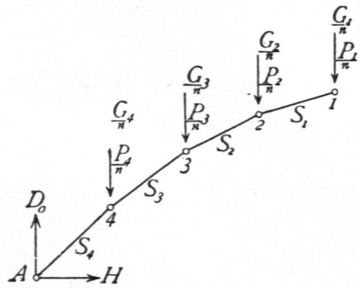
welchen ſich ſämmtliche Sparrenfüſse ſetzen, den ſog. Mauerring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den unterſten Sparrenſtäben (S_4 in Fig. 315) vorhandenen Spannungen aufgehoben, ſo daſs als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entſprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belaſtungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belaſtet ſind. Wenn der Grundriſs der Kuppel ein regelmäſsiges n-Eck iſt und demnach n Sparren vorhanden ſind, ſo kann angenommen werden, daſs bei den erwähnten Belaſtungen alle Sparren gleiche Laſten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der erſten Ringzone mit enthalten ſei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen ſeien bezw. (Fig. 315) G_1, G_2, G_3, G_4 . . ., die zufälligen Laſten der ganzen Ringzonen P_1, P_2, P_3, P_4 . . .; alsdann iſt, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belaſtung der ganzen Dachfläche

Fig. 315.



$$n\,D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots = \Sigma\,(G) + \Sigma\,(P).$$

Wenn etwa nur die drei oberſten Zonen voll belaſtet ſind, ſo wird

$$n\,D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3\,.$$

ſein. Auf dieſe Art ſind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

2) Stabſpannungen.

241. Berechnung der Stabſpannungen.

α) Ungünſtigſte Beanſpruchung der einzelnen Stäbe. Die genaue Unterſuchung der für jeden Stab ungünſtigſten Belaſtungsweiſe und die Berechnung der dabei entſtehenden Beanſpruchungen iſt ſehr ſchwierig, da die elaſtiſchen Verſchiebungen der einzelnen Punkte in Frage kommen.

Es ſollen deſshalb, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

a) die Sparren erhalten den Maximaldruck, wenn die ganze Kuppel voll belaſtet iſt;

b) ein Ring erhält ſeinen Maximalzug, wenn der innerhalb deſſelben befindliche Kuppeltheil voll belaſtet, der Ring ſelbſt mit ſeiner Zone aber unbelaſtet iſt; bei der entgegengeſetzten Belaſtungsart treten die entgegengeſetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwiſchen zwei Sparren erhalten ihren gröſsten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmeſſers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belaſtet iſt.

β) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belaſtungsarten, nämlich die Belaſtung der ganzen Kuppel durch zufällige Laſt und die Belaſtung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belaſtungsart ergiebt die Minimalſpannungen. Die Maximalſpannungen der Sparren ſind gleich den Summen der bei den beiden angeführten Belaſtungsarten ſich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belaſtungsarten unterſcheiden ſich nur durch die Gröſse der Laſten.

Was zunächſt die zufällige Belaſtung betrifft, ſo ſind im m-ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 316 u. 317) folgende Kräfte

Fig. 316.

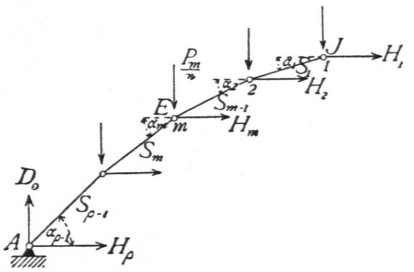
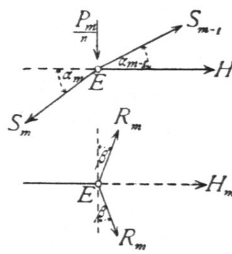


Fig. 317.



im Gleichgewichte: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m, die Laft $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringfpannungen R_m. Letztere find einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m-ten Ringes die Mittelkraft H_m. Die algebraifche Summe der lothrechten Kräfte für den Punkt E ift gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den erften Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für J, ift $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3},$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 327.$$

Eben fo ergiebt fich die Spannung in den Sparren für eine Belaftung durch das Eigengewicht zu

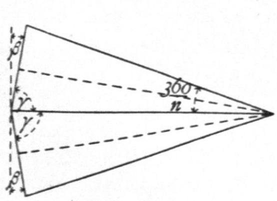
$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; \quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \ldots S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \quad . \quad 328.$$

γ) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraifche Summe der wagrechten Kräfte im Punkte E gleich Null ift, lautet (Fig. 317):

$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m$, woraus $H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}$.

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringfpannungen R_m ift, fo ergiebt fich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun ift (Fig. 318) $\beta = \frac{360}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

Fig. 318.



fonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in diefe Gleichung der für H_m gefundene Werth eingefetzt, fo folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 329.$$

Wir bestimmen nach Gleichung 329 die Ringspannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringspannung durch zufällige Belastung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\dfrac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \dfrac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \dfrac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \operatorname{cotg} \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 330.$$

Man erhält

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{für den Laternenring } (m = 1): & R_1^g = -\dfrac{G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}}; \\
\text{für den Ring 2 } (m = 2): & R_2^g = -\dfrac{(G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2 - G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}}; \\
\text{für den Ring 3 } (m = 3): & R_3^g = -\dfrac{(G_1 + G_2 + G_3) \operatorname{cotg} \alpha_3 - (G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}},
\end{array}\right\} \quad 331.$$

etc.

Für den Mauerring ist S_m, also das erste Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ist,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 332.$$

Um die durch zufällige Belastung erzeugten Ringspannungen zu ermitteln, setzen wir in die Gleichung 329 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es soll $\mathfrak{S}_1^m (P)$ die zwischen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Lasten bezeichnen, wobei $\mathfrak{S}$ ausdrückt, dass nicht alle Knotenpunkte $1 - m$ belastet zu sein brauchen; im Gegensatz dazu soll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dass alle Knotenpunkte von 1 bis m belastet sind. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belastung aus Gleichung 329

$$R_m = -\frac{\mathfrak{S}_1^m (P) \operatorname{cotg} \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1} (P) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 333.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Feststellung der für die einzelnen Ringe ungünstigsten Belastungen (unter Voraussetzung der Belastung ganzer Zonen) und die Ermittelung der grössten Druck- und Zugspannungen in den Ringen. Der grösste Druck wird stattfinden, wenn im Zähler das erste Glied möglichst gross, das zweite Glied möglichst klein ist. Jede Belastung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ hat sowohl ein Wachsen des ersten, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\operatorname{cotg} \alpha_{m-1}$ stets grösser ist, als $\operatorname{cotg} \alpha_m$, so wächst das zweite Glied mehr, als das erste, d. h. jede Belastung des Knotenpunktes 1 bis $(m - 1)$ verringert den Druck, vergröfsert alfo den Zug. Die Belaftung des Knotenpunktes m vergröfsert nur das erfte Glied, alfo den Druck. Die Belaftung der aufserhalb des m-ten Ringes liegenden Ringe ift nach der Gleichung ohne Einflufs auf die Spannung im m-ten Ringe. Daraus folgt, dafs in den Stäben eines Ringes (des m-ten) der gröfste Druck ftattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m-1)$ unbelaftet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belaftet find. Da die Belaftung der äufseren Ringe ohne Einflufs ift, fo kann man fagen: Gröfster Druck findet ftatt, wenn der innere Kuppeltheil unbelaftet, der äufsere Kuppeltheil, einfchliefslich des betrachteten Ringes, belaftet ift. Daraus folgt dann weiter, dafs gröfster Zug in den Stäben des m-ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausfchliefslich der Zone, zu welcher der m-te Ring gehört, belaftet ift. Die hier gefundenen Ergebniffe ftimmen demnach mit den in Art. 241 (S. 226) gemachten Annahmen über die ungünftigften Belaftungen überein. Man erhält

$$R_m^{p\ min} = -\frac{P_m \operatorname{cotg} \alpha_m}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{p\ max} = \frac{\sum\limits_1^{m-1} (P)(\operatorname{cotg}\alpha_{m-1} - \operatorname{cotg}\alpha_m)}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 334.$$

Es ergiebt fich

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für den Laternenring } (m=1)\text{:}\quad R_1^{p\,min} = -\dfrac{P_1 \operatorname{cotg}\alpha_1}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{p\,max} = 0\,; \\[2ex]
\text{für } m=2\text{:}\quad R_2^{p\,min} = -\dfrac{P_2 \operatorname{cotg}\alpha_2}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{p\,max} = \dfrac{P_1(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_2)}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}}\,; \\[2ex]
\text{für } m=3\text{:}\quad R_3^{p\,min} = -\dfrac{P_3 \operatorname{cotg}\alpha_3}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{p\,max} = \dfrac{(P_1+P_2)(\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\alpha_3)}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}}\,,
\end{array}\right\} \quad 335.$$

etc.

$$\text{für den Mauerring: } R_\rho^{p\,min} = 0 \quad \text{und} \quad R_\rho^{p\,max} = \frac{(P_1 + P_2 + \ldots + P_{\rho-1}) \operatorname{cotg}\alpha_{\rho-1}}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad 336.$$

δ) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmeffer, welcher für die ungünftigfte Diagonalenbelaftung die belaftete und unbelaftete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belafteter und ein unbelafteter Sparren. Nehmen wir nun an, dafs die Spannung im erfteren fo grofs ift, als wenn die ganze Kuppel voll belaftet wäre, im zweiten fo grofs, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belaftet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anfchliefsende Diagonale ftark genug, um den ganzen Spannungsunterfchied zu übertragen, fo wird diefelbe jedenfalls zu ftark, ift alfo als ausreichend zu betrachten.

Im oberften Sparrenftück find die gröfsten und kleinften Druckfpannungen bezw.

$$S_{1\,max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin\alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1\,min} = -\frac{G_1}{n\sin\alpha_1}\,.$$

Die Differenz beider Spannungen ift $\Delta_1 = -\dfrac{P_1}{n\sin\alpha_1}$. Diefelbe foll durch die Diagonale übertragen werden; es ift alfo nahezu, wenn der Winkel zwifchen Diagonale und belaftetem Sparren γ_1 genannt wird, $Y_1 \cos\gamma_1 = -\Delta$, daher

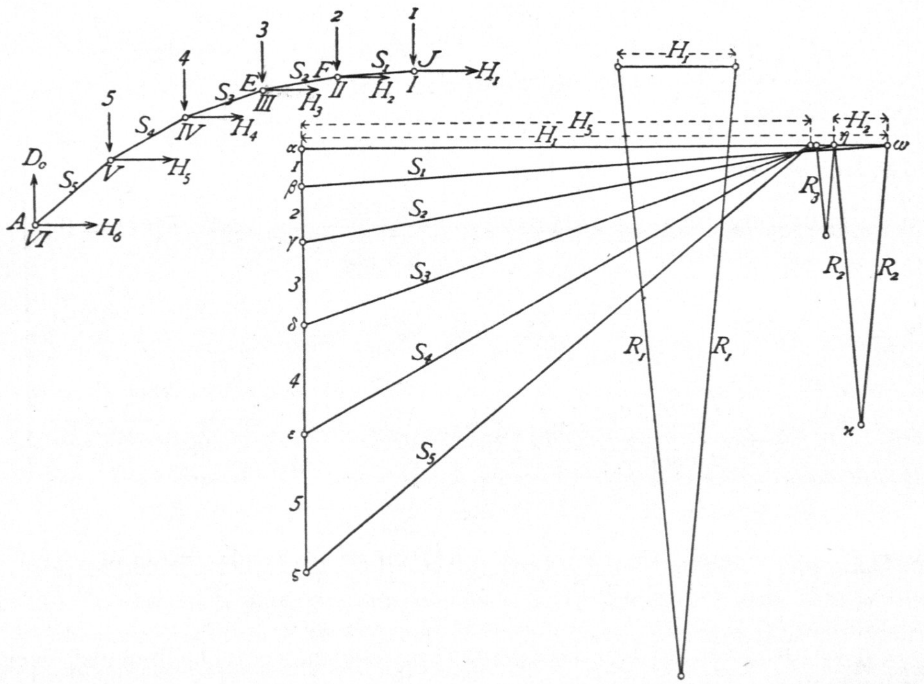
$$\left.\begin{array}{ll} Y_1 = \dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1 \cos \gamma_1}, & Y_2 = \dfrac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2 \cos \gamma_2}. \\ Y_3 = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3 \cos \gamma_3}, & Y_4 = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4 \cos \gamma_4}. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 337.$$

242. Graphifche Ermittelung der Stabfpannungen.

Auf graphifchem Wege laffen fich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weife ermitteln.

α) Sparrenfpannungen durch das Eigengewicht. Die Laften in den einzelnen Knotenpunkten feien *1, 2, 3, 4, 5* (Fig. 319); man trage diefelben zu einem Kraftpolygon $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ an einander. Im Knotenpunkte *J* wirkt *1*, die Sparrenfpannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringfpannungen R_1. Die Zerlegung der Kraft *1* nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergiebt $\beta\,\omega = S_1$, $\omega\,\alpha = H_1$. Am Knotenpunkt *F* wirken nun *2*, S_1, S_2 und H_2; bekannt find jetzt *2* und S_1; man erhält $\gamma\,\eta = S_2$, $\eta\,\omega = H_2$. Eben fo ergeben fich die übrigen Sparrenfpannungen.

Fig. 319.



β) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belaftung. Die Conftruction ift in gleicher Weife, wie unter α vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Laften genau wie oben aufgetragen und behandelt find.

γ) Ringfpannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für diefe Belaftung gefundenen Werthe von H ergiebt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g ...., wie in Fig. 319 gezeichnet. Die Conftruction empfiehlt fich für die vorliegende Ermittelung nicht fehr, weil fie der fpitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Refultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichenfläche fallen. So ift H_1 in Fig. 319 im fünffach verkleinerten Mafsftabe aufgetragen, um R_1 zu conftruiren.

δ) Ringfpannungen durch zufällige Belaftung. Maximalfpannung im Ringe *II* findet ftatt, wenn nur die Ringzone *I* belaftet ift. Es fei (Fig. 320*a*) $a\,b = \dfrac{P_1}{n}$; alsdann wird $b\,f = S_1$, $f\,a = H_1$.

Im Knotenpunkt *F* (Fig. 321) find S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräftedreieck für Punkt *F* wird $b\,g\,f$. Darin ift $H_2 = g\,f$ und $g\,i = i\,f = R_2^{p}\,max$.

Fig. 320.

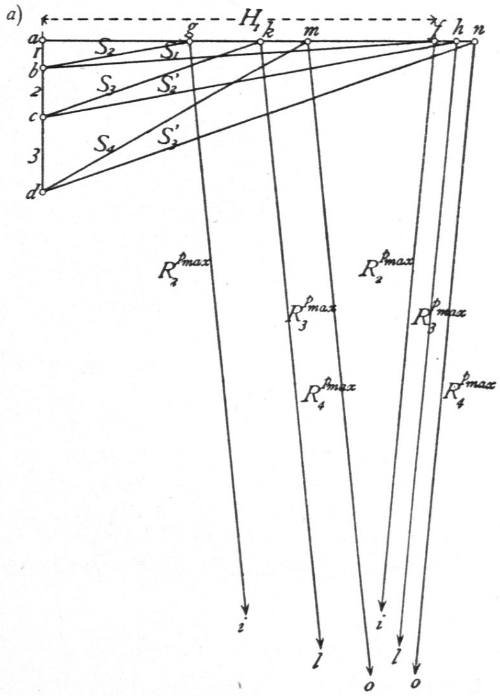
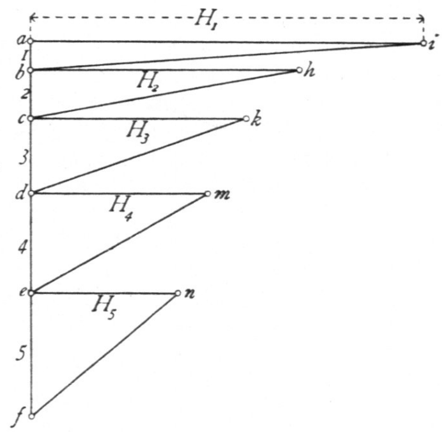
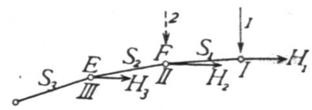



Fig. 321.



Im Ringe *III* ist Maximalspannung, wenn die Zonen zu den Ringen *I* und *II* belastet sind; alsdann wirken in *F* die Kräfte $S_1 = f\,b$, $2 = b\,c = \frac{P_2}{n}$, S_2' und H_2'. Man erhält leicht $H_2' = h\,f$, $S_2' = c\,h$. In *E* sind dann S_2', S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = k\,h$, woraus $R_3^{p}\,max = k\,l = l\,h$. Eben so wird $R_4^{p}\,max = o\,n = m\,o$ etc.

Minimalspannung im Ringe *I* findet bei voller Kuppelbelastung statt; alsdann wirkt in *J* die Kraft $1 = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 320*b*) $a\,b = 1$ ist, $i\,a = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringspannungen ist dann in gleicher Weise wie oben vorzunehmen. Für Ring *II* findet Minimalspannung bei einer Belastung der Zonen *II*, *III*, *IV* statt; *I* ist unbelastet; mithin ist S_1 alsdann gleich Null (siehe Gleichung 327). Ist $b\,c = \frac{P_2}{n} = 2$, so wird $h\,b = H_2$. Eben so wird weiter für die Minimalbelastungen der einzelnen Ringe $H_3 = k\,c$, $H_4 = m\,d$, $H_5 = n\,e$.

ε) Die Construction der Spannungen in den Diagonalen ist so einfach, dass dieselbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ist in den meisten Fällen eine Parabel (Fig. 322) der 243. Parabel-Kuppel.
Gleichung $y = \frac{h\,x^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel *C* liegt, die halbe Spannnweite gleich *r*, die Pfeilhöhe gleich *h* gesetzt ist, oder eine cubische Parabel der Gleichung $y = \frac{h\,x^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, dass in den Zwischenringen bei gleichmässig vertheilter Belastung die Spannung Null herrscht und dass

Fig. 322.