring entweder voll belaftet oder ganz unbelaftet ist. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; es werden demnach die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben sich



dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande sind, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

282.  
Allgemeine  
Gleichgewichts-  
bedingungen.

Es soll der Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel der Kuppel (Fig. 374) gelegt und die lothrechte Axe als  $Y$ -Axe, eine im Scheitel  $S$  senkrecht zu ersterer errichtete Axe als  $X$ -Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen  $MNO P$  (Fig. 375), welches oben und unten durch Parallelkreise, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt ist, wird auf seinen Gleichgewichtszustand untersucht. Das Theilchen  $MNO P$  ist in Fig. 375a in der Ansicht, in Fig. 375b im Grundriss, daneben im abgewickelten Zustande dargestellt. Auf  $MN$  wirkt für die Längeneinheit die Tangentialspannung  $T$ , und da  $MN$  (vergl. den Grundriss in Fig. 375b)  $x d\omega$  Längeneinheiten enthält, so wirkt auf  $MN$  die Kraft  $T x d\omega$ . Auf  $OP$  wirkt  $(T + dT)(x + dx) d\omega$ ; auf  $MP$  und  $NO$  wirken die Ringspannungen, welche für die Längeneinheit gleich  $R$  seien, also auf  $ds$  Längeneinheiten die GröÙe  $R ds$  haben. Außerdem wirkt noch die veränderliche Belastung  $p$  für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf  $MNO P$  die Last  $p ds \cdot x d\omega$ . Um sämtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermitteln wir die Mittelkraft der beiden Ringspannungen  $R ds$ ; sie ist

$$\mathfrak{S} = 2 R ds \sin \frac{d\omega}{2},$$

und, da wegen der Kleinheit von  $\frac{d\omega}{2}$

$$\text{nahezu } \sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2},$$

wird

$$\mathfrak{S} = R ds d\omega \dots \dots \dots 395.$$

Die Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für  $MNO P$  ergibt nun

$$0 = T x d\omega \cos \tau - (T + dT)(x + dx) d\omega \cos(\tau + d\tau) + R ds d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läßt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, so bleibt

$$0 = T x \sin \tau d\tau - dT x \cos \tau - T dx \cos \tau + R ds = -d(T x \cos \tau) + R ds; \text{ daher} \\ R ds = d(T x \cos \tau) \dots \dots \dots 396.$$

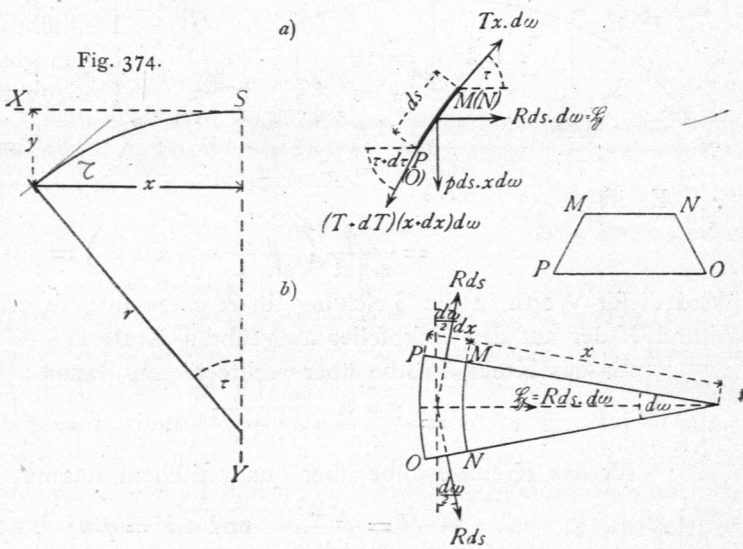
Ferner ist

$$0 = p ds x d\omega - T x d\omega \sin \tau + (T + dT)(x + dx) d\omega \sin(\tau + d\tau); \\ \sin(\tau + d\tau) = \sin \tau + \cos \tau d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlassen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man  $0 = p x ds + d(T x \sin \tau)$ ; daher

$$-p x ds = d(T x \sin \tau) \dots \dots \dots 397.$$

Fig. 375.



Die beiden Gleichungen 396 u. 397 geben Aufschluss über die Größe der gleichzeitigen Werthe von  $T$  und  $R$ , welche irgend welchen Belastungen und Gleichgewichtsflächen entsprechen.

Die erzeugende Linie ist bei der Kugelhuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von  $T$  und  $R$  werden also erhalten, wenn in die Gleichungen 396 u. 397 für  $x$  und  $ds$  die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreise entsprechen. Nach Fig. 374 ist  $x = r \sin \tau$  und  $ds = r d\tau$ ; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, dass  $p$  für die ganze Kuppel constant ist,

283.  
Kugelförmige  
Kuppel.

$$-p r \sin \tau \cdot r d\tau = d(T r \sin \tau \sin \tau) \text{ und } \int_0^\tau d(T r \sin^2 \tau) = -p r^2 \int_0^\tau \sin \tau d\tau.$$

Als untere Grenze ist der Werth von  $\tau$  und  $T$  einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entspricht; hier ist dieser Endpunkt  $S$ , und es wird  $\tau_0 = 0$ ; demnach ist

$$T r \sin^2 \tau = +p r^2 (\cos \tau)^2 = -p r^2 (1 - \cos \tau),$$

$$T = -\frac{p r (1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = -\frac{p r (1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = -\frac{p r}{1 + \cos \tau} \dots 398.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 396 für  $R$  eingesetzt, so erhält man

$$R ds = R r d\tau = d\left(-\frac{p r}{1 + \cos \tau} r \sin \tau \cos \tau\right) = -p r^2 d\frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau},$$

$$R = -p r \frac{\cos 2\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \dots 399.$$

Die Werthe der Gleichungen 398 u. 399 gelten für oben geschlossene Kugelhuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für  $\tau = 0$  erhalten. Für letzteren Werth ist

$$T_0 = -\frac{p r}{2} \text{ und } R_0 = -\frac{p r}{2}, \dots 400.$$

d. h. die Meridianspannungen und Ringspannungen sind für die Längeneinheit im Scheitel gleich groß; es findet also daselbst nach allen Richtungen ein gleicher Druck  $\frac{p r}{2}$  für die Längeneinheit statt.

Für die Halbkugelhuppel ist am Aequator  $\tau = \frac{\pi}{2}$ , daher

$$T_{\frac{\pi}{2}} = -p r \text{ und } R_{\frac{\pi}{2}} = +p r \dots 401.$$

284.  
Halbkugel-  
kuppel.

Die Meridianspannung nimmt also vom Scheitel nach dem Aequator von  $\frac{p r}{2}$  bis auf  $p r$  zu, bleibt aber stets Druck, da  $1 + \cos \tau$  nie negativ werden kann. Am Aequator ist  $T$  lothrecht gerichtet, da  $T$  gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller  $T_{\frac{\pi}{2}}$  ist gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die  $T_{\frac{\pi}{2}}$  die Auflagerdrücke darstellen. Es ist  $\Sigma\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) = p r \cdot 2 r \pi = 2 p r^2 \pi$ , und das ganze Kuppelgewicht ist gleich  $\frac{4 r^2 \pi}{2} p = 2 r^2 p \pi$ . Die Ringspannung  $R$

geht vom Druck  $\frac{p r}{2}$  im Scheitel zum Zug  $p r$  am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu bestimmenden Winkel durch Null. Ist dieser Winkel  $\tau_1$ , so ist  $0 = p r \frac{\cos 2 \tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$ , woraus sich ergibt

$$\cos \tau_1 = 0,618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^\circ 50' \quad \dots \dots \dots 402.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel  $\tau$  kleiner als  $\tau_1$  sind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel größer sind als  $\tau_1$ , findet Zug statt. Nimmt man auf die Zugfestigkeit des Mörtels keine Rücksicht, so können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne solchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht stattfinden; es ist also ohne Hilfsconstruction das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconstructions sind entweder umgelegte eiserne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leistet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte  $R$ ; auf dieselbe wirken sonach nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte  $R$  in entgegengesetztem Sinne; dieselben sind bei Berechnung der Hintermauerung zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Bogenstück  $s t$  (Fig. 376), welches zum Winkel  $d \omega$  gehört, so ist die Mittelkraft der beiden  $R$  die nach außen gerichtete

Kraft  $h$  gleich  $2 R \sin \frac{d \omega}{2} = R d \omega$ .

Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = - \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \quad \dots \dots \dots 403.$$

ein; alsdann wird

$$R = \mu p r \quad \text{und} \quad h = \mu p r d \omega \quad \dots \dots \dots 404.$$

Für die Längeneinheit des  $x d \omega$  langen Bogens ist also die nach außen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringspannungen

$$\mathfrak{h} = \frac{\mu p r d \omega}{x d \omega} = \frac{\mu p r}{x} \quad \dots \dots \dots 405.$$

Aus Vorstehendem folgt noch, daß bei der Halbkugelpuppel die Hintermauerung wenigstens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muß, welche dem Winkel  $\tau_1 = 51^\circ 50'$  entspricht.

Außer den Kräften  $\mathfrak{h}$  (nach Gleichung 405) wirken auf die Widerlager noch die Meridianspannungen  $T$ , welche dem größten zur Kuppel gehörigen Winkel  $\tau$  entsprechen.  $T$  hat eine wagrechte Seitenkraft  $T \cos \tau$  und eine lothrechte Seitenkraft  $T \sin \tau$ . Die erstere wird durch die Widerlager oder durch einen eisernen Ring aufgehoben. Die Spannung in diesem Ringe ergibt sich dann wie folgt. Auf den Bogen  $s t$  (Fig. 377) von der Länge  $x d \omega$  wirkt nach außen  $T \cos \tau x d \omega$ , und es soll diese Kraft durch die beiden Ringspannungen  $W$  aufgehoben werden; es ist demnach

$$T \cos \tau x d \omega = 2 W \sin \frac{d \omega}{2} = W d \omega;$$

$$W = T x \cos \tau = \frac{p r r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{p r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \quad 406.$$

Die vorstehend entwickelten Werthe für  $T$  und  $R$  entsprechen der Gleichgewichtsfläche. Man kann diese Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin sind aber größere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Seilcurven entsprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zusammenfallen.

Fig. 376.

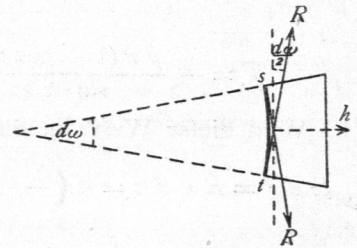
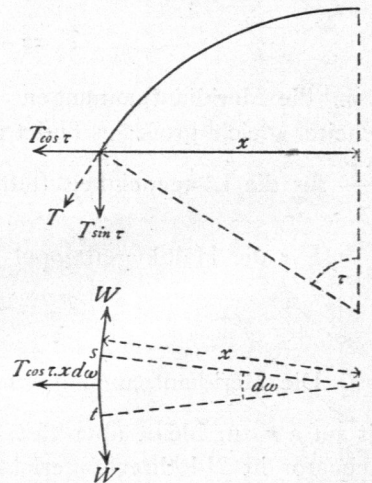


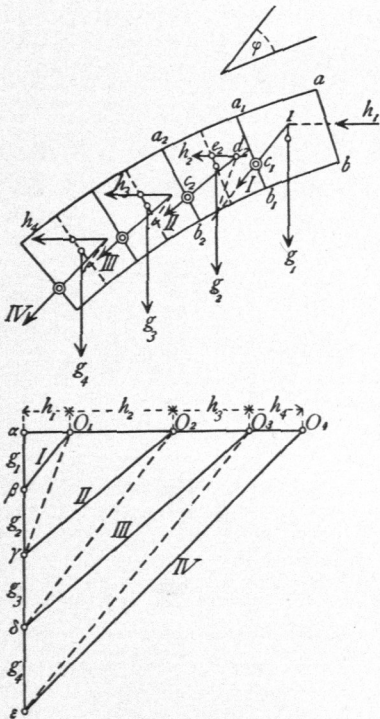
Fig. 377.



Die graphische Ermittlung der Werthe von  $T$  und  $R$  an den verschiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbarten gezeigt ist, indem man bestimmte Bedingungen für die Stützlinie vorschreibt. Man untersucht zu diesem Zwecke den einem Centriwinkel  $\alpha$  entsprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bezw. vom Laternenring aus.

Stellt man die Bedingung, dass die Stützlinie im inneren Drittel verbleiben soll und kein Gleiten stattfindet, so erhält man eine solche, indem man vom obersten Kuppelringe ausgeht, folgendermaßen (Fig. 378). Die Belastung des obersten, zu dem angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles sei  $g_1 (= \alpha \beta)$ ; außer  $g_1$  wirken auf diesen Theil noch die beiden Spannungen  $R$   $ds$ , welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Diese beiden  $R$   $ds$  werden genau, wie in Fig. 375, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derselben Ebene wie  $g_1$  liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel  $\alpha$  gehörigen Kuppeltheil halbirt. Diese Mittelkraft ist in Fig. 378 mit  $h_1$  bezeichnet;  $h_1$  ist vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Größe und Lage von  $h_1$  sind unbekannt. Die Mittelkraft von  $h_1$  und  $g_1$  soll die Fuge  $a_1 b_1$  im inneren Drittel schneiden und mit der Senkrechten zu dieser Fuge keinen größeren Winkel, als den Reibungswinkel  $\varphi$  einschließen. Man ziehe nun durch  $c_1$ , den untersten Punkt des inneren Drittels der Fuge  $a_1 b_1$ , eine Linie, die den Winkel  $\varphi$  mit der Senkrechten zur Fuge einschließt; diese Linie schneide die Richtungslinie von  $g_1$  in  $I$ ; alsdann hat die durch  $I$  gelegte Kraft  $h_1$  den kleinsten Werth, welcher obigen Bedingungen entspricht. Rückt nämlich  $h_1$  nach abwärts unter Beibehaltung von  $c_1$ , so würde  $h_1$  (da ja  $g_1$  denselben Werth behält) größer werden; rückt gleichzeitig  $c_1$  hinauf, so würde  $h_1$  erst recht größer. Rückt  $h_1$  und  $c_1$  gleich viel hinauf, so bliebe  $h_1$  unverändert, behielte also den kleinsten Werth. Alles dies ergibt sich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreieckes für  $g_1$ ,  $h_1$  und Kraft  $I$ ;  $h_1$  kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch  $c_1$  nach oben rückt, weil sonst der Winkel von  $I$  mit der Senkrechten zur Fuge größer als  $\varphi$  wird. — Wenn der

Fig. 378.



großer als  $\varphi$ , so wäre  $h_2$  so weit hinauszurücken und zu vergrößern, bis der Winkel höchstens gleich  $\varphi$  ist. In dieser Weise erhält man durch Weiterconstruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmen dürfte.

Schnittpunkt von  $h_1$  mit der Mittellinie des ersten Steines oberhalb des inneren Drittels liege, so wären an dieser Stelle auch die Ringspannungen nicht mehr im inneren Drittel; da auch diese im Drittel liegen sollen, so würde man  $h_1$  bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den sich dann ergebenden Schnittpunkt von  $h_1$  und  $g_1$  mit  $c_1$  zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft  $I$  gegen die Fugenfugenkrechte kleiner als  $\varphi$  würde.

Auf den zweiten Stein wirken nun  $I$  und  $g_2$ ; außerdem die Mittelkraft  $h_2$  der Spannungen  $R$  im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von  $I$  und  $g_2$  ist aus dem Kraftpolygon zu entnehmen ( $= O_1 \gamma$ ); sie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien dieser beiden Kräfte. Die Resultirende dieser Kraft und der Kraft  $h_2$  soll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben so soll auch der Schnittpunkt von  $h_2$  mit der punktirten Halbierungslinie dieses Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinste Werth von  $h_2$ , welcher diesen Bedingungen entspricht, ist derjenige, bei welchem  $h_2$  durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinschwerlinie, d. h. durch  $e_2$ , geht, die Gesamtmittelkraft von  $I$ ,  $g_2$  und  $h_2$  aber die Fuge  $a_2 b_2$  im unteren Grenzpunkte  $e_2$  des inneren Drittels schneidet. Die Verbindungslinie von  $c_2$  mit  $d_2$ , dem Schnittpunkte der Mittelkraft von  $I$  und  $g_2$  mit  $h_2$  ergibt die Richtung der Gesamtmittelkraft  $II$ ; die Größe erhält man durch Ziehen einer Linie  $\gamma O_2$  durch  $\gamma$  parallel zur Richtungslinie von  $II$ . Der Winkel, welchen  $II$  mit der Fugenfugenkrechten zu  $a_2 b_2$  einschließt, ist kleiner als  $\varphi$ , also die Construction brauchbar. Wäre der Winkel