I. Theil, 2. Abtheilung:

DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

4. Abſchnitt.

Dachſtühle.

201. Dachbinder.

Der vorliegende Abſchnitt wird ſich nur mit der Berechnung der Dach*binder* beſchäftigen. Die Dachbinder bilden den weſentlichſten Theil der Dachſtühle; ſie ſind die Hauptträger der Dach-Conſtructionen und haben die übrigen Theile derſelben, wie Pfetten, Sparren etc.[26]) zu tragen. Sie werden in beſtimmten Abſtänden von einander angeordnet.

Was die Querſchnittsermittelung der Pfetten, der Sparren, des Windverbandes etc. betrifft, ſo iſt einerſeits in den beiden vorhergehenden Abſchnitten bereits das Erforderliche vorgeführt worden; andererſeits wird im III. Theile dieſes »Handbuches« (Band 3, Heft 2, Abſchn. 2, E: Dachſtuhl-Conſtructionen) nochmals auf dieſen Gegenſtand zurückgekommen werden.

Bei den meiſten Dach-Conſtructionen iſt jeder Binder unter dem Einfluſſe der äuſseren Kräfte für ſich ſtabil, ſo lange die letzteren nur in der Ebene des Binders wirken; eine Ausnahme machen die neueren Kuppeldächer und gewiſſe Arten von Zeltdächern; bei den beiden letzteren bilden alle Binder zuſammen ein im Gleichgewicht befindliches Syſtem.

Für die Gröſse der Belaſtungen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen ſind, iſt die Stellung der Binder zu einander von groſser Wichtigkeit. Die Binder ſind entweder einander im Grundriſs parallel oder ſchlieſsen von Null verſchiedene Winkel mit einander ein.

Nach der Art und Weiſe, wie die Dachbinder unterſtützt ſind, laſſen ſich die Dächer unterſcheiden als:

1) *Balkendächer* oder Dächer, deren Binder bei lothrechten Belaſtungen nur lothrechte Stützendrücke erleiden (Fig. 233);

Fig. 233.

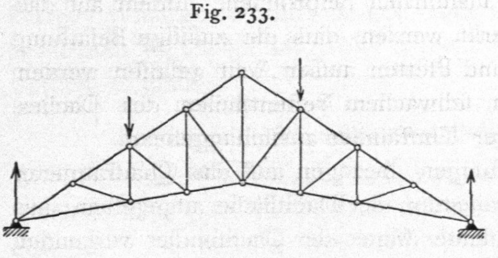
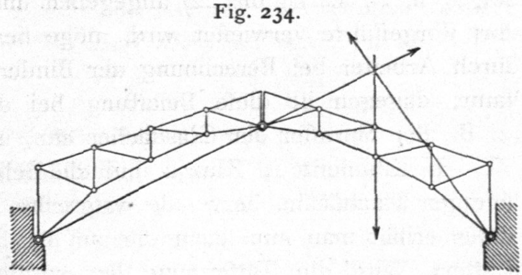


Fig. 234.

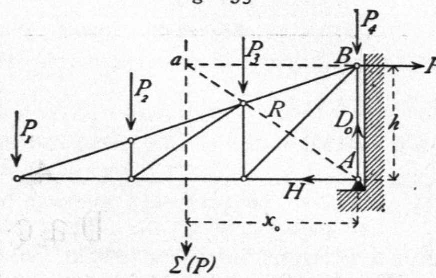


26) Es kann hier nicht der Ort ſein, die Begriffe »Pfetten, Sparren etc.« zu definiren, eben ſo wenig als an dieſer Stelle auf die Erklärung der verſchiedenen Benennungen von Dächern, wie »Sattel-, Walm-, Pult-, Zelt-, Kuppel- etc. Dächer«, eingegangen werden kann. Es ſei dieſfalls auf Theil III dieſes »Handbuches« (Bd. 3, Heft 2, Abſchn. 2, D: Dächer und Dachformen) verwieſen.

2) Sprengwerksdächer oder Dächer, deren Binder ſelbſt bei nur lothrechten Belaſtungen ſchiefe Stützendrücke erhalten (Fig. 234), und

3) Conſole- oder Kragdächer oder Dächer, auf deren Binder an den Unterſtützungsſtellen ein Stützendruck und ein Moment wirkt (Fig. 235).

Fig. 235.



Es ſollen im Vorliegenden nur diejenigen Dachbinder behandelt werden, deren Conſtruction eine genaue Berechnung geſtattet, alſo einmal nur ſolche mit nicht mehr als zwei Auflagern, ſodann von dieſen nur jene, welche ohne Rückſicht auf den Biegungswiderſtand der Verbindungsſtellen auch für einſeitige und ſchiefe Belaſtungen ſtabil ſind. Nicht ſtabil ſind ohne Rückſicht auf den erwähnten Biegungswiderſtand die Dächer mit liegendem Dachſtuhle und die ſog. Hängewerksdächer mit zwei Hängeſäulen, falls, wie gewöhnlich, die Diagonale im Mittelfelde fehlt. Verzichtet man bei letzteren auf die Annahme verſchieden belaſteter Dachflächen, ſo kann die Berechnung genau ſo durchgeführt werden, wie in Art. 197 u. 198 (S. 181 u. 182) für den Trapezträger gezeigt iſt.

Solche Dachbinder kommen übrigens faſt nur in Holz und in ſolchen Spannweiten vor, für welche eine vielhundertjährige Erfahrung die Querſchnittsabmeſſungen feſt geſtellt hat. Auſsergewöhnliche Spannweiten mit ſolchen Dachbindern zu überſpannen, iſt nicht empfehlenswerth. Eine Berechnung iſt wohl unter gewiſſen Annahmen möglich, die Zuverläſſigkeit derſelben hängt aber in hohem Maſse davon ab, wie weit die Annahmen zutreffen. Da aber für groſse Dachweiten das Eiſen als vorzügliches und durchaus zuverläſſiges Material zur Verfügung ſteht, ſollte man daſſelbe für ſolche Dachweiten ſtets wählen und ſtatiſch beſtimmte, genau berechenbare Conſtructionen anordnen. Es iſt demnach kein Bedürfniss vorhanden, die Berechnung der oben als nicht ſtabil bezeichneten Dachbinder hier vorzuführen.

---

1. Kapitel.

Belaſtungen und Auflagerdrücke.

a) Belaſtungen.

202. Knotenpunkts-belaſtungen.

Die Belaſtungen, welche auf die Dächer wirken und aus dem Eigengewichte, der Belaſtung durch Schneedruck und durch Winddruck beſtehen, ſind in Art. 23, 26, 27 u. 28 (S. 18 bis 22) angegeben und ausführlich beſprochen. Indem auf das dort Vorgeführte verwieſen wird, möge bemerkt werden, daſs die zufällige Belaſtung durch Arbeiter bei Berechnung der Binder und Pfetten auſser Acht gelaſſen werden kann; dagegen iſt dieſe Belaſtung bei den ſchwachen Nebentheilen des Daches (z. B. den Sproſſen der Glasdächer etc.) unter Umſtänden ausſchlaggebend.

In Abſchnitt 1, Kap. 2 ſind die Belaſtungen, bezogen auf das Quadratmeter ſchräger Dachfläche, bezw. die wagrechte Projection der Dachfläche angegeben; aus dieſen erhält man nun leicht die auf das laufende Meter der Dachbinder wirkenden Laſten. Wird die Entfernung der parallel zu einander angeordneten Dachbinder gleich b geſetzt, ſo ergiebt ſich das Eigengewicht und die Schneelaſt für das laufende Meter Stützweite der Binder, wenn noch q' das Eigengewicht für 1 qm Grundfläche einſchl. Bindergewicht bezeichnet, zu

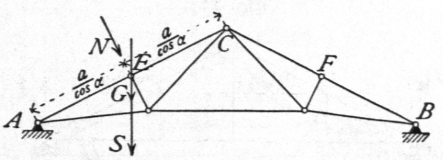
$$g = b\,q' \quad \text{und} \quad s = 75\,b\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 281.$$

ferner der Winddruck für das laufende Meter fchräger Dachlinie zu

$$n = b\,\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 282.$$

Sind die Dachbinder einander nicht parallel, fo ift die Belaftung für das laufende Meter Binder veränderlich, entfprechend der veränderlichen Dachfläche, welche auf die einzelnen Bindertheile kommt.

Fig. 236.



Die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Laften werden nun erhalten, indem man die Belaftung für das laufende Meter Stützweite, bezw. fchräger Dachlinie mit derjenigen Länge multiplicirt, welche auf einen Knotenpunkt entfällt. Für den Knotenpunkt E (Fig. 236) wird demnach

$$G = a\,b\,q', \quad S = 75\,a\,b \quad \text{und} \quad N = \frac{a}{\cos\alpha}\,b\,\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 283.$$

Man könnte die Werthe für G, S und N auch nach der Theorie der continuirlichen Träger beftimmen, indem man $A\,E\,C$ als continuirlichen Träger auf 3 Stützen auffafst; doch dürfte die angegebene einfachere Methode fich mehr empfehlen, da die Annahmen, welche der Berechnung der continuirlichen Träger zu Grunde gelegt werden, hier doch nicht genau erfüllt find und die verwickeltere Rechnung keine entfprechend genaueren Werthe giebt.

Sämmtliche Laften werden in den Knotenpunkten der Binder wirkend angenommen. Die Eigengewichte wirken zum allergröfsten Theile in den Knotenpunkten derjenigen Gurtung, die in den Dachflächen liegt; nur ein ganz geringer Bruchtheil wirkt in den Knotenpunkten der anderen Gurtung. Meiftens kann man annehmen, dafs die Eigenlaften ganz in den erfteren Knotenpunkten angreifen. 203. Belaftungs-annahmen.

Die Windbelaftung kann nur einfeitig wirken; denn da die Windrichtung einen Winkel $\beta = 10$ Grad mit der wagrechten Ebene einfchliefst, fo kann der Wind beide Dachflächen nur dann treffen, wenn diefe einen kleineren Winkel mit der Wagrechten bilden, als 10 Grad. Für fo flache Dächer ift aber der Winddruck fo gering, dafs er ungefährlich ift. Der Winddruck ift alfo ftets einfeitig zu rechnen.

Der Schnee endlich kann das ganze Dach oder einen Theil deffelben belaften. Wenn nun auch für manche Stäbe unter Umftänden eine Schneebelaftung über einen beftimmten Bruchtheil des Daches die ungünftigfte Beanfpruchung ergeben follte, fo werden wir doch diefe der Berechnung nicht zu Grunde legen, weil diefelbe nur in den allerfeltenften Fällen einmal vorkommen kann; vielmehr werden wir nur volle Belaftung des Daches und Belaftung der einen Dachhälfte durch Schnee in das Auge faffen. Wir werden fpäter zeigen, dafs die zweite Belaftungsart zu Ergebniffen führt, aus denen die Spannungen für volle Schneebelaftung ohne Schwierigkeit abgelefen werden können.

b) Auflagerdrücke bei Balkendächern.

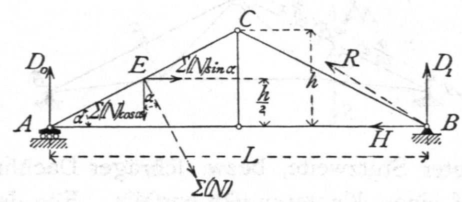
Die durch lothrechte Belaftungen (Eigengewicht und Schneedruck) erzeugten Stützendrücke find, da die Dachbinder genau wie Träger auf zwei Stützen wirken, eben fo zu ermitteln, wie bei den »Trägern« (Kap. 2 des vorhergehenden Abfchnittes) gezeigt worden ift. 204. Lothrechte Belaftungen.

Sind die Auflagerdrücke zu ermitteln, welche durch die fchiefen Winddruckbelaftungen erzeugt werden, fo haben wir zwei Fälle zu unterfcheiden: entweder find alle Winddrücke einander parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde 205. Schiefe Belaftungen.

getroffene Dachfläche eine Ebene iſt, oder die Winddrücke ſind nicht parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde getroffene Dachfläche ſich aus mehreren Ebenen zuſammenſetzt.

Für beide Fälle iſt zunächſt klar, daſs der Dachbinder nicht einfach frei auf die Stützpunkte gelagert werden darf. Denn iſt $\Sigma\,(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 237), ſo hat $\Sigma\,(N)$ eine wagrechte Seitenkraft $\Sigma\,(N) \sin \alpha$. Gleichgewicht iſt alſo nur möglich, wenn Seitens des einen der beiden Auflager eine wagrechte Kraft $H = \Sigma\,(N) \sin \alpha$ auf den Binder wirkt; es muſs alſo das Dach in A oder B unverſchieblich mit dem Auflager verbunden werden.

Fig. 237.



Wollte man ein eiſernes Dach in beiden Punkten A und B feſt mit dem Auflager verbinden, ſo würde daſſelbe bei Aenderung der Temperatur nicht im Stande ſein, ſich auszudehnen, bezw. zuſammenzuziehen; es würden demnach durch die Temperaturveränderungen weſentliche Spannungen im Dache entſtehen, bezw. es würden die ſtützenden Wände gelockert werden. Man conſtruirt deſshalb bei eiſernen Dachſtühlen das eine Auflager ſo, daſs daſſelbe eine freie Ausdehnung und Zuſammenziehung geſtattet; das andere ſtellt eine feſte Verbindung zwiſchen Träger und ſtützender Wand her. Wir wollen in der Folge ſtets ein feſtes und ein bewegliches Auflager, und zwar das Auflager bei A als das bewegliche, dasjenige bei B als das feſte annehmen. Nehmen wir ferner an, daſs das Auflager bei A eine Bewegung ohne Reibung geſtatte, ſo kann der Stützendruck bei A nur lothrecht wirken. Dieſe Annahme iſt nicht genau richtig, aber für die Praxis ausreichend. Der Auflagerdruck bei B dagegen kann beliebige Richtung annehmen.

Es ergeben ſich hier verſchiedene Auflagerdrücke, je nachdem die Windbelaſtung auf derjenigen Dachſeite ſtattfindet, an welcher das bewegliche Auflager A iſt, oder auf derjenigen, an welcher das feſte Auflager B liegt.

206. Parallele Winddrücke.

1) **Die Winddrücke ſind parallel.** α) **Diejenige Dachhälfte iſt belaſtet, an welcher das bewegliche Auflager liegt** (Fig. 237). Die Mittelkraft $\Sigma\,(N)$ ſämmtlicher Winddrücke greife in der Mitte von AC, etwa in E, an und ſei gleich der Summe aller Einzeldrücke. $\Sigma\,(N)$ zerlegt ſich im Punkte E in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft $\Sigma\,(N) \sin \alpha$ und $\Sigma\,(N) \cos \alpha$; in A wirkt der lothrechte Stützendruck D_0, in B der ſchiefe Auflagerdruck R, welcher gleichfalls in eine wagrechte Seitenkraft H und in eine lothrechte Seitenkraft D_1 zerlegt wird. Die drei Unbekannten D_0, D_1 und H erhält man durch die drei Gleichgewichtsbedingungen. Es iſt

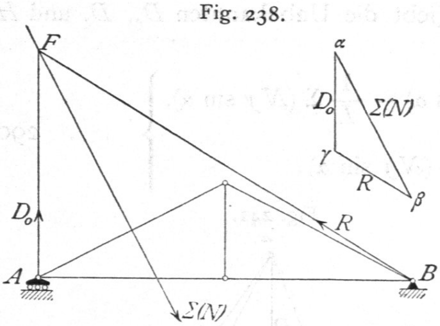
$$0 = \Sigma\,(N) \sin \alpha - H, \quad \text{woraus} \quad H = \Sigma\,(N) \sin \alpha \,; \quad \ldots \quad 284.$$

$$D_0\, L + \Sigma\,(N) \sin \alpha \, \frac{h}{2} - \Sigma\,(N) \cos \alpha \, \frac{3}{4}\, L = 0, \quad \text{woraus, da} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\,h}{L},$$

$$D_0 = \Sigma\,(N)\, \frac{\cos \alpha}{4}\, (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)\,; \quad \ldots \quad 285.$$

$$D_1\, L - \Sigma\,(N) \sin \alpha \, \frac{h}{2} - \Sigma\,(N) \cos \alpha \, \frac{L}{4} = 0, \quad \text{woraus} \quad D_1 = \frac{\Sigma\,(N)}{4 \cos \alpha} \quad . \quad 286.$$

Fig. 238.



Auf graphiſchem Wege geſchieht die Ermittelung der Auflagerdrücke in der durch Fig. 238 veranſchaulichten Weiſe.

Die drei auf das Dach wirkenden Kräfte D_0, R und $\Sigma\,(N)$ halten daſſelbe im Gleichgewicht, ſchneiden ſich alſo in einem Punkte: die Kraft R geht ſonach durch den Schnittpunkt F der Kräfte D_0 und $\Sigma\,(N)$. R geht auch durch B; alſo iſt $B\,F$ die Richtung der Kraft R. Das Kräftedreieck für dieſe drei Kräfte ergiebt, wenn $\alpha\,\beta = \Sigma\,(N)$ iſt, $R = \beta\,\gamma$ und $D_0 = \gamma\,\alpha$.

β) Diejenige Dachhälfte iſt belaſtet, an welcher das feſte Auflager liegt (Fig. 239). Die Mittelkraft $\Sigma\,(N)$ greift in der Mitte der rechtsſeitigen Dachfläche, in E', an und zerlegt ſich in eine lothrechte und eine wagrechte Seitenkraft. Wir erhalten durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen:

$$0 = H' - \Sigma\,(N) \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad H' = \Sigma\,(N) \sin\alpha\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 287.$$

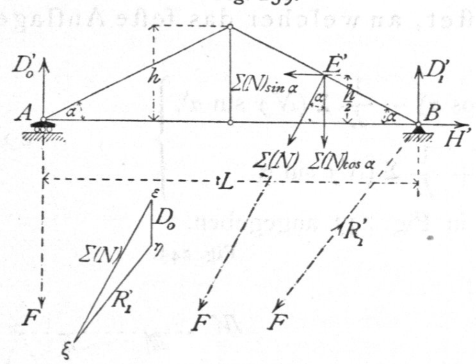
$$0 = D'_0\,L - \Sigma\,(N) \sin\alpha\,\frac{h}{2} - \Sigma\,(N) \cos\alpha\,\frac{L}{4}, \quad \text{woraus} \quad D'_0 = \frac{\Sigma\,(N)}{4 \cos\alpha}\,; \quad 288.$$

$$0 = D'_1\,L + \Sigma\,(N) \sin\alpha\,\frac{h}{2} - \Sigma\,(N) \cos\alpha\,\frac{3}{4}\,L,$$

woraus

$$D'_1 = \frac{\Sigma\,(N) \cos\alpha}{4}\,(3 - \mathrm{tg}^2\,\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 289.$$

Fig. 239.



Man ſieht, es iſt $D_0 = D'_1$, $D_1 = D'_0$ und $H = H'$; nur iſt bei H' der Sinn demjenigen von H entgegengeſetzt.

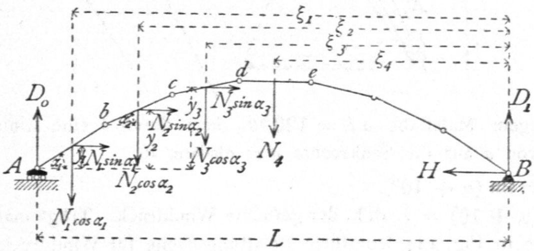
Durch Conſtruction laſſen ſich die Auflagerdrücke im vorliegenden Falle, wie in Fig. 239 gezeigt, ermitteln.

Die drei Kräfte D'_0, $\Sigma\,(N)$ und die Mittelkraft R'_1 von H' und D'_1 ſind im Gleichgewichte, ſchneiden ſich daher in einem Punkte, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem die Richtungen von D'_0 und $\Sigma\,(N)$ ſich ſchneiden, alſo in F. Die Verbindungslinie der beiden Punkte B und F ergiebt demnach die Richtung der Kraft R'_1. Iſt $\Sigma\,(N) = \varepsilon\,\xi$, ſo wird $\xi\,\eta = R'_1$ und $\eta\,\varepsilon = D'_0$.

207. Nicht parallele Winddrücke.

2) Die Winddrücke haben nicht parallele Richtungen. α) Diejenige Dachhälfte iſt belaſtet, an welcher das bewegliche Auflager liegt. Bei gebrochener Dachfläche werden die Winddrücke, welche auf die einzelnen Flächen wirken, nach den Angaben in Art. 28 (S. 22) ermittelt. Bei einer cylindriſchen Dachfläche genügt es, einzelne Dachtheile zuſammenzufaſſen und für jeden dieſer Theile den Winddruck unter Zugrundelegung eines mittleren Neigungswinkels α zu beſtimmen. Man erhält etwa N_1 für die Strecke $A\,b$ (Fig. 240), N_2 für $b\,c$ etc. Die Zerlegung jeden Winddruckes in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft und die

Fig. 240.



Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen ergiebt die Unbekannten D_0, D_1 und H. Es wird

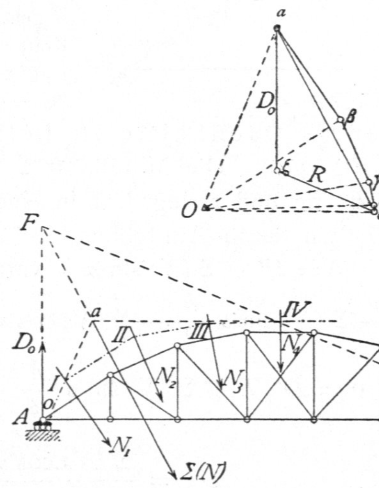
$$\left.\begin{array}{l} H = \Sigma\,(N \sin\alpha), \quad D_0 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\,\xi\cos\alpha) - \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\,y\sin\alpha), \\ D_1 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,[N\,(L-\xi)\cos\alpha] + \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\,y\sin\alpha). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 290.$$

Die graphifche Ermittelung der Auflagerdrücke zeigt Fig. 241.

Die einzelnen Winddrücke (N_1, N_2, N_3 . . .) werden mittels eines Kraftpolygons $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ zu einer Mittelkraft vereinigt; hierauf wird für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $O\,I\,II\,III\,IV$ conftruirt. Alsdann geht die Mittelkraft durch den Schnittpunkt a der äufserften Seilpolygonfeiten und ift parallel zu $\alpha\,\varepsilon$. Jetzt erfetzt $\Sigma\,(N)$ alle Winddrücke, und es wirken nur noch die drei Kräfte D_0, $\Sigma\,(N)$ und R, fo dafs die graphifche Ermittelung von D_0 und R in der foeben gezeigten Weife erfolgen kann. Es ergiebt fich $\varepsilon\,\xi = R$ und $\xi\,\alpha = D_0$.

Wenn die Dachfläche aus einzelnen ebenen Dach- und Laternenflächen fich zufammenfetzt, fo ift das Verfahren genau fo, wie eben angegeben.

Fig. 241.



β) Diejenige Dachhälfte ift belaftet, an welcher das fefte Auflager liegt (Fig. 242). Die Berechnung ergiebt

$$\left.\begin{array}{l} H' = \Sigma\,(N \sin\alpha), \quad D'_1 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\,\xi'\cos\alpha) - \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\,y\sin\alpha), \\ D'_0 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,[N\,(L-\xi')\cos\alpha] + \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\,y\sin\alpha). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 291.$$

Die Conftruction von D'_0 und R'_1 ift in Fig. 243 angegeben.

Fig. 242.

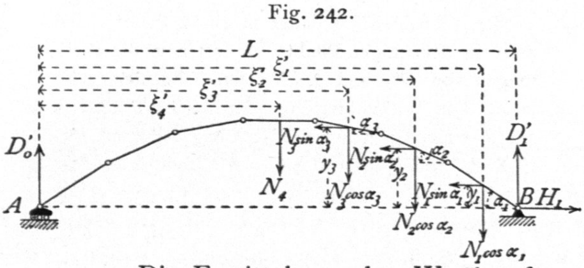
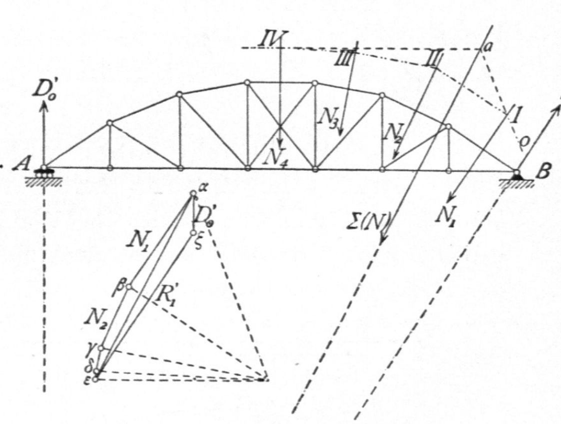


Fig. 243.



Die Ermittelung der Werthe für N_1, N_2, N_3 kann bequem graphifch vorgenommen werden. Nach Art. 28 (S. 22) ift der Winddruck $\nu = 120 \sin(\alpha + 10^0)$ für 1 qm. Diefes ν ift nach Fig. 244 leicht für irgend einen Winkel α zu conftruiren.

Man mache in der Dachfläche nach beliebigem Mafsftabe $a\,b = 120$ kg, lege durch b eine Linie parallel zur Windrichtung und fälle auf diefelbe von a aus die Senkrechte $a\,c$; alsdann ift

$$\overline{a\,c} = \overline{a\,b}\,\sin(\alpha + 10^0).$$

Da $\overline{a\,b} = 120$ kg ift, fo ift $\overline{a\,c} = 120 \sin(\alpha + 10) = \nu$, d. h. der gefuchte Winddruck. Trägt man $a\,c$ fenkrecht zur Dachfläche ab, fo erhält man die in Fig. 244 fchraffirte Belaftungsfläche für Winddruck.

Fig. 244.

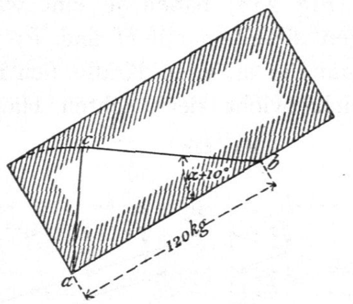


Fig. 245.

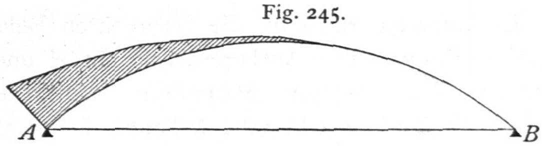
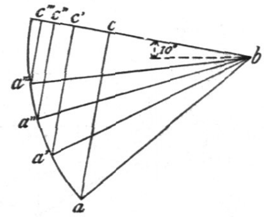


Fig. 246.



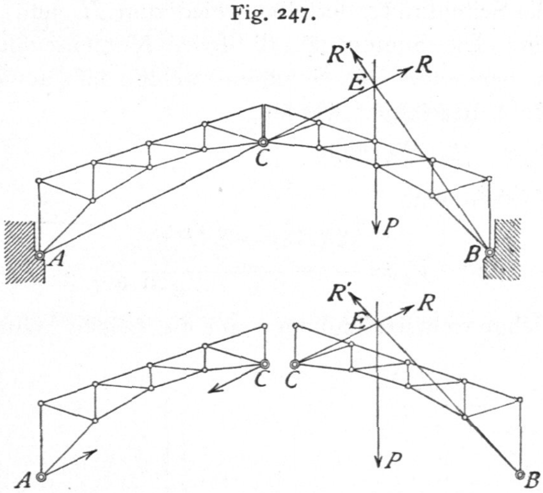
Bildet die Dachfläche eine Cylinderfläche, fo wähle man eine genügend grofse Anzahl von Punkten aus, für welche man die gezeigte Conftruction vornimmt. Man erhält die in Fig. 245 gezeichnete Belaftungsfläche und kann daraus leicht die Gröfse des Winddruckes ermitteln, welcher auf die einzelnen Stützpunkte (Knotenpunkte der Conftruction) entfällt.

Bequemer macht man die Conftruction der Winddrücke in einer befonderen Zeichnung (Fig. 246) und erhält $a\,c$, bezw. $a'\,c'$, $a''\,c''$ ...

c) Auflagerdrücke bei Sprengwerksdächern.

Von den Sprengwerksdächern follen hier nur diejenigen behandelt werden, deren Binder mit drei Gelenken conftruirt find (Fig. 247). Zwei Gelenke befinden fich an den Auflagerpunkten A und B, ein drittes C gewöhnlich in der Bindermitte. Betrachtet man zunächft den Träger felbft als gewichtslos, fo ergiebt fich folgendes allgemeine Gefetz: Jede Belaftung der einen Hälfte, etwa $C\,B$, erzeugt im Auflagerpunkt der nicht belafteten Hälfte eine Kraft, deren Richtung durch den betreffenden Auflagerpunkt, hier A, und das Mittelgelenk C beftimmt ift. 208. Allgemeines.

Fig. 247.



Eine Laft P auf der Hälfte $B\,C$ erzeugt alfo in A einen Stützendruck R mit der Richtung $A\,C$, und da auf das Syftem nur drei Kräfte, nämlich die Laft P und die Drücke der Auflager A und B, wirken, fo müffen fich diefelben in einem Punkte fchneiden. Daraus folgt, dafs der Stützendruck R' von B aus durch den Schnittpunkt E der Richtungen $A\,C$ und P geht.

Der Beweis obigen Satzes ergiebt fich folgendermafsen. Auf die rechte Hälfte $B\,C$ wirken P, R und R', auf die linke Hälfte eine Kraft in A, eine zweite in C. Beide find vor der Hand unbekannt; doch wiffen wir, dafs nach dem Gefetze von Wirkung und Gegenwirkung die in C vom Theile rechts auf den Theil links übertragene Kraft genau fo grofs ift, wie die Kraft, welche in C vom linken Theile auf den rechten Theil ausgeübt wird, d. h. wie R; nur ift der Sinn beider entgegengefetzt. Die beiden auf die unbelaftete linke Hälfte wirkenden Kräfte halten diefen Theil im Gleichgewicht; dies ift aber nur möglich, wenn beide in diefelbe Richtung fallen, d. h. in diejenige, welche durch die beiden Angriffspunkte A und C gegeben ift, entgegengefetzten Sinn und gleiche Gröfse haben; der Stützendruck von A geht alfo durch C. Damit ift obiger Satz allgemein bewiefen.

209. Lothrechte Belaſtungen.

Es kommen zunächſt die lothrechten Belaſtungen (Eigengewicht und Schneedruck) in Frage. Die Auflagerdrücke in A und B (Fig. 248) haben je eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft. Wir bezeichnen dieſelben mit H und V, H_1 und V_1. Sind dieſe 4 Werthe bekannt, ſo iſt alles auf die äuſseren Kräfte ſich Beziehende bekannt. Wir betrachten zuerſt das Gleichgewicht der rechten Hälfte

Fig. 248.

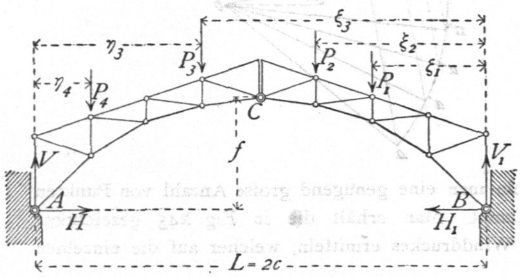
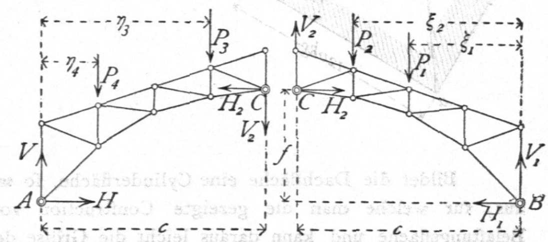


Fig. 249.



(Fig. 249). In C wirkt auf dieſelbe eine Kraft, deren Seitenkräfte H_2 und V_2 ſein mögen. Alsdann iſt die Summe der ſtatiſchen Momente für B als Drehpunkt gleich Null, mithin

$$H_2 f + V_2 c - \Sigma (P \xi) = 0.$$

Betrachtet man nun die linke Hälfte (Fig. 249), ſo wirkt auf dieſe in C eine genau ſo groſse Kraft, wie in C auf die rechte Hälfte wirkt; nur iſt der Sinn entgegengeſetzt. Es werden demnach die Seitenkräfte derſelben wiederum H_2 und V_2, aber mit entgegengeſetztem Sinne ſein. Die Summe der ſtatiſchen Momente für A als Drehpunkt iſt gleich Null; mithin, wenn ſtets die Summen, welche ſich auf die linke Hälfte beziehen, mit dem Zeiger 1 bezeichnet werden,

$$H_2 f - V_2 c - \Sigma_1 (P \eta) = 0.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen erhält man

$$H_2 = \frac{\Sigma (P \xi) + \Sigma_1 (P \eta)}{2 f} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{\Sigma (P \xi) - \Sigma_1 (P \eta)}{L} \quad . \; . \; . \quad 292.$$

Die Anwendung der übrigen Gleichgewichtsbedingungen auf die beiden Hälften ergiebt nun leicht

$$\left. \begin{aligned} H = H_2 = H_1 &= \frac{\Sigma (P \xi) + \Sigma_1 (P \eta)}{2 f}, \\ V = V_2 + \Sigma_1 (P) &= \frac{\Sigma (P \xi) + \Sigma_1 (P \xi)}{L}, \\ V_1 = \Sigma (P) - V_2 &= \frac{\Sigma [P (L - \xi)] + \Sigma_1 [P (L - \xi)]}{L}. \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad 293.$$

Die lothrechten Seitenkräfte der Lagerdrücke ſind demnach genau ſo groſs, wie bei gleicher Belaſtung an einem Balkenträger von der Spannweite L. Jetzt ſind auch die Kräfte R und R_1, ſo wie deren Winkel α und α_1 mit der Wagrechten gefunden. Es werden

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}; \quad R_1 = \sqrt{H_1{}^2 + V_1{}^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_1}{H_1} \quad 294.$$

Beifpiel. 1) Die beiden Dachhälften feien gleich belaftet, je mit g auf die Längeneinheit der wagrechten Projection (Fig. 250). Dann ift

$$\Sigma(P) = \underset{1}{\Sigma}(P) = g\,c; \quad \Sigma(P\,\xi) = \underset{1}{\Sigma}(P\,\eta) = \frac{g\,c^2}{2};$$

$$H = \frac{g\,c^2}{2f}; \quad V_2 = 0; \quad V = V_2 + \underset{1}{\Sigma}(P) = g\,c; \quad V_1 = \Sigma(P) - V_2 = g\,c \quad . \; . \; . \quad 295.$$

Fig. 250.

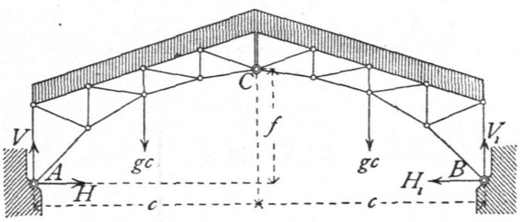
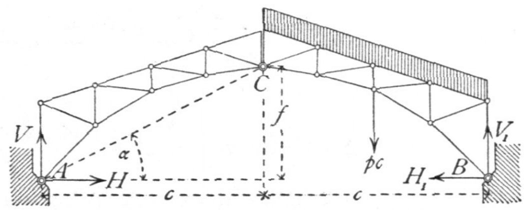


Fig. 251.



2) Die eine (rechte) Hälfte fei mit p für die Längeneinheit der wagrechten Projection belaftet, die andere (linke) Hälfte fei unbelaftet (Fig. 251). Alsdann ift

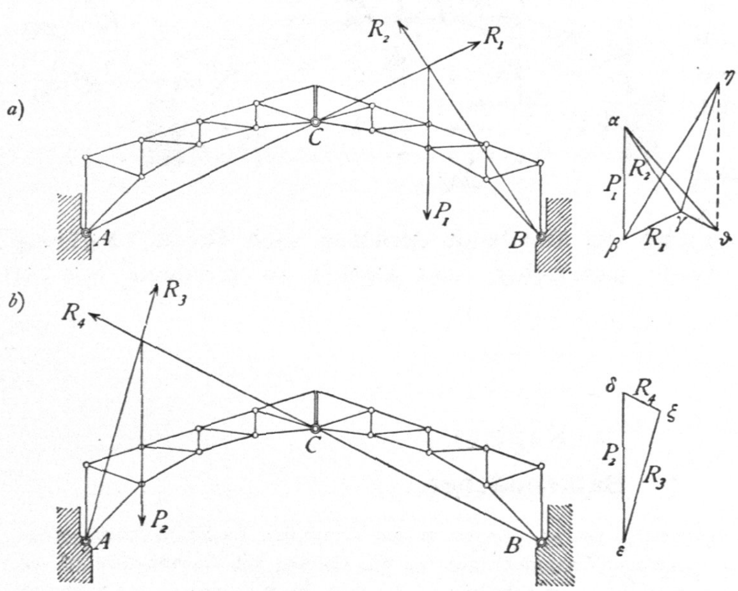
$$\Sigma(P) = p\,c; \quad \underset{1}{\Sigma}(P) = 0; \quad \Sigma(P\,\xi) = \frac{p\,c^2}{2}; \quad \underset{1}{\Sigma}(P\,\eta) = 0;$$

$$H_2 = H = H_1 = \frac{p\,c^2}{4f}; \quad V_2 = \frac{p\,c^2}{2 \,.\, 2c} = \frac{p\,c}{4}; \quad V = \frac{p\,c}{4}; \quad V_1 = \frac{3\,p\,c}{4} \quad . \; . \; . \quad 296$$

Hier ift nach Gleichung 294: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p\,c \,.\, 4f}{4\,p\,c^2} = \frac{f}{c}$, d. h. die Richtung von R geht durch A und C, wie oben bereits auf anderem Wege bewiefen ift.

Die graphifche Ermittelung der in Rede ftehenden Auflagerdrücke ift in Fig. 252 dargeftellt.

Fig. 252.



Es empfiehlt fich für beliebige Belaftung zuerft nur die eine Hälfte belaftet anzunehmen und für diefe Belaftung die Auflagerdrücke zu ermitteln, darauf die Auflagerkräfte für die Belaftung nur der anderen Hälfte aufzufuchen. Die Zufammenfetzung der für die einzelnen Belaftungen gefundenen Kräfte ergiebt alsdann die wirklichen Auflagerdrücke.

Es fei zunächft nur die rechte Hälfte belaftet und die Mittelkraft diefer Laften gleich P_1; alsdann haben R_1 und R_2 die in Fig. 252 *a* gezeichneten Richtungen, und es ergiebt fich die Gröfse beider durch das Kraftpolygon zu $\beta\,\gamma = R_1$ und $\gamma\,\alpha = R_2$. In gleicher Weife erhält man für Belaftung der linken Hälfte mit P_2: $\varepsilon\,\xi = R_3$ und $\xi\,\delta = R_4$.

Wenn nun beide Hälften mit P_1, bezw. P_2 belaftet find, fo wirken in A: R_1 und R_3, in B: R_2 und R_4. Die Gröfse und Richtung der gefammten Auflagerdrücke R und R' erhält man durch Conftruction der Kraftpolygone aus den bezüglichen Kräften. Ift $\gamma\,\eta = R_3$, fo wird $\beta\,\eta = R$; ift $\vartheta\,\gamma \,\#\, \xi\,\delta = R$, fo wird $\vartheta\,\alpha = R'$.

Als Controle diene, dafs die wagrechten Projectionen von R und R' gleich fein müffen, da ja H im ganzen Sprengwerksträger conftant ift.

210. Schiefe Belaftungen.

Uebergehen wir nunmehr zu den vom Winddruck (durch fchiefe Belaftung) erzeugten Stützendrücken, fo fei $\Sigma\,(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 253). Wir zerlegen diefe Kraft in $\Sigma\,(N)\cos\alpha$ und $\Sigma\,(N)\sin\alpha$ und erhalten, wie im vorhergehenden Artikel, die Gleichgewichtsbedingungen:

$$H_2 f + V_2 c = \Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha \quad \text{und} \quad H_2 f - V_2 c = 0, \quad \text{woraus}$$

$$H_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2f} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2c} \qquad 297.$$

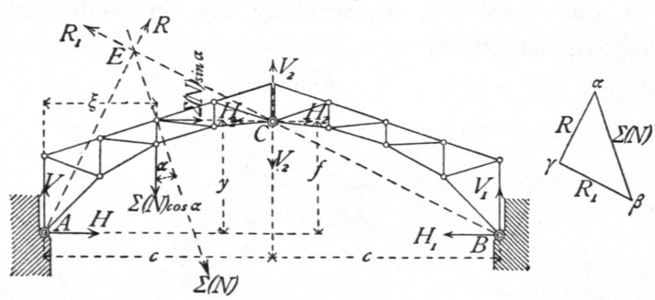
Es ift ferner

$$\left.\begin{aligned} H &= H_2 - \Sigma\,(N)\sin\alpha = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2f} - \Sigma\,(N)\sin\alpha, \\ H_1 &= H_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2f}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad 298.$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \Sigma\,(N)\cos\alpha - V_2 = \Sigma\,(N)\cos\alpha - \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2c}, \\ V_1 &= V_2 = \frac{\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha + \Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha}{2c}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 299$$

Wenn die fchiefen Belaftungen einander nicht parallel find, fo bleibt das Verfahren das gleiche; nur find ftatt $\Sigma\,(N)\,y\sin\alpha$ und $\Sigma\,(N)\,\xi\cos\alpha$ bezw. $\Sigma\,(N\,y\sin\alpha)$ und $\Sigma\,(N\,\xi\cos\alpha)$ in die Rechnung einzuführen.

Fig. 253.



Für die graphifche Ermittelung der fraglichen Auflagerdrücke ift die in Fig. 253 angegebene Conftruction ohne Weiteres verftändlich, und es ergiebt fich $\beta\gamma = R_1$, $\gamma\alpha = R$.

Bei nicht parallelen Winddrücken ift für die graphifche Behandlung zunächft die Mittelkraft derfelben nach Gröfse, Richtung und Lage in bekannter Weife aufzufuchen und alsdann zu verfahren, wie in Fig. 253 dargeftellt.

---

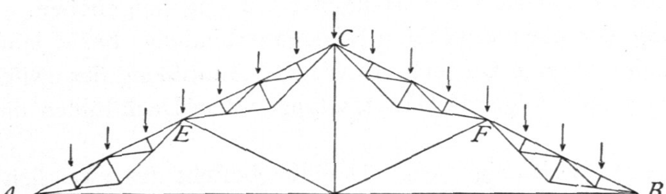
2. Kapitel.

Balkendächer.

211. Allgemeines.

Indem wir nunmehr zur Ermittelung der Spannungen in den wichtigften Dachftuhl-Conftructionen übergehen, werden wir bei den diesfälligen Unterfuchungen für jede Gattung von Dachbindern die verfchiedenen Belaftungsfälle gefondert betrachten. Wir beftimmen demnach die Spannungen, welche erzeugt werden: 1) durch das Eigengewicht, 2) durch einfeitige, bezw. volle Schneebelaftung, 3) durch Windbelaftung, fowohl von der Seite, an der das bewegliche, wie von der Seite, an welcher das fefte Auflager liegt. Indem dann diefe Spannungen in einer Tabelle zufammengeftellt werden, ift es leicht, für jeden Stab die ungünftigfte Belaftungsart und die ungünftigften Spannungen zu beftimmen, ferner für die Querfchnittsbeftimmung (fiehe Art. 77, S. 51) die Werthe P_0, P_1 und P_2 zu ermitteln. Da die Dachbinder meiſt Gitterträger ſind, ſo werden die im Kapitel »Träger« gezeigten Verfahren für die Spannungsermittelung hier genau, wie dort, Anwendung finden. Auch hier machen wir die Annahmen: 1) daſs die Stäbe in den Knotenpunkten durch Gelenke mit einander verbunden ſind, 2) daſs die Laſten nur in den Knotenpunkten der Conſtruction wirken. Die berechneten Spannungen werden deſto mehr mit den wirklichen übereinſtimmen, je mehr die Conſtruction dieſen Annahmen entſpricht. Die zweite Annahme (Belaſtung nur in den Knotenpunkten) iſt häufig nicht erfüllt; in dieſem Falle kann man dennoch die in den folgenden Artikeln zu zeigenden Methoden anwenden, indem man annimmt, daſs die zwiſchen je zwei Knotenpunkten befindlichen Laſten durch beſondere Träger auf die Knotenpunkte übertragen werden. Die Berechnung dieſer Träger hat, wie im Kapitel »Träger« gezeigt iſt, zu erfolgen. Die Belaſtung, welche im Hauptſyſtem auf die Knotenpunkte übertragen wird, iſt dann der Gröſse und Richtung nach gleich den auf die Zwiſchenträger wirkenden Auflagerdrücken. Der Sinn iſt entgegengeſetzt. In Fig. 254 z. B. ſind zwiſchen je zwei Knotenpunkten des Hauptſyſtemes Pfetten, demnach Laſtpunkte. Das Stück CE kann wie ein beſonderer, in C und E frei aufliegender Träger aufgefaſſt und berechnet werden; eben ſo verhält es ſich mit dem Stück AE. Im Punkte E des Hauptſyſtemes wirken dann der linke Auflagerdruck des Balkens CE und der rechte Auflagerdruck des Balkens AE nach unten, auſserdem noch die Belaſtung der Pfette in E.

Fig. 254.



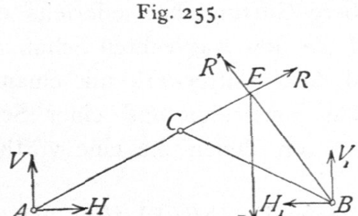
Demnach ſind die Spannungen im Hauptſyſtem auch hier zunächſt genau ſo zu berechnen, als wenn die Geſammtlaſten nur in den Hauptknotenpunkten A, C, E, F und B angriffen; zu dieſen Spannungen im Hauptſyſtem kommen alsdann noch die in den kleinen Trägern AE, EC etc. ſtattfindenden Spannungen hinzu. Die Spannungen derjenigen Stäbe der kleinen Träger, welche mit den Linien AE, EC etc. zuſammenfallen, addiren ſich einfach zu den Spannungen in dieſen Stäben.

Die erſte Annahme (Anordnung von Gelenken in den Knotenpunkten) iſt bei den hölzernen Dachbindern niemals, allein auch bei den eiſernen Dachſtühlen häufig nicht erfüllt; in neueſter Zeit tritt aber bei letzteren immer mehr das Beſtreben in den Vordergrund, auch in dieſer Richtung die praktiſche Conſtruction in Uebereinſtimmung mit der gedachten Annahme zu bringen, und es ſind bereits eine Anzahl von Bauwerken in dieſer Weiſe ausgeführt worden.

212. Princip der Balkendächer.

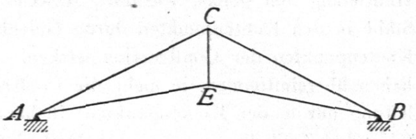
Das einfachſte Dach entſteht dadurch, daſs ſich zwei Sparren AC und BC gegen einander lehnen (Fig. 255). Jede Belaſtung deſſelben, etwa des Sparrens BC, durch eine Laſt P, erzeugt nach Art. 208 in A eine Kraft R, deren Richtung mit AC zuſammenfällt, in B eine Kraft R' in der Richtung BE. Die Auflagerkräfte R und R' haben die wagrechten Seitenkräfte H und H_1, und da auſserdem hier keine wagrechten Kräfte auf das Syſtem wirken, ſo iſt $H = H_1$. Dieſe Kräfte H werden von den Seitenmauern des Gebäudes oder von den ſonſtigen ſtützenden Conſtructionen geleiſtet; umgekehrt wirken Seitens des Daches die Kräfte H auf die Seitenmauern des Gebäudes oder auf die ſonſtigen Stützen nach auſsen.

Fig. 255.



Die Stabilität der das Dach tragenden Wände, Stützen etc. macht es in den meiſten Fällen wünſchenswerth, daſs dieſe wagrechten Kräfte nicht auf dieſelben übertragen werden; man verbindet deſshalb die beiden Punkte A und B durch einen Stab oder eine Anzahl von Stangen, welche die Kräfte H und H_1 nach einem Punkte übertragen, in welchem ſie alsdann einander aufheben. Dadurch erhält man, wenigſtens für lothrechte Belaſtungen des Daches, nur lothrechte Auflagerdrücke und lothrechten Druck auf die Wände, Stützen etc. Im einfachſten Falle beſteht die Stangenverbindung aus einem einfachen Holzbalken oder einer einfachen eiſernen Zugſtange AB; ſtatt deſſen werden auch zwei Stangen AE und EB (Fig. 256) angeordnet, die ſowohl nach oben, wie nach unten von der wagrechten Linie abweichen können. Alsdann iſt im Eckpunkte E eine weitere lothrechte Stange anzuordnen. Auch eine mehrfach gebrochene Stangenverbindung, ſo wie eine krumme Linie kann zur Verbindung der Punkte A und B gewählt werden. Beim Balkendach werden demnach ſtets die wagrechten Seitenkräfte der Auflagerdrücke, welche durch die lothrechten Belaſtungen entſtehen, mittels der Stangenverbindung aufgehoben.

Fig. 256



213. Eintheilung. Je nach der Anordnung der eben erwähnten Stangenverbindung, bezw. je nach der Form der oberen und der unteren Gurtung, ſo wie der Anordnung der zwiſchen beiden gelegenen Stäbe kann man folgende Hauptgattungen von Dachſtühlen unterſcheiden:

a) Einfaches Dreieckdach (Fig. 256). Daſſelbe beſteht aus zwei ſich im Firſt ſtützenden Sparren und einer die wagrechten Kräfte aufhebenden Verbindung von zwei Stangen, welche ſich in der Lothrechten des Firſtes ſchneiden. Dieſe beiden Stangen ſind wagrecht oder nach oben, bezw. nach unten geneigt. Zur Verbindung des Firſtpunktes mit dem Schnittpunkt der Stangen, welche den wagrechten Schub aufnehmen, iſt eine lothrechte Stange CE angeordnet.

b) Deutſcher Dachſtuhl (Fig. 257). Die obere Gurtung hat jederſeits einen Knotenpunkt, welcher durch einen Stab mit E verbunden iſt.

Fig. 257.

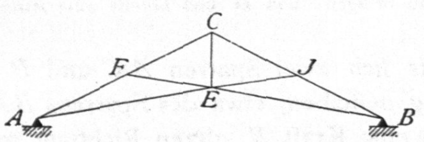
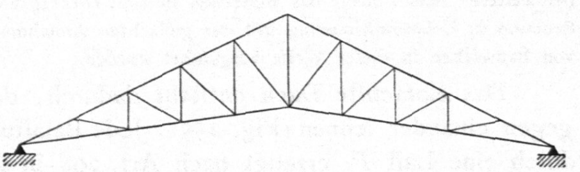


Fig. 258.



c) Engliſcher Dachſtuhl (Fig. 258). Die obere Gurtung hat jederſeits eine Anzahl von Knotenpunkten; die obere Gurtung und die den wagrechten Schub aufhebende Stangenverbindung (die untere Gurtung) ſind durch Gitterwerk mit einander verbunden. Das Gitterwerk beſteht aus einer Schar Verticalen und einer Schar Diagonalen oder aus zwei Scharen von Diagonalen, von denen die eine vortheilhaft ſenkrecht zur Dachneigung ſteht.

d) Franzöſiſcher oder belgiſcher oder *Polonceau*-Dachſtuhl (Fig. 259 bis 262). Er entſteht aus dem einfachen Dreieckdach, wenn in Fig. 255 die einfachen

Fig 259.

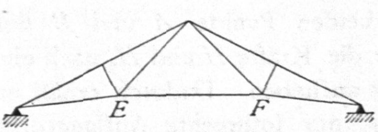


Fig. 260.

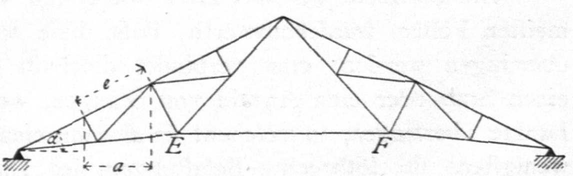


Fig. 261.

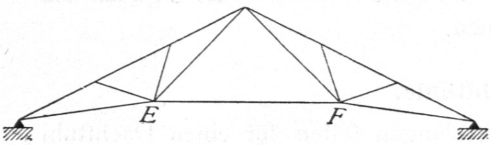
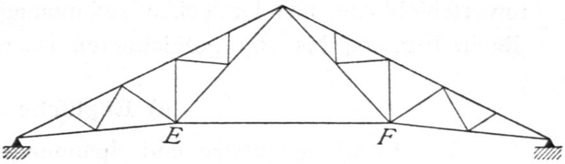


Fig. 262.



Sparren durch Dreieck-Träger erſetzt werden. Die Form der letzteren richtet ſich nach der Anzahl von Stützpunkten (Knotenpunkten), welche jederſeits nöthig werden. Der wagrechte Schub wird durch eine Stange *E F* aufgehoben, welche die unteren Eckpunkte der beiden Dreieckträger verbindet. In Fig. 259 bis 261 ſind *Polonceau*-Dachſtühle für 1, 2, 3 und 4 Laſtpunkte an jeder Seite des Firſtes dargeſtellt.

Man unterſcheidet:

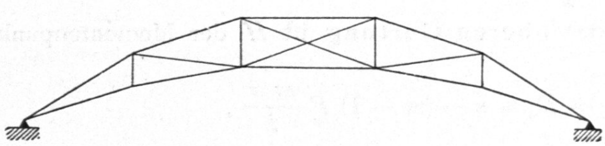
1) den einfachen *Polonceau*-Dachſtuhl; bei demſelben hat der Dreieckträger jederſeits nur einen Knotenpunkt in der unteren Gurtung (Fig. 259 u. 261);

2) den zuſammengeſetzten *Polonceau*-Dachſtuhl; bei dieſem ſind in den Hauptträger noch weitere Conſtructionen eingeſchaltet, ſo daſs der Dreieckträger in der unteren Gurtung jederſeits mehrere Knotenpunkte hat (Fig. 260 u. 262).

Die Anzahl der Laſtpunkte beſtimmt ſich nach der Tragweite, welche man den Sparren geben kann. Es ſei letztere e, alſo die wagrechte Projection derſelben $e \cos \alpha = a$, die Geſammtſtützweite des Daches L; alsdann ergiebt ſich die Anzahl der Laſtpunkte zu $n = \frac{L}{e \cos \alpha} - 1 = \frac{L}{a} - 1$; e iſt nach der Stärke der Sparren verſchieden; n muſs eine ganze gerade Zahl ſein.

e) Sicheldach (Fig. 263). Die obere und die untere Gurtung ſind nach einer krummen Linie oder nach einem der krummen Linie eingeſchriebenen Vieleck gebildet; das Gitterwerk iſt verſchieden. Man kann hierher auch die Träger mit gekrümmter oberer und geradliniger unterer Gurtung rechnen.

Fig. 263.



Bei den vorſtehend aufgeführten Dächern iſt ſtets angenommen, daſs die beiden Gurtungen ſich über dem Auflager ſchneiden; die Formen ſind aber auch möglich, ohne daſs die Schnittpunkte der Gurtungen in den Auflager-Lothrechten liegen.

Fig. 264.

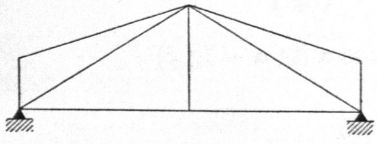


Fig. 265.

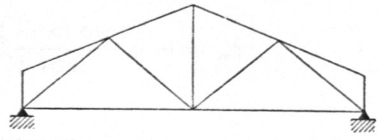


Fig. 266.

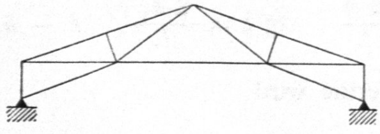
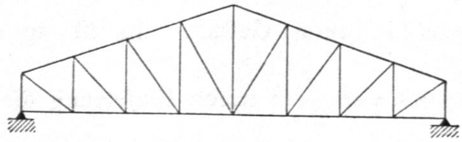


Fig. 267.



Alsdann ſind allerdings unter Umſtänden noch Diagonalen anzuordnen, damit man unverſchiebliche, aus Dreiecken zuſammengeſetzte Figuren erhalte. Es ergeben ſich die in Fig. 264 bis 267 gezeichneten Dachformen.

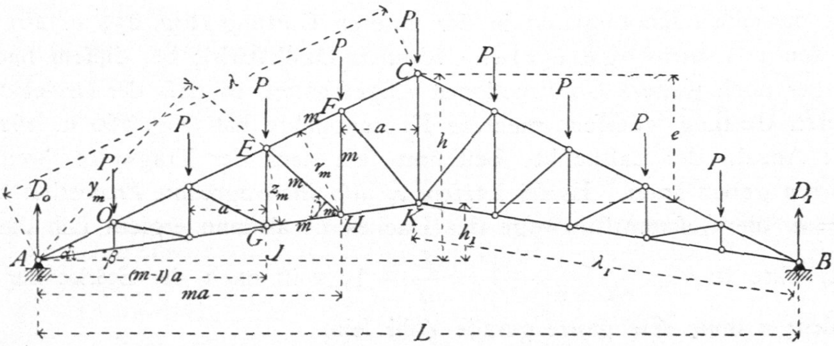
a) Engliſche Dachſtühle.

214. Berechnung d. Spannungen durch lothrechte Belaſtung.

Die Belaſtungsgeſetze und Spannungsermittelungen ſollen für einen Dachſtuhl mit Verticalen und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezeigt werden; für andere Anordnungen des Gitterwerkes ergeben ſich aus dem Nachſtehenden die Aenderungen ohne Schwierigkeit.

1) Berechnung der Spannungen. α) Belaſtung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneebelaſtung (Fig. 268). Die Belaſtung für den Knotenpunkt ſei P, die Stützweite L, die Entfernung der Knotenpunkte, wagrecht

Fig. 268.



gemeſſen, a. Der Dachſtuhl habe $2\,n$ Felder; mithin iſt $L = 2\,n\,a$. Die Winkel der oberen, bezw. unteren Gurtung mit der wagrechten Linie ſeien α und β. Die Auflagerdrücke ſind $D_0 = D_1 = \frac{(2\,n-1)\,P}{2}$.

215. Spannungen in den Gurtungen.

Für die m-te Stange $E\,F$ der oberen Gurtung iſt H der Momentenpunkt, alſo

$$0 = X_m\, r_m + D_0\, m\, a - (m-1)\, P \frac{m\, a}{2},$$

woraus

$$X_m = \frac{-\frac{(2\,n-1)}{2}\, P\, m\, a + (m-1)\, P \frac{m\, a}{2}}{r_m}.$$

Nun iſt $r_m = \overline{A\,H} \sin(\alpha - \beta)$ und $\overline{A\,H} = \frac{m\,a}{\cos\beta}$; ſonach

$$r_m = m\,a \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = m\,a \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$$

und

$$X_m = -\frac{P\,(2\,n-m)}{2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 300.$$

Oft iſt es unbequem, mit den Winkelwerthen zu rechnen; dann giebt man der Formel folgende Geſtalt. Es iſt $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\,h}{L}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2\,h_1}{L}$, $h - h_1 = e$ und $\cos\alpha = \frac{L}{2\,\lambda}$; durch Einſetzung dieſer Werthe wird

$$X_m = -\frac{P\lambda(2n-m)}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 301.$$

Für die m-te Stange GH der unteren Gurtung ist E der Momentenpunkt, mithin

$$0 = D_0(m-1)a - P(m-2)\frac{(m-1)a}{2} - Z_m z_m ,$$

woraus

$$Z_m = \frac{\frac{(2n-1)}{2}P(m-1)a - P(m-2)(m-1)\frac{a}{2}}{z_m} .$$

Nun ist $z_m = \overline{AE}\sin(\alpha - \beta)$ und $\overline{AE} = \frac{(m-1)a}{\cos\alpha}$, demnach

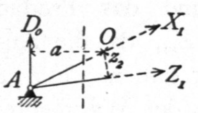
$$Z_m = \frac{P(2n-m+1)}{2\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 302.$$

Da $\cos\beta = \frac{L}{2\lambda_1}$ ist und $\operatorname{tg}\alpha$, so wie $\operatorname{tg}\beta$ die oben angegebenen Werthe haben, so wird auch

$$Z_m = \frac{P\lambda_1(2n-m+1)}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 303.$$

Die Gleichungen 302 u. 303 gelten nicht für die erste Stange der unteren Gurtung am Auflager; denn die Formel ist unter der Annahme entwickelt, dass als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente derjenige Punkt der oberen Gurtung gewählt wird, welcher in die $(m-1)$-te Verticale fällt; dies würde für $m = 1$ der Punkt A sein, und es wäre für diesen Fall die Gleichung der statischen Momente für A als Drehpunkt nicht verwendbar, weil alle Kräfte am Bruchstück dann durch A gehen, also das statische Moment Null haben. Man erhält Z_1 durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für irgend einen beliebigen Punkt, etwa O (Fig. 269). Es wird, wenn der Hebelsarm von Z_1 in Bezug auf den Drehpunkt O gleich z_2 ist,

Fig. 269.



$$Z_1 = \frac{D_0 a}{z_2} = \frac{(2n-1)Pa}{2a\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = \frac{(2n-1)P\lambda_1}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 304.$$

Derselbe Werth ergiebt sich für $m = 2$, d. h. für den zweiten Stab der unteren Gurtung.

Für die m-te Diagonale EH, wie für alle Diagonalen der linken Dachhälfte ist A der Momentenpunkt, mithin 216. Spannungen in den Diagonalen.

$$0 = Y_m y_m + (m-1)\frac{Pma}{2}, \quad \text{woraus} \quad Y_m = -\frac{Pma(m-1)}{2y_m} .$$

Da nun $y_m = \frac{ma\sin\gamma_m}{\cos\beta}$ ist, wird $Y_m = -\frac{P}{2}(m-1)\frac{\cos\beta}{\sin\gamma_m}$.

Durch einfache Umformungen erhält man

$$Y_m = -\frac{P\sqrt{1 + [(m-1)\operatorname{tg}\alpha - m\operatorname{tg}\beta]^2}}{2(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 305.$$

und durch Fortschaffung der Winkelwerthe

$$Y_m = -\frac{P}{4e}\sqrt{L^2 + 4(me-h)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 306.$$

Für die m-te Verticale FH ist der Schnitt schräg zu legen; als Momentenpunkt ergiebt sich A; mithin heisst die Gleichung der statischen Momente für A als Drehpunkt 217. Spannungen in den Verticalen.

$$0 = V_m ma - (m-1)\frac{Pma}{2}, \quad \text{woraus} \quad V_m = \frac{P(m-1)}{2} \quad . \quad . \quad 307.$$

Für $m = 1$ ergiebt dieſe Gleichung $V_m = 0$; die erſte Verticale iſt alſo überflüſſig und kann fortbleiben.

Die Gleichung gilt nicht für die mittelſte Verticale; denn wenn bei dieſer der Schnitt eben ſo gelegt wird, wie bei den anderen Verticalen, ſo werden vier Stäbe getroffen; A iſt alſo hier nicht der conjugirte Punkt. Man beſtimmt die Spannung in dieſer Mittelverticalen durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen für den Firſtknotenpunkt (Fig. 270). Für dieſen iſt, wenn die Summe der lothrechten Kräfte gleich Null geſetzt wird,

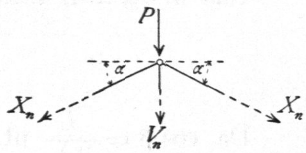
$$0 = V_n + P + 2\,X_n \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad V_n = -P - 2\,X_n \sin\alpha,$$

und da nach Gleichung 300: $X_n = -\dfrac{P\,n}{2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}$ iſt, ſo wird

$$V_n = P\left(\frac{n \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 308.$$

Die Gleichungen 300 bis 307 gelten für die Stäbe links von der Mitte; die zur Mitte ſymmetriſch liegenden Stäbe der anderen Dachhälfte werden in genau gleicher Weiſe beanſprucht; die Gleichungen können ſofort auch für die rechte Dachhälfte angewendet werden, wenn die m von B aus gerechnet werden.

Fig. 270.



Die Betrachtung der Gleichungen 300 bis 307 ergiebt Folgendes:

a) Durch das Eigengewicht, bezw. durch gleichmäſsige Belaſtung des ganzen Dachbinders erhalten alle Stäbe der oberen Gurtung Druck, alle Stäbe der unteren Gurtung Zug. Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, erhalten dieſelben bei der erwähnten Belaſtung Druck, die Verticalen Zug. Man ſieht leicht, daſs, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu ſteigen, dieſelben bei der gleichen Belaſtung gezogen, die Verticalen gedrückt werden.

b) Je gröſser β wird, deſto kleiner wird $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$ und das Product $\cos\beta\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$; deſto gröſser werden daher ſowohl X_m, wie Z_m, da die Ausdrücke, ſowohl für X, wie für Z die erwähnten Werthe im Nenner haben. Für negative Werthe von β, d. h. wenn die Zuggurtung nach unten von der Wagrechten abweicht, wird

$$X'_m = -\frac{P\,(2\,n - m)}{2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \quad \text{und} \quad Z'_m = \frac{P\,(2\,n - m + 1)}{2\cos\beta\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \quad . \quad 309.$$

Je gröſser (abſolut genommen) die negativen Werthe von β werden, deſto gröſser werden die Nenner in den beiden Gleichungen 309, deſto kleiner alſo X'_m und Z'_m. Für den Materialaufwand zu den Gurtungen iſt es alſo günſtig, das poſitive β möglichſt klein, das negative β möglichſt groſs zu nehmen.

c) Für $\beta = 0$, d. h. wenn die untere Gurtung eine gerade Linie bildet, iſt

$$X_m = -\frac{P\,(2\,n - m)}{2\sin\alpha} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{P\,(2\,n - m + 1)}{2\operatorname{tg}\alpha} \quad . \; . \; . \quad 310.$$

$$Y_m = -\frac{P\sqrt{1 + (m-1)^2 \operatorname{tg}^2\alpha}}{2\operatorname{tg}\alpha}, \quad V_m = \frac{P\,(m-1)}{2} \quad \text{und} \quad V_n = P\,(n-1) \quad 311.$$

218. Ungünſtigſte Belaſtung.

β) Ungünſtigſte lothrechte Belaſtung. Jede lothrechte Belaſtung des Trägers erzeugt (nach Art. 154, S. 134) ein poſitives Moment in allen Querſchnitten. Sind nun (Fig. 268) die in den Stäben $E\,F$, bezw. $G\,H$ durch eine beliebige lothrechte Belaſtung erzeugten Spannungen X_m, bezw. Z_m und die Momente für die bezüglichen Momentenpunkte H und E gleich M_m und M_{m-1}, ſo wird

$$X_m = -\frac{M_m}{r_m} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{M_{m-1}}{z_m}.$$

X_m und Z_m erreichen ihre Gröſstwerthe gleichzeitig mit M_m, bezw. M_{m-1}, d. h. bei voller Belaſtung des Trägers. Die Belaſtung des ganzen Daches durch Schneedruck wird alſo für die Gurtungsſtäbe die ungünſtigſte ſein. Die dann ſich ergebenden Spannungen folgen aus den Gleichungen 300 bis 304, indem dort ſtatt P die Knotenpunktsbelaſtung durch Schnee- und Eigengewicht eingeſetzt wird.

Man erhält, wenn b der Binderabſtand iſt, q' die Bedeutung, wie in Art. 202 (S. 186) hat,

$$P = G + S = a\,b\,(q' + 75)\ \text{Kilogr.}$$

und daraus leicht X_m und Z_m.

α) Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, ſo erzeugt eine Laſt P rechts von dem durch die Diagonalenmitte gelegten lothrechten Schnitt II (Fig 271) in A den Auflagerdruck D_0. Auf das Bruchſtück links vom Schnitt wirken jetzt D_0 und die drei Stabſpannungen X, Y und Z. Für Y iſt A der Momentenpunkt, und die Gleichung der ſtatiſchen Momente für A als Drehpunkt lautet $0 = Yy$, d. h. $Y = 0$.

Liegt eine Laſt P links vom Schnitte II und betrachtet man das Bruchſtück

Fig. 271.

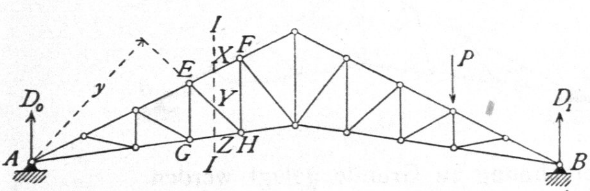
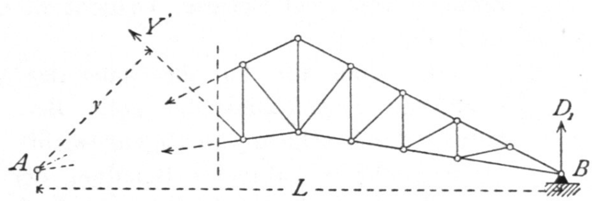


Fig. 272.



rechts vom Schnitte (Fig. 272), ſo heiſst die Gleichung der ſtatiſchen Momente in Bezug auf den Punkt A als Drehpunkt

$$0 = Y' y + D_1 L, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{D_1 L}{y}.$$

Steigen die Diagonalen nach der Mitte zu, ſo ergiebt ſich, wenn die Laſt rechts vom Schnitte liegt, genau wie vorhin, daſs in den Diagonalen die Spannung Null entſteht. Liegt dagegen die Laſt links vom Schnitt, ſo folgt

$$Y'_1 = + \frac{D_1 L}{y'}.$$

Die für die Diagonalen gefundenen Ergebniſſe gelten, ſo lange A der Momentenpunkt der Diagonalen iſt, d. h. für alle Diagonalen links der Mitte. Für die Diagonalen rechts der Mitte iſt B der Momentenpunkt, und es ergiebt ſich in gleicher Weiſe, wie eben gezeigt, daſs in dieſen jede Belaſtung rechts vom Schnitte eine Druck-, bezw. Zugſpannung erzeugt, je nachdem ſie nach der Mitte zu fallen oder ſteigen; jede Belaſtung links vom Schnitte ruft dagegen in denſelben die Spannung Null hervor.

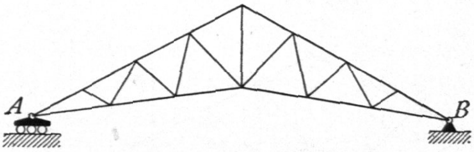
Allgemein folgt hieraus: Jede Belaſtung zwiſchen dem durch die Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, welches für die Diagonale nicht den Momentenpunkt bildet, hat auf die Spannung in der Diagonalen gar keinen Einfluſs. Jede Belaſtung zwiſchen dem lothrechten Schnitt und dem Auflager, welches für die Diagonale den Momentenpunkt bildet, erzeugt in den nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Druck, in den nach der Mitte zu ſteigenden Diagonalen Zug. Die ungünſtigſten Belaſtungsarten würden alſo diejenigen ſein, bei denen die ganze Zug-, bezw. Druckabtheilung belaſtet wäre. Da aber die Belaſtung des übrigen

Trägertheiles ohne Einflufs auf die Diagonalfpannung ift, fo kann man auch fagen: Die ungünftigfte Beanfpruchung aller Diagonalen durch lothrechte Laften findet bei voller Belaftung ftatt, und zwar werden die nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gedrückt.

𝔟) Für die ungünftigfte Belaftung der Verticalen ergiebt fich durch die gleiche Beweisführung, wie bei den Diagonalen, wenn die Schnitte fchräg gelegt werden: Jede Belaftung zwifchen dem durch eine Verticale gelegten fchrägen Schnitt und dem Auflager, welches für die Verticalen nicht den Momentenpunkt bildet, erzeugt in der Verticalen die Spannung Null; jede Belaftung zwifchen dem Schnitte und demjenigen Auflager, welches den conjugirten Punkt bildet, erzeugt in der Verticalen Zug, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, Druck, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fteigen. Auch hier findet demnach Maximaldruck, bezw. -Zug bei voller Belaftung des Trägers ftatt.

Das hier gefundene Gefetz gilt, fo lange die geradlinigen Gurtungen fich in den Auflager-Lothrechten fchneiden, alfo auch, wie man leicht fieht, für die Anordnung von zwei Scharen Diagonalen nach Fig. 273.

Fig. 273.



Es kann alfo für alle Stäbe des englifchen Dachftuhles die volle Belaftung durch Schnee und Eigengewicht als ungünftigfte lothrechte Belaftung der Berechnung zu Grunde gelegt werden.

Die bezüglichen Gröfstwerthe find in Art. 214 bis 217 entwickelt.

219. Berechnung d. Spannungen durch Winddruck.

γ) Belaftung durch Winddruck. Es find die fämmtlichen Stabfpannungen fowohl für den Fall zu ermitteln, dafs der Winddruck jene Seite belaftet, an welcher das bewegliche Auflager liegt, als dafs er diejenige Seite belaftet, an welcher fich das fefte Auflager befindet.

Man ermittelt bei diefen beiden Belaftungsarten für jeden Stab den Momentenpunkt, das Biegungsmoment der äufseren Kräfte für diefen Punkt und daraus in bekannter Weife die Stabfpannungen. Es empfiehlt fich dabei, für die Auffuchung des Biegungsmomentes jede Knotenpunktsbelaftung in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft zu zerlegen; die Ermittelung der Hebelsarme wird dadurch wefentlich vereinfacht. In Fig. 280 u. 282 find die wagrechten und lothrechten Seitenkräfte der Winddrücke fowohl für den Fall, dafs der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers, als auch für den Fall, dafs er von der Seite des feften Auflagers kommt, angegeben.

220. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

2) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Hier empfiehlt fich die *Cremona*'fche Methode am meiften, weil für die Spannungen aller Stäbe die gleichen Belaftungsarten zu Grunde gelegt werden.

α) Belaftung durch das Eigengewicht und Schneedruck. Man nimmt entweder die fämmtlichen Eigenlaften in den oberen Knotenpunkten vereinigt an oder berechnet die Eigengewichte, welche in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen, befonders. In beiden Fällen ift das Verfahren genau wie im Kapitel »Träger« (Art. 175, S. 152) gezeigt ift.

Bei der graphifchen Ermittelung in Fig. 274 u. 275 ift die zweite Annahme gemacht worden; die Eigengewichte, welche auf die Auflagerpunkte *A* und *B* kommen, find fortgelaffen, weil fie unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden, demnach das Syftem nicht belaften. Alsdann find die am

Fig. 274.

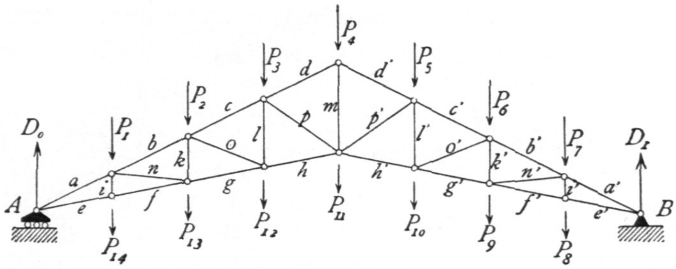
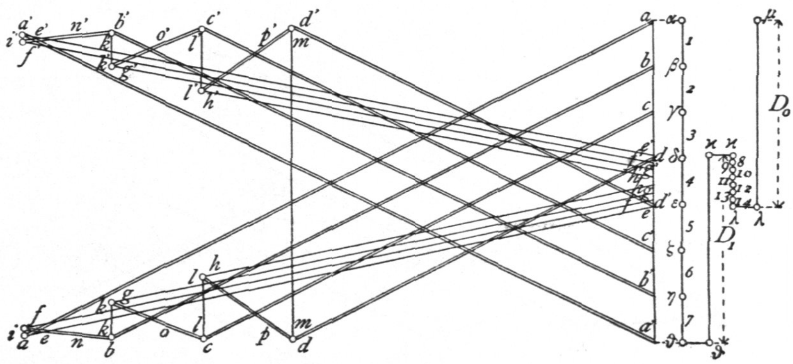


Fig. 275.



Syftem wirkenden äufseren Kräfte in der Reihenfolge der Knotenpunkte aufgetragen: zuerft die Laften der oberen Gurtung *1, 2, 3 . . . 7*; an den Endpunkt von *7* ift D_1 getragen; letzteres fällt mit der Kraftlinie *1, 2, 3 . . . 7* zufammen, wie überhaupt alle äufseren Kräfte hier in diefelbe Kraftlinie fallen. Der gröfseren Deutlichkeit halber find aber die Laften *1* bis *7*, D_1, ferner die Laften der unteren Gurtung und D_0 je etwas feitwärts verfchoben aufgetragen. Wir erhalten $D_1 = \vartheta\,\varkappa$; *8* bis $14 = \varkappa\,\lambda$; $D_0 = \lambda\,\mu$; μ fällt demnach eigentlich auf α, wonach fich alfo das Kraftpolygon fchliefst.

Für die Conftruction des Kräfteplanes find felbftverftändlich als Grenzpunkte der einzelnen äufseren Kräfte die Punkte auf der Linie *a a'* einzuführen, welche mit den gezeichneten auf gleicher Höhe liegen. Der Kräfteplan ift nun genau, wie früher angegeben, in Fig. 275 conftruirt, worüber keine weiteren Bemerkungen nöthig find.

Die Conftruction der Spannungen durch volle Schneebelaftung ift in gleicher Weife vorzunehmen.

β) Belaftung durch Winddruck. In Fig. 277 u. 278 find die Kräftepläne fowohl für den von der Seite des beweglichen, wie für den von der Seite des feften Auflagers kommenden Winddruck conftruirt. Auf den Auflagerpunkt und den Firftpunkt kommen bei gleicher Entfernung aller Knotenpunkte die Hälften der auf die anderen Knotenpunkte entfallenden Belaftungen; bei anderen Entfernungen der Knotenpunkte find die Belaftungen diefer Punkte aus den auf fie kommenden Dachflächen gleichfalls leicht zu ermitteln.

Zunächft find nun die Auflagerdrücke, wie in Art. 206 (S. 188) gezeigt, conftruirt, worauf fich der Kräfteplan in bekannter Weife ergiebt. In Fig. 276 find die äufseren Kräfte für die Belaftung der linken Dachhälfte ausgezogen, für die Belaftung der rechten Dachhälfte punktirt.

Es möge hier darauf aufmerkfam gemacht werden, dafs auf der nicht belafteten Seite fämmtliche Diagonalen die Spannung Null, die oberen, fo wie die unteren Gurtungsftäbe fämmtlich je gleiche Spannungen erhalten. Die Richtigkeit ergiebt fich leicht aus folgender Betrachtung.

Wenn fich in einem unbelafteten Knotenpunkte (Fig. 279) drei Stäbe fchneiden, von denen zwei in eine gerade Linie fallen, fo ift, wenn Gleichgewicht ftattfindet, $X - X_1 + Y \cos\varphi = 0$ und $Y \sin\varphi = 0$,

Fig. 276.

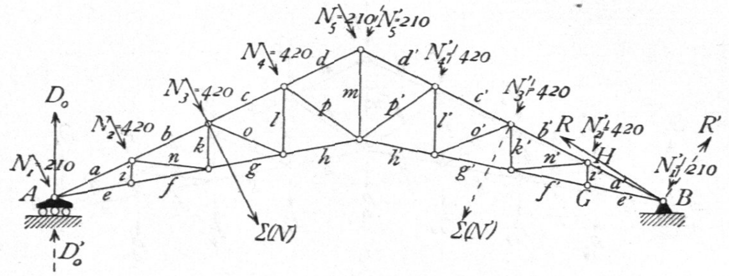


Fig. 277.

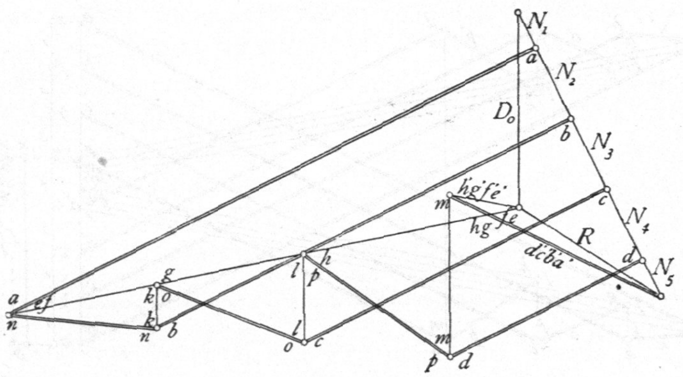
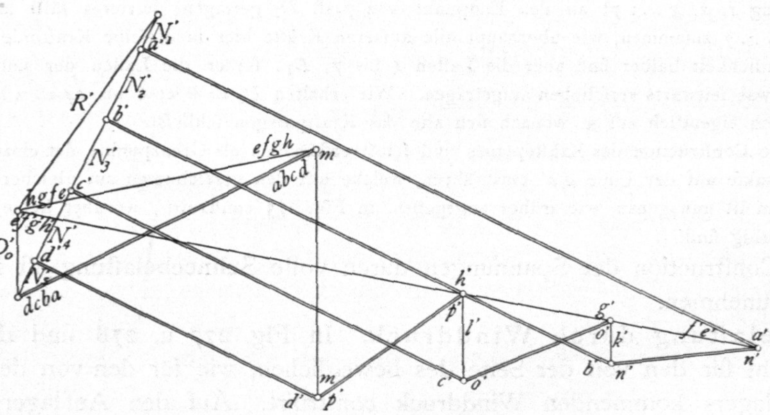


Fig. 278.



d. h. $Y = 0$, alfo auch $X - X_1 = 0$, d. h. $X = X_1$. Die Spannungen in den beiden in eine gerade Linie fallenden Stäben find alfo einander gleich; die Spannung im dritten Stabe ift gleich Null.

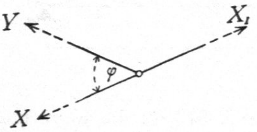
Falls der Wind, wie in Fig. 276 durch die ausgezogenen Pfeile angedeutet ift, die linke Seite belaftet, fo wirkt auf den Knotenpunkt G keine äufsere Kraft; mithin wird $e' = f'$ und $i' = 0$. Auch auf H wirkt keine äufsere Kraft; da nun $i' = 0$ ift, alfo als nicht vorhanden zu betrachten ift, fo folgt auch $n' = 0$ und $a' = b'$. Eben fo ergiebt fich weiter $a' = b' = c' = d'$; $e' = f' = g' = h'$; $i' = n' = k' = o' = l' = p' = 0$.

221. Beifpiel. **Beifpiel.** Berechnung eines englifchen Dachftuhles (Fig. 280) von nachfolgenden Hauptmafsen: Stützweite $L = 16$ m; Firfthöhe $h = 4$ m; $\frac{h}{L} = \frac{1}{4}$; $a = 2$ m; $2n = 8$; tg $\alpha = \frac{4}{8} = 0{,}5$; $h_1 = 1{,}6$ m; tg $\beta = \frac{1{,}6}{8} = 0{,}2$; $e = h - h_1 = 2{,}4$ m; $\lambda = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94$ m; $\lambda_1 = \sqrt{1{,}6^2 + 8^2}$

$= 8{,}16$ m; $\sin\alpha = \frac{h}{\lambda} = \frac{4}{8{,}94} = 0{,}447$ m; $\cos\alpha = \frac{8}{\lambda} = \frac{8}{8{,}94} = 0{,}895$; $\sin\beta = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{1{,}6}{8{,}16}$ $= 0{,}196$; $\cos\beta = \frac{8}{\lambda_1} = \frac{8}{8{,}16} = 0{,}98$; die Binderweite iſt $4{,}3$ m; die Dachdeckung iſt Eiſenwellblech auf Winkeleiſen; das Gitterwerk beſteht aus Verticalen und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen.

Die Belaſtungen ergeben ſich wie folgt. Auf einen Knotenpunkt kommt eine Grundfläche von $2 \cdot 4{,}3 = 8{,}6$ qm, eine ſchräge Dachfläche von $4{,}3 \frac{\lambda}{4} = \frac{4{,}3 \cdot 8{,}94}{4} = 9{,}61$ qm. Mithin iſt nach der Tabelle auf S. 19 das Eigengewicht für 1 qm Grundfläche, ausſchl. des Bindergewichtes, gleich 23 kg. Rechnet man das Gewicht des Binders für 1 qm Grundfläche mit 17 kg, ſo wird das Eigengewicht für 1 qm Grundfläche $= 23 + 17 = 40$ kg. Demnach iſt die Knotenpunktsbelaſtung durch das Eigengewicht $= 8{,}6 \cdot 40 = 344$ kg, durch Schneedruck $= 8{,}6 \cdot 75 = 645$ kg, die ſenkrechte Knotenpunktsbelaſtung durch Winddruck $= 9{,}61 \cdot 72 = 692$ kg, wofür abgerundet $N = 700$ kg geſetzt werden ſoll. Der Firſtknotenpunkt und der Auflagerknotenpunkt erhalten nur je 350 kg ſenkrechte Windbelaſtung.

Fig. 279.



α) Spannungen durch die lothrechten Laſten. Für die obere Gurtung ergeben ſich die Spannungen durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneebelaſtung aus Gleichung 301 zu

$$X_m = -\frac{P \cdot 8{,}94}{2 \cdot 2{,}4}(8 - m) = -1{,}8625\, P(8 - m).$$

Wir erhalten: für Eigengewicht $P = 344$ kg, fonach $X^g_m = -1{,}8625 \cdot 344\,(8 - m) = -640\,(8 - m)$;

für Schneebelaſtung $P = 645$ kg, mithin $X^p_m = -1{,}8625 \cdot 645\,(8 - m) = -1200\,(8 - m)$.

Für $m =$	1	2	3	4
wird $X^g =$	-4480	-3840	-3200	-2560 kg;
$X^p =$	-8400	-7200	-6000	-4800 kg.

Für die untere Gurtung iſt nach Gleichung 303: $Z_m = \frac{P \cdot 8{,}16}{2 \cdot 2{,}4}(9 - m) = 1{,}7\, P(9 - m)$.

Für Eigengewicht iſt $Z^g_m = 1{,}7 \cdot 344\,(9 - m) = 585\,(9 - m)$;

für Schneelaſt iſt $Z^p_m = 1{,}7 \cdot 645\,(9 - m) = 1096{,}5\,(9 - m)$.

Sonach wird für $m =$	1	2	3	4
$Z^g =$	4095 (für 1 und 2)		3510	2925 kg;
$Z^p =$	7677 (für 1 und 2)		6579	5481 kg.

Z_1 iſt nicht nach der Formel berechnet (vergl. darüber die Bemerkung in Art. 215, S. 198).

Für die Diagonalen iſt nach Gleichung 306

$$Y = -\frac{P}{9{,}6}\sqrt{16^2 + 4\,(m \cdot 2{,}4 - 4)^2} = -0{,}104\, P\sqrt{256 + 4\,(2{,}4\, m - 4)^2}.$$

Wir erhalten für $m = 2$: $Y_2 = -0{,}104\, P\sqrt{256 + 4\,(0{,}8)^2} = -1{,}672\, P$;

Eigengewicht: $Y^g_2 = -575$ kg; Schneelaſt: $Y^p_2 = -1079$ kg;

für $m = 3$: $Y_3 = -0{,}104\, P\sqrt{256 + 4\,(7{,}2 - 4)^2} = -1{,}79\, P$;

Eigengewicht: $Y^g_3 = -616$ kg; Schneelaſt: $Y^p_3 = -1155$ kg;

für $m = 4$: $Y_4 = -0{,}104\, P\sqrt{256 + 4\,(9{,}6 - 4)^2} = -2{,}03\, P$;

Eigengewicht: $Y^g_4 = -698$ kg; Schneelaſt: $Y^p_4 = -1310$ kg.

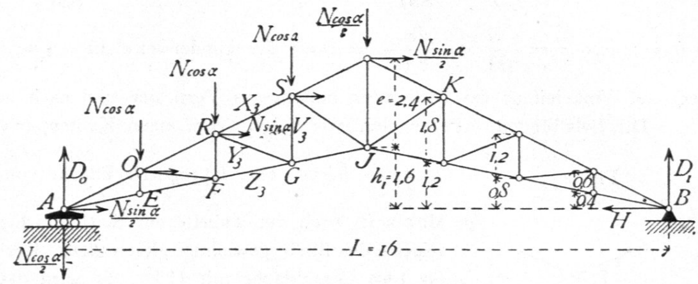
Die Spannungen in den Verticalen ergeben ſich aus Gleichung 307.

	Eigengewicht:	Schneelaſt:
für $m = 2$:	$V^g_2 = 172$ kg;	$V^p_2 = 323$ kg;
» $m = 3$:	$V^g_3 = 344$ kg;	$V^p_3 = 645$ kg.

Die Spannungen in der Mittelverticalen (für $m = 4$) find nach Gleichung 308 $V_4^g = 1950^{kg}$, $V_4^p = 3657^{kg}$.

β) Spannungen durch Windbelaftung an der Seite des beweglichen Auflagers (Fig. 280). Die lothrechte Seitenkraft der Knotenpunktsbelaftung ift bei den mittleren Knotenpunkten gleich $700 \cos\alpha = 700 \cdot 0{,}895 = 626^{kg}$, beim Firft- und Auflagerknotenpunkt je gleich 313^{kg}; die wagrechten Seitenkräfte find bezw. $700 \sin\alpha = 700 \cdot 0{,}447 = 312^{kg}$ und 156^{kg}. Die lothrechten Höhen der oberen Gurtungsknotenpunkte über AB find bezw. 1^m, 2^m, 3^m und 4^m; die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen bezw. um $0{,}4^m$, $0{,}8^m$, $1{,}2^m$ und $1{,}6^m$ über der wagrechten Linie AB. Es ift

Fig. 280.



$$D_0 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\,12 - (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\,2}{16} = 1722^{kg},$$

$$D_1 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\,4 + (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\,2}{16} = 782^{kg},$$

$$H = 3 \cdot 312 + 2 \cdot 156 = 1248^{kg}.$$

Für die Stäbe der oberen Gurtung ergeben fich die Gleichungen der ftatifchen Momente: wenn E der Momentenpunkt ift,

$$0 = X_1 \cdot 0{,}6 \cos\alpha + (D_0 - 313) \cdot 2 - 156 \cdot 0{,}4, \quad \text{woraus} \quad X_1 = -5132^{kg};$$

für den Momentenpunkt F

$$0 = X_2 \cdot 1{,}2 \cos\alpha + (D_0 - 313) \cdot 4 - 156 \cdot 0{,}8 + 312 \cdot 0{,}2 - 626 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad X_2 = -4023^{kg};$$

weiters eben fo für die Momentenpunkte G und J

$$0 = X_3 \cdot 1{,}8 \cos\alpha + (D_0 - 313) \cdot 6 - 156 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 312 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 626 \cdot 3, \quad \text{woraus} \quad X_3 = -2916^{kg};$$

$$0 = X_4 \cdot 2{,}4 \cos\alpha + (D_0 - 313) \cdot 8 - 156 \cdot 1{,}6 + 3 \cdot 312 \cdot 0{,}4 - 3 \cdot 626 \cdot 4, \quad \text{woraus} \quad X_4 = -1806^{kg}.$$

Die Momentengleichung für den Punkt J heifst, wenn das Bruchftück rechts von dem durch den Stab JK gelegten lothrechten Schnitte betrachtet wird,

$$0 = H \cdot 1{,}6 - D_1 \cdot 8 - X_5 \cdot 2{,}4 \cos\alpha, \quad \text{woraus} \quad X_5 = -1982^{kg}.$$

Diefelbe Spannung findet in fämmtlichen Stäben der oberen Gurtung rechts der Mitte ftatt (vergl. Art. 220, S. 202).

In ähnlicher Weife erhält man für die untere Gurtung:

$$0 = (D_0 - 313)\,2 - 156 \cdot 1 - Z_1 \cdot 0{,}6 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_1 = 4527^{kg} = Z_2;$$

$$0 = (D_0 - 313)\,4 - 156 \cdot 2 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1 - Z_3 \cdot 1{,}2 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_3 = 3197^{kg};$$

$$0 = (D_0 - 313)\,6 - 156 \cdot 3 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - Z_4 \cdot 1{,}8 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_4 = 1857^{kg}.$$

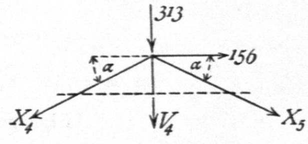
Betrachtet man wieder das Bruchftück rechts von dem durch den Stab JK gelegten lothrechten Schnitte, fo heifst die Momentengleichung für Punkt K

$$0 = H \cdot 3 - D_1 \cdot 6 + Z_5 \cdot 1{,}8 \cos\beta, \quad \text{woraus} \quad Z_5 = 537^{kg}.$$

Eben fo grofs ift die Spannung in fämmtlichen Stäben der unteren Gurtung rechts der Mitte (vergl. Art. 220, S. 202).

Um die Spannungen in den Diagonalen zu beftimmen, find die Hebelsarme diefer Spannungen für den Punkt A, welcher für alle Diagonalen links der Mitte Momentenpunkt ift, conftruirt. Man erhält $y_2 = 1{,}17^m$, $y_3 = 3{,}3^m$ und $y_4 = 5{,}8^m$.

Fig. 281.



Die Spannungen ergeben fich aus den Momentengleichungen, wie folgt:

$$0 = Y_2 \cdot 1{,}17 + 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1, \quad \text{woraus} \quad Y_2 = -1337^{kg};$$

$$0 = Y_3 \cdot 3{,}3 + 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5, \quad \text{woraus} \quad Y_3 = -1422^{kg};$$

$$0 = Y_4 \cdot 5{,}8 + 626 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 312 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad Y_4 = -1618^{kg}.$$

Die Spannungen in den Diagonalen rechts der Mitte find gleich Null (vergl. Art. 220, S. 202).

Für die Spannungen aller Verticalen links der Mitte ift A der Momentenpunkt; man erhält:

$$0 = 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1 - V_2 \cdot 4, \quad \text{woraus} \quad V_2 = +391^{kg};$$

$$0 = 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - V_3 \cdot 6, \quad \text{woraus} \quad V_3 = +782^{kg}.$$

Für die Ermittelung der Spannung in der Mittelverticalen (Fig. 281) ist die Summe der lothrechten Kräfte im Firstknotenpunkt gleich Null zu setzen; sonach

$$0 = V_4 + 313 + (X_4 + X_5) \sin \alpha = V_4 + 313 - (1806 + 1982)\, 0{,}447, \quad \text{woraus} \quad V_4 = 1380 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den Verticalen rechts der Mitte sind gleich Null (vergl. Art. 220, S. 202).

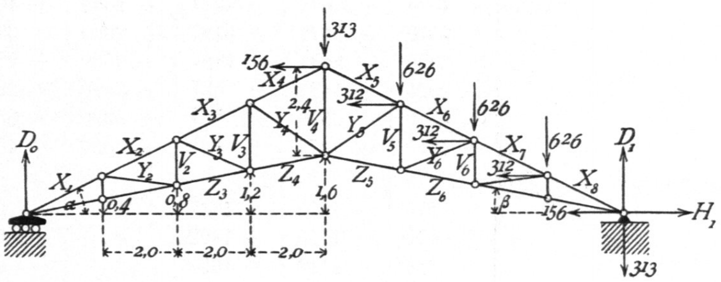
γ) Spannungen durch Windbelastung von der Seite des festen Auflagers (Fig. 282). Die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte der rechten Hälfte sind eben so grofs, wie diejenigen der linken Knotenpunkte unter β waren. Wir erhalten

$$D_0 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\, 4 + (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\, 2}{16} = 782 \text{ kg},$$

$$D_1 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\, 12 - (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\, 2}{16} = 1722 \text{ kg},$$

$$H_1 = 3 \cdot 312 + 2 \cdot 156 = 1248 \text{ kg}.$$

Fig. 282.



In der oberen Gurtung findet man

$$0 = X_1 \cdot 0{,}6 \cos \alpha + D_0 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad X_1 = -\frac{782 \cdot 2}{0{,}537} = -2912 \text{ kg}.$$

Derselbe Werth ergiebt sich nach Art. 220 (S. 202) für X_2, X_3 und X_4. Weiters ist

$0 = X_5 \cdot 2{,}4 \cos \alpha + D_0 \cdot 8 - 156 \cdot 2{,}4$, woraus $X_5 = -2738$ kg;

$0 = X_6 \cdot 1{,}8 \cos \alpha + (D_1 - 313)\, 6 + (H_1 - 156)\, 1{,}2 + 2 \cdot 312 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 626 \cdot 3$, woraus $X = -3845$ kg

$0 = X_7 \cdot 1{,}2 \cos \alpha + (D_1 - 313)\, 4 + (H_1 - 156)\, 0{,}8 + 312 \cdot 0{,}2 - 626 \cdot 2$, woraus $X_7 = -4953$ kg

$0 = X_8 \cdot 0{,}6 \cos \alpha + (D_1 - 313)\, 2 + (H_1 - 156)\, 0{,}4$, woraus $X_8 = -6061$ kg.

In der unteren Gurtung ergiebt sich

$$0 = Z_1 \cdot 0{,}6 \cos \beta - D_0 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad Z_1 = 2660 \text{ kg}.$$

Dieselbe Gröfse haben Z_2, Z_3 und Z_4. Weiters findet man

$0 = (D_1 - 313)\, 6 + (H_1 - 156)\, 3 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - Z_5 \cdot 1{,}8 \cos \beta$, woraus $Z_5 = +3990$ kg;

$0 = (D_1 - 313)\, 4 + (H_1 - 156)\, 2 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1 - Z_6 \cdot 1{,}2 \cos \beta$, woraus $Z_6 = +5320$ kg;

$0 = (D_1 - 313)\, 2 + (H_1 - 156)\, 1 - Z_7 \cdot 0{,}6 \cos \beta$, woraus $Z_7 = +6650$ kg.

Die Hebelsarme für die Ermittelung der Spannungen in den Diagonalen sind oben angegeben; hiernach findet statt

$$0 = Y_7 \cdot y_2 + 312 \cdot 1 + 626 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad Y_7 = -1337 \text{ kg};$$

$$0 = Y_6 \cdot y_3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 626 \cdot 3, \quad \text{woraus} \quad Y_6 = -1422 \text{ kg};$$

$$0 = Y_5 \cdot y_4 + 3 \cdot 312 \cdot 2 + 3 \cdot 626 \cdot 4, \quad \text{woraus} \quad Y_5 = -1618 \text{ kg}.$$

Die Spannungen in den übrigen Diagonalen sind gleich Null.

In den Verticalen sind die Spannungen V_1, V_2 und V_3 gleich Null; V_4 wird durch die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung erhalten, welche besagt, dafs die algebraische Summe der lothrechten, am Firstknotenpunkte wirkenden Kräfte gleich Null sein mufs, d. h. aus

$$0 = V_4 + 313 + X_4 \sin \alpha + X_5 \sin \alpha = V_4 + 313 - (2912 + 2738) \cdot 0{,}447 \quad \text{wird} \quad V_4 = 2212 \text{ kg}.$$

Ferner ist

$$0 = V_5 \cdot 6 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5, \quad \text{woraus} \quad V_5 = 782 \text{ kg};$$

$$0 = V_6 \cdot 4 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1, \quad \text{woraus} \quad V_6 = 391 \text{ kg}.$$

δ) Zusammenstellung der Stabspannungen. Für die Querschnittsbestimmungen sind die gefundenen Spannungen in umstehender Tabelle zusammengestellt.

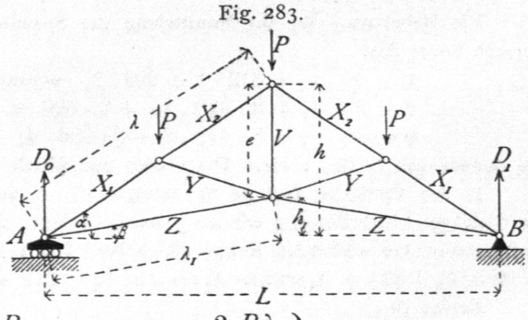
Bezeichnung des Stabes	Spannung durch Eigengewicht	Schneelaft (voll belaftet)	Wind links	Wind rechts	P_0	P_1
Obere Gurtung:						
Stab Nr. 1	— 4480	— 8400	— 5132	— 2912	— 4480	— 13522
» » 2	— 3840	— 7200	— 4023	— 2912	— 3840	— 11223
» » 3	— 3200	— 6000	— 2916	— 2912	— 3200	— 8916
» » 4	— 2560	— 4800	— 1806	— 2912	— 2560	— 7712
» » 5	— 2560	— 4800	— 1982	— 2738	— 2560	— 7538
» » 6	— 3200	— 6000	— 1982	— 3845	— 3200	— 9845
» » 7	— 3840	— 7200	— 1982	— 4953	— 3840	— 12153
» » 8	— 4480	— 8400	— 1982	— 6061	— 4480	— 14461
Untere Gurtung:						
Stab Nr. 1 u. 2	+ 4095	+ 7677	+ 4527	+ 2660	+ 4095	+ 12204
» » 3	+ 3510	+ 6579	+ 3197	+ 2660	+ 3510	+ 9776
» » 4	+ 2925	+ 5481	+ 1857	+ 2660	+ 2925	+ 8141
» » 5	+ 2925	+ 5481	+ 537	+ 3990	+ 2925	+ 9471
» » 6	+ 3510	+ 6579	+ 537	+ 5320	+ 3510	+ 11899
» » 7 u. 8	+ 4095	+ 7677	+ 537	+ 6650	+ 4095	+ 14327
Diagonalen:						
im Felde 2	— 575	— 1079	— 1337	0	— 575	— 2416
» » 3	— 616	— 1155	— 1422	0	— 616	— 2577
» » 4	— 698	— 1310	— 1618	0	— 698	— 2928
» » 5	— 698	— 1310	0	— 1618	— 698	— 2928
» » 6	— 616	— 1155	0	— 1422	— 616	— 2577
» » 7	— 575	— 1079	0	— 1337	— 575	— 2416
Verticalen:						
zwifchen Feld 2 u. 3	+ 172	+ 323	+ 391	0	+ 172	+ 714
» » 3 u. 4	+ 344	+ 645	+ 782	0	+ 344	+ 1427
Mittelverticale	+ 1950	+ 3657	+ 1380	+ 2212	+ 1950	+ 5869
zwifchen Feld 5 u. 6	+ 344	+ 645	0	+ 782	+ 344	+ 1427
» » 6 u. 7	+ 172	+ 323	0	+ 391	+ 172	+ 714
	Kilogramm					

b) Deutfche Dachftühle.

222. Ermittelung der Spannungen.

Der deutfche Dachftuhl ift ein englifcher Dachftuhl mit nur einem Knotenpunkt in jeder Dachhälfte; man wird demnach die in demfelben durch Eigenlaft und volle Schneelaft entftehenden Spannungen aus den Formeln für den englifchen Dachftuhl ableiten können (Fig. 283).

Fig. 283.



Für die obere Gurtung ift in die Gleichungen 300 u. 301 ftatt $2\,n$ die Zahl 4 einzufetzen und für m der Reihe nach 1 und 2; alsdann erhält man

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{3\,P}{2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = -\frac{3\,P\lambda}{2\,e} \\ X_2 &= -\frac{P}{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = -\frac{P\lambda}{e} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 312.$$

Die allgemeine Gleichung 302, bezw. 303 für die untere Gurtung gilt nicht für $m = 1$ (fiehe Art. 215, S. 198). Für $m = 2$ und $2n = 4$ übergeht Gleichung 302, bezw. 303 in

$$Z = \frac{3 P}{2 \cos \beta \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} \quad \text{und} \quad Z = \frac{3 P \lambda_1}{2 e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 313.$$

Für die Diagonalen giebt die Gleichung 306 für $m = 2$

$$Y = - \frac{P}{4 e} \sqrt{L^2 + 4 (2 e - h)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 314.$$

Für die Verticale ift Gleichung 308 anzuwenden, und es ergiebt fich für $n = 2$

$$V = P \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} - 1 \right) = P \left(2 \frac{2 h}{2 h - 2 h_1} - 1 \right) = P \frac{h + h_1}{e} \quad . \quad 315.$$

Fig. 284.

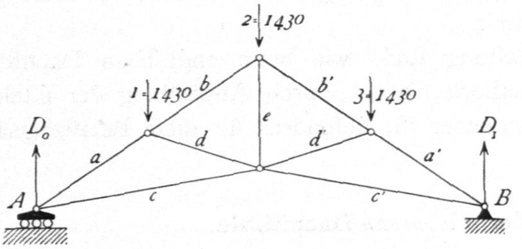


Fig. 285.

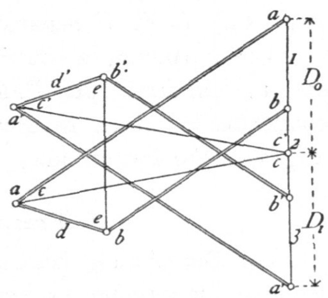


Fig. 286.

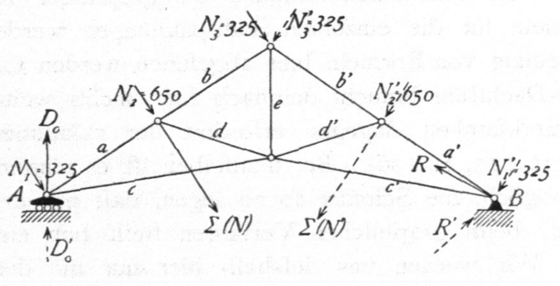


Fig. 287.

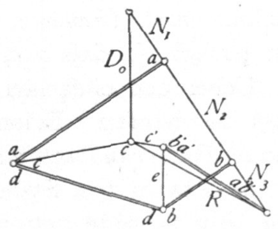
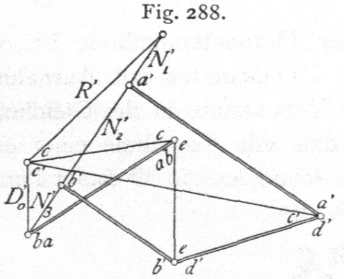


Fig. 288.



Für fchiefe Belaftungen durch Winddruck find die Spannungen, wie beim englifchen Dachftuhl gezeigt, zu ermitteln.

Die graphifche Ermittelung der Spannungen im deutfchen Dachftuhl für die Belaftungen durch Eigengewicht und Winddruck von der einen, bezw. der anderen Seite zeigen Fig. 284 bis 288.

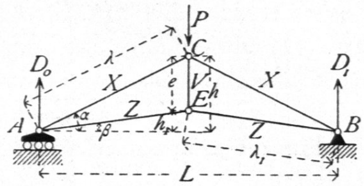
c) Dreieckdächer.

Die Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte ergiebt (Fig. 289), da $D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$ ift, die Werthe der Stabfpannungen. 223. Ermittelung der Spannungen.

Es ift $0 = X \cos \alpha + Z \cos \beta$ und $0 = D_0 + X \sin \alpha + Z \sin \beta$, woraus

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{P}{2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = -\frac{P\lambda}{2e} \\ Z &= +\frac{P}{2\cos\beta\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = \frac{P\lambda_1}{2e} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 316.$$

Fig. 289.



Sowohl X, wie Z nehmen mit wachſendem e ab; für den Materialverbrauch iſt alſo ein möglichſt groſses e günſtig.

Ferner iſt $P + V + 2X \sin\alpha = 0$, woraus

$$V = P\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{P h_1}{h - h_1} = \frac{P h_1}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 317.$$

So lange h_1 poſitiv iſt, d. h. E über der Wagrechten AB liegt, iſt auch V poſitiv, d. h. Zug; für $h_1 = 0$ iſt auch $V = 0$, d. h. wenn AEB eine gerade Linie iſt, hat die Stange CE keine Spannung; wird h_1 negativ, d. h. liegt E unter der Linie AB, ſo iſt V negativ, d. h. Druck.

Die Spannungen durch Windbelaſtung ſind, wie beim engliſchen Dachſtuhl gezeigt, vermittels der *Ritter*'ſchen Methode, bezw. durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Bequemer iſt, beſonders für dieſe Belaſtungsart, die graphiſche Ermittelung.

d) Franzöſiſche oder *Polonceau*-Dachſtühle.

224. Einfacher *Polonceau*-Dachſtuhl.

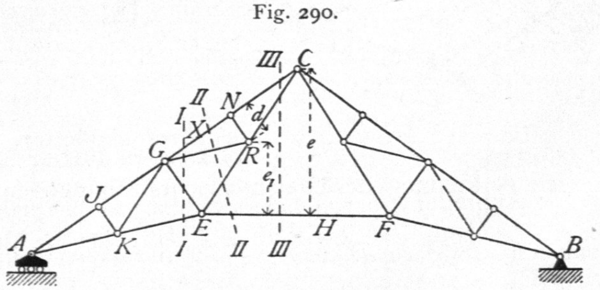
Die Berechnung und die Conſtruction der Stabſpannungen iſt hier nach Ermittelung ſämmtlicher äuſserer Kräfte für die verſchiedenen Belaſtungsarten in der allgemein gezeigten Weiſe (ſiehe Art. 169, S. 149) vorzunehmen; die Berechnung geſchieht meiſtens bequem vermittels der Momentenmethode, die graphiſche Ermittelung nach *Cremona*. Die Formeln für die einzelnen Stabſpannungen werden nicht einfach, ſo daſs von der Aufſtellung von Formeln hier abgeſehen werden ſoll.

225. Zuſammengeſetzter *Polonceau*-Dachſtuhl.

Ueber den einfachen *Polonceau*-Dachſtuhl braucht demnach hier nichts weiter geſagt zu werden. Beſondere Aufmerkſamkeit dagegen erfordert der zuſammengeſetzte *Polonceau*-Dachſtuhl (ſiehe Art. 213, S. 196). Bei demſelben iſt es nämlich für eine Anzahl von Stäben nicht möglich, die Schnitte ſo zu legen, daſs nur drei Stäbe vom Schnitte getroffen werden; beim graphiſchen Verfahren ſtellt ſich eine entſprechende Schwierigkeit heraus. Wir werden uns deſshalb hier nur mit dem zuſammengeſetzten *Polonceau*-Dachſtuhl beſchäftigen.

1) Berechnung der Spannungen. Bei der Momentenmethode iſt der Momentenpunkt ſo zu wählen, daſs für denſelben alle Unbekannten mit Ausnahme einer einzigen das Moment Null haben, mithin nur eine Unbekannte in der Gleichung verbleibt. Iſt es möglich, den Schnitt ſo zu legen, daſs mit Ausnahme einer einzigen ſämmtliche Stabrichtungen ſich in einem Punkte ſchneiden, ſo iſt dieſer Punkt als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannungen in demjenigen Stabe zu wählen, welcher nicht durch dieſen Punkt geht. Trifft aber der Schnitt vier oder mehr Stäbe, von welchen ſich nicht alle mit Ausnahme eines einzigen in einem

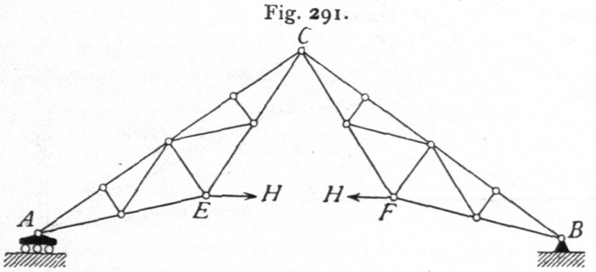
Fig. 290.



Punkte ſchneiden, ſo bleibt nichts übrig, als eine Reihe von Stabſpannungen vorher zu beſtimmen, um dieſe nicht mehr als Unbekannte in der Momentengleichung zu haben. Man beſtimme alſo zunächſt die Spannungen jener Stäbe, bei denen Schnitte möglich ſind, die nur drei Stäbe treffen; dieſe Spannungen werden dann als Bekannte eingeführt, und es bleiben in den Momentengleichungen nur noch die geſuchten Unbekannten. Um z. B. die Spannungen in *GN*, *GR*, *RE* und *EF*, welche Stäbe durch den Schnitt *II II* getroffen werden, zu finden, ermittele man zunächſt diejenige in *EF*. Man ſchneide nach *III III*; alsdann iſt für *EF* der Firſtpunkt *C* der Momentenpunkt und demnach die Spannung *H* in *EF* leicht zu finden. Es iſt $H = \frac{M}{e}$, wenn *M* das Biegungsmoment der äuſseren Kräfte für *C* iſt. Nun ſind für den Schnitt *II II* nur noch drei Unbekannte vorhanden. Um die Spannung *X* in *GN* zu beſtimmen, dient die Momentengleichung für Punkt *R*, in welcher nur *X* als Unbekannte verbleibt; für die Spannung in *GR* iſt *C*, für diejenige in *RE* iſt *G* der conjugirte Punkt. Nachdem dieſe Spannungen ermittelt ſind, iſt für Schnitt *I I* nur noch die Spannung in *GE* unbekannt, da auch diejenige in *KE* leicht gefunden wird; man kann demnach einen beliebigen, nicht auf der Richtungslinie von *GE* liegenden Punkt als Momentenpunkt annehmen.

Es empfiehlt ſich, ſtets zuerſt die Spannung *H* im Stabe *EF* zu ermitteln und dann dieſen Stab durch die beiden äuſseren Kräfte *H* in *E* und *F* (nach Fig. 291) zu erſetzen. Natürlich ſind für jede geänderte Belaſtung andere Werthe für *H* auszurechnen und einzuführen; alsdann werden, da ja *EF* nicht mehr als Stab vorhanden iſt, meiſtens nur drei Stäbe getroffen werden, ſo daſs ſich die Momentenpunkte leicht ergeben. Bemerkt werden möge noch, daſs die Schnitte beliebig krumm ſein können, das allgemeine Geſetz (vergl. Art. 4, S. 6) bleibt dabei giltig und damit auch das Verfahren.

Fig. 291.

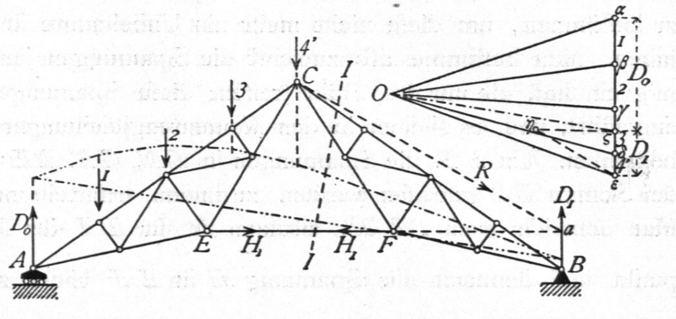


Die vorſtehenden Entwickelungen gelten ſowohl für lothrechte, wie für ſchiefe Belaſtungen.

Bei lothrechten Belaſtungen ergeben ſich ferner die vollen Belaſtungen des ganzen Binders wiederum als die ungünſtigſten; für die Diagonalen allerdings in demſelben Sinne, wie oben beim engliſchen Dache nachgewieſen, nämlich daſs bei voller Belaſtung auch diejenigen Punkte belaſtet ſind, deren Belaſtung in den Diagonalen die Spannung Null erzeugt. Der Nachweis iſt unſchwer zu führen, ſoll aber hier, um den verfügbaren Raum nicht zu überſchreiten, fortbleiben.

2) Graphiſche Ermittelung der Spannungen. Bei der Conſtruction des *Cremona*'ſchen Kräfteplanes ergeben ſich ähnliche Schwierigkeiten, wie bei der Berechnung. Wenn man nämlich beim Aneinanderreihen der kleinen Kraftpolygone bis zum Knotenpunkt *E* (Fig. 292) gekommen iſt, ſo ſind an dieſem drei Stäbe mit nicht bekannten Spannungen; das Verfahren iſt alſo nicht ohne Weiteres anwendbar. Die Schwierigkeit wird, ganz wie oben, dadurch beſeitigt, daſs man zuerſt die Spannung *H* des Stabes *EF* beſtimmt und dieſelbe als in *E*, bezw. *F* wirkende äuſsere Kraft einführt. Dadurch erreicht man auch, daſs die Stäbe zwiſchen *E* und *C*, ſo

Fig. 292.



wie zwifchen *C* und *F* zu Randftäben werden. Bevor demnach für den zufammengefetzten *Polonceau*-Dachftuhl der Kräfteplan gezeichnet werden kann, ift *H* zu ermitteln. Diefe Ermittelung erfolgt entweder auf dem Wege der Rechnung, wie fo eben gezeigt, oder beffer, wenn doch alles Uebrige conftruirt wird, mittels Zeichnung. Wir werden das einzufchlagende Verfahren für die verfchiedenen Belaftungsarten zeigen.

α) Belaftung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneelaft. Man kann *H* vermittels der Schnittmethode beftimmen, indem man das Seilpolygon der äufseren Kräfte für einen beliebigen Pol conftruirt, einen Schnitt fo durch den Träger legt, dafs aufser *E F* nur noch zwei Stäbe getroffen werden, den Angriffspunkt der Querkraft für diefen Schnitt fucht und nun, wie oben in Art. 174 (S. 151) gezeigt, zerlegt. Die Kraft *Q* wird dann fehr weit feitwärts fallen, weil der Schnitt nahe der Mitte liegt, und wenn man fich auch durch Hilfsconftructionen helfen kann, fo dürfte doch die folgende Conftruction empfehlenswerther fein.

Fig. 293.

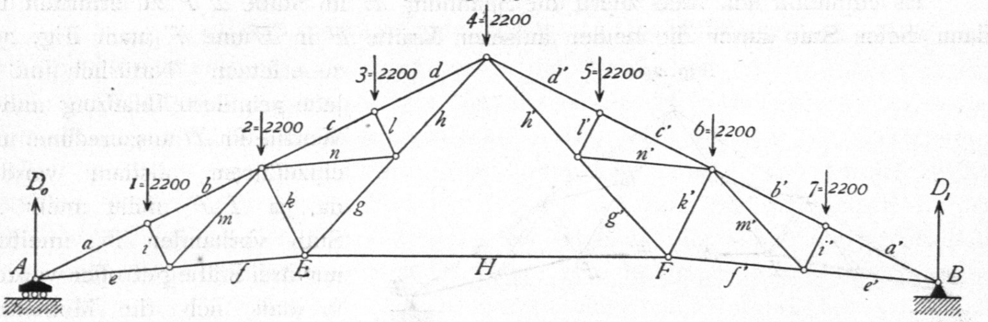
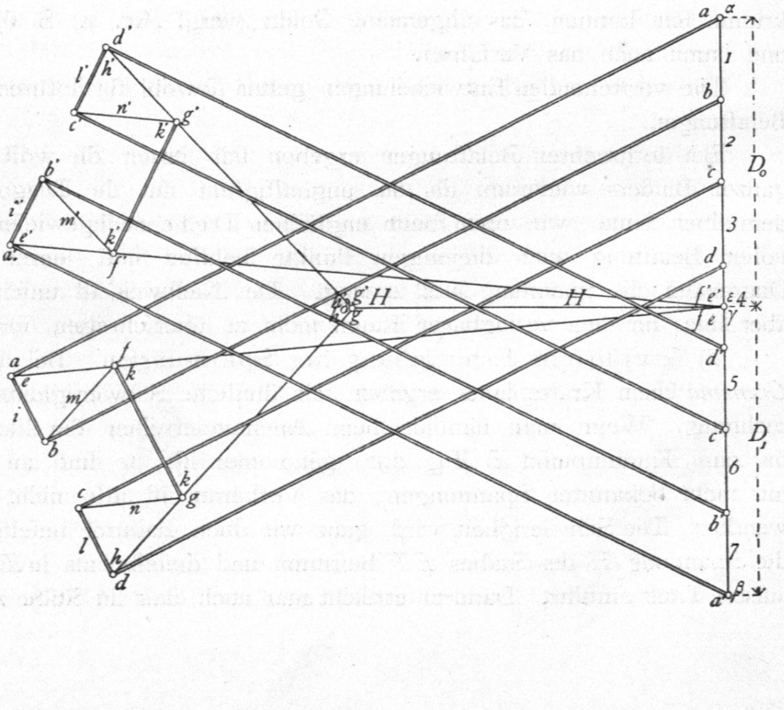


Fig. 294.



Die Spannung *H* im Stabe *E F* (Fig. 292) ift bei voller Belaftung (und der hier vorausgefetzten zur Mitte fymmetrifchen Dachform) offenbar genau doppelt fo grofs, als die Spannung H_1, welche in *E F* bei Belaftung nur der einen Dachhälfte ftattfindet. Die Gröfse diefer Spannung H_1 wird nun folgendermafsen ermittelt. Man legt einen Schnitt *I I* durch das Dach derart, dafs an der einen (hier der rechten) Seite desfelben gar keine Laften liegen; alsdann wirken

Fig. 295.

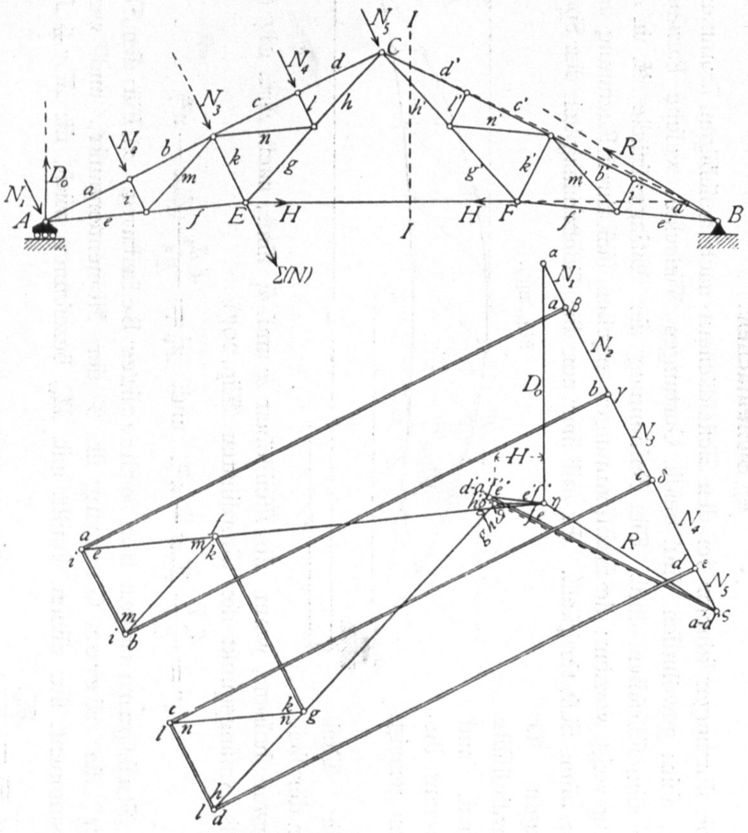
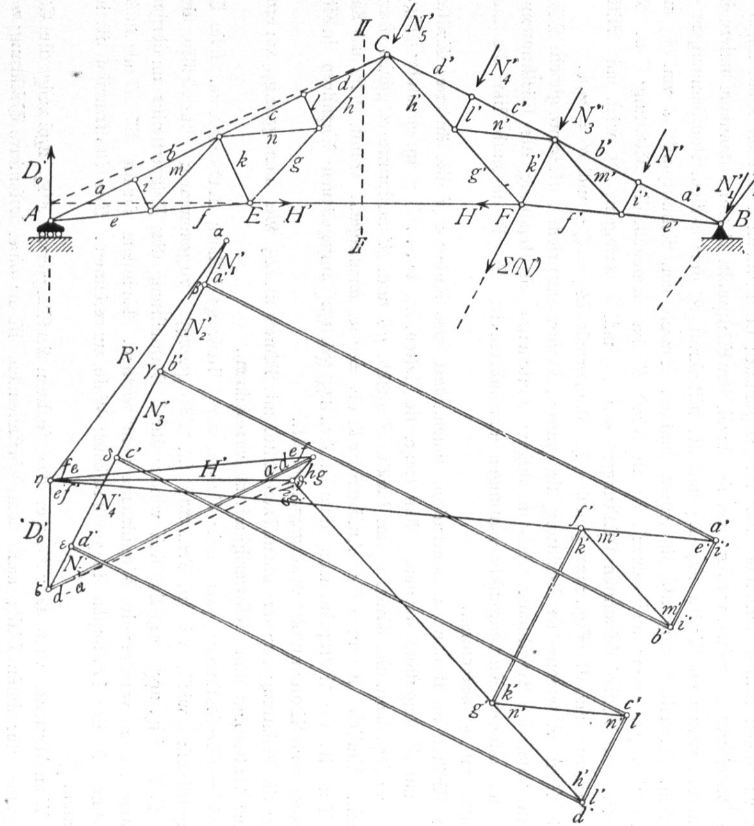


Fig. 296.



auf den Theil rechts vom Schnitte nur die Spannungen der drei durchſchnittenen Stäbe und der Auflagerdruck D_1. Zwei von dieſen Stäben ſchneiden ſich im Firſtpunkte; die in ihnen wirkenden Spannungen können alſo durch eine Mittelkraft R erſetzt werden, welche durch den Firſtpunkt C geht; demnach halten die drei auf das Bruchſtück wirkenden Kräfte D_1, H_1 und die Mittelkraft R der beiden Stabſpannungen daſſelbe im Gleichgewicht, ſchneiden ſich alſo in einem Punkte. Durch den Schnittpunkt a von H_1 und D_1 geht alſo auch R; R geht aber auch durch C; die Kraft R hat demnach die Richtung $C\,a$. Nun können wir D_1 nach den beiden bekannten Richtungen von H_1 und R zerlegen; D_1 wird mit Hilfe des Seilpolygons conſtruirt und iſt (Fig. 292) gleich $\varepsilon\,\zeta$. Man erhält $H_1 = \zeta\,\eta$ und $R = \eta\,\varepsilon$.

Die Kraft H, welche der Belaſtung des ganzen Daches entſpricht, iſt dann gleich $2 \times \zeta\,\eta$. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daſs in obiger Conſtruction als Belaſtung des Firſtknotenpunktes nur die Hälfte der anderen Knotenpunktsbelaſtungen einzuführen iſt. Es iſt deſshalb hier die Laſt im Firſtknotenpunkte mit *4'* bezeichnet.

Der Kräfteplan iſt nun zu conſtruiren, indem ſtatt des Stabes $E\,F$ die äuſseren Kräfte H in den Punkten E und F eingeführt werden. Man trage die Laſten *1, 2 . . . 6, 7* an einander (Fig. 294); auf *7* folgt $D_1 = \beta\,\gamma$, dann die Kraft H im Punkte F gleich $\gamma\,\delta$ und H im Punkte E gleich $\delta\,\varepsilon$; ε fällt mit γ zuſammen. Endlich iſt an ε der Auflagerdruck $D_0 = \gamma\,\alpha$ anzutragen, womit ſich das Kraftpolygon ſchlieſst. Nun iſt der Kräfteplan nach dem in Art. 175 (S. 152) angegebenen Verfahren in Fig. 294 conſtruirt, wobei vom Knotenpunkt A ausgegangen iſt.

Für die Belaſtung nur der einen Dachhälfte mit Schnee iſt H_1, wie oben gezeigt, zu ermitteln und alsdann der Kräfteplan ohne Schwierigkeit zu verzeichnen.

β) Windbelaſtung von der Seite des beweglichen Auflagers. Die Ermittelung der Auflagerdrücke wird, wie in Art. 206 (S. 188) gezeigt, vorgenommen; die Gröſse der Kraft H (im Stabe $E\,F$, Fig. 295) ergiebt ſich wieder durch Betrachtung des Trägertheiles an derjenigen Seite des Schnittes $I\,I$, an welcher die Winddrücke nicht wirken. Nachdem ſodann die H als äuſsere Kräfte eingeführt ſind, iſt der Kräfteplan in gewöhnlicher Weiſe zu zeichnen. Die Conſtruction iſt in Fig. 295 vorgenommen.

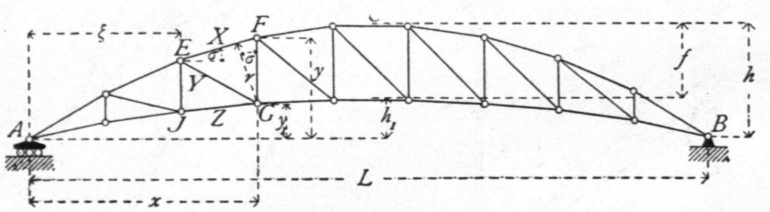
γ) Winddruck von der Seite des feſten Auflagers. Fig. 296 zeigt die Conſtruction des Kräfteplanes für dieſen Fall; nach dem Vorſtehenden iſt er ohne beſondere Erklärung verſtändlich.

e) Sicheldächer.

226. Form der Dachbinder.

Die Gurtungen können bei den Sicheldächern nach beliebigen krummen Linien geformt ſein; gewöhnlich ſind beide Gurtungen Vielecke, welche Parabeln oder Kreiſen eingeſchrieben ſind. Die Beſtimmung der Auflagerdrücke iſt in Art. 207 (S. 189) gezeigt worden; die Stabſpannungen ergeben ſich durch Rechnung oder Conſtruction ohne Schwierigkeit. Es ſoll hier nur die Geſetzmäſsigkeit der Spannungsänderungen für das paraboliſche Sicheldach und für lothrechte Belaſtungen gezeigt werden.

Fig. 297.



Die Gleichungen der beiden Curven heiſsen, wenn die Pfeilhöhen h und h_1 ſind, nach Art. 187 (S. 171) für A als Anfangspunkt der Coordinaten (Fig. 297)

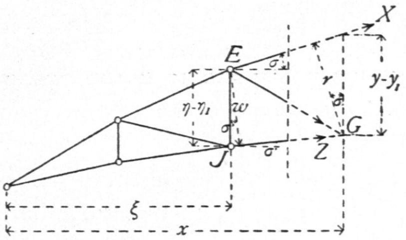
$$y = \frac{4\,h}{L^2}\,(L\,x - x^2) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{4\,h_1}{L^2}\,(L\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 318.$$

227. Ermittelung d. Spannungen durch lothrechte Belaſtung.

1) Stabſpannungen bei lothrechter Belaſtung. α) Für den Stab $E\,F$ (Fig. 297) der oberen Gurtung iſt G der Momentenpunkt, und wenn das Biegungsmoment für dieſen Punkt mit M_x bezeichnet wird, iſt $X\,r + M_x = 0$, woraus $X = -\,\frac{M_x}{r}$.

Nun ift $r = (y - y_1)\cos\sigma = \frac{4}{L^2}(h - h_1)(Lx - x^2)\cos\sigma = \frac{4}{L^2}f(Lx - x^2)\cos\sigma;$

Fig. 298.



alfo

$$X\cos\sigma = -\frac{M_x L^2}{4f(Lx - x^2)} \quad . \quad . \quad 319.$$

Für den Stab $\mathfrak{J}G$ der unteren Gurtung ift E der Momentenpunkt, und wenn das Biegungsmoment für diefen Punkt mit M_ξ bezeichnet wird, fo ift (Fig. 298) $Z = \frac{M_\xi}{w}$.

Nun ift

$$w = (\eta - \eta_1)\cos\sigma' = \frac{4}{L^2}f(L\xi - \xi^2)\cos\sigma',$$

d. h.

$$Z\cos\sigma' = \frac{M_\xi L^2}{4f(L\xi - \xi^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 320.$$

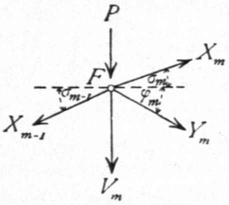
Aus den Gleichungen 319 u. 320 folgt:

a) Für volle gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilte Belaftung p auf die Längeneinheit ift $M_x = \frac{p}{2}(Lx - x^2)$ und $M_\xi = \frac{p}{2}(L\xi - \xi^2)$, alfo

$$X\cos\sigma = -\frac{pL^2}{8f} \quad \text{und} \quad Z\cos\sigma' = \frac{pL^2}{8f}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 321.$$

d. h. die wagrechten Seitenkräfte der Gurtungsfpannungen find bei der angegebenen Belaftungsart in beiden Gurtungen conftant, und zwar gleich dem Maximalmomente, dividirt durch die Mittenhöhe der Sichel. Bei der Parabel ift innerhalb der Grenzen, welche bei den Dächern vorkommen, cos σ und cos σ′ nahezu conftant. Das foeben gefundene Ergebnifs ftimmt mit dem in Art. 188 (S. 171) für die Parabelträger Ermittelten überein. Durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung, etwa F, ergiebt fich ferner (Fig. 299)

Fig. 299.



$$0 = X_m\cos\sigma_m - X_{m-1}\cos\sigma_{m-1} + Y_m\cos\varphi_m,$$

d. h.

$$0 = -\frac{pL^2}{8f} + \frac{pL^2}{8f} + Y_m\cos\varphi_m \quad \text{oder} \quad Y_m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 322.$$

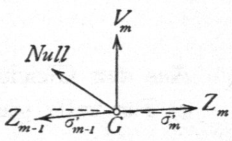
Für die angegebene Belaftung find daher die Spannungen fämmtlicher Diagonalen bei den parabolifchen Sicheldächern gleich Null.

b) Alle zu den Gurtungsftäben gehörigen Momentenpunkte liegen zwifchen den lothrechten Linien der Auflager A und B (Fig. 297); für alle diefe Punkte find die Biegungsmomente bei lothrechter Belaftung pofitiv (fiehe Art. 154, S. 134); mithin erzeugt jede lothrechte Belaftung in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denjenigen der unteren Gurtung Zug. Maximaldruck, bezw. -Zug für lothrechte Belaftung wird demnach in allen Stäben bei voller Belaftung des ganzen Dachbinders ftattfinden.

β) Für die Spannungen in den Diagonalen ergiebt fich nach demfelben Verfahren, welches in Art. 189 (S. 173) angewendet ift, um die Beanfpruchungsart der Diagonalen des Parabelträgers zu ermitteln: Jede Belaftung zwifchen dem durch eine Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und jenem Auflager, nach welchem die Diagonale zu fällt, erzeugt Zug in derfelben; jede Belaftung zwifchen dem Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem die Diagonale fteigt, erzeugt in derfelben Druck. Maximaldruck, bezw. -Zug finden demnach ftatt, wenn nur die Druck-, bezw. Zugabtheilung der betreffenden Diagonalen belaftet ift. Ob bei einem Dache diefe verfchiedenen, jedenfalls für die meiften Diagonalen überhaupt wohl nicht vorkommenden Belaftungsarten der Berechnung zu Grunde gelegt werden follen, ift fraglich; meiftens dürfte es genügen, eine Belaftung nur der einen Dachhälfte durch Schnee als ungünftigfte lothrechte Belaftung einzuführen. Die hierbei fich ergebenden Spannungen find mittels der *Ritter*'fchen Methode leicht zu finden.

γ) Bezüglich der Spannungen in den Verticalen ergiebt fich, wie oben, folgendes Gefetz: Maximaldruck, bezw. -Zug findet in einer Verticalen bei der Belaftung ftatt, welche in derjenigen Diagonalen den gröfsten Zug, bezw. Druck erzeugt, die mit der Verticalen in einem Knotenpunkt der nicht belafteten Gurtung zufammentrifft. Auch hier dürfte es genügen, als zufällige lothrechte Belaftungen nur die Belaftung des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte anzunehmen.

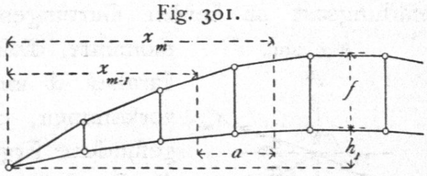
Fig. 300.



Bei Belaftung des ganzen Dachbinders mit der gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilten Belaftung p ergiebt fich die Spannung aller Verticalen durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der unteren Gurtung. Es ift (Fig. 300), da die Spannung in der Diagonalen alsdann gleich Null ift,

$$0 = V_m + Z_m \sin \sigma'_m - Z_{m-1} \sin \sigma'_{m-1} \quad \text{und} \quad 0 = V + \frac{p\,L^2}{8f} (\operatorname{tg} \sigma'_m - \operatorname{tg} \sigma'_{m-1}).$$

Fig. 301.



Wird (mit geringem Fehler) die Curve als ftetig gekrümmt angefehen und werden die Richtungen der Stäbe als parallel zu den in den Mitten der unteren Gurtungsftäbe an die Parabel gelegten Tangenten eingeführt, fo ift

$$\operatorname{tg} \sigma'_m = \frac{4\,h_1}{L^2} (L - 2\,x_m) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \sigma'_{(m-1)} = \frac{4\,h_1}{L^2} (L - 2\,x_{m-1}),$$

fonach

$$0 = V + \frac{p\,L^2}{8f} \frac{4\,h_1}{L^2}\, 2\,(x_{m-1} - x_m) = V - \frac{p\,h_1}{f}\,a, \text{ woraus } V = \frac{p\,h_1\,a}{f} \qquad 323.$$

V nimmt ab, wenn h_1 abnimmt; für $h_1 = 0$ ift $V = 0$.

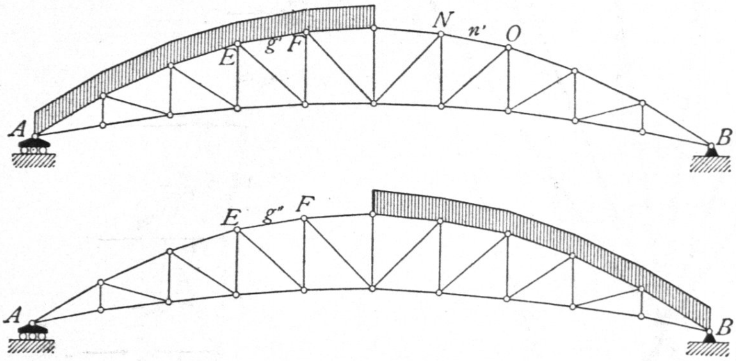
228. Ermittelung d. Spannungen durch einfeitige Schneelaft.

2) Stabfpannungen bei einfeitiger Schneebelaftung. Bezüglich der Belaftung durch einfeitige Schneelaft ift Folgendes zu beachten. Man braucht nicht für beide Belaftungsarten, diejenige des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte, die Spannungen zu berechnen; vielmehr genügt für fymmetrifch zur Mittelverticalen angeordnete Conftruction die Kenntnifs der Spannungen bei einfeitiger Belaftung, um diejenigen zu erhalten, welche bei voller Belaftung ftattfinden, und gleichzeitig zu ermitteln, welche Belaftungsart die gefährlichere ift. Die Belaftung der linken Dachhälfte erzeugt etwa (Fig. 302) im Stabe EF die Spannung g'; die Belaftung der rechten Dachhälfte erzeugt in demfelben Stabe die Spannung g''. Die volle Belaftung hat offenbar im Stabe EF die Spannung $g' + g''$ zur Folge. Liegt nun NO genau fymmetrifch mit EF, fo wird die Spannung n' in NO bei der erfteren Belaftungsart genau fo grofs fein, wie g''. Es ift aber

$$g_{total} = g' + g'' = g' + n'.$$

Die durch die Belaftung des ganzen Daches in einem Stabe entftehende Spannung ift alfo gleich der Summe derjenigen Spannungen, die durch Belaftung der einen Dachhälfte in dem betrachteten Stabe und in dem fymmetrifch zur Mitte liegenden Stabe entftehen. Wenn die fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäbe bei der Belaftung einer Dachhälfte in gleichem Sinne beanfprucht werden, alfo beide Zug oder beide Druck erhalten, fo ift die Summe diefer Spannungen gröfser, als jede einzelne,

Fig. 302.



d. h. die volle Belaſtung des Daches iſt ungünſtiger, als die einſeitige. Werden beide Stäbe in entgegengeſetztem Sinne beanſprucht, ſo iſt die Summe beider kleiner, als die gröſsere von beiden, demnach die einſeitige Belaſtung als ungünſtigere einzuführen. Dabei iſt zu beachten, daſs in letzterem Falle beide Stabſpannungen als ungünſtige einzuführen ſind, da nicht nur die Maximal-, ſondern auch die Minimalſpannungen von Wichtigkeit ſind. Wenn ein Mittelfeld mit zwei ſich kreuzenden Zugdiagonalen vorhanden iſt, ſo gilt die vorſtehende Entwickelung ebenfalls; jedoch iſt ſtets nur diejenige Diagonale des Mittelfeldes als vorhanden zu betrachten, welche bei der betreffenden Belaſtung Zug erleidet.

Was ſoeben vom Sicheldach angegeben wurde, gilt ſelbſtverſtändlich von jedem aus zwei ſymmetriſchen Hälften zuſammengeſetzten Dachſtuhl.

3) Stabſpannungen bei Belaſtung durch Winddruck. Die durch Windbelaſtung entſtehenden Stabſpannungen ſind ſowohl für den Fall, daſs der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers kommt, wie für den Fall zu ermitteln, daſs der Wind von der Seite kommt, an welcher das feſte Auflager liegt. Die Berechnung iſt nach Früherem leicht durchzuführen. 229. Ermittelung d. Spannungen durch Winddruck.

4) Gegendiagonalen. Aus dem Belaſtungsgeſetz für die Diagonalen geht hervor, daſs jede Diagonale ſowohl Zug, wie Druck erhalten kann; will man dies vermeiden, ſo ſind Gegendiagonalen anzuwenden, worüber das im Kapitel »Träger« (Art. 184, S. 167) Geſagte auch hier gilt. 230. Gegendiagonalen.

Beiſpiel. Für das nachſtehend näher beſchriebene Sicheldach ſind in Fig. 303 bis 305 die Stabſpannungen ermittelt, und zwar zeigt Fig. 303 den Binder und die Spannungsermittelung für Belaſtung durch das Eigengewicht, Fig. 304 die Spannungen für einſeitige Schneelaſt, Fig. 305 diejenigen für Windbelaſtung von der Seite des beweglichen, bezw. feſten Auflagers. 231. Beiſpiel.

Die Hauptmaſse und Belaſtungen des Dachſtuhles ſind: Stützweite $L = 24\,^{\mathrm{m}}$; Anzahl der Felder gleich 6; Feldweite gleich $4\,^{\mathrm{m}}$; Pfeilhöhe der oberen Parabel $h = 4{,}8\,^{\mathrm{m}}$, der unteren Parabel $h_1 = 2{,}4\,^{\mathrm{m}}$; die Binderweite iſt $4{,}2\,^{\mathrm{m}}$; die Dachdeckung Eiſenwellblech auf Eiſenpfetten.

Die Ordinaten der beiden Parabeln ergeben ſich aus den Gleichungen 318:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{für} & x = & 4 & 8 & 12 & 16 & 20\,^{\mathrm{m}} \\
\text{iſt} & y = & 2{,}67 & 4{,}27 & 4{,}8 & 4{,}27 & 2{,}67\,^{\mathrm{m}}, \\
 & y_1 = & 1{,}33 & 2{,}13 & 2{,}4 & 2{,}13 & 1{,}33\,^{\mathrm{m}}.
\end{array}
$$

Ferner iſt
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2{,}67}{4} = 0{,}6675, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{4{,}27 - 2{,}67}{4} = 0{,}4, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{4{,}8 - 4{,}27}{4} = 0{,}1325;$$
$$\alpha_1 = \backsim 33^0\,40', \qquad \alpha_2 = \backsim 22^0, \qquad \alpha_3 = \backsim 7^0\,30';$$
$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + 2{,}67^2} = 4{,}81\,^{\mathrm{m}}, \qquad \lambda_2 = \sqrt{4^2 + 1{,}6^2} = 4{,}31\,^{\mathrm{m}}, \qquad \lambda_3 = \sqrt{4^2 + 0{,}53^2} = 4{,}04\,^{\mathrm{m}}.$$

Die Belaſtung durch das Eigengewicht beträgt für $1\,^{\mathrm{qm}}$ wagrechter Projection der Dachfläche $42\,^{\mathrm{kg}}$, demnach für den Knotenpunkt $G = 4{,}0 \cdot 4{,}2 \cdot 42 = 705{,}6 = \backsim 700\,^{\mathrm{kg}}$; die Belaſtung durch Schnee für den Knotenpunkt $S = 4 \cdot 4{,}2 \cdot 75 = 1260\,^{\mathrm{kg}}$; die Belaſtung durch Winddruck ergiebt ſich nach Gleichung 7 folgendermaſsen:

$$
\begin{array}{lll}
\text{für } \alpha_1 = 33^0\,40', & \alpha_2 = 22^0, & \alpha_3 = 7^0\,30' \\
\nu = 83\,^{\mathrm{kg}}, & \nu = 64\,^{\mathrm{kg}}, & \nu = 36\,^{\mathrm{kg}}, \\
N = 4{,}2\,\lambda_1 \cdot 83 = \backsim 1680\,^{\mathrm{kg}}, & N_2 = 4{,}2\,\lambda_2 \cdot 64 = \backsim 1160\,^{\mathrm{kg}}, & N_3 = 4{,}2\,\lambda_3 \cdot 36 = \backsim 610\,^{\mathrm{kg}}.
\end{array}
$$

Fig. 303.

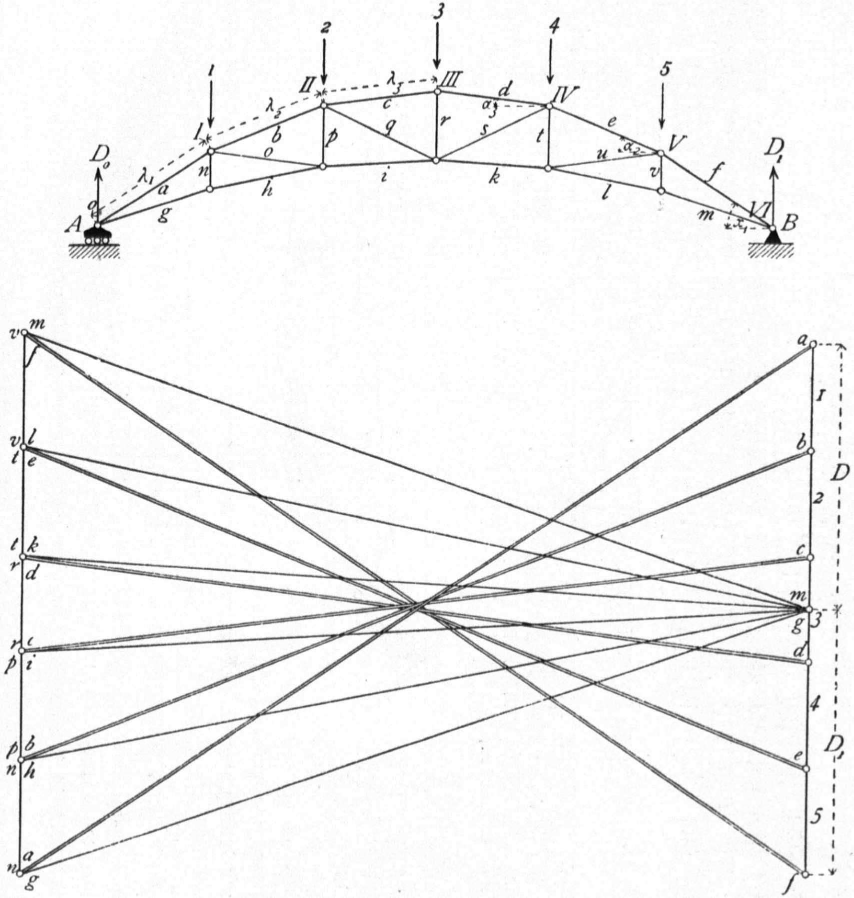


Fig. 304.

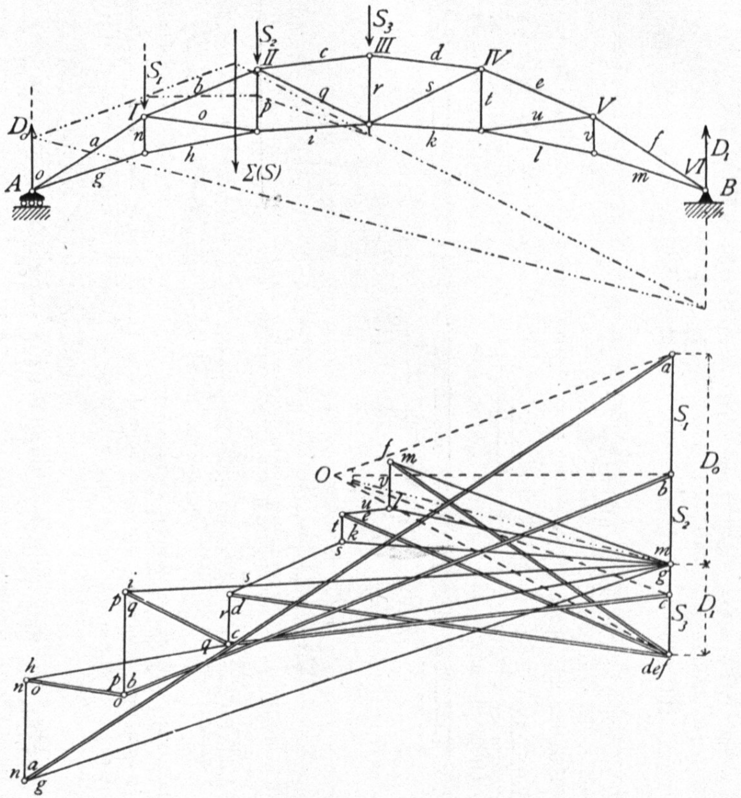
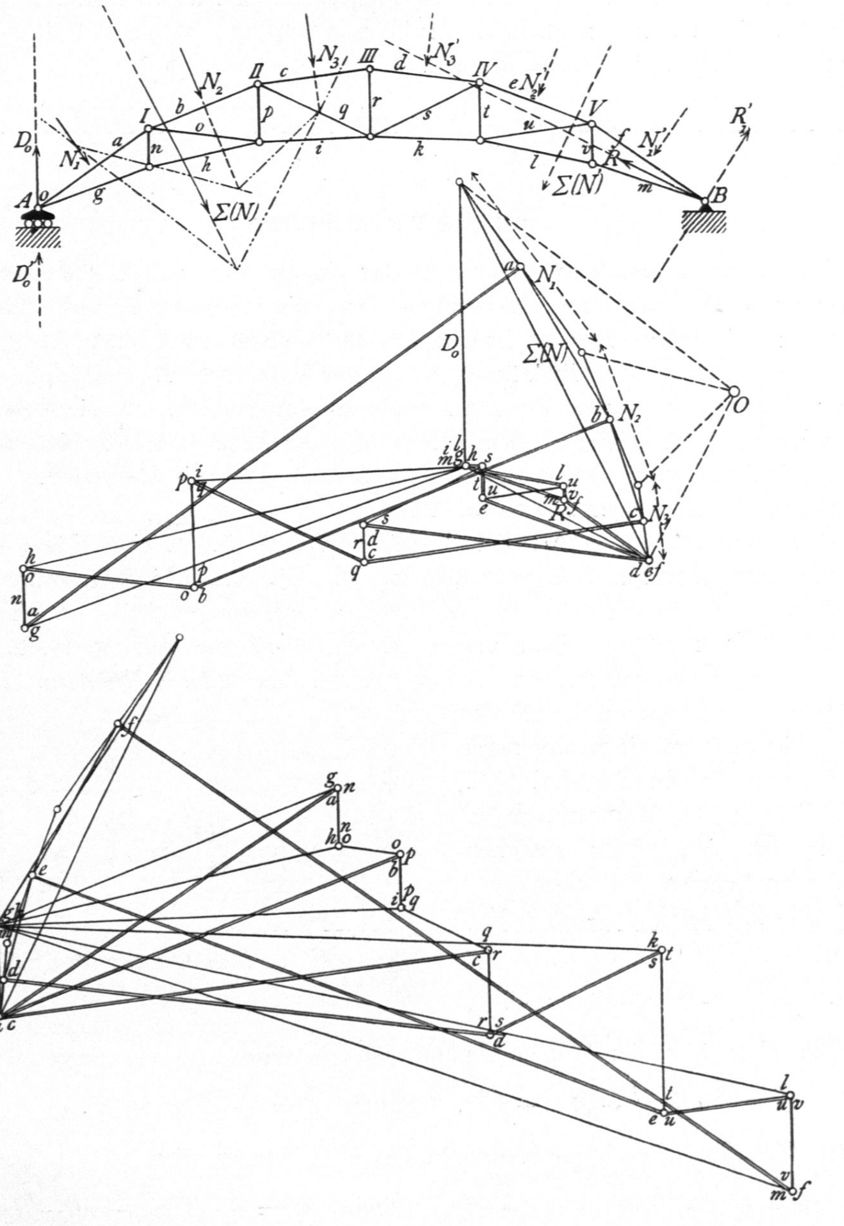


Fig. 305.



Aus den Werthen von N_1, N_2 und N_3 ergeben fich leicht die Knotenpunktsbelaftungen. Von N_1 kommt die Hälfte auf den Knotenpunkt *o*, die andere Hälfte auf den Knotenpunkt *I*; ähnlich verhält es fich mit *II* und *III*. Die beiden in einem Knotenpunkte (*I*, bezw. *II*) wirkenden Laften find alsdann leicht zu einer Mittelkraft zu vereinigen, wie in Fig. 305 gefchehen.

f) Pultdächer.

Die Pultdächer find Balkendächer, welche man fich aus den Satteldächern, bezw. Tonnendächern dadurch entftanden denken kann, dafs die Hälfte an der einen Seite der lothrechten Mittelaxe fortgelaffen ift. Die Ermittelung der Be- 232. Spannungen.

laſtungen, der Auflagerdrücke und der inneren Spannungen, ſei es auf dem Wege der Rechnung, ſei es auf dem der Conſtruction, iſt genau in derſelben Weiſe vorzunehmen, die in den vorſtehenden Artikeln gezeigt iſt, weſshalb hier nicht weiter darauf eingegangen zu werden braucht.

---

3. Kapitel.

Sprengwerksdächer.

233. Ungünſtigſte Belaſtung.

Entſprechend den Bemerkungen in Art. 203 (S. 187) u. Art. 228 (S. 216) ſollen als ungünſtigſte lothrechte Belaſtungen nur die Schneebelaſtung des ganzen Daches und diejenige einer Dachhälfte der Berechnung zu Grunde gelegt werden, ferner die einſeitige Windbelaſtung als ungünſtigſte ſchiefe Belaſtung. Bei der Schneebelaſtung iſt ſodann für jeden Stab zu unterſuchen, ob die Belaſtung des ganzen Daches oder diejenige der einen oder der anderen Hälfte die ungünſtigere iſt. Zu dieſem Zwecke genügt nach Art. 228 (S. 216) die Beſtimmung der Stabſpannungen bei einſeitiger Schneebelaſtung.

Aus der Gröſse und Art der Beanſpruchungen ſämmtlicher Stäbe bei dieſer Belaſtung ſind alsdann, wie dort gezeigt iſt, die ungünſtigſten lothrechten Belaſtungen, ſo wie die Gröſsen der ungünſtigſten Spannungen leicht zu ermitteln.

234. Berechnung der Spannungen.

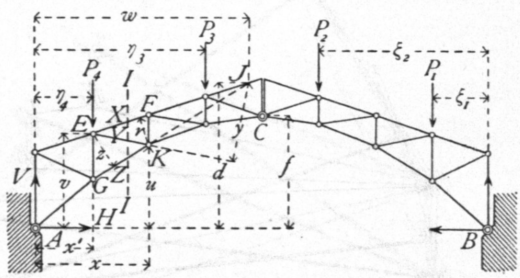
Die Berechnung der Spannungen erfolgt, wenn die Auflagerkräfte ermittelt ſind, nach der Momentenmethode genau, wie bei den anderen Dächern. Es handle ſich für eine beliebige lothrechte Belaſtung (Fig. 306) um die Spannungen X, Y, Z in den Stäben EF, EK, GK. Für EF iſt K der Momentenpunkt, und für das Trägerſtück zwiſchen A und dem Schnitte II wird

$$0 = Vx - Hu - P_4\,(x - \eta_4) + Xr,$$

woraus

$$X = -\frac{1}{r}\,[Vx - Hu - P_4\,(x - \eta_4)].$$

Fig. 306.



Für GK iſt E der Momentenpunkt, und es wird

$$0 = Vx' - Hv - Zz, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{1}{z}\,(Vx' - Hv).$$

Endlich iſt J der Momentenpunkt für EK, und es wird

$$0 = Vw - Hd - P_4\,(w - \eta_4) - Yy, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{1}{y}\,[Vw - Hd - P_4\,(w - \eta_4)].$$

Man kann auch, was oft einfacher iſt, die Gleichgewichtsbedingung für das Trägerſtück zwiſchen C und dem Schnitte II aufſtellen; ſelbſtverſtändlich ergeben ſich dieſelben Reſultate.

Für ſchiefe Belaſtungen iſt das Verfahren genau das gleiche.

235. Graphiſche Ermittelung der Spannungen.

Sollen die Spannungen auf graphiſchem Wege ermittelt werden, ſo wird, nachdem für die angenommenen Belaſtungen die Lagerkräfte der Punkte A und B ermittelt ſind, für jede Hälfte der Kräfteplan nach *Cremona* in mehrfach erörterter Weiſe conſtruirt. In Fig. 307, 308 u. 309 ſind dieſe Kräftepläne für Belaſtung durch Eigengewicht, einſeitige Schneelaſt und Winddruck conſtruirt.

Fig. 307.

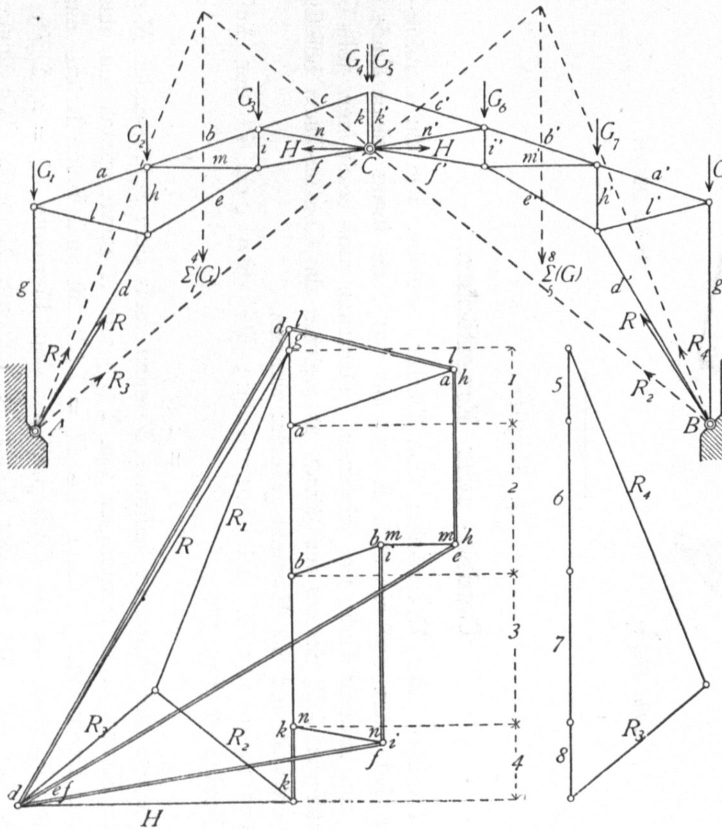
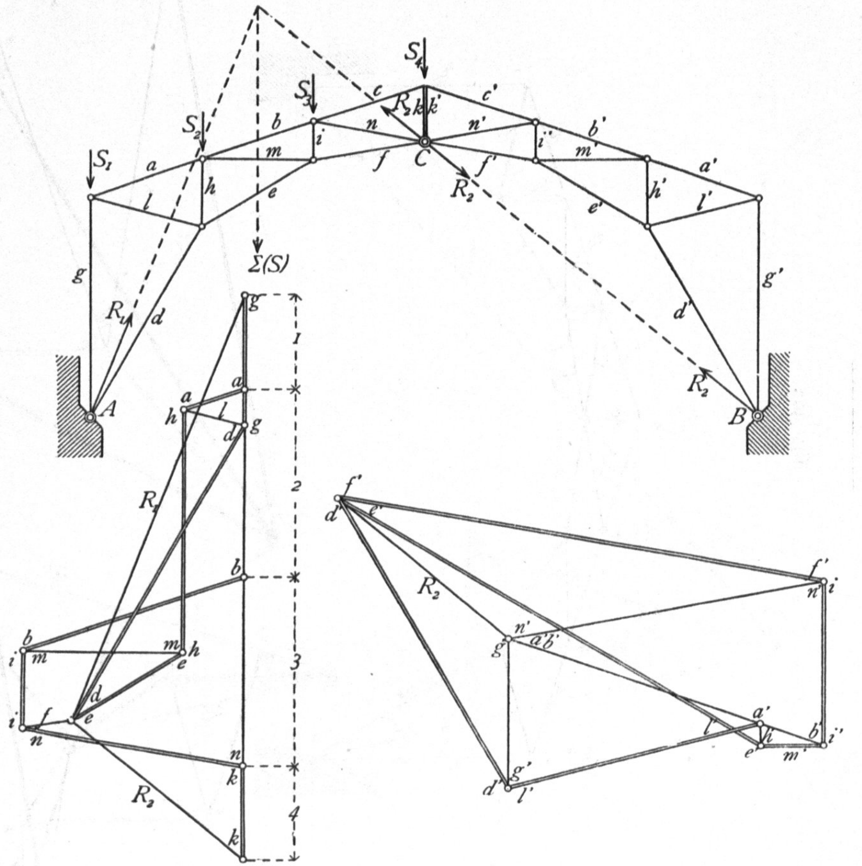
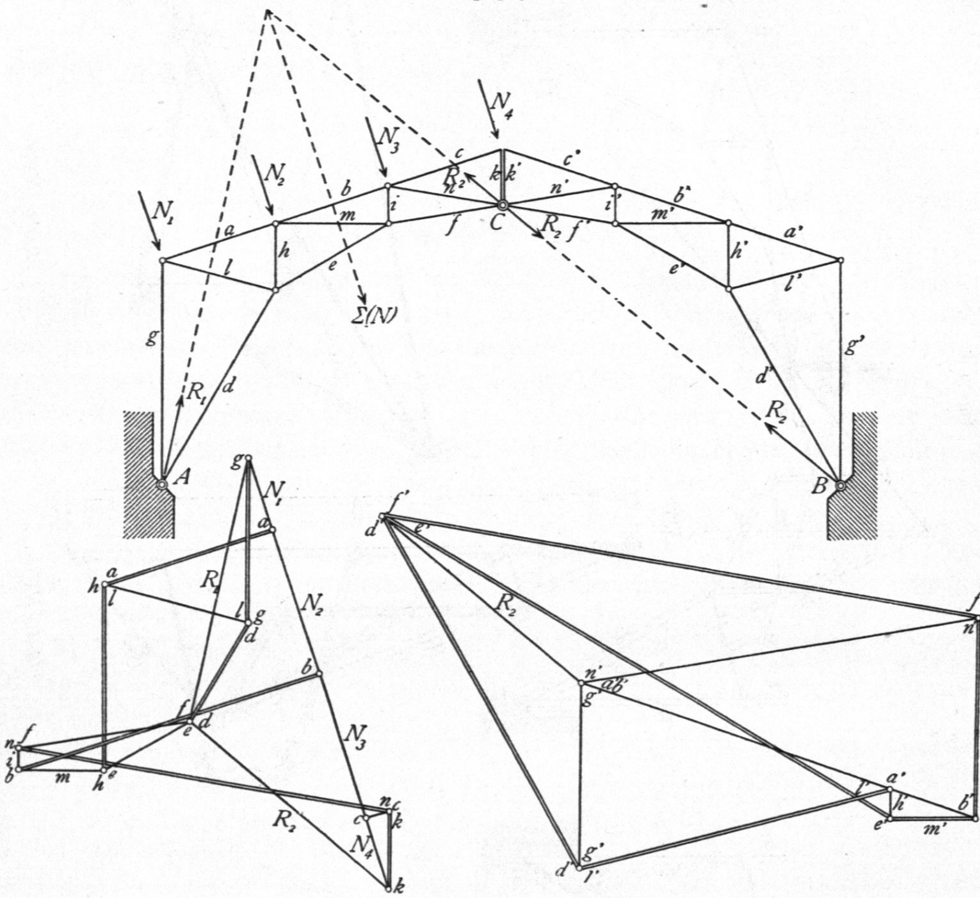


Fig. 308.



Linke Hälfte. *Rechte Hälfte.*

Fig. 309.



Linke Hälfte. *Rechte Hälfte.*

4. Kapitel.

Conſole- oder Kragdächer.

236. Auflager-drücke.

Die Conſole- oder Kragdächer ſind Dächer, welche, wie die Conſole- oder Kragträger (ſiehe Art. 156 bis 159, S. 135 bis 137), an ihrem einen Ende unterſtützt ſind, am anderen Ende frei ſchweben. Demnach muſs auch hier, falls Gleichgewicht ſtattfinden ſoll, Seitens der Wand, an welcher das Conſole-Dach befeſtigt iſt, ein Auflagerdruck und ein Moment geleiſtet werden.

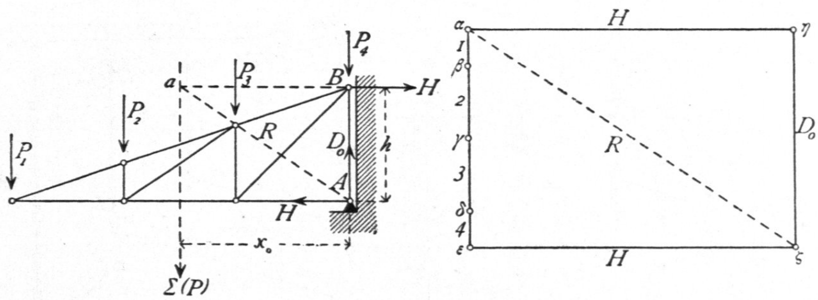
1) Auflagerdrücke. Für lothrechte Belaſtungen iſt der Auflagerdruck im Punkte A (Fig. 310)

$$D_0 = \Sigma\,(P) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 324.$$

Das Seitens der Wand zu leiſtende Moment muſs dem reſultirenden Momente der äuſseren Kräfte, d. h. demjenigen von $\Sigma\,(P)$ und A genau gleich ſein und entgegengeſetzte Drehrichtung haben. Da $D_0 = \Sigma\,(P)$ iſt und beide Kräfte einander parallel ſind, ſo bilden ſie ein Kräftepaar mit dem Momente $M_0 = x_0\,\Sigma\,(P)$. Dieſelbe Gröſse hat alſo das von der Mauer zu leiſtende Moment. Wir denken uns diefes Moment durch zwei gleiche, parallele und entgegengefetzt gerichtete Kräfte H in den Punkten A und B gebildet; alsdann ift $Hh = M_0 = x_0 \Sigma(P)$ und daraus

$$H = \frac{\Sigma(P)\, x_0}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 325.$$

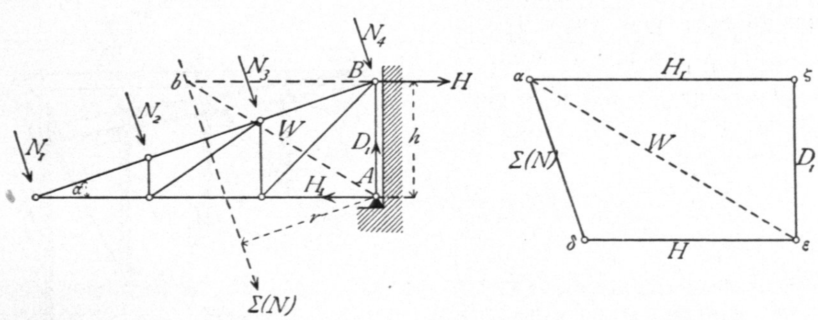
Fig. 310.



Ueber die Ermittelung von D_0 auf graphifchem Wege braucht nichts weiter gefagt zu werden. Um H zu conftruiren, fuche man die Mittelkraft von P_1, P_2, P_3 . . . auf bekannte Weife; alsdann wirken auf das Dach 4 Kräfte: $\Sigma(P)$, D_0, H im Punkte A und H im Punkte B. Faffen wir je zwei von diefen vier Kräften zu einer Mittelkraft zufammen, fo geht die Mittelkraft von H und D_0 durch A, diejenige von $\Sigma(P)$ und der in B wirkenden Kraft H durch a; beide halten das Dach im Gleichgewicht; ihre Richtungen fallen alfo in eine gerade Linie, in die Linie aA. Man trage fonach die Laften *1*, *2*, *3* . . . an einander zu $\alpha\,\varepsilon$, ziehe durch α eine Linie parallel zur Richtung von R, durch ε eine Linie parallel zur Richtung von H; alsdann ift $\varepsilon\,\zeta = H$ und $\zeta\,\alpha = R$. Um nun das Kraftpolygon der äufseren Kräfte zu vervollftändigen, trage man an ζ die Kraft $D_0 = \zeta\,\eta = \alpha\,\varepsilon$ und an η das in A angreifende $H = \eta\,\alpha$. Damit fchliefst fich das Kraftpolygon.

Bei der Belaftung durch Winddruck (Fig. 311) entfteht im Punkte A ein fchiefer Stützendruck, welcher in eine lothrechte Seitenkraft D_1 und eine wagrechte

Fig. 311.



Seitenkraft H_1 zerlegt werden kann. Aufserdem mufs von der Wand ein Moment geleiftet werden, welches in Bezug auf A als Momentenpunkt demjenigen der Windlaften gleich, der Drehrichtung nach entgegengefetzt ift. Um diefes Moment zu erzeugen, bringen wir in B eine Kraft H an, welche fich aus der Bedingung beftimmt

$$\left.\begin{array}{l} 0 = Hh - \Sigma(N)\, r, \quad \text{woraus} \quad H = \dfrac{r}{h}\, \Sigma(N). \\ \text{Es wird ferner} \\ D_1 = \Sigma(N) \cos\alpha \quad \text{und} \quad H_1 = H + \Sigma(N) \sin\alpha = \Sigma(N)\left(\dfrac{r}{h} + \sin\alpha\right) \end{array}\right\} \quad . \quad 326.$$

Die Conftruction der Kräfte H_1, D_1 und H erfolgt in ähnlicher Weife, wie bei lothrechter Belaftung. Man vereinigt $\Sigma\,(N)$ und die in B angreifende Kraft H zu einer Mittelkraft, welche durch b geht, und H_1 mit D_1 zu einer zweiten Mittelkraft, welche durch A geht. Beide Kräfte halten das Dach im Gleichgewicht, haben alfo die Richtung $b\,A$, bezw. $A\,b$.

Ift $\alpha\,\delta = \Sigma\,(N)$, fo ziehe man durch δ eine Parallele zur Richtung von H_1, durch α eine Parallele zur Richtung von W; man erhält als Schnittpunkt ε, und es ift $\delta\,\varepsilon = H$, $\varepsilon\,\alpha = W$. Nun zerlege man $\varepsilon\,\alpha$ in D_1 und H_1, fo wird $\varepsilon\,\zeta = D_1$, $\zeta\,\alpha = H_1$.

Fig. 312.

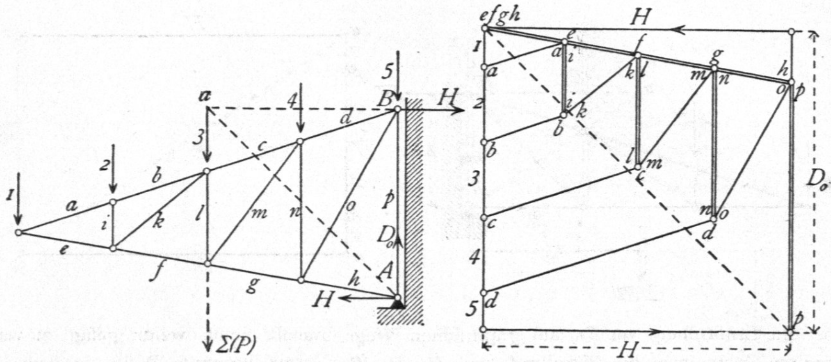
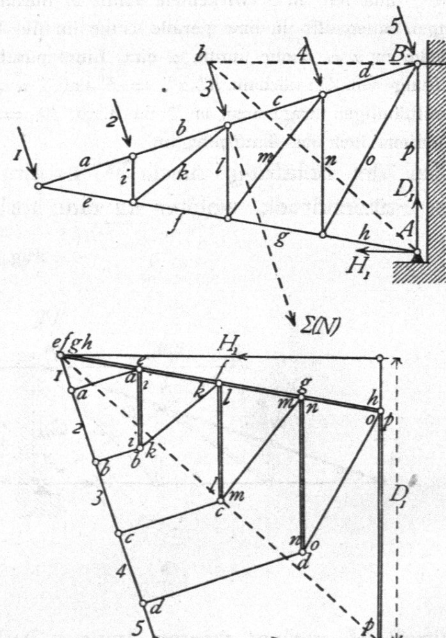


Fig. 313.



237. Stab-fpannungen.

2) Stabfpannungen. Um die Stabfpannungen zu ermitteln, find hier nur Belaftung durch das Eigengewicht, durch volle Schnee- und volle Windbelaftung in das Auge zu faffen.

Die Berechnung für die verfchiedenen möglichen Formen ift nach der Momentenmethode ohne Schwierigkeit durchzuführen, und zwar fowohl wenn die Laften lothrecht, als wenn fie fenkrecht zur Dachfläche gerichtet find; es braucht darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden.

Das graphifche Verfahren ift in Fig. 312 u. 313 für einen Confole-Dachftuhl, und zwar für Belaftung durch Eigengewicht und durch Winddruck, durchgeführt. Zuerft find die äufseren Kräfte, wie oben gezeigt, ermittelt, in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander getragen und dann ift der Kräfteplan conftruirt, der ohne Weiteres verftändlich ift.

5. Kapitel.

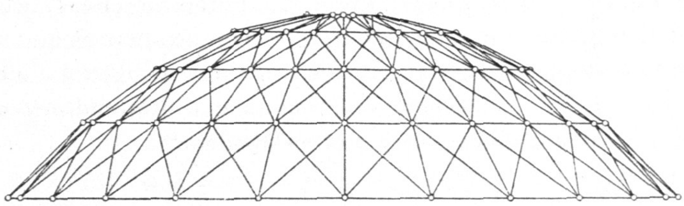
Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

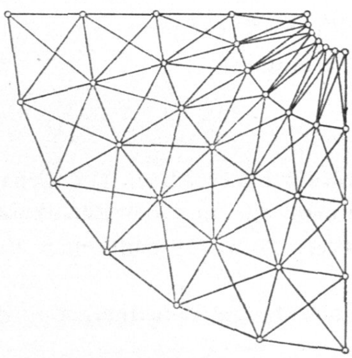
a) Kuppeldächer.

Die Kuppelfläche entſteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; ſie iſt alſo eine Umdrehungsfläche. 238. Allgemeines.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial geſtellter Binder conſtruirte, ſind bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit beſtem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern ſämmtliche Conſtructionstheile in die Kuppelfläche verlegt. Eine Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet und in verſchiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere ſind den Parallelkreiſen der Kuppelfläche eingeſchriebene Vielecke. In den ſo entſtehenden Vierecken ſind alsdann, wegen der ungleichmäſsigen Belaſtung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich iſt eine Belaſtung der Kuppelmitte durch eine ſog. Laterne vorhanden. Die ganze Conſtruction bildet demnach ein der Kuppelfläche eingeſchriebenes Polyeder; in Fig. 314 ſind Anſicht und Grundriſs derſelben dargeſtellt.

Fig. 314.





1) Belaſtungen und Auflagerdrücke.

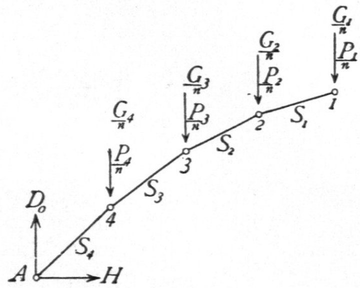
Die hier zu betrachtenden Kuppeln ſind ſo flach, daſs der Winddruck nur von geringer Bedeutung iſt; derſelbe ſoll deſshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel conſtant angenommen werden. Es genügt ferner, nur die lothrechte Seitenkraft $\mathfrak{v}$ (vergl. Art. 28, S. 22) des Winddruckes zu berückſichtigen; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachläſſigt werden. Endlich iſt es empfehlenswerth, alle Belaſtungen auf das Quadratmeter der Grundfläche, alſo der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen. 239. Belaſtungen.

Auch hier greifen die Laſten in den Knotenpunkten der Conſtruction an; es ſind demnach die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit dieſen die Belaſtungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, ſo würden die einzelnen Sparren ſchiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von dieſen erleiden; durch einen Ring, gegen 240. Auflagerdrücke.

welchen ſich ſämmtliche Sparrenfüſse ſetzen, den ſog. Mauerring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den unterſten Sparrenſtäben (S_4 in Fig. 315) vorhandenen Spannungen aufgehoben, ſo daſs als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entſprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belaſtungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belaſtet ſind. Wenn der Grundriſs der Kuppel ein regelmäſsiges n-Eck iſt und demnach n Sparren vorhanden ſind, ſo kann angenommen werden, daſs bei den erwähnten Belaſtungen alle Sparren gleiche Laſten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der erſten Ringzone mit enthalten ſei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen ſeien bezw. (Fig. 315) G_1, G_2, G_3, G_4 . . ., die zufälligen Laſten der ganzen Ringzonen P_1, P_2, P_3, P_4 . . .; alsdann iſt, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belaſtung der ganzen Dachfläche

Fig. 315.



$$n\,D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots = \Sigma\,(G) + \Sigma\,(P).$$

Wenn etwa nur die drei oberſten Zonen voll belaſtet ſind, ſo wird

$$n\,D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3 \,.$$

ſein. Auf dieſe Art ſind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

2) Stabſpannungen.

241. Berechnung der Stabſpannungen.

α) Ungünſtigſte Beanſpruchung der einzelnen Stäbe. Die genaue Unterſuchung der für jeden Stab ungünſtigſten Belaſtungsweiſe und die Berechnung der dabei entſtehenden Beanſpruchungen iſt ſehr ſchwierig, da die elaſtiſchen Verſchiebungen der einzelnen Punkte in Frage kommen.

Es ſollen deſshalb, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

a) die Sparren erhalten den Maximaldruck, wenn die ganze Kuppel voll belaſtet iſt;

b) ein Ring erhält ſeinen Maximalzug, wenn der innerhalb deſſelben befindliche Kuppeltheil voll belaſtet, der Ring ſelbſt mit ſeiner Zone aber unbelaſtet iſt; bei der entgegengeſetzten Belaſtungsart treten die entgegengeſetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwiſchen zwei Sparren erhalten ihren gröſsten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmeſſers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belaſtet iſt.

β) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belaſtungsarten, nämlich die Belaſtung der ganzen Kuppel durch zufällige Laſt und die Belaſtung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belaſtungsart ergiebt die Minimalſpannungen. Die Maximalſpannungen der Sparren ſind gleich den Summen der bei den beiden angeführten Belaſtungsarten ſich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belaſtungsarten unterſcheiden ſich nur durch die Gröſse der Laſten.

Was zunächſt die zufällige Belaſtung betrifft, ſo ſind im m-ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in E (Fig. 316 u. 317) folgende Kräfte

Fig. 316.

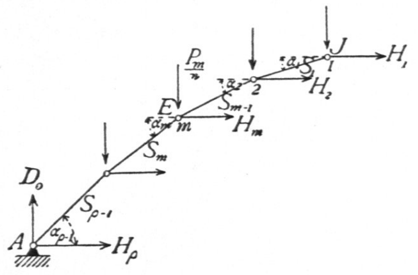
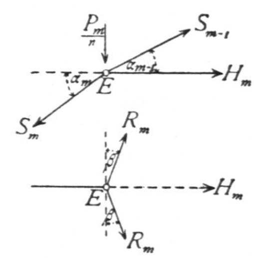


Fig. 317.



im Gleichgewichte: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m, die Laft $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringfpannungen R_m. Letztere find einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des m-ten Ringes die Mittelkraft H_m. Die algebraifche Summe der lothrechten Kräfte für den Punkt E ift gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den erften Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für J, ift $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3},$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 327.$$

Eben fo ergiebt fich die Spannung in den Sparren für eine Belaftung durch das Eigengewicht zu

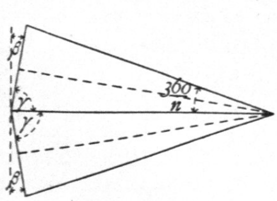
$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; \quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \ldots S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \quad . \quad 328.$$

γ) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraifche Summe der wagrechten Kräfte im Punkte E gleich Null ift, lautet (Fig. 317):

$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m$, woraus $H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}$.

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringfpannungen R_m ift, fo ergiebt fich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun ift (Fig. 318) $\beta = \frac{360}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

Fig. 318.



fonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in diefe Gleichung der für H_m gefundene Werth eingefetzt, fo folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 329.$$

Wir beſtimmen nach Gleichung 329 die Ringſpannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringſpannung durch zufällige Belaſtung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\dfrac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \dfrac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \dfrac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \operatorname{cotg} \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 330.$$

Man erhält

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für den Laternenring } (m = 1)\text{: } R_1^g = -\dfrac{G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}}; \\[2ex]
\text{für den Ring 2 } (m = 2)\text{: } R_2^g = -\dfrac{(G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2 - G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}}; \\[2ex]
\text{für den Ring 3 } (m = 3)\text{: } R_3^g = -\dfrac{(G_1 + G_2 + G_3) \operatorname{cotg} \alpha_3 - (G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}},
\end{array}\right\} \quad 331.$$

etc.

Für den Mauerring iſt S_m, alſo das erſte Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ iſt,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 332.$$

Um die durch zufällige Belaſtung erzeugten Ringſpannungen zu ermitteln, ſetzen wir in die Gleichung 329 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es ſoll $\mathfrak{S}_1^m (P)$ die zwiſchen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Laſten bezeichnen, wobei $\mathfrak{S}$ ausdrückt, daſs nicht alle Knotenpunkte $1 - m$ belaſtet zu ſein brauchen; im Gegenſatz dazu ſoll $\sum_1^m (P)$ andeuten, daſs alle Knotenpunkte von 1 bis m belaſtet ſind. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belaſtung aus Gleichung 329

$$R_m = -\frac{\mathfrak{S}_1^m (P) \operatorname{cotg} \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1} (P) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 333.$$

Dieſe Gleichung ermöglicht die Feſtſtellung der für die einzelnen Ringe ungünſtigſten Belaſtungen (unter Vorausſetzung der Belaſtung ganzer Zonen) und die Ermittelung der gröſsten Druck- und Zugſpannungen in den Ringen. Der gröſste Druck wird ſtattfinden, wenn im Zähler das erſte Glied möglichſt groſs, das zweite Glied möglichſt klein iſt. Jede Belaſtung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ hat ſowohl ein Wachſen des erſten, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\operatorname{cotg} \alpha_{m-1}$ ſtets gröſser iſt, als $\operatorname{cotg} \alpha_m$, ſo wächſt das zweite Glied mehr, als das erſte, d. h. jede Belaſtung des Knotenpunktes 1 bis $(m - 1)$ verringert den Druck, vergröfsert alfo den Zug. Die Belaftung des Knotenpunktes m vergröfsert nur das erfte Glied, alfo den Druck. Die Belaftung der aufserhalb des m-ten Ringes liegenden Ringe ift nach der Gleichung ohne Einflufs auf die Spannung im m-ten Ringe. Daraus folgt, dafs in den Stäben eines Ringes (des m-ten) der gröfste Druck ftattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m-1)$ unbelaftet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belaftet find. Da die Belaftung der äufseren Ringe ohne Einflufs ift, fo kann man fagen: Gröfster Druck findet ftatt, wenn der innere Kuppeltheil unbelaftet, der äufsere Kuppeltheil, einfchliefslich des betrachteten Ringes, belaftet ift. Daraus folgt dann weiter, dafs gröfster Zug in den Stäben des m-ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausfchliefslich der Zone, zu welcher der m-te Ring gehört, belaftet ift. Die hier gefundenen Ergebniffe ftimmen demnach mit den in Art. 241 (S. 226) gemachten Annahmen über die ungünftigften Belaftungen überein. Man erhält

$$R_m^{p\,min} = -\frac{P_m \operatorname{cotg} \alpha_m}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{p\,max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P)\,(\operatorname{cotg} \alpha_{m-1} - \operatorname{cotg} \alpha_m)}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 334.$$

Es ergiebt fich

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für den Laternenring } (m=1)\text{:} \quad R_1^{p\,min} = -\dfrac{P_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{p\,max} = 0\,; \\[2ex]
\text{für } m=2\text{:} \quad R_2^{p\,min} = -\dfrac{P_2 \operatorname{cotg} \alpha_2}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{p\,max} = \dfrac{P_1\,(\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_2)}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}}\,; \\[2ex]
\text{für } m=3\text{:} \quad R_3^{p\,min} = -\dfrac{P_3 \operatorname{cotg} \alpha_3}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{p\,max} = \dfrac{(P_1+P_2)\,(\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_3)}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}}\,,
\end{array}\right\} \quad 335.$$

etc.

$$\text{für den Mauerring: } R_\rho^{p\,min} = 0 \quad \text{und} \quad R_\rho^{p\,max} = \frac{(P_1+P_2+\ldots+P_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2\,n \sin\frac{\pi}{n}} \quad . \quad 336.$$

δ) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmeffer, welcher für die ungünftigfte Diagonalenbelaftung die belaftete und unbelaftete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belafteter und ein unbelafteter Sparren. Nehmen wir nun an, dafs die Spannung im erfteren fo grofs ift, als wenn die ganze Kuppel voll belaftet wäre, im zweiten fo grofs, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belaftet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anfchliefsende Diagonale ftark genug, um den ganzen Spannungsunterfchied zu übertragen, fo wird diefelbe jedenfalls zu ftark, ift alfo als ausreichend zu betrachten.

Im oberften Sparrenftück find die gröfsten und kleinften Druckfpannungen bezw.

$$S_{1\,max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1\,min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen ift $\Delta_1 = -\dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Diefelbe foll durch die Diagonale übertragen werden; es ift alfo nahezu, wenn der Winkel zwifchen Diagonale und belaftetem Sparren γ_1 genannt wird, $Y_1 \cos \gamma_1 = -\Delta$, daher

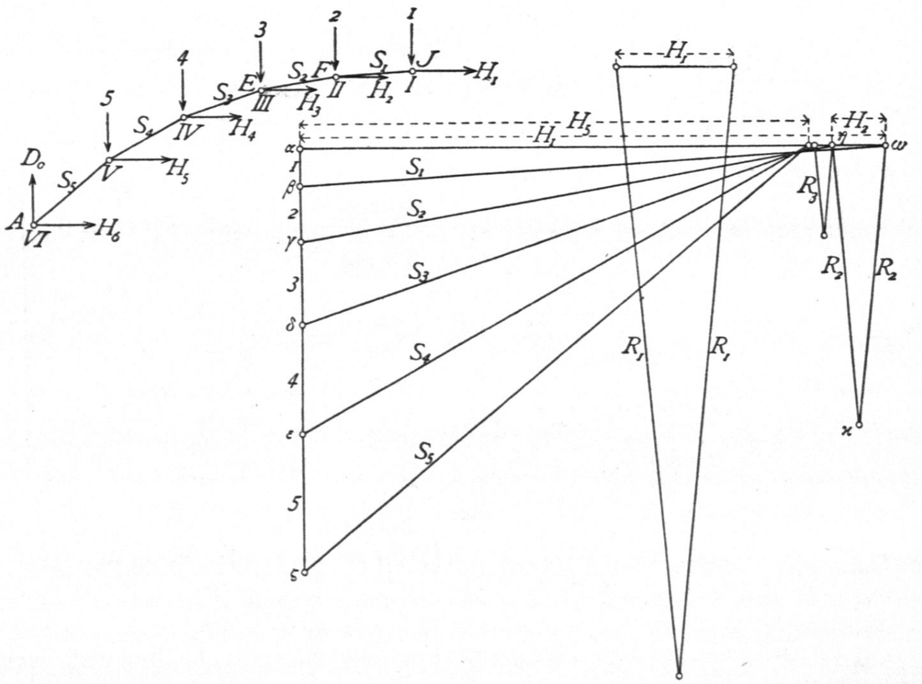
$$\left.\begin{array}{ll} Y_1 = \dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1 \cos \gamma_1}, & Y_2 = \dfrac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2 \cos \gamma_2}. \\ Y_3 = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3 \cos \gamma_3}, & Y_4 = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4 \cos \gamma_4}. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 337.$$

242. Graphifche Ermittelung der Stabfpannungen.

Auf graphifchem Wege laffen fich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weife ermitteln.

α) Sparrenfpannungen durch das Eigengewicht. Die Laften in den einzelnen Knotenpunkten feien *1, 2, 3, 4, 5* (Fig. 319); man trage diefelben zu einem Kraftpolygon $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$ an einander. Im Knotenpunkte *J* wirkt *1*, die Sparrenfpannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringfpannungen R_1. Die Zerlegung der Kraft *1* nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergiebt $\beta\,\omega = S_1$, $\omega\,\alpha = H_1$. Am Knotenpunkt *F* wirken nun *2*, S_1, S_2 und H_2; bekannt find jetzt *2* und S_1; man erhält $\gamma\,\eta = S_2$, $\eta\,\omega = H_2$. Eben fo ergeben fich die übrigen Sparrenfpannungen.

Fig. 319.



β) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belaftung. Die Conftruction ift in gleicher Weife, wie unter α vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Laften genau wie oben aufgetragen und behandelt find.

γ) Ringfpannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für diefe Belaftung gefundenen Werthe von H ergiebt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g . . . ., wie in Fig. 319 gezeichnet. Die Conftruction empfiehlt fich für die vorliegende Ermittelung nicht fehr, weil fie der fpitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Refultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichenfläche fallen. So ift H_1 in Fig. 319 im fünffach verkleinerten Mafsftabe aufgetragen, um R_1 zu conftruiren.

δ) Ringfpannungen durch zufällige Belaftung. Maximalfpannung im Ringe *II* findet ftatt, wenn nur die Ringzone *I* belaftet ift. Es fei (Fig. 320*a*) $a\,b = \dfrac{P_1}{n}$; alsdann wird $b\,f = S_1$, $f\,a = H_1$.

Im Knotenpunkt *F* (Fig. 321) find S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräftedreieck für Punkt *F* wird $b\,g\,f$. Darin ift $H_2 = g\,f$ und $g\,i = i\,f = R_2^{p}\,max$.

Fig. 320.

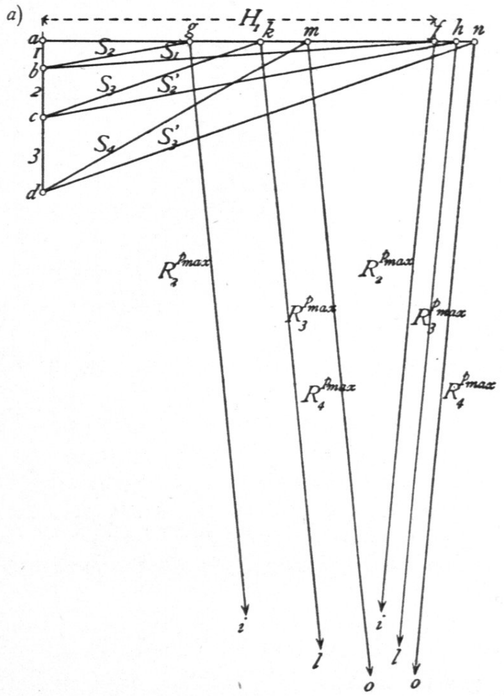
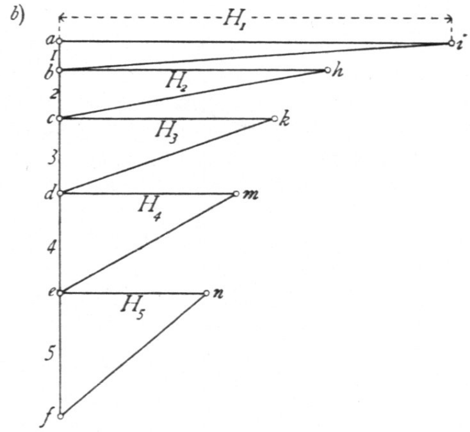
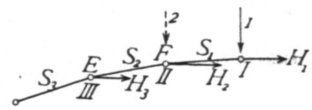



Fig. 321.



Im Ringe *III* ift Maximalfpannung, wenn die Zonen zu den Ringen *I* und *II* belaftet find; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb$, $2 = bc = \frac{P_2}{n}$, S_2' und H_2'. Man erhält leicht $H_2' = hf$, $S_2' = ch$. In E find dann S_2', S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_3^p max = kl = lh$. Eben fo wird $R_4^p max = on = mo$ etc.

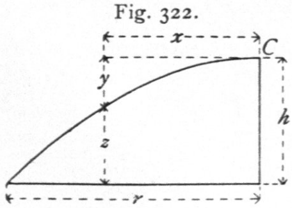
Minimalfpannung im Ringe *I* findet bei voller Kuppelbelaftung ftatt; alsdann wirkt in J die Kraft $1 = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 320*b*) $ab = 1$ ift, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringfpannungen ift dann in gleicher Weife wie oben vorzunehmen. Für Ring *II* findet Minimalfpannung bei einer Belaftung der Zonen *II*, *III*, *IV* ftatt; *I* ift unbelaftet; mithin ift S_1 alsdann gleich Null (fiehe Gleichung 327). Ift $bc = \frac{P_2}{n} = 2$, fo wird $hb = H_2$. Eben fo wird weiter für die Minimalbelaftungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc$, $H_4 = md$, $H_5 = ne$.

ε) Die Conftruction der Spannungen in den Diagonalen ift fo einfach, dafs diefelbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

3) Erzeugende Kuppelcurve.

Die erzeugende Curve ift in den meiften Fällen eine Parabel (Fig. 322) der Gleichung $y = \frac{h x^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel C liegt, die halbe Spannweite gleich r, die Pfeilhöhe gleich h gefetzt ift, oder eine cubifche Parabel der Gleichung $y = \frac{h x^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, dafs in den Zwifchenringen bei gleichmäfsig vertheilter Belaftung die Spannung Null herrfcht und dafs 243. Parabel-Kuppel.

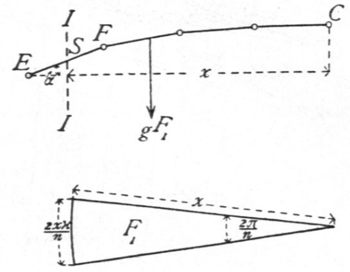
Fig. 322.



die Spannungen in den Sparren nahezu conſtant ſind, was ſich folgendermaſsen ergiebt.

Die Spannung im Sparrenſtab $E\,F$ (Fig. 323) iſt durch Betrachtung des Theiles zwiſchen dem Scheitel C und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte $I\,I$ zu ermitteln. Die algebraiſche Summe der auf dieſes Stück wirkenden lothrechten Kräfte iſt gleich Null, daher, wenn die belaſtende Grundfläche mit F_1, die Belaſtung für 1 qm der Grundfläche mit g bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g\,F_1$. Nun iſt $F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}$, mithin $S \sin \alpha = \frac{g\,x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Fig. 323.



Wird ſtatt des Vieleckes die ſtetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, ſo iſt $y = \frac{h\,x^3}{r^3}$ und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{3\,h\,x^2}{r^3}$; mithin

$$S \cos \alpha \,\frac{3\,h\,x^2}{r^3} = \frac{g\,x^2\,\pi}{n}, \quad \text{woraus} \quad S \cos \alpha = \frac{g\,\pi\,r^3}{3\,n\,h}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 338.$$

d. h. $S \cos \alpha$ iſt conſtant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α ſehr klein iſt, ſo ändert ſich auch $\cos \alpha$ ſehr wenig; die Spannung iſt daher im ganzen Sparren nahezu conſtant.

Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 317) und ſetzt die algebraiſche Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, ſo wird

$$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m, \quad \text{woraus} \quad H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0,$$

da nach Gleichung 338 $S \cos \alpha$ conſtant iſt. Die Ringſpannung iſt dann

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 339.$$

Die obigen Angaben ſind damit bewieſen.

Es möge noch bemerkt werden, daſs der theoretiſche Materialaufwand bei einer nach der cubiſchen Parabel gekrümmten Kuppel nur $^2/_3$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der ſich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergiebt.

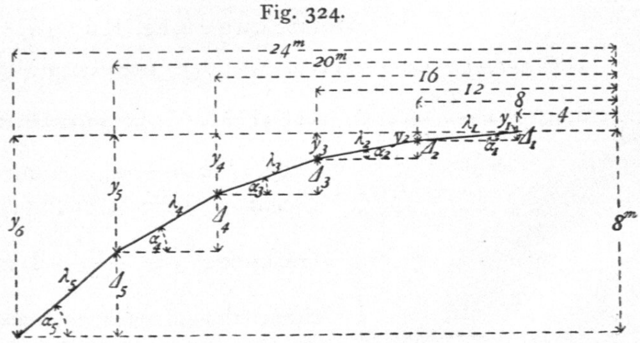
244. Beiſpiel. Beiſpiel. Es iſt ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmaſsen und Belaſtungen zu conſtruiren: Durchmeſſer des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47 m, demnach der Durchmeſſer des dem Mauerring umſchriebenen Parallelkreiſes $2\,L = 48$ m; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8$ m; es ſind 6 Ringe mit den Halbmeſſern 4, 8, 12, 16, 20 und 24 m und $n = 32$ Sparren anzuordnen; das Eigengewicht iſt zu 70 kg für 1 qm Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung iſt $\frac{h}{2\,L} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergiebt ſich hieraus nach Art. 26 (S. 20 ff.) als Belaſtung durch Schnee für 1 qm Grundfläche 75 kg, als Belaſtung durch Winddruck (ſiehe Art. 28, S. 22) für 1 qm Grundfläche $\mathfrak{v} = 64$ kg, ſo daſs die geſammte zufällige Belaſtung für 1 qm Grundfläche abgerundet 140 kg beträgt; die Laterne wiegt 2000 kg.

Die Kuppelfläche ſei durch Umdrehung einer cubiſchen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h\,x^3}{r^3} = \frac{8}{24^3}\,x^3 = 0{,}00058\,x^3$$

entſtanden. Man erhält für die verſchiedenen, durch die Ringe vorgeſchriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 324)

Fig. 324.



$x =$	4	8	12	16	20	24 m
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0 »
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0 »

Ferner ist

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0{,}26\,\mathrm{m};\ \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0{,}7\,\mathrm{m};\ \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1{,}38\,\mathrm{m};\ \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2{,}26\,\mathrm{m};$$
$$\Delta_5 = y_6 - y_5 = 3{,}36\,\mathrm{m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^2} = 4{,}01\,\mathrm{m};\ \lambda_2 = 4{,}06\,\mathrm{m};\ \lambda_3 = 4{,}23\,\mathrm{m};\ \lambda_4 = 4{,}59\,\mathrm{m};\ \lambda_5 = 5{,}22\,\mathrm{m}.$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0{,}0648;\ \sin\alpha_2 = 0{,}1724;\ \sin\alpha_3 = 0{,}32;\ \sin\alpha_4 = 0{,}492;\ \sin\alpha_5 = 0{,}644.$$

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15{,}38;\ \operatorname{cotg}\alpha_2 = 5{,}7;\ \operatorname{cotg}\alpha_3 = 2{,}9;\ \operatorname{cotg}\alpha_4 = 1{,}77;\ \operatorname{cotg}\alpha_5 = 1{,}19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^0\,37{,}5';\ \sin\frac{\pi}{n} = \sin 5^0\,37{,}5' = 0{,}098;\ \frac{1}{2\,n\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64\cdot 0{,}098} = 0{,}16.$$

Die Eigengewichte, bezw. zufälligen Belastungen der einzelnen Ringe sind:

Laternenring: $G_1 = 2000 + 6^2\,\pi\cdot 70 = 9\,913\,\mathrm{kg},\ P_1 = 6^2\,\pi\cdot 140 = 15\,826\,\mathrm{kg};$

2. Ring: $G_2 = (10^2 - 6^2)\,\pi\cdot 70 = 14\,067\,\mathrm{kg},\ P_2 = (10^2 - 6^2)\,\pi\ 140 = 28\,122\,\mathrm{kg};$

3. Ring: $G_3 = (14^2 - 10^2)\,\pi\cdot 70 = 21\,100\,\mathrm{kg},\ P_3 = (14^2 - 10^2)\,\pi\cdot 140 = 42\,182\,\mathrm{kg};$

4. Ring: $G_4 = (18^2 - 14^2)\,\pi\cdot 70 = 28\,133\,\mathrm{kg},\ P_4 = (18^2 - 14^2)\,\pi\cdot 140 = 56\,243\,\mathrm{kg};$

5. Ring: $G_5 = (22^2 - 18^2)\,\pi\cdot 70 = 35\,168\,\mathrm{kg},\ P_5 = (22^2 - 18^2)\,\pi\cdot 140 = 70\,304\,\mathrm{kg}.$

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden, sind nach Gleichung 328:

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n\sin\alpha_1} = -\frac{9913}{32\cdot 0{,}065} = -4766\,\mathrm{kg};$$

$$S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n\sin\alpha_2} = -\frac{23\,980}{32\cdot 0{,}1724} = -4346\,\mathrm{kg};$$

$$S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n\sin\alpha_3} = -\frac{45\,080}{32\cdot 0{,}32} = -4402\,\mathrm{kg};$$

$$S_4^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n\sin\alpha_4} = -\frac{73\,213}{32\cdot 0{,}492} = -4651\,\mathrm{kg};$$

$$S_5^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n\sin\alpha_5} = -\frac{108\,381}{32\cdot 0{,}644} = -5258\,\mathrm{kg}.$$

Die durch zufällige Belastung erzeugten Sparrenspannungen betragen:

$$S_1^p = -\frac{P_1}{n\sin\alpha_1} = -\frac{15\,826}{2{,}08} = -7608\,\mathrm{kg};$$

$$S_2^p = -\frac{P_1 + P_2}{n\sin\alpha_2} = -\frac{43\,948}{5{,}517} = -7966\,\mathrm{kg};$$

$$S_3^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n\sin\alpha_3} = -\frac{86\,130}{10{,}24} = -8400\,\mathrm{kg};$$

$$S_4^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n\sin\alpha_4} = -\frac{142\,373}{15{,}74} = -9045\,\mathrm{kg};$$

$$S_5^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n\sin\alpha_5} = -\frac{212\,677}{20{,}61} = -10\,319\,\mathrm{kg}.$$

Die Ringspannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 331:

Laternenring: $R_1^g = -9913\cdot 15{,}38 : 0{,}16 = -24\,396\,\mathrm{kg};$

2. Ring: $R_2^g = -(23\,980\cdot 5{,}7 - 9913\cdot 15{,}38)\,0{,}16 = +2524\,\mathrm{kg};$

3. Ring: $R_3^g = -(45\,080\cdot 2{,}9 - 23\,980\cdot 5{,}7)\,0{,}16 = +953\,\mathrm{kg};$

4. Ring: $R_4^g = -(73\,213\cdot 1{,}77 - 45\,080\cdot 2{,}9)\,0{,}16 = +183\,\mathrm{kg};$

5. Ring: $R_5^g = -(108\,381\cdot 1{,}19 - 73\,213\cdot 1{,}77)\,0{,}16 = +98\,\mathrm{kg};$

Mauerring: $R_6^g = 108\,381\cdot 1{,}19\cdot 0{,}16 = 20636\,\mathrm{kg}.$

Die Maximal- und Minimalſpannungen in den Ringen, durch zufällige Belaſtung erzeugt, betragen nach Gleichung 335:

Laternenring: $R_1^{p\,min} = -15826 \cdot 15{,}38 \cdot 0{,}16 = -38932^{kg}$ und $R_1^{p\,max} = 0$;

2. Ring: $R_2^{p\,min} = -28122 \cdot 5{,}7 \cdot 0{,}16 = -25647^{kg}$,

$R_2^{p\,max} = 15826\,(15{,}38 - 5{,}7) \cdot 0{,}16 = +24514^{kg}$;

3. Ring: $R_3^{p\,min} = -42182 \cdot 2{,}9 \cdot 0{,}16 = -19572^{kg}$,

$R_3^{p\,max} = 43948 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}16 = +19689^{kg}$;

4. Ring: $R_4^{p\,min} = -56243 \cdot 1{,}77 \cdot 0{,}16 = -15926^{kg}$,

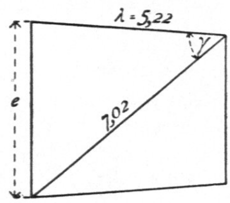
$R_4^{p\,max} = 86130 \cdot 1{,}13 \cdot 0{,}16 = +15589^{kg}$;

5. Ring: $R_5^{p\,min} = -70304 \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}16 = -13386^{kg}$,

$R_5^{p\,max} = 142373 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}16 = +13212^{kg}$;

Mauerring: $R_6^{p\,min} = 0$ und $R_6^{p\,max} = 212677 \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}16 = +40494^{kg}$.

Fig. 325.



Was ſchlieſslich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, ſo braucht nur die am ſtärkſten beanſpruchte Diagonale berechnet zu werden, weil ſelbſt dieſe noch ſehr ſchwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich ſtark.

Die gröſste durch zufällige Belaſtung erzeugte Sparrenſpannung iſt durch die Diagonale zu übertragen (ſiehe Art. 241, S. 226); dieſelbe iſt $S_5^p = -10319^{kg}$, und es hat demnach eine Diagonale höchſtens dieſe Kraft aufzunehmen. Die Spannung in der Diagonalen wird demnach kleiner ſein, als $\frac{10319}{\cos\gamma}$; da nun nahezu (Fig. 325) $\cos\gamma = \frac{5{,}22}{7{,}02} = 0{,}744$ iſt, wird $Y < \frac{10319}{0{,}744}$ oder $Y < 13870^{kg}$ ſein.

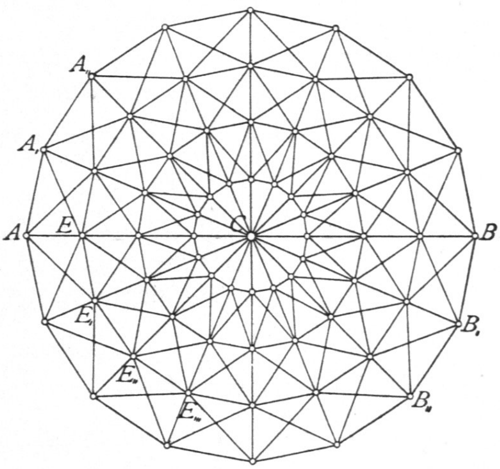
Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen aufſuchen, was nach dem Vorſtehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querſchnittsbeſtimmungen kann nun, wie bei den früheren Beiſpielen, eine Tabelle aufgeſtellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	− 4766	− 7 608	R_1	− 24 396	− 38 932	0
S_2	− 4346	− 7 966	R_2	+ 2 524	+ 24 514	− 25 647
S_3	− 4402	− 8 400	R_3	+ 953	+ 19 689	− 19 572
S_4	− 4651	− 9 045	R_4	+ 183	+ 15 589	− 15 926
S_5	− 5258	− 10 319	R_5	+ 98	+ 13 212	− 13 386
Diagonalen:			R_6	+ 20 636	+ 40 494	0
Y	0	13 870				
	Kilogramm				Kilogramm	

b) Flache Zeltdächer.

245. Zelt-dächer. Die Zeltdächer bilden Pyramiden, und zwar in den allermeiſten Fällen regelmäſsige Pyramiden. Man kann ſie aus einer Anzahl radial geſtellter Binder, die unter die ſog. Grate kommen, conſtruiren, in welchem Falle die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belaſtungen vorzunehmen iſt, wie bei den Balkendächern gezeigt wurde, oder man legt auch hier, wie bei den Kuppeln, alle Conſtructionstheile in die Dachflächen, ſo daſs ſich eine

Fig. 326.



der dortigen entſprechende Conſtruction ergiebt. In dieſem Falle (Fig. 326) werden eine Anzahl Binderſparren $A\,C$, $A_{,}\,C$, $A_{,,}\,C$, $B\,C$, $B_{,}\,C$, $B_{,,}\,C$ ... angeordnet; zwiſchen denſelben befinden ſich wagrechte Ringe E, $E_{,}$, $E_{,,}$, $E_{,,,}$ ... und in den viereckigen Feldern der Dachflächen, wegen der ungleichmäſsigen Belaſtungen, Diagonalen. Auch hier wird oft in der Dachmitte eine Laterne angeordnet, welche ſich auf einen Laternenring ſtützt, gegen den ſich die oberen Sparrenenden lehnen. Wir werden hier nur die der Kuppelconſtruction entſprechende Anordnung betrachten, da die erſtere keine beſonderen Schwierigkeiten bietet. Obgleich die gröſsere oder geringere Neigung der Dachflächen keinen grundlegenden Unterſchied bedingt, wollen wir die Zeltdächer dennoch in flache und ſteile Zeltdächer eintheilen, weil bei den erſteren die Belaſtung durch Schnee, bei den letzteren diejenige durch Wind die maſsgebende zufällige Belaſtung iſt.

Zu den flachen Zeltdächern gehören die Circus- und Theaterdächer, die Dächer über Panoramen, Locomotivſchuppen etc., zu den ſteilen hauptſächlich die Thurmdächer.

1) Belaſtungen und Auflagerdrücke.

Ueber die Belaſtung der flachen Zeltdächer gilt daſſelbe, was von den Belaſtungen der Kuppeldächer in Art. 239 (S. 225) geſagt iſt; wir beſtimmen alſo auch hier das Eigengewicht, den Schnee- und den Winddruck für 1^{qm} der Grundfläche, berückſichtigen aber vom Winddruck nur die lothrechten Seitenkräfte $\mathfrak{v}$, für welche die Werthe in Art. 28 (S. 22) angegeben ſind. Die Knotenpunktsbelaſtungen ſind den Grundflächen proportional, welche auf die einzelnen Knotenpunkte entfallen, demnach leicht zu ermitteln. 246. Belaſtungen.

Auch hier betrachten wir nur volle Belaſtung des ganzen Zeltdaches und ſolche theilweiſe Belaſtungsarten, bei denen ganze Ringzonen zufällig belaſtet ſind.

Von den Auflagerdrücken gilt gleichfalls daſſelbe, was bei den Kuppeldächern geſagt wurde. Da auch hier ein ſog. Mauerring die wagrechten Seitenkräfte der Spannungen in den unterſten Sparrentheilen aufhebt, ſo ſind für die in Ausſicht zu nehmenden Belaſtungsarten die Auflagerdrücke bei den einzelnen Sparren gleich den auf dieſelben entfallenden Laſten. 247. Auflagerdrücke.

2) Stabſpannungen.

α) Ungünſtigſte Beanſpruchungen der einzelnen Stäbe. Die genaue Beſtimmung der ungünſtigſten Belaſtungsarten und der bei ungleichmäſsig vertheilter Belaſtung entſtehenden Spannungen iſt auch hier ſehr ſchwierig. Werden nur volle Belaſtung des ganzen Daches und die Belaſtungen ganzer Ringzonen zu Grunde gelegt, ſo ergiebt ſich aus den aufzuſtellenden Gleichungen leicht, daſs die ungünſtigſte Belaſtungsart für die Sparren, ſo wie für alle Ringe bei voller Belaſtung des ganzen 248. Berechnung der Stabſpannungen.

Daches ſtattfindet. Bezüglich der Diagonalen verfahren wir genau, wie bei den Kuppeldächern (ſiehe Art. 241, S. 226).

β) Spannungen in den Sparren. Es mögen wiederum G_1, $G_2 \ldots G_m \ldots$ die Eigengewichte der ganzen Ringzonen, $P_1, P_2, \ldots P_m \ldots$ die zufälligen Belaſtungen derſelben ſein; alsdann ſind, falls n Sparren vorhanden ſind, die Belaſtungen der einzelnen Knotenpunkte bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n} \ldots \frac{G_m}{n} \ldots$ und $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n} \ldots \frac{P_m}{n} \ldots$

Allgemein wirke in einem Knotenpunkte (Fig. 327) die Laſt Q; alsdann ſind die in dem m-ten Knotenpunkte E (von der Laterne, bezw. der Mitte an gerechnet) wirkenden Kräfte S_{m-1}, S_m, Q_m und die Mittelkraft H_m der beiden Ringſpannungen R_m im Gleichgewicht. Demnach iſt (Fig. 328)

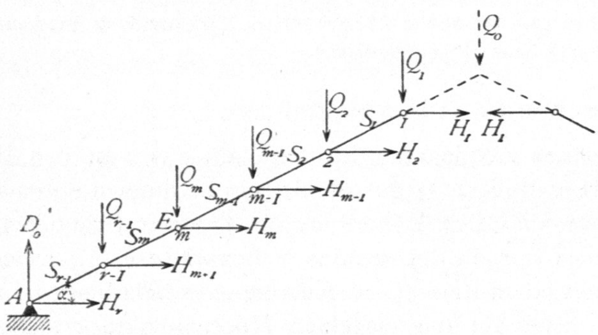
$$0 = Q_m + S_m \sin\alpha - S_{m-1} \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad S_m = -\frac{Q_m}{\sin\alpha} + S_{m-1}.$$

Für den erſten Sparrentheil, für $m = 1$, wird, falls eine Laterne vorhanden iſt, $S_{m-1} = 0$; daher

$$S_1 = -\frac{Q_1}{\sin\alpha}; \quad S_2 = -\frac{Q_2}{\sin\alpha} - \frac{Q_1}{\sin\alpha} = -\frac{Q_2 + Q_1}{\sin\alpha};$$

$$S_3 = -\frac{Q_3}{\sin\alpha} - \frac{Q_2 + Q_1}{\sin\alpha} = -\frac{Q_3 + Q_2 + Q_1}{\sin\alpha} \text{ etc.}$$

Fig. 327.



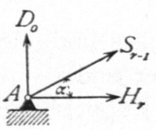
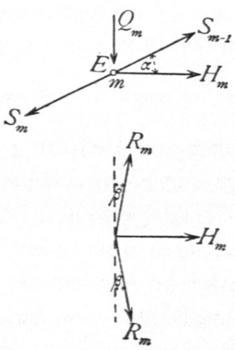


Fig. 328.



Allgemein wird

$$S_m = -\frac{\sum_1^m (Q)}{\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 340.$$

Die Sparrenſpannungen durch das Eigengewicht werden erhalten, indem der Reihe nach für Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots$ bezw. $\frac{G_1}{n}$, $\frac{G_2}{n}$, $\frac{G_3}{n} \ldots$ eingeſetzt wird. Man erhält

$$S_m^g = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 341.$$

Für $m = 1, 2, 3 \ldots$ wird

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n \sin\alpha}; \quad S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n \sin\alpha}; \quad S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin\alpha} \text{ etc.} \quad 342.$$

Aus der Gleichung 340 ergiebt ſich, daſs die Sparrenſpannungen durch zufällige Laſt am gröſsten bei voller Belaſtung ſind, und zwar wird

$$S_m^{p\,max} = - \frac{\sum\limits_1^m (P)}{n \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 343.$$

und für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_1^{p\,max} = - \frac{P_1}{n \sin \alpha}; \quad S_2^{p\,max} = - \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha}; \quad S_3^{p\,max} = - \frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha} \text{ etc.} \quad 344.$$

Falls keine Laterne vorhanden ift, gelten die Gleichungen 340 bis 344 ebenfalls; nur ift überall in die Summen auch Q_0 aufzunehmen, d. h. der Theil der Firftbelaftung, welcher auf den Sparren entfällt.

γ) Spannungen in den Ringen. Die algebraifche Summe der in E (Fig. 328) wirkenden wagrechten Kräfte ift gleich Null, d. h.

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha - S_m \cos \alpha ,$$

woraus

$$H_m = (S_m - S_{m-1}) \cos \alpha = - \frac{\sum\limits_1^m (Q) - \sum\limits_1^{m-1} (Q)}{\sin \alpha} \cos \alpha = - Q_m \operatorname{cotg} \alpha .$$

Nun ift $H_m = 2 R_m \sin \beta$ und, da nach Art. 241 (S. 226) $\beta = \frac{\pi}{n}$ ift,

$$R_m = - \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = - \frac{Q_m \operatorname{cotg} \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 345.$$

Die Belaftung durch das Eigengewicht erzeugt demnach eine Spannung

$$R_m^g = - \frac{G_m \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 346.$$

Falls ein Laternenring vorhanden ift, fo gilt die Gleichung 346 auch für diefen. Für denfelben ift $m = 1$ und $\sum\limits_1^{m-1} (Q) = 0$, fo wie $\sum\limits_1^m (Q) = Q_1$. Wir erhalten demnach für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$R_1^g = - \frac{G_1 \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^g = - \frac{G_2 \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 347.$$

Die Gleichungen 346 u. 347 ergeben, dafs in fämmtlichen Ringen durch das Eigengewicht Druck erzeugt wird; die Gleichung 345 gilt aber nicht für den Mauerring. Am Knotenpunkt A (Fig. 327) wirken die Kräfte $D_0 = \Sigma (Q)$, H_r und S_{r-1}; mithin ift $S_{r-1} \cos \alpha + H_r = 0$, woraus $H_r = - S_{r-1} \cos \alpha$. Ferner ift $D_0 + S_{r-1} \sin \alpha = 0$, woraus $S_{r-1} = - \frac{\sum\limits_1^{r-1} (Q)}{\sin \alpha}$. Es wird demnach $H_r = \sum\limits_1^{r-1} (Q) \operatorname{cotg} \alpha$ und, da $R_r = \frac{H_r}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ ift, wird

$$R_r = \frac{\sum\limits_1^{r-1} (Q) \operatorname{cotg} \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{. . . . . 348.}$$

Der Mauerring erhält alſo Zug.

Das Eigengewicht erzeugt in demſelben die Spannung

$$R_r^g = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{r-1}) \operatorname{cotg} \alpha}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{. . . . . . 349.}$$

Die gröſste durch zufällige Belaſtung erzeugte Spannung findet in einem Ringe nach Gleichung 345 ſtatt, wenn Q_m ſeinen gröſsten Werth hat. Da Q, auſser beim Mauerring, nie negativ wird, ſo iſt die Ringſpannung durch zufällige Belaſtung, abgeſehen vom Mauerring, ſtets Druck. Es wird demnach

$$R_1^{p\,min} = - \frac{P_1 \operatorname{cotg} \alpha}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^{p\,min} = - \frac{P_2 \operatorname{cotg} \alpha}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.;}$$

allgemein

$$R_m^{p\,min} = - \frac{P_m \operatorname{cotg} \alpha}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{. . . . . 350.}$$

Weiters iſt $R_1^{p\,max} = R_2^{p\,max} = R_m^{p\,max} = 0$. Die gröſste Druckſpannung in einem Ringe findet alſo ſchon ſtatt, wenn nur die betreffende Zone belaſtet iſt; die Belaſtung der übrigen Zonen iſt auf die Ringſpannung ohne Einfluſs. Man kann demnach auch ſagen, daſs die gröſste Ringſpannung in allen Ringen bei zufälliger Belaſtung des ganzen Daches ſtattfindet.

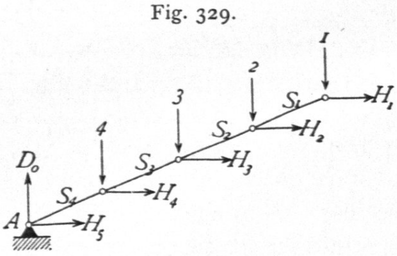
Im Mauerring findet der gröſste Zug durch zufällige Belaſtung bei voller Belaſtung ſtatt, und es iſt derſelbe

$$R_r^{p\,max} = \frac{(P_1 + P_2 \ldots + P_{r-1}) \operatorname{cotg} \alpha}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{. . . . . . 351.}$$

Druck findet in demſelben nicht ſtatt.

δ) Spannungen in den Diagonalen. Für dieſelbe Belaſtungsart, welche bei den Kuppeln zu Grunde gelegt iſt, ergiebt ſich der Spannungsunterſchied in zwei benachbarten Sparren, zwiſchen denen die Belaſtungsgrenze liegt, zu

Fig. 329.



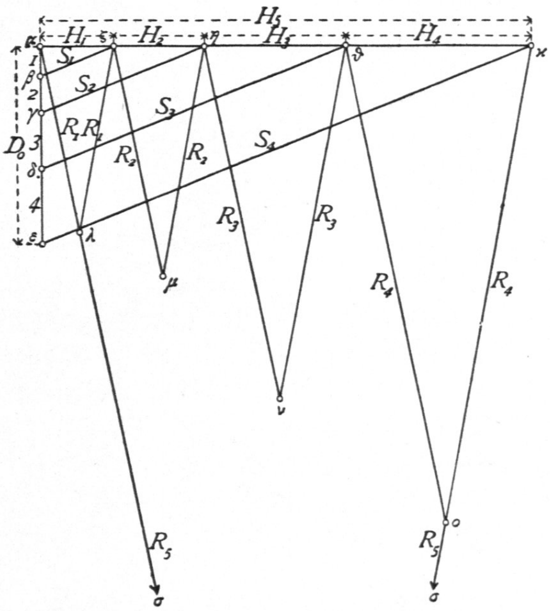
$$\Delta = \frac{\sum\limits_1^m (P)}{n \sin \alpha}$$

und die Spannung in der Diagonalen, welche dieſelbe übertragen ſoll, höchſtens zu

$$Y = \frac{\sum\limits_1^m (P)}{n \sin \alpha \cos \gamma},$$

wenn γ der Winkel zwiſchen der Diagonalen und dem Sparren iſt. Demnach wird

Fig. 330.



$$Y_1 \leqq \frac{P_1}{n \sin \alpha \cos \gamma_1};$$

$$Y_2 \leqq \frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha \cos \gamma_2} \text{ etc. } \quad 352.$$

249. Graphifche Ermittelung der Stabfpannungen.

Um die Stabfpannungen mittels Zeichnung (Fig. 329 u. 330) zu ermitteln, feien die Belaftungen der einzelnen Knotenpunkte *1, 2, 3, 4*; alsdann ergiebt fich leicht, wenn $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma\delta = 3$, $\delta\varepsilon = 4$ gemacht wird, $\beta\zeta = S_1$, $\zeta\alpha = H_1$, $\gamma\eta = S_2$, $\eta\zeta = H_2$, $\delta\vartheta = S_3$, $\vartheta\eta = H_3$, $\varepsilon\varkappa = S_4$, $\varkappa\vartheta = H_4$; ferner $\varepsilon\alpha = D_0$, $\alpha\varkappa = H_5$, $\zeta\lambda = \lambda\alpha = R_1$, $\eta\mu = \mu\zeta = R_2$, $\vartheta\nu = \nu\eta = R_3$, $\varkappa o = o\vartheta = R_4$ und $\alpha\sigma = \sigma\varkappa = R_5$ (= Mauerringfpannung).

Je nachdem nun die Kräfte *1, 2, 3, 4* die Eigengewichte oder die zufälligen Laften bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belaftung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen find leicht zu conftruiren.

c) Steile Zeltdächer oder Thurmdächer.

Als lothrechte Belaftung ift hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belaftung durch Schnee findet nicht ftatt, weil wegen der grofsen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diefe lothrechte Belaftung erzeugt, da die Conftruction genau fo, wie bei den flachen Zeltdächern, aus Sparren und Ringen zufammengefetzt wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen find. Auf diefe Berechnung foll defshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen fpielt der Winddruck hier eine grofse Rolle, und es follen die durch diefen erzeugten Spannungen berechnet werden. Zunächft foll die Berechnung für ein vierfeitiges Pyramidendach gezeigt werden, für welches eine genaue Berechnung möglich ift.

1) Vierfeitiges Pyramidendach.

250. Belaftung.

Der Winddruck auf eine Pyramidenfeite ift am gröfsten, wenn die Windrichtung im Grundrifs fenkrecht zu der betreffenden Rechteckfeite fteht. Alsdann ift der Winddruck für 1 qm fchräger Dachfläche (Fig. 331 u. 333) nach Gleichung 7: $\nu = 120 \sin(\alpha + 10^0)$; die vom Winde getroffene fchräge Dachfläche ift

$$F = \frac{a\lambda}{2} = \frac{a h}{2 \sin \alpha},$$

mithin der Gefammtdruck gegen eine Pyramidenfeite

$$N = \frac{a h \nu}{2 \sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 353.$$

Wir denken uns nun in der Symmetrie-Ebene *II* einen ideellen Binder *ACB* (Fig. 332) und beftimmen die darin durch den Winddruck entftehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Wagrechten und Diagonalen, wie in Fig. 331 gezeichnet, an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck *W* in der Höhe e_0 über dem Firstpunkt C; ausserdem wirken in den Knotenpunkten $C, E, F, G \ldots$ die Kräfte N_0, N_1, N_2, $N_3 \ldots$ senkrecht zur Dachfläche; die Grösse dieser Kräfte ist leicht aus den auf die bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu ermitteln.

Fig. 331.

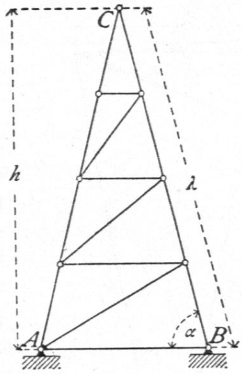


Fig. 332.

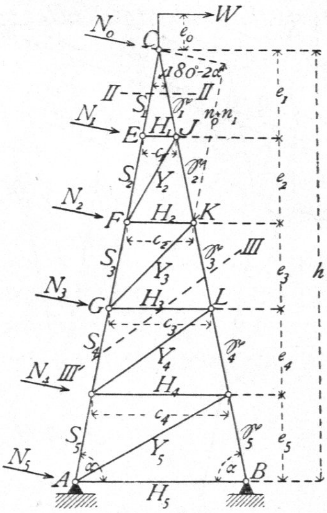


Fig. 333.

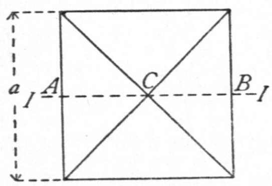
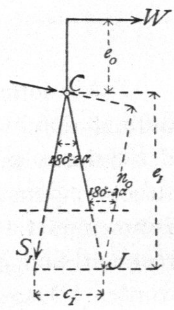


Fig. 334.



251. Berechnung d. Spannungen im ideellen Binder.

α) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder. Um die Sparrenspannung S_1 (Fig. 332) an der Windseite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch CE, etwa nach $II\,II$, und betrachte das Bruchstück oberhalb des Schnittes. Wählt man $\mathfrak{J}$ als Momentenpunkt, so heisst die Gleichung der statischen Momente (Fig. 334):

$$0 = S_1\, c_1 \sin\alpha - W(e_0 + e_1) - N_0\, n_0.$$

Nun ist

$$\overline{C\mathfrak{J}} = \frac{e_1}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \cos(180 - 2\,\alpha) = \frac{n_0}{\overline{C\mathfrak{J}}} = -\cos 2\,\alpha, \quad \text{daher}$$

$$n_0 = -\overline{C\mathfrak{J}} \cos 2\,\alpha = -\frac{e_1}{\sin\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{e_1(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{c_1 \sin\alpha} + \frac{N_0\, e_1 (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{c_1 \sin^2\alpha}.$$

Für irgend einen Sparren FG ist K der Momentenpunkt, und es ergiebt sich für S_3 der Werth

$$S_3 = \frac{1}{c_2 \sin\alpha}\left[W(e_0 + e_1 + e_2) + N_0(n_0 + n_1) + N_1\, n_1\right] - N_2 \operatorname{cotg}\alpha.$$

Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindseite ist G der Momentenpunkt und

$$\mathfrak{S}_3 = -\frac{1}{c_3 \sin\alpha}\left[W(e_0 + e_1 + e_2 + e_3) + \frac{N_0(e_1 + e_2 + e_3) + N_1(e_2 + e_3) + N_2\, e_3}{\sin\alpha}\right].$$

Eben so ergeben sich leicht alle Sparrenspannungen, sowohl auf der Windseite, wie auf der Unterwindseite.

Die Sparren auf der Windseite werden gezogen, diejenigen auf der Unterwindseite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Wagrechten und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, schneide man schräg nach $III\,III$; alsdann ist C der Momentenpunkt, und es wird

$$H_3 = -\frac{N_1 e_1 + N_2 (e_1 + e_2) + N_3 (e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3) \sin \alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3} .$$

Die Spannung Y_3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt ift, durch die Momentengleichung für C gefunden. Man erhält, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C ift,

$$Y_3 = \frac{1}{y_3} \frac{N_1 e_1 + N_2 (e_1 + e_2)}{\sin \alpha} - \frac{W e_0}{y_3} .$$

Ob die Diagonalen und Wagrechten Druck oder Zug erhalten, hängt wefentlich von der Gröfse des Momentes $W e_0$ ab. Ift $W = 0$, fo werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Wagrechten gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengefetzten Windrichtung findet entgegengefetzte Beanfpruchung ftatt.

252. Graphifche Ermittelung d. Spannungen im ideellen Binder.

β) Graphifche Ermittelung der Spannungen im ideellen Binder. Wird zunächft von der Kraft W abgefehen, fo ergiebt fich ohne Schwierigkeit der in Fig. 335 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabfpannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten find.

Fig. 335.

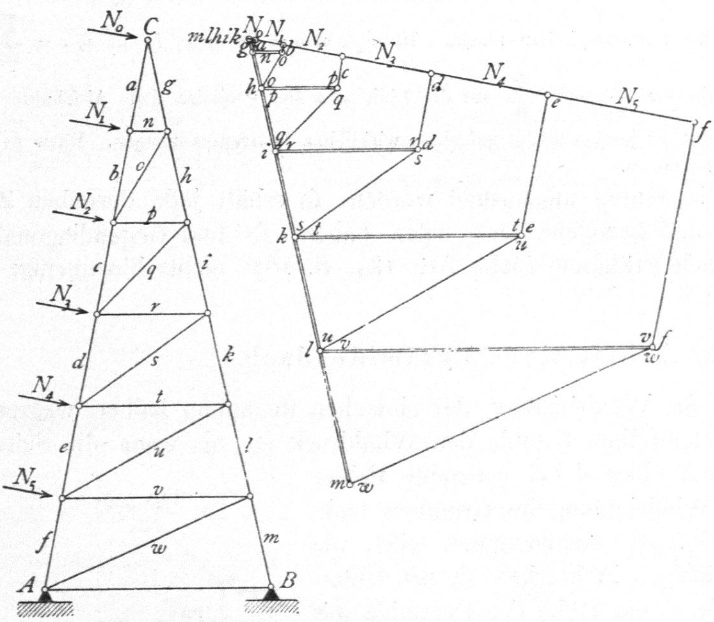
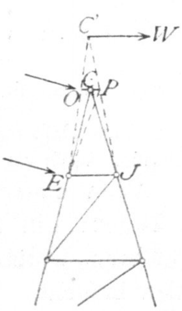


Fig. 336.



Falls noch ein Winddruck W vorhanden ift, fo empfiehlt es fich, für die graphifche Beftimmung der Spannungen ftatt der wirklich vorhandenen Stäbe EC und JC zwei Stäbe EC' und JC' einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittel-Lothrechten (Fig. 336) ift; die Ermittelung kann dann für den Thurm mit der Spitze $EOC'PJ$ nach der *Cremona*'fchen Methode erfolgen. Die Spannungen in EC und JC können mit geringem Fehler denjenigen, welche fich für EO und PJ ergeben haben, gleich gefetzt werden.

253. Wirkliche Stab-fpannungen.

γ) Zurückführung der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabfpannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder ACB (Fig. 337) ftatt. Jede Spannung in einem Stabe des ideellen Binders wird nun durch zwei Stabfpannungen der beiden wirklichen Binder geleiftet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel $(90 - \alpha)$ einfchliefsen.

Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' erſetzt; demnach iſt

$S = 2\,S' \cos(90 - \delta) = 2\,S' \sin \delta$,

woraus

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta}; \quad . \quad . \quad 354.$$

eben ſo

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2 \sin \delta} \quad . \quad . \quad 355.$$

Ferner wird $H = 2\,H'$, woraus

$$H' = \frac{H}{2}; \quad . \quad . \quad 356.$$

$Y = 2\,Y' \cos \varepsilon$,

woraus

$$Y' = \frac{Y}{2 \cos \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 357.$$

Fig. 337.

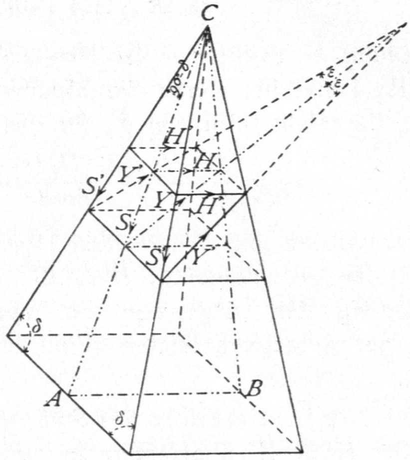
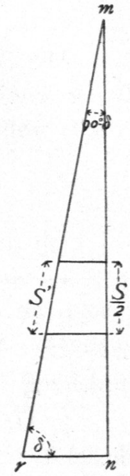


Fig. 338.



Auch auf graphiſchem Wege iſt die Zurückführung leicht. Man conſtruire (Fig. 338) den Winkel $(90 - \delta)$, bezw. ε, was keine Schwierigkeiten macht. Iſt $\sphericalangle\, r\,m\,n = 90 - \delta$, ſo iſt $\overline{m\,r} = \frac{\overline{m\,n}}{\sin \delta}$. Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{\mathfrak{S}}{2}$ auf der Linie $m\,n$ ab, projicire dieſe Abſchnitte auf $m\,r$; alsdann erhält man in den Projectionen die geſuchten wirklichen Sparrenſpannungen. Eben ſo iſt die Diviſion durch $\cos \varepsilon$ vorzunehmen.

Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, ſo erhält jede derſelben Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, ſo ſind Gegendiagonalen einzuführen, worüber nach Früherem (ſiehe Art. 184, S. 167) nichts hinzugefügt zu werden braucht.

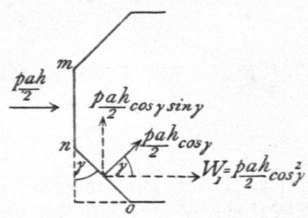
2) Achtſeitiges Pyramidendach.

254. Belaſtung.

Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, wagrecht an und berechnen aus demſelben Grunde den Winddruck ſo, als wenn die Seitenflächen lothrecht ſtänden. Der dabei gemachte Fehler iſt gering. Wenn die Windrichtung im Grundriſs ſenkrecht zur Seite $m\,n$ (Fig. 339) angenommen wird, die Seitenlänge des regelmäſsigen Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a, die Höhe der Pyramide mit h und der Druck für die Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, ſo iſt der Druck gegen die Fläche F demnach

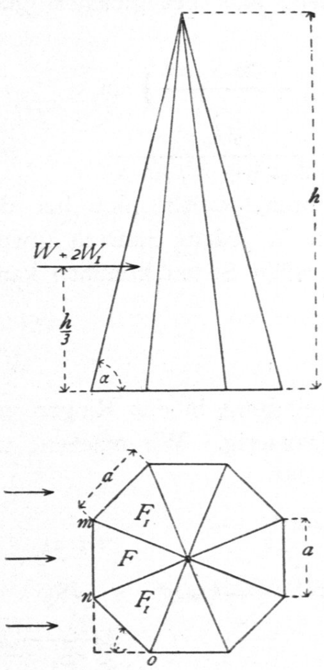
$$W = \frac{p\,a\,h}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 358.$$

Fig. 339.



Der Winddruck auf die Fläche F_1 (Fig. 340) ergiebt ſich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgendermaſsen. Die (lothrecht gedachte) Fläche ſchlieſst mit der angenommenen Windrichtung (Fig. 339) einen Winkel $(90 - \gamma)$ ein; mithin iſt der ſenkrechte Winddruck auf die Fläche für die Flächeneinheit nach Art. 27 (S. 21)

Fig. 340.



$$n = p \sin (90 - \gamma)$$

oder

$$n = p \cos \gamma,$$

und der Winddruck auf die ganze Fläche

$$\frac{p\, a\, h}{2} \cos \gamma.$$

Dieſe Kraft zerlegt ſich nun in eine Seitenkraft, welche dieſelbe Richtung hat, wie W, und in eine ſenkrecht hierzu ſtehende. Die erſtere iſt (Fig. 339)

$$W_1 = \frac{p\, a\, h \cos^2 \gamma}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 359.$$

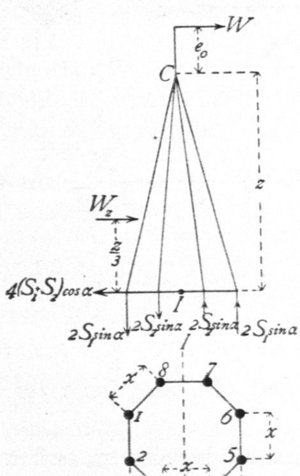
Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 340) auf die andere Fläche F_1; mithin iſt der geſammte Winddruck auf die Pyramide

$$W + 2\, W_1 = \frac{p\, a\, h}{2} (1 + 2 \cos^2 45^0)$$

$$= \frac{p\, a\, h}{2} \left(1 + \frac{2}{2}\right) = p\, a\, h \quad . \quad . \quad 360.$$

Der Angriffspunkt dieſer Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Grundfläche der Pyramide.

Fig. 341.



Für irgend einen Pyramidentheil (Fig. 341) von der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für dieſen Theil die Grundfläche bildet, mit x und die ganze Breite der Grundfläche mit y bezeichnet wird,

$$W_z = p\, x\, z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 361.$$

W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über dieſer Grundfläche an.

Auſser W_z wirke auf das Thurmkreuz (Fig. 341) noch ein Winddruck W in der Höhe e_0 über dem Firſt; alsdann iſt das Moment des Windes, bezogen auf die wagrechte, in der Grundfläche des betreffenden Thurmſtückes gelegene Schwerpunktsaxe $I\,I$ des Querſchnittes

255. Spannungen in den Sparren.

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W (e_0 + z) \quad . \quad . \quad . \quad 362.$$

Dieſes Moment muſs durch die Spannung der Sparren an der betrachteten Stelle aufgehoben werden.

Sind die Spannungen in den vier Sparren *1, 2, 5, 6,* welche um $\frac{y}{2}$ von der Axe $I\,I$ abſtehen, S_1, diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe $I\,I$ abſtehenden Sparren *3, 4, 7, 8* gleich S_2, ſo iſt, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die wagrechte Ebene gleich α geſetzt wird, das Moment der Sparrenſpannungen für die Axe $I I$ gleich $2\ S_1\ y \sin \alpha + 2\ S_2\ x \sin \alpha$; folglich muſs $M_z = (2\ S_1 y + 2\ S_2\ x) \sin \alpha$ ſein. Man kann annehmen, daſs bei gleicher Querſchnittsfläche aller Sparren ſtattfindet

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x}{y}, \text{ d. h. } S_2 = \frac{S_1\ x}{y}, \text{ alſo } M_z = \left(2\ S_1\ y + \frac{2\ S_1\ x^2}{y}\right) \sin \alpha,$$

$$M_z = \frac{2\ S_1}{y}\ (y^2 + x^2) \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad S_1 = \frac{M_z\ y}{2\ (x^2 + y^2) \sin \alpha} \quad . \quad . \quad 363.$$

Für M_z ſind der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche ſich bei den verſchiedenen Höhen z ergeben. Dieſe Spannung kann in jedem Sparren ſowohl als Zug, wie als Druck ſtattfinden, weil der Wind von allen Seiten kommen kann. Man erhält demnach

$$S = \pm \frac{M_z\ y}{2\ (x^2 + y^2) \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 364.$$

256. Spannungen in den Ringen.

Die genaue Berechnung der bei einſeitiger Windbelaſtung in den Ringen und in den Diagonalen entſtehenden Spannungen iſt ſehr ſchwierig. Wir machen, um eine einfache Rechnung zu erhalten, die Annahme, daſs, wenn der Wind die Flächen $E F$, $F O$ und $E L$ (Fig. 342) belaſtet, die Punkte L und O als feſte Stützpunkte betrachtet werden können. Alsdann wirkt auf $E F$ die Kraft N_1, auf $E L$ und $F O$ je $N_1 \cos 45^0 = \frac{N_1}{\sqrt{2}}$; in E und F wirken alsdann je $\frac{N_1}{2}$ und $\frac{N_1}{2\sqrt{2}}$, wie in Fig. 343 gezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingungen für Punkt F lauten nun:

Fig. 342.

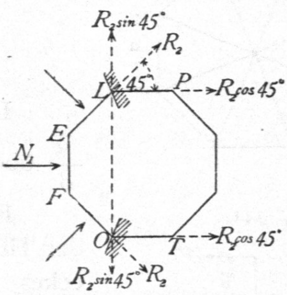
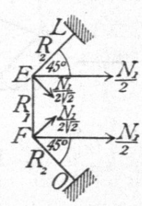


Fig. 343.



$$0 = R_1 + \frac{N_1}{2\sqrt{2}} \sin 45^0 - R_2 \sin 45^0 \quad \text{und} \quad 0 = R_2 \cos 45^0 + \frac{N_1}{2} + \frac{N_1}{2\sqrt{2}} \cos 45^0,$$

woraus

$$R_2 = -1{,}06\ N_1\ ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 365.$$

ferner

$$R_1 = -N_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 366.$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, ſo ſind alle Ringtheile für die gröſsere Spannung $R_2 = -1{,}06\ N_1$ zu conſtruiren.

257. Spannungen in den Diagonalen.

Um die in den Dachflächen angebrachten Diagonalen zu berechnen, beſtimme man die auf die einzelnen Punkte L, bezw. O (Fig. 342 u. 343) wirkenden wagrechten Kräfte. Auf L und O wirkt je R_2, und es zerlegt ſich R_2 jederſeits in eine Seitenkraft $R_2 \cos 45^0$, welche in die Linie $L P$, bezw. $O T$ fällt, und in eine ſenkrecht dazu gerichtete Seitenkraft $R_2 \sin 45^0$, welche in die Richtung $L O$ fällt. Um die beiden letzteren Seitenkräfte aufzuheben, empfiehlt ſich die Anbringung der Zugſtäbe $L O$, wie in Fig. 342 punktirt; der in dieſen herrſchende Zug iſt $R_2 \sin 45^0$. Die in die Ebene $L P C$, bezw. $O T C$ fallenden Seitenkräfte ſind nun durch das in dieſen angeordnete Gitterwerk auf die feſten Stützpunkte der Thurmpyramide zu übertragen. Um die Diagonalen zu berechnen, denke man wieder zunächſt die beiden Dachflächen durch einen in der Symmetrie-Ebene liegenden, ideellen Binder erſetzt, ermittele die unter dem Einflusse der Lasten $R_2 \cos 45^0$ in demselben entstehenden Diagonalspannungen auf bekannte Weise und aus diesen ideellen Diagonalspannungen die wirklichen Diagonalspannungen genau so, wie in Art. 253 (S. 241) angegeben ist. Als Belastung der einzelnen Knotenpunkte des ideellen Binders ist selbstverständlich überall $2 R_2 \cos 45^0$ einzuführen.

3) Standfestigkeit der Thurmdächer.

Durch die Windbelastung werden die Sparren an der Windseite auf Zug, diejenigen an der Unterwindseite auf Druck beansprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der im Sparren mögliche gröfste Zug in Folge des Winddruckes gröfser ist, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigstens so grofs ist, wie der gröfste im Sparren herrschende Zug. Dieser Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und es mufs das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, wenigstens so grofs sein, wie der gröfstmögliche Zug in demselben. Es empfiehlt sich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa so weit, dafs das Mauergewicht doppelt so grofs ist, als der gröfste Zug im Sparren. 258. Verankerung.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachstühle«.

UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.

CORDIER, E. *Equilibre stabile des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.

RITTER, Dr. A. Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen. 3. Aufl. Hannover 1873.

FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la construction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.

CARGILL, Th. *The strains upon bridge girders and roof trusses etc.* London 1873.

SCHREVE, S. *A treatise on the strength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.

TETMAJER, L. Die äufseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.

NICOUR, Ch. *Calcul d'un comble en fer du système Polonceau.* Paris 1875.

SCHWEDLER, W. Die Construction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1878.

TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.

Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. Heft 10: Berechnung der Dachwerke. Von W. Jeep. Leipzig 1876.

WEYRAUCH, J. J. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.
