

5. Kapitel.

Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

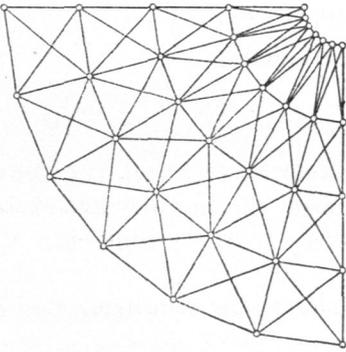
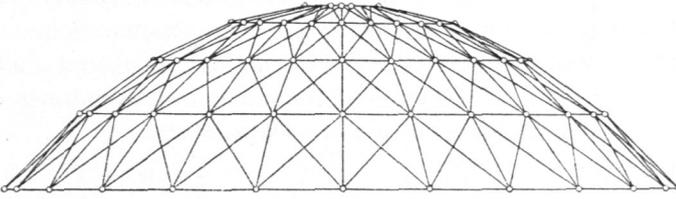
a) Kuppeldächer.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; sie ist also eine Umdrehungsfläche.

^{238.}
Allgemeines.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial gestellter

Fig. 314.



Binder construirte, sind bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit bestem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern sämtliche Constructionstheile in die Kuppelfläche verlegt. Eine

Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet und in verschiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere sind den Parallelkreisen der Kuppelfläche eingeschriebene Vielecke. In den so entstehenden Vierecken sind alsdann, wegen der ungleichmäßigen Belastung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich ist eine Belastung der Kuppelmitte durch eine fog. Laterne vorhanden. Die ganze Construction bildet demnach ein der Kuppelfläche

eingeschriebenes Polyeder; in Fig. 314 sind Ansicht und Grundriss derselben dargestellt.

1) Belastungen und Auflagerdrücke.

Die hier zu betrachtenden Kuppeln sind so flach, daß der Winddruck nur von geringer Bedeutung ist; derselbe soll deshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel constant angenommen werden. Es genügt ferner, nur die lothrechte Seitenkraft v (vergl. Art. 28, S. 22) des Winddruckes zu berücksichtigen; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachlässigt werden. Endlich ist es empfehlenswerth, alle Belastungen auf das Quadratmeter der Grundfläche, also der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen.

^{239.}
Belastungen.

Auch hier greifen die Lasten in den Knotenpunkten der Construction an; es sind demnach die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit diesen die Belastungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, so würden die einzelnen Sparren schiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von diesen erleiden; durch einen Ring, gegen

^{240.}
Auflagerdrücke.

welchen sich sämtliche Sparrenfüße setzen, den fog. Mauerring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den untersten Sparrenstäben (S_4 in Fig. 315) vorhandenen Spannungen aufgehoben, so daß als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entsprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belastungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belastet sind. Wenn der Grundriß der Kuppel ein regelmäßiges n -Eck ist und demnach n Sparren

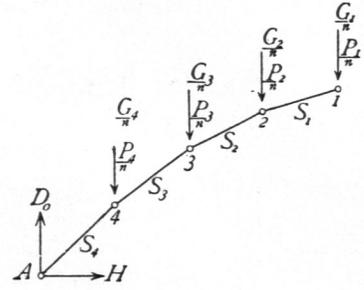


Fig. 315.

vorhanden sind, so kann angenommen werden, daß bei den erwähnten Belastungen alle Sparren gleiche Lasten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der ersten Ringzone mit enthalten sei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen seien bezw. (Fig. 315) $G_1, G_2, G_3, G_4 \dots$, die zufälligen Lasten der ganzen Ringzonen $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$; alsdann ist, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belastung der ganzen Dachfläche

$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots = \Sigma(G) + \Sigma(P).$$

Wenn etwa nur die drei obersten Zonen voll belastet sind, so wird

$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3.$$

fein. Auf diese Art sind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

2) Stabspannungen.

241.
Berechnung
der Stab-
spannungen.

α) Ungünstigste Beanspruchung der einzelnen Stäbe. Die genaue Untersuchung der für jeden Stab ungünstigsten Belastungsweise und die Berechnung der dabei entstehenden Beanspruchungen ist sehr schwierig, da die elastischen Verschiebungen der einzelnen Punkte in Frage kommen.

Es sollen deshalb, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

a) die Sparren erhalten den Maximaldruck, wenn die ganze Kuppel voll belastet ist;

b) ein Ring erhält seinen Maximalzug, wenn der innerhalb desselben befindliche Kuppeltheil voll belastet, der Ring selbst mit seiner Zone aber unbelastet ist; bei der entgegengesetzten Belastungsart treten die entgegengesetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwischen zwei Sparren erhalten ihren größten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmessers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet ist.

β) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belastungsarten, nämlich die Belastung der ganzen Kuppel durch zufällige Last und die Belastung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belastungsart ergibt die Minimalspannungen. Die Maximalspannungen der Sparren sind gleich den Summen der bei den beiden angeführten Belastungsarten sich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belastungsarten unterscheiden sich nur durch die Größe der Lasten.

Was zunächst die zufällige Belastung betrifft, so sind im m -ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 316 u. 317) folgende Kräfte

Fig. 316.

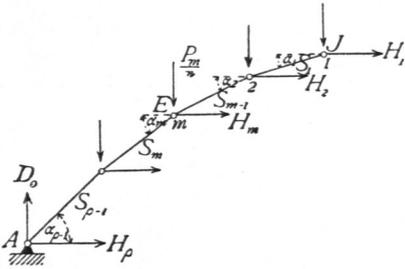
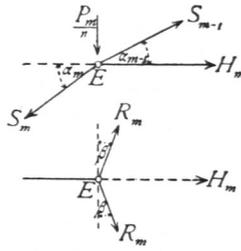


Fig. 317.



im Gleichwichte: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m , die Laft $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringspannungen R_m . Letztere sind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m -ten

Ringes die Mittelkraft H_m . Die algebraische Summe der den Punkt E ist gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den ersten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für \mathcal{F} , ist $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3},$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \dots \dots \dots 327.$$

Eben so ergibt sich die Spannung in den Sparren für eine Belaftung durch das Eigengewicht zu

$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; \quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \quad \dots \quad S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \dots \dots \dots 328.$$

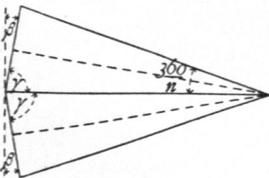
γ) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraische Summe der wagrechten Kräfte im Punkte E gleich Null ist, lautet (Fig. 317):

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}.$$

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringspannungen R_m ist, so ergibt sich

$$H_m = 2 R_m \sin \beta, \text{ woraus } R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}. \text{ Nun ist (Fig. 318) } \beta = \frac{360}{2n} = \frac{\pi}{n},$$

Fig. 318.



fonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in diese Gleichung der

für H_m gefundene Werth eingesetzt, so folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 329.$$

Wir bestimmen nach Gleichung 329 die Ringspannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringspannung durch zufällige Belaftung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \cotg \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \cotg \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 330.$$

Man erhält

für den Laternenring ($m = 1$):	$R_1^g = -\frac{G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$	}	331.
für den Ring 2 ($m = 2$):	$R_2^g = -\frac{(G_1 + G_2) \cotg \alpha_2 - G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$		
für den Ring 3 ($m = 3$):	$R_3^g = -\frac{(G_1 + G_2 + G_3) \cotg \alpha_3 - (G_1 + G_2) \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$		
	etc.		

Für den Mauerring ist S_m , also das erste Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ist,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 332.$$

Um die durch zufällige Belaftung erzeugten Ringspannungen zu ermitteln, setzen wir in die Gleichung 329 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es soll $\mathfrak{S}_1^m (P)$ die zwischen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Lasten bezeichnen, wobei \mathfrak{S} ausdrückt, dafs nicht alle Knotenpunkte 1 — m belaftet zu sein brauchen; im Gegenfatz dazu soll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dafs alle Knotenpunkte von 1 bis m belaftet sind. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belaftung aus Gleichung 329

$$R_m = -\frac{\mathfrak{S}_1^m (P) \cotg \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1} (P) \cotg \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 333.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Feststellung der für die einzelnen Ringe ungünstigsten Belaftungen (unter Voraussetzung der Belaftung ganzer Zonen) und die Ermittlung der grössten Druck- und Zugspannungen in den Ringen. Der grösste Druck wird stattfinden, wenn im Zähler das erste Glied möglichst gros, das zweite Glied möglichst klein ist. Jede Belaftung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ hat fowohl ein Wachsen des ersten, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\cotg \alpha_{m-1}$ stets grösser ist, als $\cotg \alpha_m$, so wächst das zweite Glied mehr, als das erste, d. h. jede Belaftung des Knotenpunktes 1 bis $(m - 1)$ verringert den Druck,

vergrößert also den Zug. Die Belastung des Knotenpunktes m vergrößert nur das erste Glied, also den Druck. Die Belastung der außerhalb des m -ten Ringes liegenden Ringe ist nach der Gleichung ohne Einfluss auf die Spannung im m -ten Ringe. Daraus folgt, dass in den Stäben eines Ringes (des m -ten) der größte Druck stattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ unbelastet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belastet sind. Da die Belastung der äußeren Ringe ohne Einfluss ist, so kann man sagen: Größter Druck findet statt, wenn der innere Kuppeltheil unbelastet, der äußere Kuppeltheil, einschließlich des betrachteten Ringes, belastet ist. Daraus folgt dann weiter, dass größter Zug in den Stäben des m -ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausschließlich der Zone, zu welcher der m -te Ring gehört, belastet ist. Die hier gefundenen Ergebnisse stimmen demnach mit den in Art. 241 (S. 226) gemachten Annahmen über die ungünstigsten Belastungen überein. Man erhält

$$R_m^{\phi \min} = -\frac{P_m \cotg \alpha_m}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{\phi \max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P) (\cotg \alpha_{m-1} - \cotg \alpha_m)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 334.$$

Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \text{für den Laternenring } (m = 1): \quad R_1^{\phi \min} &= -\frac{P_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{\phi \max} = 0; \\ \text{für } m = 2: \quad R_2^{\phi \min} &= -\frac{P_2 \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{\phi \max} = \frac{P_1 (\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha_2)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}, \\ \text{für } m = 3: \quad R_3^{\phi \min} &= -\frac{P_3 \cotg \alpha_3}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{\phi \max} = \frac{(P_1 + P_2) (\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_3)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} 335.$$

$$\text{für den Mauerring: } R_{\rho}^{\phi \min} = 0 \quad \text{und} \quad R_{\rho}^{\phi \max} = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad 336.$$

δ) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmesser, welcher für die ungünstigste Diagonalenbelastung die belastete und unbelastete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belasteter und ein unbelasteter Sparren. Nehmen wir nun an, dass die Spannung im ersteren so groß ist, als wenn die ganze Kuppel voll belastet wäre, im zweiten so groß, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anschließende Diagonale stark genug, um den ganzen Spannungsunterschied zu übertragen, so wird dieselbe jedenfalls zu stark, ist also als ausreichend zu betrachten.

Im obersten Sparrenstück sind die größten und kleinsten Druckspannungen bezw.

$$S_{1 \max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1 \min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen ist $\Delta_1 = -\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Dieselbe soll durch die Diagonale übertragen werden; es ist also nahezu, wenn der Winkel zwischen Diagonale und belastetem Sparren γ_1 genannt wird, $Y_1 \cos \gamma_1 = -\Delta$, daher

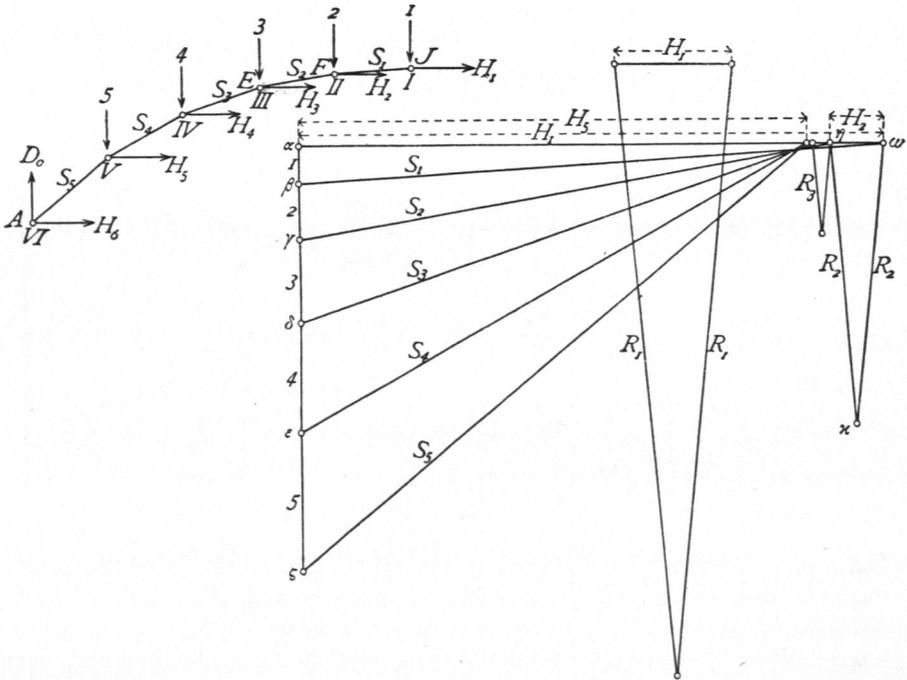
$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{P_1}{n \sin \alpha_1 \cos \gamma_1}, & Y_2 &= \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2 \cos \gamma_2} \\ Y_3 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3 \cos \gamma_3}, & Y_4 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4 \cos \gamma_4} \end{aligned} \right\} \dots \dots 337.$$

242.
Graphische
Ermittlung
der Stab-
spannungen.

Auf graphischem Wege lassen sich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weise ermitteln.

α) Sparrenspannungen durch das Eigengewicht. Die Lasten in den einzelnen Knotenpunkten seien 1, 2, 3, 4, 5 (Fig. 319); man trage dieselben zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta$ an einander. Im Knotenpunkte F wirkt 1 , die Sparrenspannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringspannungen R_1 . Die Zerlegung der Kraft 1 nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergibt $\beta \omega = S_1$, $\omega \alpha = H_1$. Am Knotenpunkt F wirken nun 2, S_1 , S_2 und H_2 ; bekannt sind jetzt 2 und S_1 ; man erhält $\gamma \eta = S_2$, $\eta \omega = H_2$. Eben so ergeben sich die übrigen Sparrenspannungen.

Fig. 319.



β) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belastung. Die Construction ist in gleicher Weise, wie unter α vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Lasten genau wie oben aufgetragen und behandelt sind.

γ) Ringspannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für diese Belastung gefundenen Werthe von H ergibt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g, \dots , wie in Fig. 319 gezeichnet. Die Construction empfiehlt sich für die vorliegende Ermittlung nicht sehr, weil sie der spitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Resultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichensfläche fallen. So ist H_1 in Fig. 319 im fünffach verkleinerten Maßstabe aufgetragen, um R_1 zu construiren.

δ) Ringspannungen durch zufällige Belastung. Maximalspannung im Ringe II findet statt, wenn nur die Ringzone I belastet ist. Es sei (Fig. 320a) $a b = \frac{P_1}{n}$; alsdann wird $b f = S_1$, $f a = H_1$.

Im Knotenpunkt F (Fig. 321) sind S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräfte-dreieck für Punkt F wird $b g f$. Darin ist $H_2 = g f$ und $g i = i f = R_2^g_{max}$.

Fig. 320.

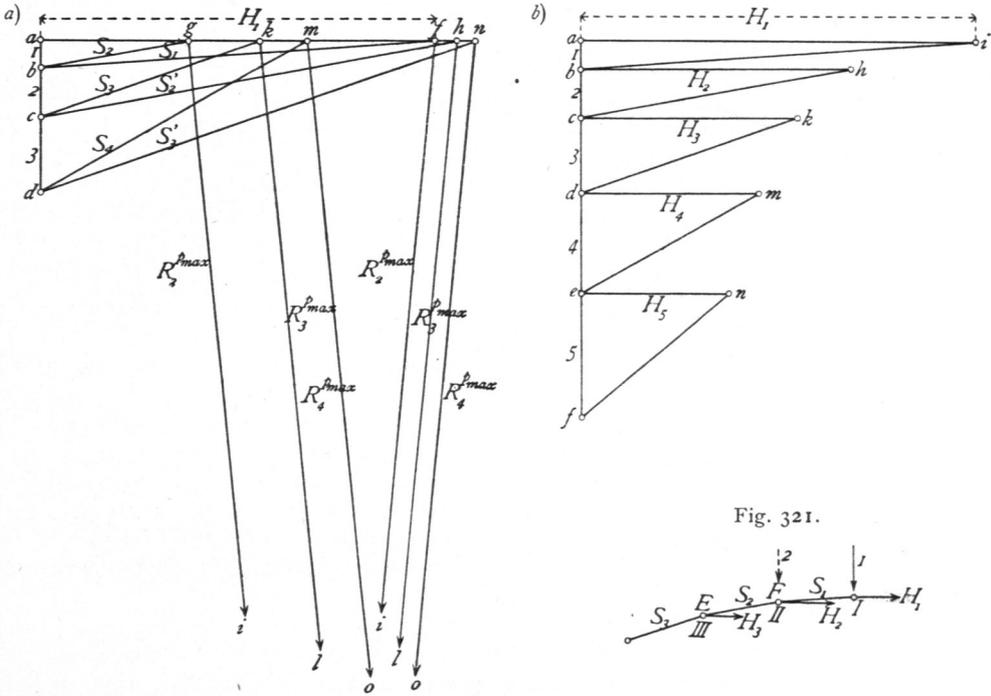
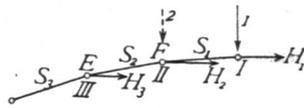


Fig. 321.



Im Ringe III ist Maximalspannung, wenn die Zonen zu den Ringen I und II belaftet sind; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb$, $z = bc = \frac{P_2}{n}$, S_2' und H_2' . Man erhält leicht $H_2' = hf$, $S_2' = ch$. In E findet dann S_2' , S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_3^P \max = kl = lh$. Eben so wird $R_4^P \max = on = mo$ etc.

Minimalspannung im Ringe I findet bei voller Kuppelbelaftung statt; alsdann wirkt in F die Kraft $I = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 320b) $ab = I$ ist, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringspannungen ist dann in gleicher Weise wie oben vorzunehmen. Für Ring II findet Minimalspannung bei einer Belaftung der Zonen II, III, IV statt; I ist unbelaftet; mithin ist S_1 alsdann gleich Null (siehe Gleichung 327). Ist $bc = \frac{P_2}{n} = z$, so wird $hb = H_2$. Eben so wird weiter für die Minimalbelaftungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc$, $H_4 = md$, $H_5 = ne$.

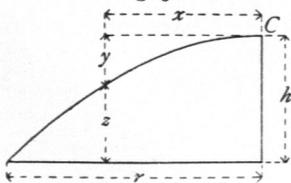
ε) Die Construction der Spannungen in den Diagonalen ist so einfach, das dieselbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ist in den meisten Fällen eine Parabel (Fig. 322) der Gleichung $y = \frac{hx^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel C

243.
Parabel-
Kuppel.

Fig. 322.



liegt, die halbe Spannweite gleich r , die Pfeilhöhe gleich h gesetzt ist, oder eine cubische Parabel der Gleichung $y = \frac{hx^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, das in den Zwischenringen bei gleichmäßig vertheilter Belaftung die Spannung Null herrscht und das

die Spannungen in den Sparren nahezu constant find, was sich folgendermassen ergibt.

Die Spannung im Sparrenstab EF (Fig. 323) ist durch Betrachtung des Theiles zwischen dem Scheitel C und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte II zu ermitteln. Die algebraische Summe der auf dieses Stück wirkenden lothrechten Kräfte ist gleich Null, daher, wenn die belastende Grundfläche mit F_1 , die Belastung für 1qm der Grundfläche mit g bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun ist $F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}$, mithin $S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

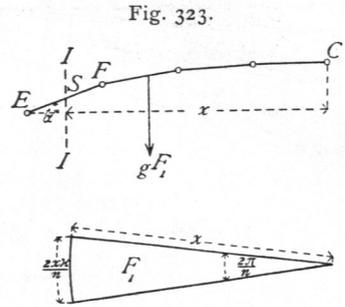


Fig. 323.

Wird statt des Vieleckes die stetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, so ist $y = \frac{h x^3}{r^3}$ und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3 h x^2}{r^3}$; mithin

$$S \cos \alpha \frac{3 h x^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \text{ woraus } S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3 n h}, \dots \dots \dots 338.$$

d. h. $S \cos \alpha$ ist constant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α sehr klein ist, so ändert sich auch $\cos \alpha$ sehr wenig; die Spannung ist daher im ganzen Sparren nahezu constant.

Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 317) und setzt die algebraische Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, so wird

$$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0, \text{ da nach Gleichung 338 } S \cos \alpha \text{ constant ist. Die Ringspannung ist dann}$$

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \dots \dots \dots 339.$$

Die obigen Angaben sind damit bewiesen.

Es möge noch bemerkt werden, dass der theoretische Materialaufwand bei einer nach der cubischen Parabel gekrümmten Kuppel nur $\frac{2}{3}$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der sich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergibt.

244.
Beispiel.

Beispiel. Es ist ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmassen und Belastungen zu construiren: Durchmesser des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47m, demnach der Durchmesser des dem Mauerring umschriebenen Parallelkreises $2L = 48\text{m}$; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8\text{m}$; es sind 6 Ringe mit den Halbmessern 4, 8, 12, 16, 20 und 24m und $n = 32$ Sparren anzuordnen; das Eigengewicht ist zu 70 kg für 1qm Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ist $\frac{h}{2L} = \frac{8}{48}$

$= \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergibt sich hieraus nach Art. 26 (S. 20 ff.) als Belastung durch Schnee für 1qm Grundfläche 75 kg, als Belastung durch Winddruck (siehe Art. 28, S. 22) für 1qm Grundfläche $v = 64\text{kg}$, so dass die gesammte zufällige Belastung für 1qm Grundfläche abgerundet 140 kg beträgt; die Laterne wiegt 2000 kg.

Die Kuppelfläche sei durch Umdrehung einer cubischen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h x^3}{r^3} = \frac{8}{24^3} x^3 = 0,00058 x^3$$

entstanden. Man erhält für die verschiedenen, durch die Ringe vorgeschriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 324)

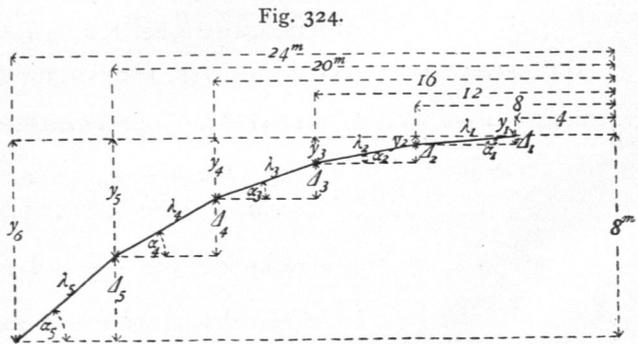


Fig. 324.

$x =$	4	8	12	16	20	24 m
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0 "
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0 "

Ferner ist

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0,26 \text{ m}; \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0,7 \text{ m}; \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1,38 \text{ m}; \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2,26 \text{ m}; \\ \Delta_5 = y_6 - y_5 = 3,36 \text{ m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^2} = 4,01 \text{ m}; \lambda_2 = 4,06 \text{ m}; \lambda_3 = 4,23 \text{ m}; \lambda_4 = 4,59 \text{ m}; \lambda_5 = 5,22 \text{ m}.$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0,0648; \sin \alpha_2 = 0,1724; \sin \alpha_3 = 0,32; \sin \alpha_4 = 0,492; \sin \alpha_5 = 0,644.$$

$$\cotg \alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15,38; \cotg \alpha_2 = 5,7; \cotg \alpha_3 = 2,9; \cotg \alpha_4 = 1,77; \cotg \alpha_5 = 1,19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^\circ 37,5'; \sin \frac{\pi}{n} = \sin 5^\circ 37,5' = 0,098; \frac{1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64 \cdot 0,098} = 0,16.$$

Die Eigengewichte, bzw. zufälligen Belastungen der einzelnen Ringe sind:

$$\text{Laternenring: } G_1 = 2000 + 6^2 \pi \cdot 70 = 9913 \text{ kg}, P_1 = 6^2 \pi \cdot 140 = 15826 \text{ kg};$$

$$2. \text{ Ring: } G_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 70 = 14067 \text{ kg}, P_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 140 = 28122 \text{ kg};$$

$$3. \text{ Ring: } G_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 70 = 21100 \text{ kg}, P_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 140 = 42182 \text{ kg};$$

$$4. \text{ Ring: } G_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 70 = 28133 \text{ kg}, P_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 140 = 56243 \text{ kg};$$

$$5. \text{ Ring: } G_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 70 = 35168 \text{ kg}, P_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 140 = 70304 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, sind nach

Gleichung 328:

$$S_1^g = - \frac{G_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{9913}{32 \cdot 0,065} = - 4766 \text{ kg};$$

$$S_2^g = - \frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{23980}{32 \cdot 0,1724} = - 4346 \text{ kg};$$

$$S_3^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{45080}{32 \cdot 0,32} = - 4402 \text{ kg};$$

$$S_4^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{73213}{32 \cdot 0,492} = - 4651 \text{ kg};$$

$$S_5^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{108381}{32 \cdot 0,644} = - 5258 \text{ kg}.$$

Die durch zufällige Belastung erzeugten Sparrenspannungen betragen:

$$S_1^p = - \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{15826}{2,08} = - 7608 \text{ kg};$$

$$S_2^p = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{43948}{5,517} = - 7966 \text{ kg};$$

$$S_3^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{86130}{10,24} = - 8400 \text{ kg};$$

$$S_4^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{142373}{15,74} = - 9045 \text{ kg};$$

$$S_5^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{212677}{20,61} = - 10319 \text{ kg}.$$

Die Ringspannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 331:

$$\text{Laternenring: } R_1^g = - 9913 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 24396 \text{ kg};$$

$$2. \text{ Ring: } R_2^g = - (23980 \cdot 5,7 - 9913 \cdot 15,38) \cdot 0,16 = + 2524 \text{ kg};$$

$$3. \text{ Ring: } R_3^g = - (45080 \cdot 2,9 - 23980 \cdot 5,7) \cdot 0,16 = + 953 \text{ kg};$$

$$4. \text{ Ring: } R_4^g = - (73213 \cdot 1,77 - 45080 \cdot 2,9) \cdot 0,16 = + 183 \text{ kg};$$

$$5. \text{ Ring: } R_5^g = - (108381 \cdot 1,19 - 73213 \cdot 1,77) \cdot 0,16 = + 98 \text{ kg};$$

$$\text{Mauerring: } R_6^g = 108381 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = 20636 \text{ kg}.$$

Die Maximal- und Minimalspannungen in den Ringen, durch zufällige Belaftung erzeugt, betragen nach Gleichung 335:

Laternenring: $R_1^{\text{min}} = -15826 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = -38932 \text{ kg}$ und $R_1^{\text{max}} = 0$;

2. Ring: $R_2^{\text{min}} = -28122 \cdot 5,7 \cdot 0,16 = -25647 \text{ kg}$,
 $R_2^{\text{max}} = 15826 (15,38 - 5,7) \cdot 0,16 = +24514 \text{ kg}$;

3. Ring: $R_3^{\text{min}} = -42182 \cdot 2,9 \cdot 0,16 = -19572 \text{ kg}$,
 $R_3^{\text{max}} = 43948 \cdot 2,8 \cdot 0,16 = +19689 \text{ kg}$;

4. Ring: $R_4^{\text{min}} = -56243 \cdot 1,77 \cdot 0,16 = -15926 \text{ kg}$,
 $R_4^{\text{max}} = 86130 \cdot 1,13 \cdot 0,16 = +15589 \text{ kg}$;

5. Ring: $R_5^{\text{min}} = -70304 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = -13386 \text{ kg}$,
 $R_5^{\text{max}} = 142373 \cdot 0,58 \cdot 0,16 = +13212 \text{ kg}$;

Mauerring: $R_6^{\text{min}} = 0$ und $R_6^{\text{max}} = 212677 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = +40494 \text{ kg}$.

Was schliesslich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, so braucht nur die am stärksten beanspruchte Diagonale berechnet zu werden, weil selbst diese noch sehr schwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich stark.

Die grösste durch zufällige Belaftung erzeugte Sparrenspannung ist durch die Diagonale zu übertragen (siehe Art. 241, S. 226); dieselbe ist $S_5^{\text{p}} = -10319 \text{ kg}$, und es hat demnach eine Diagonale höchstens diese Kraft aufzunehmen. Die Spannung in der Diagonalen wird demnach kleiner sein, als $\frac{10319}{\cos \gamma}$; da nun nahezu (Fig. 325) $\cos \gamma = \frac{5,22}{7,02} = 0,744$ ist, wird $Y < \frac{10319}{0,744}$ oder $Y < 13870 \text{ kg}$ sein.

Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen aufsuchen, was nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querschnittsbestimmungen kann nun, wie bei den früheren Beispielen, eine Tabelle aufgestellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	- 4766	- 7 608	R_1	- 24 396	- 38 932	0
S_2	- 4346	- 7 966	R_2	+ 2 524	+ 24 514	- 25 647
S_3	- 4402	- 8 400	R_3	+ 953	+ 19 689	- 19 572
S_4	- 4651	- 9 045	R_4	+ 183	+ 15 589	- 15 926
S_5	- 5258	- 10 319	R_5	+ 98	+ 13 212	- 13 386
Diagonalen:			R_6	+ 20 636	+ 40 494	0
Y	0	13 870				
	Kilogramm			Kilogramm		

b) Flache Zeltdächer.

Die Zeltdächer bilden Pyramiden, und zwar in den allermeisten Fällen regelmässige Pyramiden. Man kann sie aus einer Anzahl radial gestellter Binder, die unter die fog. Grate kommen, construiren, in welchem Falle die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belaftungen vorzunehmen ist, wie bei den Balkendächern gezeigt wurde, oder man legt auch hier, wie bei den Kuppeln, alle Constructionstheile in die Dachflächen, so dass sich eine

