

5. Kapitel.

Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

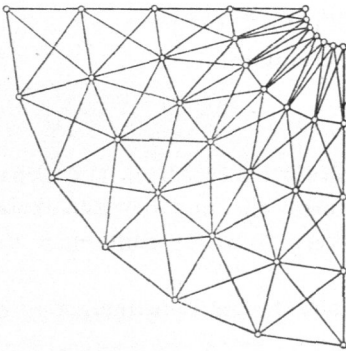
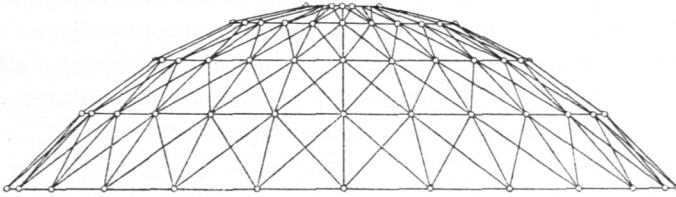
a) Kuppeldächer.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; sie ist also eine Umdrehungsfläche.

^{238.}
Allgemeines.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial gestellter

Fig. 314.



Binder construirte, sind bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit bestem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern sämmtliche Constructions- theile in die Kuppelfläche verlegt. Eine

Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet und in verschiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere sind den Parallelkreisen der Kuppelfläche eingeschriebene Vielecke. In den so entstehenden Vierecken sind alsdann, wegen der ungleichmäßigen Belastung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich ist eine Belastung der Kuppelmitte durch eine fog. Laterne vorhanden. Die ganze Construction bildet demnach ein der Kuppelfläche

eingeschriebenes Polyeder; in Fig. 314 sind Ansicht und Grundriss derselben dargestellt.

1) Belastungen und Auflagerdrücke.

Die hier zu betrachtenden Kuppeln sind so flach, daß der Winddruck nur von geringer Bedeutung ist; derselbe soll deshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel constant angenommen werden. Es genügt ferner, nur die lothrechte Seitenkraft v (vergl. Art. 28, S. 22) des Winddruckes zu berücksichtigen; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachlässigt werden. Endlich ist es empfehlenswerth, alle Belastungen auf das Quadratmeter der Grundfläche, also der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen.

^{239.}
Belastungen.

Auch hier greifen die Lasten in den Knotenpunkten der Construction an; es sind demnach die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit diesen die Belastungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, so würden die einzelnen Sparren schiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von diesen erleiden; durch einen Ring, gegen

^{240.}
Auflager-
drücke.

welchen sich sämtliche Sparrenfüße setzen, den fog. Mauerring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den untersten Sparrenstäben (S_4 in Fig. 315) vorhandenen Spannungen aufgehoben, so daß als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entsprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belastungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belastet sind. Wenn der Grundriß der Kuppel ein regelmäßiges n -Eck ist und demnach n Sparren vorhanden sind, so kann angenommen werden, daß bei den erwähnten Belastungen alle Sparren gleiche Lasten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der ersten Ringzone mit enthalten sei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen seien bezw. (Fig. 315) $G_1, G_2, G_3, G_4 \dots$, die zufälligen Lasten der ganzen Ringzonen $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$; alsdann ist, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belastung der ganzen Dachfläche

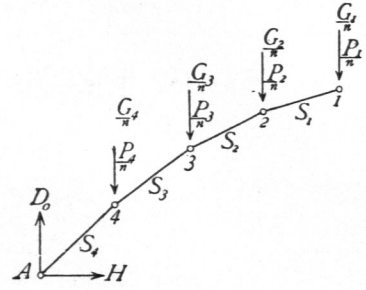


Fig. 315.

Wenn etwa nur die drei obersten Zonen voll belastet sind, so wird

$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \dots + P_1 + P_2 + P_3.$$

fein. Auf diese Art sind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

2) Stabspannungen.

241.
Berechnung
der Stab-
spannungen.

α) Ungünstigste Beanspruchung der einzelnen Stäbe. Die genaue Untersuchung der für jeden Stab ungünstigsten Belastungsweise und die Berechnung der dabei entstehenden Beanspruchungen ist sehr schwierig, da die elastischen Verschiebungen der einzelnen Punkte in Frage kommen.

Es sollen deshalb, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

a) die Sparren erhalten den Maximaldruck, wenn die ganze Kuppel voll belastet ist;

b) ein Ring erhält seinen Maximalzug, wenn der innerhalb desselben befindliche Kuppeltheil voll belastet, der Ring selbst mit seiner Zone aber unbelastet ist; bei der entgegengesetzten Belastungsart treten die entgegengesetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwischen zwei Sparren erhalten ihren größten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmessers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet ist.

β) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belastungsarten, nämlich die Belastung der ganzen Kuppel durch zufällige Last und die Belastung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belastungsart ergibt die Minimalspannungen. Die Maximalspannungen der Sparren sind gleich den Summen der bei den beiden angeführten Belastungsarten sich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belastungsarten unterscheiden sich nur durch die Größe der Lasten.

Was zunächst die zufällige Belastung betrifft, so sind im m -ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 316 u. 317) folgende Kräfte

Fig. 316.

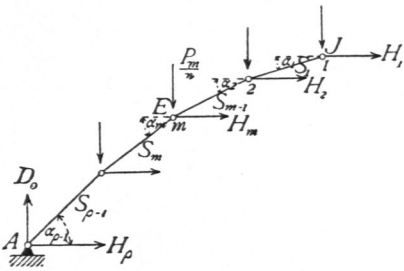
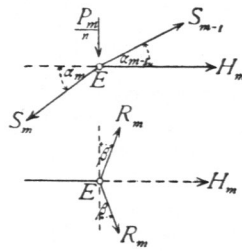


Fig. 317.



im Gleichwichte: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m , die Laft $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringspannungen R_m . Letztere sind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m -ten

Ringes die Mittelkraft H_m . Die algebraische Summe der den Punkt E ist gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den ersten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für \mathcal{F} , ist $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3},$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \dots \dots \dots 327.$$

Eben so ergibt sich die Spannung in den Sparren für eine Belaftung durch das Eigengewicht zu

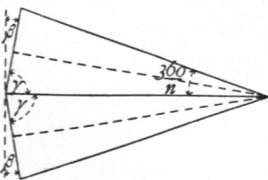
$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; \quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \dots S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \dots \dots \dots 328.$$

γ) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraische Summe der wagrechten Kräfte im Punkte E gleich Null ist, lautet (Fig. 317):

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}.$$

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringspannungen R_m ist, so ergibt sich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun ist (Fig. 318) $\beta = \frac{360}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

Fig. 318.



sonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in diese Gleichung der

für H_m gefundene Werth eingesetzt, so folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 329.$$

Wir bestimmen nach Gleichung 329 die Ringspannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringspannung durch zufällige Belaftung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \cotg \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \cotg \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 330.$$

Man erhält

für den Laternenring ($m = 1$):	$R_1^g = -\frac{G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$	}	331.
für den Ring 2 ($m = 2$):	$R_2^g = -\frac{(G_1 + G_2) \cotg \alpha_2 - G_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$		
für den Ring 3 ($m = 3$):	$R_3^g = -\frac{(G_1 + G_2 + G_3) \cotg \alpha_3 - (G_1 + G_2) \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}};$		
	etc.		

Für den Mauerring ist S_m , also das erste Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ist,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 332.$$

Um die durch zufällige Belaftung erzeugten Ringspannungen zu ermitteln, setzen wir in die Gleichung 329 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es soll $\mathfrak{S}_1^m (P)$ die zwischen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Lasten bezeichnen, wobei \mathfrak{S} ausdrückt, dafs nicht alle Knotenpunkte 1 — m belaftet zu sein brauchen; im Gegenfatz dazu soll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dafs alle Knotenpunkte von 1 bis m belaftet sind. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belaftung aus Gleichung 329

$$R_m = -\frac{\mathfrak{S}_1^m (P) \cotg \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1} (P) \cotg \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 333.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Feststellung der für die einzelnen Ringe ungünstigsten Belaftungen (unter Voraussetzung der Belaftung ganzer Zonen) und die Ermittlung der grössten Druck- und Zugspannungen in den Ringen. Der grösste Druck wird stattfinden, wenn im Zähler das erste Glied möglichst gros, das zweite Glied möglichst klein ist. Jede Belaftung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ hat fowohl ein Wachsen des ersten, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\cotg \alpha_{m-1}$ stets grösser ist, als $\cotg \alpha_m$, so wächst das zweite Glied mehr, als das erste, d. h. jede Belaftung des Knotenpunktes 1 bis $(m - 1)$ verringert den Druck,

vergrößert also den Zug. Die Belastung des Knotenpunktes m vergrößert nur das erste Glied, also den Druck. Die Belastung der außerhalb des m -ten Ringes liegenden Ringe ist nach der Gleichung ohne Einfluss auf die Spannung im m -ten Ringe. Daraus folgt, dass in den Stäben eines Ringes (des m -ten) der größte Druck stattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ unbelastet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belastet sind. Da die Belastung der äußeren Ringe ohne Einfluss ist, so kann man sagen: Größter Druck findet statt, wenn der innere Kuppeltheil unbelastet, der äußere Kuppeltheil, einschließlich des betrachteten Ringes, belastet ist. Daraus folgt dann weiter, dass größter Zug in den Stäben des m -ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausschließlich der Zone, zu welcher der m -te Ring gehört, belastet ist. Die hier gefundenen Ergebnisse stimmen demnach mit den in Art. 241 (S. 226) gemachten Annahmen über die ungünstigsten Belastungen überein. Man erhält

$$R_m^{\phi \min} = -\frac{P_m \cotg \alpha_m}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{\phi \max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P) (\cotg \alpha_{m-1} - \cotg \alpha_m)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 334.$$

Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \text{für den Laternenring } (m = 1): \quad R_1^{\phi \min} &= -\frac{P_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{\phi \max} = 0; \\ \text{für } m = 2: \quad R_2^{\phi \min} &= -\frac{P_2 \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{\phi \max} = \frac{P_1 (\cotg \alpha_1 - \cotg \alpha_2)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}, \\ \text{für } m = 3: \quad R_3^{\phi \min} &= -\frac{P_3 \cotg \alpha_3}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{\phi \max} = \frac{(P_1 + P_2) (\cotg \alpha_2 - \cotg \alpha_3)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} 335.$$

$$\text{für den Mauerring: } R_{\rho}^{\phi \min} = 0 \quad \text{und} \quad R_{\rho}^{\phi \max} = \frac{(P_1 + P_2 + \dots + P_{\rho-1}) \cotg \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad 336.$$

δ) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmesser, welcher für die ungünstigste Diagonalenbelastung die belastete und unbelastete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belasteter und ein unbelasteter Sparren. Nehmen wir nun an, dass die Spannung im ersteren so groß ist, als wenn die ganze Kuppel voll belastet wäre, im zweiten so groß, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belastet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anschließende Diagonale stark genug, um den ganzen Spannungsunterschied zu übertragen, so wird dieselbe jedenfalls zu stark, ist also als ausreichend zu betrachten.

Im obersten Sparrenstück sind die größten und kleinsten Druckspannungen bezw.

$$S_{1 \max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1 \min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen ist $\Delta_1 = -\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Dieselbe soll durch die Diagonale übertragen werden; es ist also nahezu, wenn der Winkel zwischen Diagonale und belastetem Sparren γ_1 genannt wird, $Y_1 \cos \gamma_1 = -\Delta$, daher

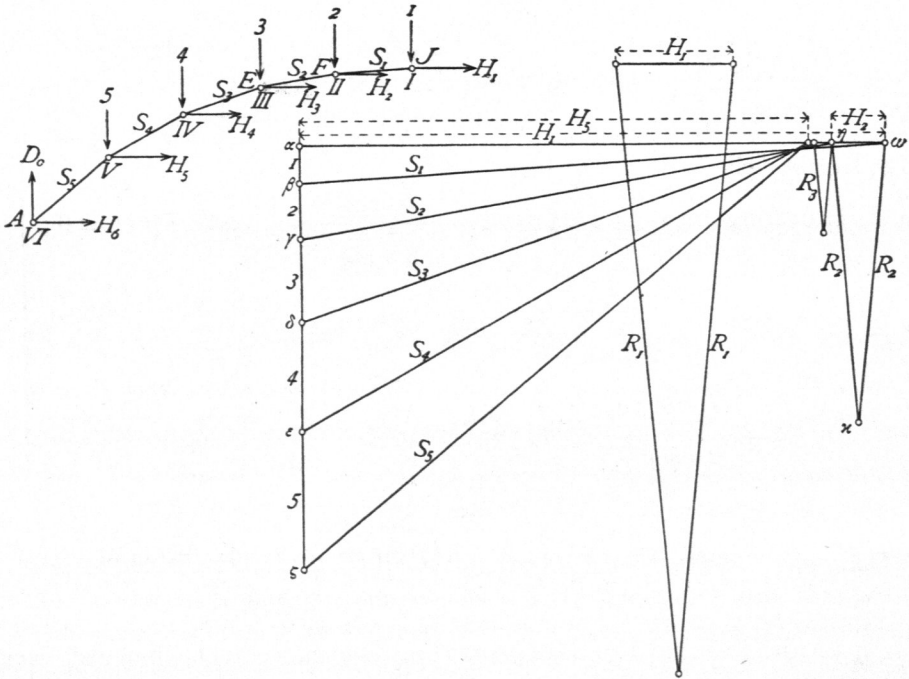
$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{P_1}{n \sin \alpha_1 \cos \gamma_1}, & Y_2 &= \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2 \cos \gamma_2} \\ Y_3 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3 \cos \gamma_3}, & Y_4 &= \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4 \cos \gamma_4} \end{aligned} \right\} \dots \dots 337.$$

242.
Graphische
Ermittlung
der Stab-
spannungen.

Auf graphischem Wege lassen sich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weise ermitteln.

α) Sparrenspannungen durch das Eigengewicht. Die Lasten in den einzelnen Knotenpunkten seien 1, 2, 3, 4, 5 (Fig. 319); man trage dieselben zu einem Kraftpolygon $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta$ an einander. Im Knotenpunkte F wirkt 1 , die Sparrenspannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringspannungen R_1 . Die Zerlegung der Kraft 1 nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergibt $\beta \omega = S_1$, $\omega \alpha = H_1$. Am Knotenpunkt F wirken nun 2, S_1 , S_2 und H_2 ; bekannt sind jetzt 2 und S_1 ; man erhält $\gamma \eta = S_2$, $\eta \omega = H_2$. Eben so ergeben sich die übrigen Sparrenspannungen.

Fig. 319.



β) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belastung. Die Construction ist in gleicher Weise, wie unter α vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Lasten genau wie oben aufgetragen und behandelt sind.

γ) Ringspannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für diese Belastung gefundenen Werthe von H ergibt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g, \dots , wie in Fig. 319 gezeichnet. Die Construction empfiehlt sich für die vorliegende Ermittlung nicht sehr, weil sie der spitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Resultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichensfläche fallen. So ist H_1 in Fig. 319 im fünffach verkleinerten Maßstabe aufgetragen, um R_1 zu construiren.

δ) Ringspannungen durch zufällige Belastung. Maximalspannung im Ringe II findet statt, wenn nur die Ringzone I belastet ist. Es sei (Fig. 320a) $a b = \frac{P_1}{n}$; alsdann wird $b f = S_1$, $f a = H_1$.

Im Knotenpunkt F (Fig. 321) sind S_1 , S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräfte-dreieck für Punkt F wird $b g f$. Darin ist $H_2 = g f$ und $g i = i f = R_2^g_{max}$.

Fig. 320.

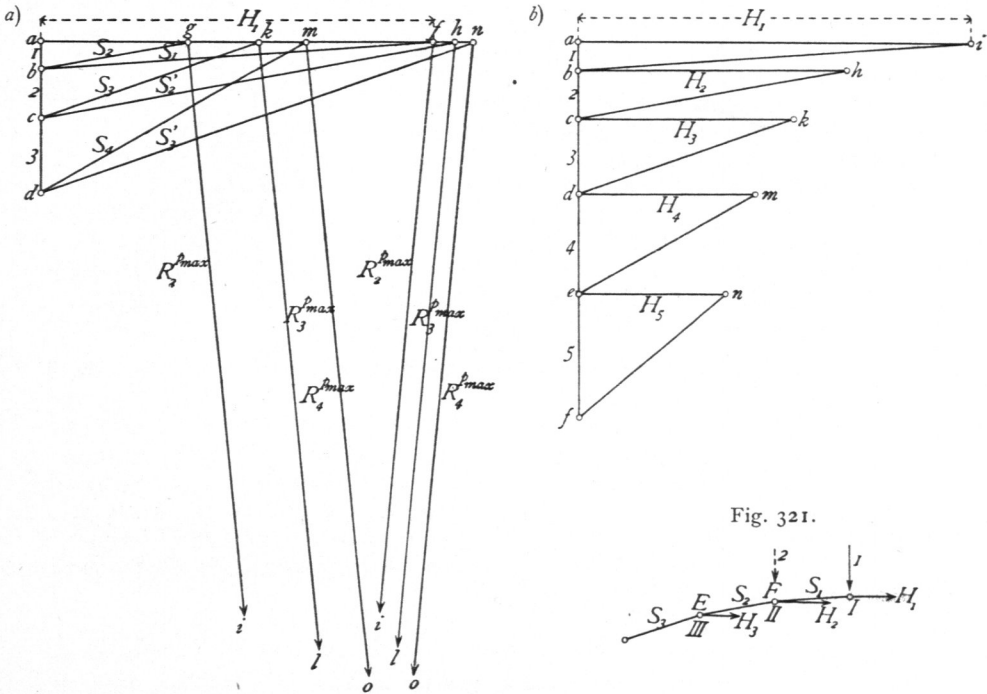
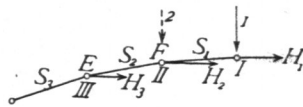


Fig. 321.



Im Ringe III ist Maximalspannung, wenn die Zonen zu den Ringen I und II belaftet sind; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb$, $z = bc = \frac{P_2}{n}$, S_2' und H_2' . Man erhält leicht $H_2' = hf$, $S_2' = ch$. In E findet dann S_2' , S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_3^P \max = kl = lh$. Eben so wird $R_4^P \max = on = mo$ etc.

Minimalspannung im Ringe I findet bei voller Kuppelbelaftung statt; alsdann wirkt in F die Kraft $I = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 320b) $ab = I$ ist, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringspannungen ist dann in gleicher Weise wie oben vorzunehmen. Für Ring II findet Minimalspannung bei einer Belaftung der Zonen II, III, IV statt; I ist unbelaftet; mithin ist S_1 alsdann gleich Null (siehe Gleichung 327). Ist $bc = \frac{P_2}{n} = z$, so wird $hb = H_2$. Eben so wird weiter für die Minimalbelaftungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc$, $H_4 = md$, $H_5 = ne$.

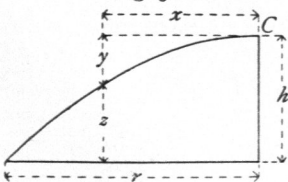
ε) Die Construction der Spannungen in den Diagonalen ist so einfach, dass dieselbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ist in den meisten Fällen eine Parabel (Fig. 322) der Gleichung $y = \frac{hx^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel C

243.
Parabel-
Kuppel.

Fig. 322.



liegt, die halbe Spannweite gleich r , die Pfeilhöhe gleich h gesetzt ist, oder eine cubische Parabel der Gleichung $y = \frac{hx^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, dass in den Zwischenringen bei gleichmäßig verteilter Belaftung die Spannung Null herrscht und dass

die Spannungen in den Sparren nahezu constant find, was sich folgendermassen ergibt.

Die Spannung im Sparrenstab EF (Fig. 323) ist durch Betrachtung des Theiles zwischen dem Scheitel C und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte II zu ermitteln. Die algebraische Summe der auf dieses Stück wirkenden lothrechten Kräfte ist gleich Null, daher, wenn die belastende Grundfläche mit F_1 , die Belastung für 1qm der Grundfläche mit g bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun ist $F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}$, mithin $S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

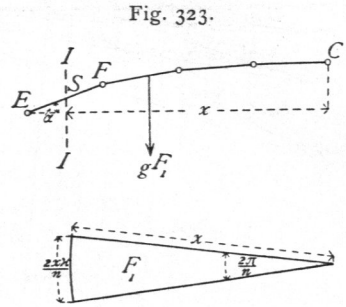


Fig. 323.

Wird statt des Vieleckes die stetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, so ist $y = \frac{h x^3}{r^3}$ und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3 h x^2}{r^3}$; mithin

$$S \cos \alpha \frac{3 h x^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \text{ woraus } S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3 n h}, \dots \dots \dots 338.$$

d. h. $S \cos \alpha$ ist constant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α sehr klein ist, so ändert sich auch $\cos \alpha$ sehr wenig; die Spannung ist daher im ganzen Sparren nahezu constant.

Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 317) und setzt die algebraische Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, so wird

$$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0, \text{ da nach Gleichung 338 } S \cos \alpha \text{ constant ist. Die Ringspannung ist dann}$$

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \dots \dots \dots 339.$$

Die obigen Angaben sind damit bewiesen.

Es möge noch bemerkt werden, dass der theoretische Materialaufwand bei einer nach der cubischen Parabel gekrümmten Kuppel nur $\frac{2}{3}$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der sich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergibt.

244.
Beispiel.

Beispiel. Es ist ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmassen und Belastungen zu construiren: Durchmesser des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47m, demnach der Durchmesser des dem Mauerring umschriebenen Parallelkreises $2L = 48\text{m}$; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8\text{m}$; es sind 6 Ringe mit den Halbmessern 4, 8, 12, 16, 20 und 24m und $n = 32$ Sparren anzuordnen; das Eigengewicht ist zu 70 kg für 1qm Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ist $\frac{h}{2L} = \frac{8}{48}$

$= \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergibt sich hieraus nach Art. 26 (S. 20 ff.) als Belastung durch Schnee für 1qm Grundfläche 75 kg, als Belastung durch Winddruck (siehe Art. 28, S. 22) für 1qm Grundfläche $v = 64\text{kg}$, so dass die gesammte zufällige Belastung für 1qm Grundfläche abgerundet 140 kg beträgt; die Laterne wiegt 2000 kg.

Die Kuppelfläche sei durch Umdrehung einer cubischen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h x^3}{r^3} = \frac{8}{24^3} x^3 = 0,00058 x^3$$

entstanden. Man erhält für die verschiedenen, durch die Ringe vorgeschriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 324)

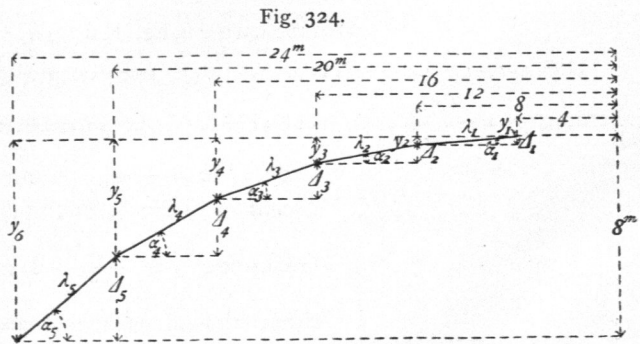


Fig. 324.

$x =$	4	8	12	16	20	24 m
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0 "
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0 "

Ferner ist

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0,26 \text{ m}; \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0,7 \text{ m}; \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1,38 \text{ m}; \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2,26 \text{ m}; \\ \Delta_5 = y_6 - y_5 = 3,36 \text{ m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^2} = 4,01 \text{ m}; \lambda_2 = 4,06 \text{ m}; \lambda_3 = 4,23 \text{ m}; \lambda_4 = 4,59 \text{ m}; \lambda_5 = 5,22 \text{ m}.$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0,0648; \sin \alpha_2 = 0,1724; \sin \alpha_3 = 0,32; \sin \alpha_4 = 0,492; \sin \alpha_5 = 0,644.$$

$$\cotg \alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15,38; \cotg \alpha_2 = 5,7; \cotg \alpha_3 = 2,9; \cotg \alpha_4 = 1,77; \cotg \alpha_5 = 1,19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^\circ 37,5'; \sin \frac{\pi}{n} = \sin 5^\circ 37,5' = 0,098; \frac{1}{2n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64 \cdot 0,098} = 0,16.$$

Die Eigengewichte, bzw. zufälligen Belastungen der einzelnen Ringe sind:

$$\text{Laternenring: } G_1 = 2000 + 6^2 \pi \cdot 70 = 9913 \text{ kg}, P_1 = 6^2 \pi \cdot 140 = 15826 \text{ kg};$$

$$2. \text{ Ring: } G_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 70 = 14067 \text{ kg}, P_2 = (10^2 - 6^2) \pi \cdot 140 = 28122 \text{ kg};$$

$$3. \text{ Ring: } G_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 70 = 21100 \text{ kg}, P_3 = (14^2 - 10^2) \pi \cdot 140 = 42182 \text{ kg};$$

$$4. \text{ Ring: } G_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 70 = 28133 \text{ kg}, P_4 = (18^2 - 14^2) \pi \cdot 140 = 56243 \text{ kg};$$

$$5. \text{ Ring: } G_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 70 = 35168 \text{ kg}, P_5 = (22^2 - 18^2) \pi \cdot 140 = 70304 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, sind nach

Gleichung 328:

$$S_1^g = - \frac{G_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{9913}{32 \cdot 0,065} = - 4766 \text{ kg};$$

$$S_2^g = - \frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{23980}{32 \cdot 0,1724} = - 4346 \text{ kg};$$

$$S_3^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{45080}{32 \cdot 0,32} = - 4402 \text{ kg};$$

$$S_4^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{73213}{32 \cdot 0,492} = - 4651 \text{ kg};$$

$$S_5^g = - \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{108381}{32 \cdot 0,644} = - 5258 \text{ kg}.$$

Die durch zufällige Belastung erzeugten Sparrenspannungen betragen:

$$S_1^p = - \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = - \frac{15826}{2,08} = - 7608 \text{ kg};$$

$$S_2^p = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} = - \frac{43948}{5,517} = - 7966 \text{ kg};$$

$$S_3^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} = - \frac{86130}{10,24} = - 8400 \text{ kg};$$

$$S_4^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} = - \frac{142373}{15,74} = - 9045 \text{ kg};$$

$$S_5^p = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n \sin \alpha_5} = - \frac{212677}{20,61} = - 10319 \text{ kg}.$$

Die Ringspannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 331:

$$\text{Laternenring: } R_1^g = - 9913 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = - 24396 \text{ kg};$$

$$2. \text{ Ring: } R_2^g = - (23980 \cdot 5,7 - 9913 \cdot 15,38) \cdot 0,16 = + 2524 \text{ kg};$$

$$3. \text{ Ring: } R_3^g = - (45080 \cdot 2,9 - 23980 \cdot 5,7) \cdot 0,16 = + 953 \text{ kg};$$

$$4. \text{ Ring: } R_4^g = - (73213 \cdot 1,77 - 45080 \cdot 2,9) \cdot 0,16 = + 183 \text{ kg};$$

$$5. \text{ Ring: } R_5^g = - (108381 \cdot 1,19 - 73213 \cdot 1,77) \cdot 0,16 = + 98 \text{ kg};$$

$$\text{Mauerring: } R_6^g = 108381 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = 20636 \text{ kg}.$$

Die Maximal- und Minimalspannungen in den Ringen, durch zufällige Belaftung erzeugt, betragen nach Gleichung 335:

Laternenring: $R_1^{min} = -15826 \cdot 15,38 \cdot 0,16 = -38932 \text{ kg}$ und $R_1^{max} = 0$;

2. Ring: $R_2^{min} = -28122 \cdot 5,7 \cdot 0,16 = -25647 \text{ kg}$,
 $R_2^{max} = 15826 (15,38 - 5,7) \cdot 0,16 = +24514 \text{ kg}$;

3. Ring: $R_3^{min} = -42182 \cdot 2,9 \cdot 0,16 = -19572 \text{ kg}$,
 $R_3^{max} = 43948 \cdot 2,8 \cdot 0,16 = +19689 \text{ kg}$;

4. Ring: $R_4^{min} = -56243 \cdot 1,77 \cdot 0,16 = -15926 \text{ kg}$,
 $R_4^{max} = 86130 \cdot 1,13 \cdot 0,16 = +15589 \text{ kg}$;

5. Ring: $R_5^{min} = -70304 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = -13386 \text{ kg}$,
 $R_5^{max} = 142373 \cdot 0,58 \cdot 0,16 = +13212 \text{ kg}$;

Mauerring: $R_6^{min} = 0$ und $R_6^{max} = 212677 \cdot 1,19 \cdot 0,16 = +40494 \text{ kg}$.

Was schliesslich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, so braucht nur die am stärksten beanspruchte Diagonale berechnet zu werden, weil selbst diese noch sehr schwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich stark.

Die grösste durch zufällige Belaftung erzeugte Sparrenspannung ist durch die Diagonale zu übertragen (siehe Art. 241, S. 226); dieselbe ist $S_5^p = -10319 \text{ kg}$, und es hat demnach eine Diagonale höchstens diese Kraft aufzunehmen. Die Spannung in der Diagonalen wird demnach kleiner sein, als $\frac{10319}{\cos \gamma}$; da nun nahezu (Fig. 325) $\cos \gamma = \frac{5,22}{7,02} = 0,744$ ist, wird $Y < \frac{10319}{0,744}$ oder $Y < 13870 \text{ kg}$ sein.

Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen auffuchen, was nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querschnittsbestimmungen kann nun, wie bei den früheren Beispielen, eine Tabelle aufgestellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	- 4766	- 7 608	R_1	- 24 396	- 38 932	0
S_2	- 4346	- 7 966	R_2	+ 2 524	+ 24 514	- 25 647
S_3	- 4402	- 8 400	R_3	+ 953	+ 19 689	- 19 572
S_4	- 4651	- 9 045	R_4	+ 183	+ 15 589	- 15 926
S_5	- 5258	- 10 319	R_5	+ 98	+ 13 212	- 13 386
Diagonalen:			R_6	+ 20 636	+ 40 494	0
Y	0	13 870				
	Kilogramm			Kilogramm		

b) Flache Zeltedächer.

Die Zeltedächer bilden Pyramiden, und zwar in den allermeisten Fällen regelmässige Pyramiden. Man kann sie aus einer Anzahl radial gestellter Binder, die unter die fog. Grate kommen, construieren, in welchem Falle die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belaftungen vorzunehmen ist, wie bei den Balkendächern gezeigt wurde, oder man legt auch hier, wie bei den Kuppeln, alle Constructionstheile in die Dachflächen, so dass sich eine

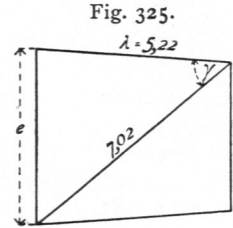
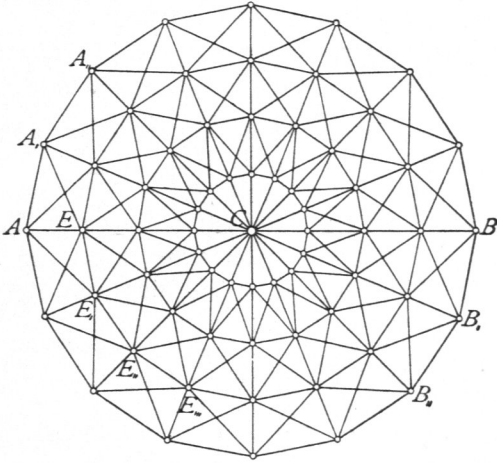


Fig. 326.



der dortigen entsprechende Construction ergibt. In diesem Falle (Fig. 326) werden eine Anzahl Bindersparren $A C$, A, C , $A,, C$, $B C$, B, C , $B,, C \dots$ angeordnet; zwischen denselben befinden sich wagrechte Ringe E , $E,, E,,, E,,, \dots$ und in den viereckigen Feldern der Dachflächen, wegen der ungleichmäßigen Belastungen, Diagonalen. Auch hier wird oft in der Dachmitte eine Laterne angeordnet, welche sich auf einen Laternenring stützt, gegen den sich die oberen Sparrenenden lehnen. Wir werden hier nur die der Kuppelconstruction entsprechende Anordnung betrachten, da die erstere keine be-

sonderen Schwierigkeiten bietet. Obgleich die grössere oder geringere Neigung der Dachflächen keinen grundlegenden Unterschied bedingt, wollen wir die Zeltdächer dennoch in flache und steile Zeltdächer eintheilen, weil bei den ersteren die Belastung durch Schnee, bei den letzteren diejenige durch Wind die maßgebende zufällige Belastung ist.

Zu den flachen Zeltdächern gehören die Circus- und Theaterdächer, die Dächer über Panoramen, Locomotivschuppen etc., zu den steilen hauptsächlich die Thurmdächer.

1) Belastungen und Auflagerdrücke.

Ueber die Belastung der flachen Zeltdächer gilt dasselbe, was von den Belastungen der Kuppeldächer in Art. 239 (S. 225) gesagt ist; wir bestimmen also auch hier das Eigengewicht, den Schnee- und den Winddruck für 1 m^2 der Grundfläche, berücksichtigen aber vom Winddruck nur die lothrechten Seitenkräfte v , für welche die Werthe in Art. 28 (S. 22) angegeben sind. Die Knotenpunktbelastungen sind den Grundflächen proportional, welche auf die einzelnen Knotenpunkte entfallen, demnach leicht zu ermitteln.

Auch hier betrachten wir nur volle Belastung des ganzen Zeltdaches und solche theilweise Belastungsarten, bei denen ganze Ringzonen zufällig belastet sind.

Von den Auflagerdrücken gilt gleichfalls dasselbe, was bei den Kuppeldächern gesagt wurde. Da auch hier ein fog. Mauerring die wagrechten Seitenkräfte der Spannungen in den untersten Sparrentheilen aufhebt, so sind für die in Aussicht zu nehmenden Belastungsarten die Auflagerdrücke bei den einzelnen Sparren gleich den auf dieselben entfallenden Lasten.

2) Stabspannungen.

α) Ungünstigste Beanspruchungen der einzelnen Stäbe. Die genaue Bestimmung der ungünstigsten Belastungsarten und der bei ungleichmäßig vertheilter Belastung entstehenden Spannungen ist auch hier sehr schwierig. Werden nur volle Belastung des ganzen Daches und die Belastungen ganzer Ringzonen zu Grunde gelegt, so ergibt sich aus den aufzustellenden Gleichungen leicht, daß die ungünstigste Belastungsart für die Sparren, so wie für alle Ringe bei voller Belastung des ganzen

246.
Belastungen.

247.
Auflager-
drücke.

248.
Berechnung
der Stab-
spannungen.

Daches stattfindet. Bezüglich der Diagonalen verfahren wir genau, wie bei den Kuppeldächern (siehe Art. 241, S. 226).

β) Spannungen in den Sparren. Es mögen wiederum $G_1, G_2 \dots G_m \dots$ die Eigengewichte der ganzen Ringzonen, $P_1, P_2, \dots P_m \dots$ die zufälligen Belastungen derselben sein; alsdann sind, falls n Sparren vorhanden sind, die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n} \dots \frac{G_m}{n} \dots$ und $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n} \dots \frac{P_m}{n} \dots$

Allgemein wirke in einem Knotenpunkte (Fig. 327) die Last Q ; alsdann sind die in dem m -ten Knotenpunkte E (von der Laterne, bezw. der Mitte an gerechnet) wirkenden Kräfte S_{m-1}, S_m, Q_m und die Mittelkraft H_m der beiden Ringspannungen R_m im Gleichgewicht. Demnach ist (Fig. 328)

$$0 = Q_m + S_m \sin \alpha - S_{m-1} \sin \alpha, \text{ woraus } S_m = -\frac{Q_m}{\sin \alpha} + S_{m-1}.$$

Für den ersten Sparrentheil, für $m = 1$, wird, falls eine Laterne vorhanden ist, $S_{m-1} = 0$; daher

$$S_1 = -\frac{Q_1}{\sin \alpha}; \quad S_2 = -\frac{Q_2}{\sin \alpha} - \frac{Q_1}{\sin \alpha} = -\frac{Q_2 + Q_1}{\sin \alpha};$$

$$S_3 = -\frac{Q_3}{\sin \alpha} - \frac{Q_2 + Q_1}{\sin \alpha} = -\frac{Q_3 + Q_2 + Q_1}{\sin \alpha} \text{ etc.}$$

Fig. 327.

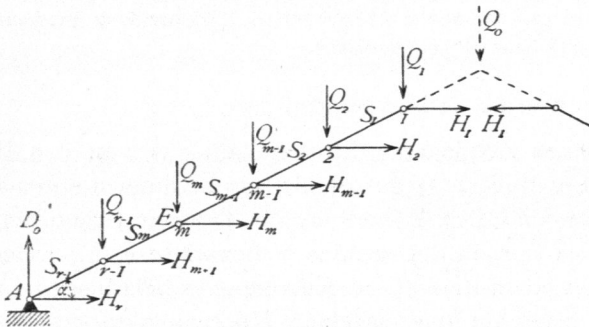
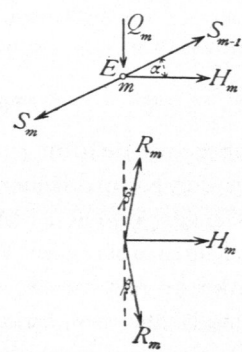


Fig. 328.



Allgemein wird

$$S_m = -\frac{\sum_1^m (Q)}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 340.$$

Die Sparrenspannungen durch das Eigengewicht werden erhalten, indem der Reihe nach für $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n}, \frac{G_3}{n} \dots$ eingesetzt wird. Man erhält

$$S_m^g = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha} \dots \dots \dots 341.$$

Für $m = 1, 2, 3 \dots$ wird

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n \sin \alpha}; \quad S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha}; \quad S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha} \text{ etc.} \quad 342.$$

Aus der Gleichung 340 ergibt sich, dass die Sparrenspannungen durch zufällige Last am größten bei voller Belastung sind, und zwar wird

$$S_m^{\phi \max} = - \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha} \dots \dots \dots 343.$$

und für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1^{\phi \max} = - \frac{P_1}{n \sin \alpha}; \quad S_2^{\phi \max} = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha}; \quad S_3^{\phi \max} = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha} \text{ etc. } 344.$$

Falls keine Laterne vorhanden ist, gelten die Gleichungen 340 bis 344 ebenfalls; nur ist überall in die Summen auch Q_0 aufzunehmen, d. h. der Theil der Firftbelastung, welcher auf den Sparren entfällt.

γ) Spannungen in den Ringen. Die algebraische Summe der in E (Fig. 328) wirkenden wagrechten Kräfte ist gleich Null, d. h.

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha - S_m \cos \alpha,$$

woraus

$$H_m = (S_m - S_{m-1}) \cos \alpha = - \frac{\sum_1^m (Q) - \sum_1^{m-1} (Q)}{\sin \alpha} \cos \alpha = - Q_m \cotg \alpha.$$

Nun ist $H_m = 2 R_m \sin \beta$ und, da nach Art. 241 (S. 226) $\beta = \frac{\pi}{n}$ ist,

$$R_m = - \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = - \frac{Q_m \cotg \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 345.$$

Die Belastung durch das Eigengewicht erzeugt demnach eine Spannung

$$R_m^g = - \frac{G_m \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 346.$$

Falls ein Laternenring vorhanden ist, so gilt die Gleichung 346 auch für diesen. Für denselben ist $m = 1$ und $\sum_1^{m-1} (Q) = 0$, so wie $\sum_1^m (Q) = Q_1$. Wir erhalten demnach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$R_1^g = - \frac{G_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^g = - \frac{G_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc. } \dots \dots \dots 347.$$

Die Gleichungen 346 u. 347 ergeben, daß in sämtlichen Ringen durch das Eigengewicht Druck erzeugt wird; die Gleichung 345 gilt aber nicht für den Mauerring. Am Knotenpunkt A (Fig. 327) wirken die Kräfte $D_0 = \sum (Q)$, H_r und S_{r-1} ; mithin ist $S_{r-1} \cos \alpha + H_r = 0$, woraus $H_r = - S_{r-1} \cos \alpha$. Ferner ist

$$D_0 + S_{r-1} \sin \alpha = 0, \text{ woraus } S_{r-1} = - \frac{\sum_1^{r-1} (Q)}{\sin \alpha}. \text{ Es wird demnach } H_r = \sum_1^{r-1} (Q) \cotg \alpha$$

und, da $R_r = \frac{H_r}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ ist, wird

$$R_r = \frac{\sum_1^{r-1} (Q) \cotg \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 348.$$

Der Mauerring erhält also Zug.

Das Eigengewicht erzeugt in demselben die Spannung

$$R_r^g = \frac{(G_1 + G_2 + \dots + G_{r-1}) \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 349.$$

Die größte durch zufällige Belastung erzeugte Spannung findet in einem Ringe nach Gleichung 345 statt, wenn Q_m seinen größten Werth hat. Da Q , ausser beim Mauerring, nie negativ wird, so ist die Ringspannung durch zufällige Belastung, abgesehen vom Mauerring, stets Druck. Es wird demnach

$$R_1^{\phi \text{ min}} = - \frac{P_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^{\phi \text{ min}} = - \frac{P_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.};$$

allgemein

$$R_m^{\phi \text{ min}} = - \frac{P_m \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 350.$$

Weiters ist $R_1^{\phi \text{ max}} = R_2^{\phi \text{ max}} = R_m^{\phi \text{ max}} = 0$. Die größte Druckspannung in einem Ringe findet also schon statt, wenn nur die betreffende Zone belastet ist; die Belastung der übrigen Zonen ist auf die Ringspannung ohne Einfluss. Man kann demnach auch sagen, dass die größte Ringspannung in allen Ringen bei zufälliger Belastung des ganzen Daches stattfindet.

Im Mauerring findet der größte Zug durch zufällige Belastung bei voller Belastung statt, und es ist derselbe

$$R_r^{\phi \text{ max}} = \frac{(P_1 + P_2 \dots + P_{r-1}) \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots 351.$$

Druck findet in demselben nicht statt.

δ) Spannungen in den Diagonalen.

Für dieselbe Belastungsart, welche bei den Kuppeln zu Grunde gelegt ist, ergibt sich der Spannungsunterschied in zwei benachbarten Sparren, zwischen denen die Belastungsgrenze liegt, zu

$$\Delta = \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha}$$

und die Spannung in der Diagonalen, welche dieselbe übertragen soll, höchstens zu

$$Y = \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha \cos \gamma},$$

wenn γ der Winkel zwischen der Diagonalen und dem Sparren ist. Demnach wird

Fig. 329.

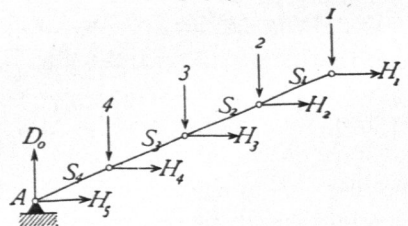
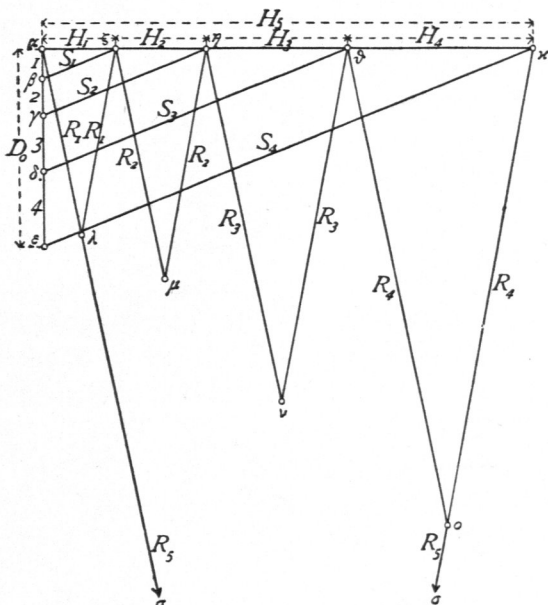


Fig. 330.



$$Y_1 \leq \frac{P_1}{n \sin \alpha \cos \gamma_1};$$

$$Y_2 \leq \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha \cos \gamma_2} \text{ etc. . 352.}$$

Um die Stabspannungen mittels Zeichnung (Fig. 329 u. 330) zu ermitteln, seien die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte 1, 2, 3, 4; alsdann ergibt sich leicht, wenn $\alpha \beta = 1$, $\beta \gamma = 2$, $\gamma \delta = 3$, $\delta \varepsilon = 4$ gemacht wird, $\beta \zeta = S_1$, $\zeta \alpha = H_1$, $\gamma \eta = S_2$, $\eta \zeta = H_2$, $\delta \vartheta = S_3$, $\vartheta \eta = H_3$, $\varepsilon \kappa = S_4$, $\kappa \vartheta = H_4$; ferner $\varepsilon \alpha = D_0$, $\alpha \lambda = H_5$, $\zeta \lambda = \lambda \alpha = R_1$, $\eta \mu = \mu \zeta = R_2$, $\vartheta \nu = \nu \eta = R_3$, $\kappa \sigma = \sigma \vartheta = R_4$ und $\alpha \sigma = \sigma \kappa = R_5$ (= Mauerringfpannung).

249.
Graphische
Ermittlung
der Stab-
spannungen.

Je nachdem nun die Kräfte 1, 2, 3, 4 die Eigengewichte oder die zufälligen Lasten bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belastung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen sind leicht zu construieren.

c) Steile Zeldächer oder Thurmdächer.

Als lothrechte Belastung ist hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belastung durch Schnee findet nicht statt, weil wegen der großen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diese lothrechte Belastung erzeugt, da die Construction genau so, wie bei den flachen Zeldächern, aus Sparren und Ringen zusammengesetzt wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen sind. Auf diese Berechnung soll deshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen spielt der Winddruck hier eine große Rolle, und es sollen die durch diesen erzeugten Spannungen berechnet werden. Zunächst soll die Berechnung für ein vierseitiges Pyramidendach gezeigt werden, für welches eine genaue Berechnung möglich ist.

1) Vierseitiges Pyramidendach.

Der Winddruck auf eine Pyramidenseite ist am größten, wenn die Windrichtung im Grundriß senkrecht zu der betreffenden Rechteckseite steht. Alsdann ist der Winddruck für 1^{qm} schräger Dachfläche (Fig. 331 u. 333) nach Gleichung 7: $v = 120 \sin(\alpha + 10^\circ)$; die vom Winde getroffene schräge Dachfläche ist

250.
Belastung.

$$F = \frac{a \lambda}{2} = \frac{a h}{2 \sin \alpha},$$

mithin der Gesamtdruck gegen eine Pyramidenseite

$$N = \frac{a h v}{2 \sin \alpha} \dots \dots \dots 353.$$

Wir denken uns nun in der Symmetrie-Ebene *II* einen ideellen Binder *ACB* (Fig. 332) und bestimmen die darin durch den Winddruck entstehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Wagrechten und Diagonalen, wie in Fig. 331 gezeichnet, an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck *W* in der Höhe e_0 über

dem Firstpunkt C ; außerdem wirken in den Knotenpunkten $C, E, F, G \dots$ die Kräfte $N_0, N_1, N_2, N_3 \dots$ senkrecht zur Dachfläche; die Größe dieser Kräfte ist leicht aus den auf die bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu ermitteln.

251.
Berechnung
d. Spannungen
im ideellen
Binder.

a) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder. Um die Sparrenspannung S_1 (Fig. 332) an der Windseite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch CE , etwa nach $II-III$, und betrachte das Bruchstück oberhalb des Schnittes. Wählt man \mathcal{F} als Momentenpunkt, so heißt die Gleichung der statischen Momente (Fig. 334):

$$0 = S_1 c_1 \sin \alpha - W(e_0 + e_1) - N_0 n_0.$$

Nun ist

$$\overline{C\mathcal{F}} = \frac{e_1}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \cos(180 - 2\alpha) = \frac{n_0}{\overline{C\mathcal{F}}} = -\cos 2\alpha, \quad \text{daher}$$

$$n_0 = -\overline{C\mathcal{F}} \cos 2\alpha = -\frac{e_1}{\sin \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{c_1 \sin \alpha} + \frac{N_0 e_1 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{c_1 \sin^2 \alpha}.$$

Für irgend einen Sparren FG ist K der Momentenpunkt, und es ergibt sich für S_3 der Werth

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2) + N_0(n_0 + n_1) + N_1 n_1 \right] - N_2 \cotg \alpha.$$

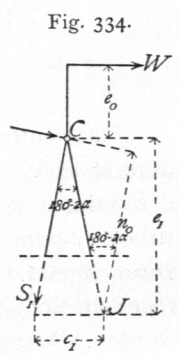
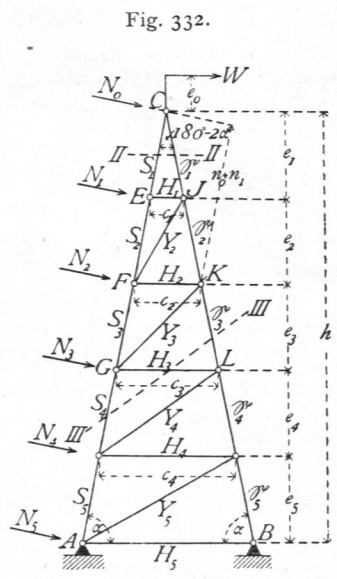
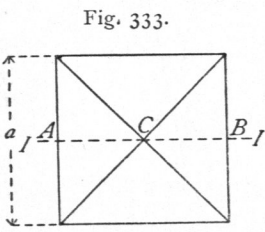
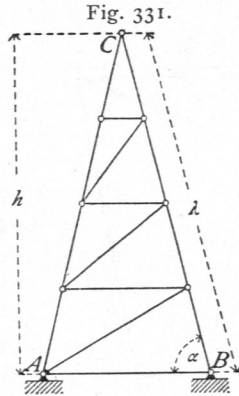
Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindseite ist G der Momentenpunkt und

$$\mathcal{S}_3 = -\frac{1}{c_3 \sin \alpha} \left[W(e_0 + e_1 + e_2 + e_3) + \frac{N_0(e_1 + e_2 + e_3) + N_1(e_2 + e_3) + N_2 e_3}{\sin \alpha} \right].$$

Eben so ergeben sich leicht alle Sparrenspannungen, sowohl auf der Windseite, wie auf der Unterwindseite.

Die Sparren auf der Windseite werden gezogen, diejenigen auf der Unterwindseite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Wagrechten und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, schneide man schräg nach $III-III'$; alsdann ist C der Momentenpunkt, und es wird



$$H_3 = - \frac{N_1 e_1 + N_2 (e_1 + e_2) + N_3 (e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3) \sin \alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3}$$

Die Spannung Y_3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt ist, durch die Momentengleichung für C gefunden. Man erhält, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C ist,

$$Y_3 = \frac{1}{y_3} \frac{N_1 e_1 + N_2 (e_1 + e_2)}{\sin \alpha} - \frac{W e_0}{y_3}$$

Ob die Diagonalen und Wagrechten Druck oder Zug erhalten, hängt wesentlich von der Größe des Momentes $W e_0$ ab. Ist $W = 0$, so werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Wagrechten gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengesetzten Windrichtung findet entgegengesetzte Beanspruchung statt.

β) Graphische Ermittlung der Spannungen im ideellen Binder. Wird zunächst von der Kraft W abgesehen, so ergibt sich ohne Schwierigkeit der in Fig. 335 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabspannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten sind.

252.
Graphische Ermittlung d. Spannungen im ideellen Binder.

Fig. 335.

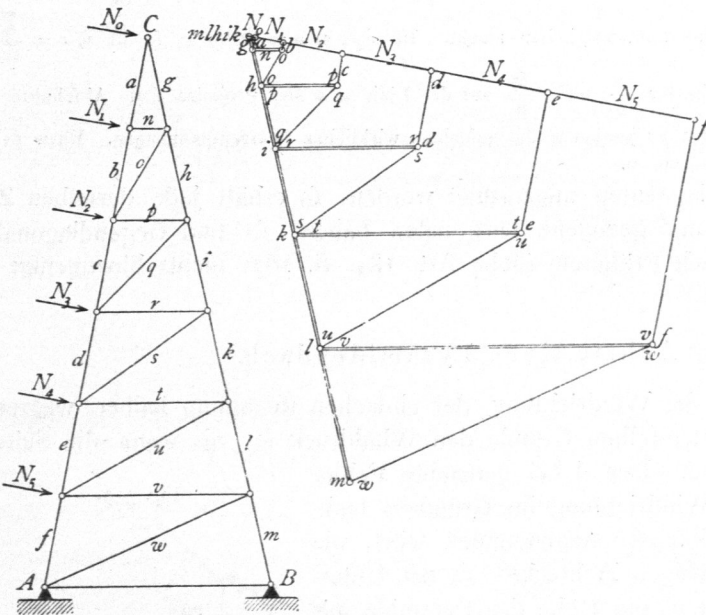
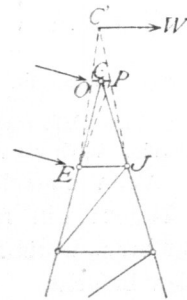


Fig. 336.



Falls noch ein Winddruck W vorhanden ist, so empfiehlt es sich, für die graphische Bestimmung der Spannungen statt der wirklich vorhandenen Stäbe EC und JC zwei Stäbe EC' und $J'C'$ einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittel-Lothrechten (Fig. 336) ist; die Ermittlung kann dann

für den Thurm mit der Spitze $EOC'PJ'$ nach der *Cremona'schen* Methode erfolgen. Die Spannungen in EC und $J'C$ können mit geringem Fehler denjenigen, welche sich für EO und PJ' ergeben haben, gleich gesetzt werden.

γ) Zurückführung der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabspannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder ACB (Fig. 337) statt. Jede Spannung in einem Stabe des ideellen Binders wird nun durch zwei Stabspannungen der beiden wirklichen Binder geleistet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel $(90 - \alpha)$ einschließen.

253.
Wirkliche Stabspannungen.

Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' ersetzt; demnach ist

$S = 2 S' \cos (90 - \delta) = 2 S' \sin \delta$,
woraus

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta}; \dots 354.$$

eben so

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{2 \sin \delta} \dots 355.$$

Ferner wird $H = 2 H'$, woraus

$$H' = \frac{H}{2}; \dots 356.$$

$$Y = 2 Y' \cos \varepsilon,$$

woraus

$$Y' = \frac{Y}{2 \cos \varepsilon} \dots 357.$$

Auch auf graphischem Wege ist die Zurückführung leicht. Man construire (Fig. 338) den Winkel $(90 - \delta)$, bzw. ε , was keine Schwierigkeiten macht. Ist $\sphericalangle r m n = 90 - \delta$, so ist $\overline{m r} = \frac{\overline{m n}}{\sin \delta}$.

Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{\mathcal{E}}{2}$ auf der Linie $m n$ ab, projicire diese Abschnitte auf $m r$; alsdann erhält man in den Projectionen die gefuchten wirklichen Sparrenspannungen. Eben so ist die Division durch $\cos \varepsilon$ vorzunehmen.

Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, so erhält jede derselben Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, so sind Gegendiagonalen einzuführen, worüber nach Früherem (siehe Art. 184, S. 167) nichts hinzugefügt zu werden braucht.

2) Achtfeitiges Pyramidendach.

254.
Belastung.

Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, wagrecht an und berechnen aus demselben Grunde den Winddruck so, als wenn die Seitenflächen lothrecht ständen. Der dabei gemachte Fehler ist gering. Wenn die Windrichtung im Grundriß senkrecht zur Seite $m n$ (Fig. 339) angenommen wird, die Seitenlänge des regelmäßigen Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a , die Höhe der Pyramide mit h und der Druck für die Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, so ist der Druck gegen die Fläche F demnach

$$W = \frac{p a h}{2} \dots 358.$$

Der Winddruck auf die Fläche F_1 (Fig. 340) ergibt sich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgendermaßen. Die (lothrecht gedachte) Fläche schließt mit der angenommenen Windrichtung (Fig. 339) einen Winkel $(90 - \gamma)$ ein; mithin ist der senkrechte Winddruck auf die Fläche für die Flächeneinheit nach Art. 27 (S. 21)

Fig. 337.

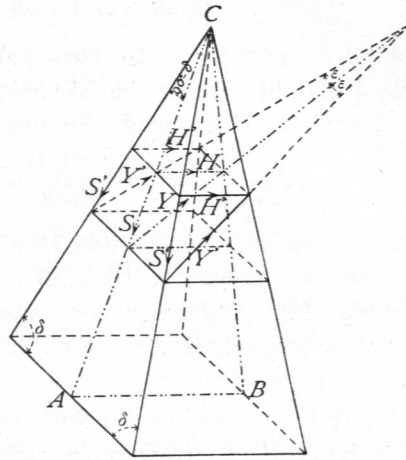


Fig. 338.

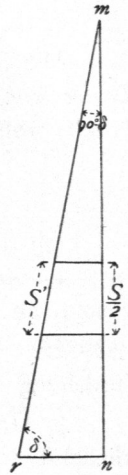


Fig. 339.

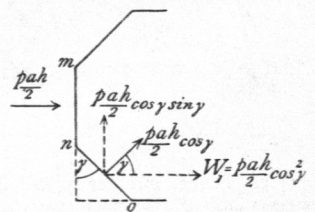
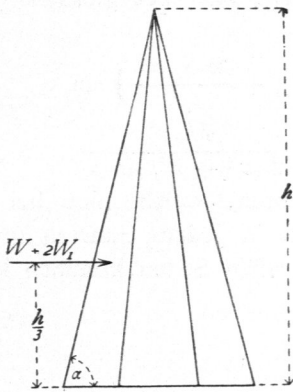


Fig. 340.



oder

$$n = p \sin(90 - \gamma)$$

$$n = p \cos \gamma,$$

und der Winddruck auf die ganze Fläche

$$\frac{p a h}{2} \cos \gamma.$$

Diese Kraft zerlegt sich nun in eine Seitenkraft, welche dieselbe Richtung hat, wie W , und in eine senkrecht hierzu stehende. Die erstere ist (Fig. 339)

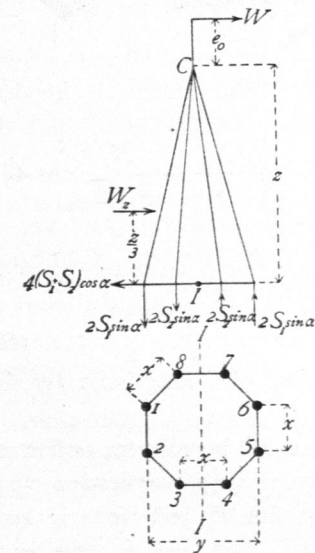
$$W_1 = \frac{p a h \cos^2 \gamma}{2} \dots 359.$$

Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 340) auf die andere Fläche F_1 ; mithin ist der gefamnte Winddruck auf die Pyramide

$$\begin{aligned} W + 2 W_1 &= \frac{p a h}{2} (1 + 2 \cos^2 45^\circ) \\ &= \frac{p a h}{2} \left(1 + \frac{2}{2}\right) = p a h \dots 360. \end{aligned}$$

Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Grundfläche der Pyramide.

Fig. 341.



Für irgend einen Pyramidenteil (Fig. 341) von der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für diesen Theil die Grundfläche bildet, mit x und die ganze Breite der Grundfläche mit y bezeichnet wird,

$$W_z = p x z \dots 361.$$

W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über dieser Grundfläche an.

Außer W_z wirke auf das Thurmkreuz (Fig. 341) noch ein Winddruck W in der Höhe e_0 über dem First; alsdann ist das Moment des Windes, bezogen auf die wagrechte, in der Grundfläche des betreffenden Thurmfückes gelegene Schwerpunktsaxe II des Querschnittes

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W(e_0 + z) \dots 362.$$

Diefes Moment muß durch die Spannung der Sparren an der betrachteten Stelle aufgehoben werden.

Sind die Spannungen in den vier Sparren $1, 2, 5, 6$, welche um $\frac{y}{2}$ von der

Axe II abstehen, S_1 , diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe II abstehenden Sparren $3, 4, 7, 8$ gleich S_2 , so ist, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die wagrechte Ebene gleich α gesetzt wird, das Moment der Sparren-

255.
Spannungen
in den
Sparren.

spannungen für die Axe II gleich $2 S_1 y \sin \alpha + 2 S_2 x \sin \alpha$; folglich muß $M_z = (2 S_1 y + 2 S_2 x) \sin \alpha$ sein. Man kann annehmen, daß bei gleicher Querschnittsfläche aller Sparren stattfindet

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x}{y}, \text{ d. h. } S_2 = \frac{S_1 x}{y}, \text{ also } M_z = \left(2 S_1 y + \frac{2 S_1 x^2}{y} \right) \sin \alpha,$$

$$M_z = \frac{2 S_1}{y} (y^2 + x^2) \sin \alpha, \text{ woraus } S_1 = \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots 363.$$

Für M_z sind der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche sich bei den verschiedenen Höhen z ergeben. Diese Spannung kann in jedem Sparren sowohl als Zug, wie als Druck stattfinden, weil der Wind von allen Seiten kommen kann. Man erhält demnach

$$S = \pm \frac{M_z y}{2 (x^2 + y^2) \sin \alpha} \dots \dots \dots 364.$$

256.
Spannungen
in den
Ringern.

Die genaue Berechnung der bei einseitiger Windbelastung in den Ringen und in den Diagonalen entstehenden Spannungen ist sehr schwierig. Wir machen, um eine einfache Rechnung zu erhalten, die Annahme, daß, wenn der Wind die Flächen EF , FO und EL (Fig. 342) belastet, die Punkte L und O als feste Stützpunkte betrachtet werden können. Alsdann wirkt auf EF die Kraft N_1 , auf EL und FO je

$N_1 \cos 45^\circ = \frac{N_1}{\sqrt{2}}$; in E und F wirken alsdann je $\frac{N_1}{2}$ und $\frac{N_1}{2\sqrt{2}}$, wie in Fig. 343

Fig. 342.

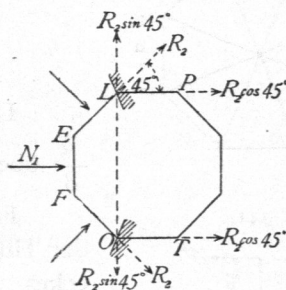
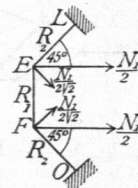


Fig. 343.



gezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingungen für Punkt F lauten nun:

$$0 = R_1 + \frac{N_1}{2\sqrt{2}} \sin 45^\circ - R_2 \sin 45^\circ \text{ und } 0 = R_2 \cos 45^\circ + \frac{N_1}{2} + \frac{N_1}{2\sqrt{2}} \cos 45^\circ,$$

woraus

$$R_2 = -1,06 N_1; \dots \dots \dots 365.$$

ferner

$$R_1 = -N_1 \dots \dots \dots 366.$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, so sind alle Ringtheile für die größere Spannung $R_2 = -1,06 N_1$ zu construiren.

Um die in den Dachflächen angebrachten Diagonalen zu berechnen, bestimme man die auf die einzelnen Punkte L , bzw. O (Fig. 342 u. 343) wirkenden wagrechten Kräfte. Auf L und O wirkt je R_2 , und es zerlegt sich R_2 jederseits in eine Seitenkraft $R_2 \cos 45^\circ$, welche in die Linie LP , bzw. OT fällt, und in eine senkrecht dazu gerichtete Seitenkraft $R_2 \sin 45^\circ$, welche in die Richtung LO fällt. Um die beiden letzteren Seitenkräfte aufzuheben, empfiehlt sich die Anbringung der Zugstäbe LO , wie in Fig. 342 punktirt; der in diesen herrschende Zug ist $R_2 \sin 45^\circ$. Die in die Ebene LPC , bzw. OTC fallenden Seitenkräfte sind nun durch das in diesen angeordnete Gitterwerk auf die festen Stützpunkte der Thurmpyramide zu übertragen. Um die Diagonalen zu berechnen, denke man wieder zunächst die beiden Dachflächen durch einen in der Symmetrie-Ebene liegenden, ideellen Binder ersetzt,

257.
Spannungen
in den
Diagonalen.

ermittle die unter dem Einflusse der Lasten $R_2 \cos 45^\circ$ in demselben entstehenden Diagonalspannungen auf bekannte Weise und aus diesen ideellen Diagonalspannungen die wirklichen Diagonalspannungen genau so, wie in Art. 253 (S. 241) angegeben ist. Als Belastung der einzelnen Knotenpunkte des ideellen Binders ist selbstverständlich überall $2 R_2 \cos 45^\circ$ einzuführen.

3) Standfestigkeit der Thurmdächer.

Durch die Windbelastung werden die Sparren an der Windseite auf Zug, diejenigen an der Unterwindseite auf Druck beansprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der im Sparren mögliche grösste Zug in Folge des Winddruckes grösser ist, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigstens so gross ist, wie der grösste im Sparren herrschende Zug. Dieser Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und es muss das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, wenigstens so gross sein, wie der grösstmögliche Zug in demselben. Es empfiehlt sich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa so weit, dass das Mauergewicht doppelt so gross ist, als der grösste Zug im Sparren.

258.
Verankerung.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachstühle«.

- UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.
 CORDIER, E. *Equilibre stable des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.
 RITTER, Dr. A. *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen.* 3. Aufl. Hannover 1873.
 FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la construction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.
 CARGILL, Th. *The strains upon bridge girders and roof trusses etc.* London 1873.
 SCHREVE, S. *A treatise on the strength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.
 TETMAJER, L. *Die äusseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen.* Zürich 1875.
 NICOUR, Ch. *Calcul d'un comble en fer du système Polonceau.* Paris 1875.
 SCHWEDLER, W. *Die Construction der Kuppeldächer.* 2. Aufl. Berlin 1878.
 TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.
 Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. Heft 10: *Berechnung der Dachwerke.* Von W. Jeep. Leipzig 1876.
 WEYRAUCH, J. J. *Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer.* Leipzig 1888.
-