ganz beſtimmte Querkraft. Wir haben bei den lothrecht belaſteten Balkenträgern nur mit lothrechten Kräften zu thun und werden demnach zunächſt und, falls das Gegentheil nicht beſonders bemerkt wird, ſtets ſolche vorausſetzen.

Die Querkräfte werden als poſitiv eingeführt, wenn ſie auf den Trägertheil links von dem betrachteten Querſchnitt nach oben, bezw. auf den Trägertheil rechts von dem betrachteten Querſchnitt nach unten wirken; als negativ, wenn ſie auf den Theil links nach unten, bezw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Die Momente ſind (ſiehe Art. 85, S. 59) poſitiv, wenn ſie auf den Theil links vom Querſchnitt nach rechts drehend (alſo in der Richtung des Uhrzeigers), bezw. auf den Theil rechts vom Querſchnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken ſo zu drehen ſtreben, daſs er ſeine convexe Seite nach unten kehrt.

Die Belaſtungen ſind entweder nach einem beſtimmten Geſetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meiſtens gleichmäſsig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder ſie greifen in einzelnen Punkten als Einzellaſten an. Zu den gleichmäſsig über die wagrechte Projection vertheilten Belaſtungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau iſt. 150. Belaſtungen.

Die Gröſse des Eigengewichtes von Decken-Conſtructionen kann nach den Angaben in Art. 21 u. 22 (S. 17) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlaſt ſei auf Art. 24 (S. 19) verwieſen. Da die Belaſtungen bekannt ſind, handelt es ſich zunächſt um die Ermittelung der durch dieſelben erzeugten Stützendrücke, Momente und Querkräfte, ferner um die dieſen entſprechenden Querſchnittsabmeſſungen. Für jeden Querſchnitt iſt die ungünſtigſte mögliche Belaſtung einzuführen.

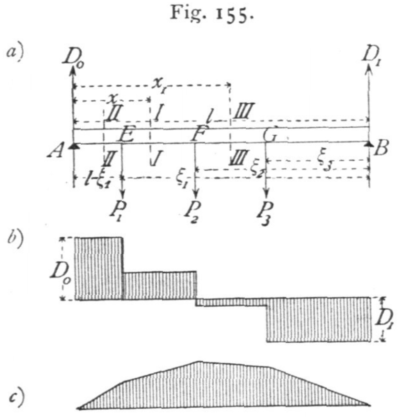
In den folgenden Artikeln ſoll für die wichtigſten Balkenträger und für verſchiedene Belaſtungsarten die Ermittelung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bezw. auf dem der Conſtruction gezeigt werden.

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, ſei l. 151. Belaſtung durch Einzellaſten.

Erſter Belaſtungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaſten belaſtet.

Fig. 155.



Die Laſten ſind P_1, P_2, P_3, wie aus nebenſtehender Fig. 155 erſichtlich; es ſollen die Querkräfte und Momente für alle Querſchnitte des Balkens ermittelt werden.

α) Berechnung. Zunächſt ſind die nicht gegebenen äuſseren Kräfte, die Auflagerdrücke D_0 und D_1, zu beſtimmen. Da Gleichgewicht ſtattfindet, ſo iſt die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäſsig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das ſtatiſche Moment Null habe, alſo nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann iſt, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der ſtatiſchen Momente gewählt wird,

$$0 = D_0\, l - P_1\, \xi_1 - P_2\, \xi_2 - P_3\, \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1\, \xi_1}{l} + \frac{P_2\, \xi_2}{l} + \frac{P_3\, \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P\, \xi}{l}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 163.$$

Wählt man in gleicher Weiſe ein zweites Mal A als Drehpunkt, ſo ergiebt ſich

$$D_1 = \frac{P_1\,(l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2\,(l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3\,(l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P\,(l - \xi)}{l}\right] \quad . \; . \quad 164.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaſt zum Geſammtauflagerdruck leiſtet, iſt, wie man aus den Gleichungen 163 u. 164 erſieht, ganz unabhängig von der Gröſse und Art der übrigen Belaſtungen; die Auflagerdrücke ſind die Summen der durch die einzelnen Laſten erzeugten Einzeldrücke.

Nunmehr laſſen ſich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querſchnitt $I\,I$, im Abſtande x vom linken Auflager A, iſt die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äuſseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 165.$$

In dieſem Ausdrucke kommt die Abſciſſe x des Querſchnittes gar nicht vor; die Querkraft iſt alſo, ſo lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von x, d. h. conſtant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querſchnitte zwiſchen E und F; denn für einen Querſchnitt links von E, etwa für $II\,II$, iſt

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen ſolchen rechts von F, etwa für $III\,III$, iſt

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Es folgt daraus: Falls eine Belaſtung nur durch Einzellaſten ſtattfindet, iſt die Querkraft für alle Querſchnitte zwiſchen je zwei Laſtpunkten, ſo wie zwiſchen einem Auflagerpunkt und einem Laſtpunkt conſtant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Laſtpunkten ſtatt.

Die Querkraft hat, abſolut genommen, denſelben Werth, möge der Trägertheil rechts oder derjenige links von dem betreffenden Querſchnitt betrachtet werden; denn die Querkraft für einen Querſchnitt iſt die Mittelkraft aller an der einen Seite deſſelben wirkenden äuſseren Kräfte. Ermittelt man nun zunächſt die Mittelkraft aller links, dann diejenige aller rechts wirkenden äuſseren Kräfte und nennt dieſelben bezw. Q_{links} und Q_{rechts}, ſo muſs, da dieſe beiden alle auf den Körper wirkenden äuſseren Kräfte in ſich ſchlieſsen, des Gleichgewichtes halber ſtattfinden

$$Q_{links} + Q_{rechts} = 0 \quad \text{und} \quad Q_{rechts} = -\,Q_{links}.$$

Wirkt alſo die Querkraft auf den Theil links vom Querſchnitte nach oben, ſo muſs ſie auf den Theil rechts vom Querſchnitte nach unten wirken und umgekehrt.

Das Geſetz der Aenderung der Querkräfte wird ſehr anſchaulich, wenn man in jedem Querſchnitte die daſelbſt ſtattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem, aber für alle Querſchnitte gleichem Maſsſtabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Es ergiebt ſich die in Fig. 157*b* gezeichnete Linie, in welcher die poſitiven Werthe von der Abſciſſe aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen ſind.

Was endlich die Beſtimmung der Momente anbelangt, ſo iſt für den Querſchnitt $I\,I$

$$M_I = D_0\, x - P_1\,(x - l + \xi_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 166.$$

Für den Querſchnitt $III\,III$ iſt

$$M_{III} = D_0\, x_1 - P_1\,(x_1 - l + \xi_1) - P_2\,(x_1 - l + \xi_2) \quad . \; . \; . \; . \quad 167.$$

Innerhalb je zweier Laftpunkte, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt ändert fich demnach das Moment nach dem Gefetze einer geraden Linie; denn für verfchiedene Werthe von x, bezw. x_1 bleiben alle in den Gleichungen 166 u. 167 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x und x_1 conftant; diefe einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der erften Potenz vor. Trägt man alfo auch hier in den verfchiedenen Querfchnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, fo erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Laftpunkt ändert fich der Ausdruck für M, alfo auch die Gerade. In Fig. 155 *c* ift die Aenderung der Momente graphifch dargeftellt.

Da eine Gerade ihre gröfste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, diefe aber hier mit den Laftpunkten zufammenfallen, fo folgt, dafs die gröfsten Momentenwerthe an den Laftpunkten ftattfinden. Diefes Ergebnifs ift von grofser Bedeutung. Wenn nur eine Einzellaft P vorhanden ift, fo ift demnach das gröfste Moment ftets am Laftpunkte. Liegt alsdann P in den Abftänden ξ, bezw. $l - \xi$ von den beiden Auflagern, fo ift das Moment am Laftpunkte, alfo das gröfste Moment, welches für die Querfchnittsbildung mafsgebend ift,

$$M_{max} = \frac{P(l - \xi)\,\xi}{l}.$$

Liegt P in der Mitte des Balkens, fo ift $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$, alfo

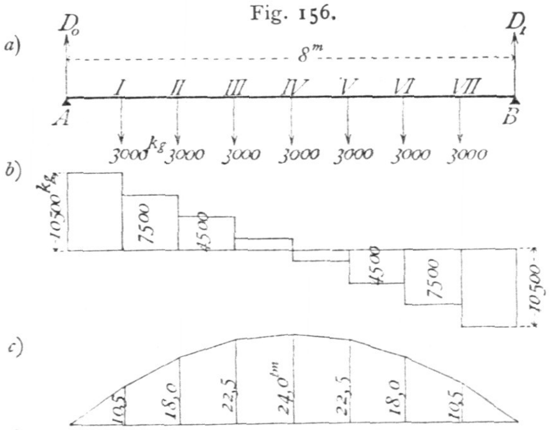
$$M_{max} = \frac{P\,l}{4}.$$

Sind zwei Einzellaften auf dem Balken, fo braucht man nur die beiden Momente an den Laftpunkten zu ermitteln; das gröfsere von beiden ift zugleich das gröfste. Wenn beide Laften gleich grofs, und zwar je gleich P find und im gleichen Abftande $\frac{a}{2}$ von der Balkenmitte liegen, fo ift das Moment an jedem Laftpunkte

$$M = \frac{P(l - a)}{2}.$$

Wenn endlich mehrere Laften vorhanden find, braucht man nur die Momente an den Laftpunkten aufzufuchen. Falls der Balken conftanten Querfchnitt erhält (wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall ift), fo ift diefer nach dem gröfsten überhaupt ftattfindenden Momente zu beftimmen.

Fig. 156.



Beifpiel. Ein fchmiedeeiferner Unterzug (Fig. 156) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abftand von Mitte zu Mitte je 1 m betrage. Jeder Balken belafte den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Es find die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente zu ermitteln. Nach Gleichung 163 ift

$$D_0 = \frac{3000}{8}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10\,500 \text{ kg};$$

eben fo nach Gleichung 164

$$D_1 = \frac{3000}{8} 28 = 10\,500 \text{ kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belaſtungen ſymmetriſch zur Mitte des Balkens liegen und die Abſtände derſelben gleich ſind, faſſt man bequemer alle Laſten zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zuſammen, die in der Balkenmitte angreift. Es iſt alsdann $R = 7 \,.\, 3000 = 21\,000$ kg und $D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500 \text{ kg} = D_1$.

Die Querkräfte für die verſchiedenen Querſchnitte ſind:

von A bis $I = 10\,500$ kg,	von IV bis $V = 10\,500 - 4 \,.\, 3000 = -1500$ kg,
» I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500$ kg,	» V » $VI = 10\,500 - 5 \,.\, 3000 = -4500$ kg,
» II » $III = 10\,500 - 2 \,.\, 3000 = 4500$ kg,	» VI » $VII = 10\,500 - 6 \,.\, 3000 = -7500$ kg,
» III » $IV = 10\,500 - 3 \,.\, 3000 = 1500$ kg,	» VII » $B = 10\,500 - 7 \,.\, 3000 = -10\,500$ kg.

Im Laſtpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den poſitiven zu den negativen Werthen über.

Die Momente in den Laſtpunkten ſind:

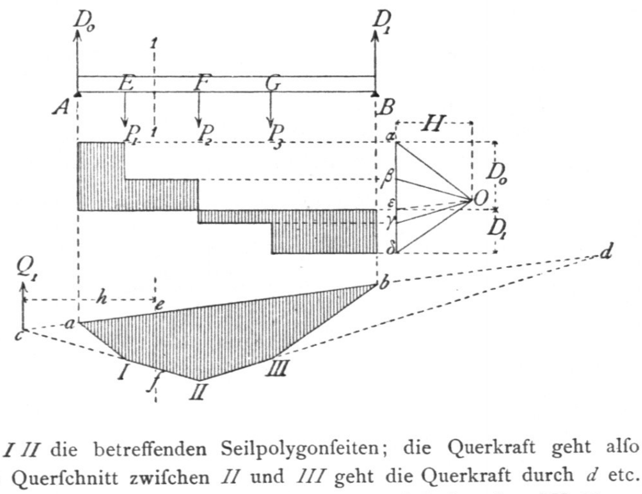
$$M_I = 10\,500 \cdot 1 = 10\,500 \text{ kgm} = 1\,050\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_{II} = 10\,500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18\,000 \text{ kgm} = 1\,800\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_{III} = 10\,500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22\,500 \text{ kgm} = 2\,250\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_{IV} = 10\,500 \cdot 4 - 3000\,(1 + 2 + 3) = 24\,000 \text{ kgm} = 2\,400\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_V = 10\,500 \cdot 5 - 3000\,(1 + 2 + 3 + 4) = 22\,500 \text{ kgm} = 2\,250\,000 \text{ kgcm} = M_{III},$$
$$M_{VI} = M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0.$$

Hiernach ſind die Momente und Querkräfte in Fig. 156 *c* u. 156 *b* aufgetragen.

β) Graphiſche Ermittelung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, conſtruire man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol O (Fig. 157) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schluſslinie $a\,b$ und parallel zu dieſer eine Linie $O\,\varepsilon$ durch den Pol O; dieſelbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen $\overline{\delta\,\varepsilon} = D_1$ und $\overline{\varepsilon\,\alpha} = D_0$ iſt (vergl. Art. 19, S. 14). Nun laſſen ſich die Querkräfte graphiſch leicht ermitteln.

Für alle Querſchnitte von A bis E iſt die Querkraft gleich D_0, d. h. gleich $\varepsilon\,\alpha$ (Fig. 157). Zieht man alſo durch ε und α je eine Wagrechte, ſo giebt deren Abſtand die Gröſse der Querkraft zwiſchen A und E an. Zwiſchen E und F iſt die Querkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\,\alpha - \alpha\,\beta = \varepsilon\,\beta$; man ziehe alſo durch β eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abſtand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwiſchen E und F die Gröſse der Querkraft. Eben ſo iſt zwiſchen F und G die Strecke $\varepsilon\,\gamma$, zwiſchen G und B die Strecke $\varepsilon\,\delta$ die Querkraft.

Fig. 157.



Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querſchnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 13) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonſeiten, welche bezw. der erſten und letzten dieſer Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querſchnitt zwiſchen E und F ſind D_0 und P_1 die Kräfte, $a\,b$ und $I\,II$ die betreffenden Seilpolygonſeiten; die Querkraft geht alſo durch deren Schnittpunkt c. Für jeden Querſchnitt zwiſchen II und III geht die Querkraft durch d etc.

Die graphiſche Beſtimmung der Momente geſchieht in nachſtehender Weiſe.

Für einen beliebigen Querſchnitt $1\,1$ (Fig. 157) iſt das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Es iſt demnach $M_1 = Q_1\,h$. Nun iſt $\Delta\,c\,e\,f \backsim \Delta\,O\,\varepsilon\,\beta$, mithin $\frac{\overline{e\,f}}{h} = \frac{\overline{\varepsilon\,\beta}}{H}$, und, da $\overline{\varepsilon\,\beta} = Q_1$ iſt, $\overline{e\,f} = \frac{Q_1\,h}{H} = \frac{M_1}{H}$, alſo $M_1 = H \,.\, \overline{e\,f}$.

In vorftehendem Ausdruck für M ift H, der wagrechte Abftand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabftand, für alle Querfchnitte conftant; die Gröfse des Momentes ift alfo mit $\overline{ef}$, d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

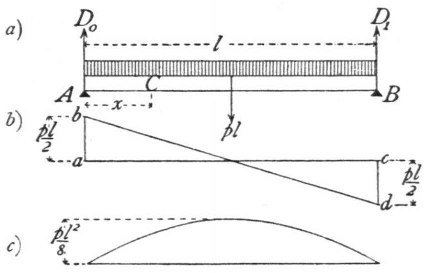
Das Moment in jedem Querfchnitte ift gleich dem Producte aus dem lothrechten Abftande der Seilpolygonfeiten bei diefem Querfchnitte und dem Polabftand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heifst die Momentenfläche.

Die Momente find Producte aus Kräften und Längen; H ift eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t, 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querfchnitt einen ganz beftimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig ift, fo wird die Höhe des Seilpolygons defto gröfser, je kleiner H ift, und umgekehrt.

152.
Gleichförmig vertheilte Belaftung.

Zweiter Belaftungsfall: Der Träger ift über feine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft belaftet.

Fig. 158.



Die Belaftung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 158) fei p; alsdann ift die Mittelkraft gleich der Gefammtlaft, alfo gleich $p\,l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der ftatifchen Momente für B als Drehpunkt heifst demnach:

$$D_0\,l - p\,l\,\frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p\,l}{2}; \text{ eben fo } D_1 = \frac{p\,l}{2} \quad . \quad 168.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querfchnitt C im Abftande x von A ift

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p\,l}{2} - p\,x = \frac{p}{2}(l - 2\,x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 169.$$

Die graphifche Darftellung der Veränderung der Querkraft ergiebt die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ift $Q_0 = \frac{p\,l}{2}$; für $x = l$ ift $Q_l = -\frac{p\,l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2\,x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie bd (Fig. 158 b) find alfo die Querkräfte an den verfchiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querfchnitt C ift

$$M_x = D_0\,x - p\,x\,\frac{x}{2} = \frac{p\,l}{2}\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 170.$$

Trägt man die Momente in den verfchiedenen Querfchnitten als Ordinaten auf, fo erhält man die Curve der Gleichung 170, d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ift $M_0 = 0$; für $x = l$ ift $M_l = 0$. M_x wird ein Maximum für $\frac{d\,M_x}{d\,x} = \frac{p}{2}(l - 2\,x) = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$; demnach

$$M_{max} = \frac{p}{2}\left[l\,\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 171.$$

Hiernach kann die Parabel leicht conftruirt werden (Fig. 158 c). Man trage $\frac{p\,l^2}{8}$ nach beliebig angenommenem Momenten-Mafsftabe auf und verzeichne in bekannter Weife die Parabel; alsdann find alle Ordinaten auf diefem Mafsftabe zu meffen.

Nennt man die gefammte auf den Träger entfallende Laft $p\,l = P$, fo kann man auch fetzen

$$M_{max} = \frac{P\,l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 172.$$

Diefer Ausdruck ift oft bequemer, als Gleichung 171. Wirkt eine Laft P als Einzellaft in der Mitte, fo erzeugt fie nach Art. 151 (S. 129) ein Maximalmoment $M_{max} = \frac{P\,l}{4}$, d. h. ein doppelt fo grofses Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Laft P.

Beifpiele. 1) Ein Flurgang von 4^{m} Lichtweite ift mit einer Decke aus Kappengewölben zwifchen eifernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen fei $2{,}2^{\mathrm{m}}$; die Träger follen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu $4{,}3^{\mathrm{m}}$, d. i. zu 430^{cm} angenommen werden; alsdann ift $l = 430^{\mathrm{cm}}$. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von $2{,}2^{\mathrm{m}}$ Breite und 1^{m} Länge; mithin ift die Laft für das laufende Meter Träger, bei einer Maximalbelaftung von 750^{kg} für 1^{qm} Grundfläche, gleich $2{,}2 \,.\, 750 = 1650^{\mathrm{kg}}$ und für das laufende Centimeter Träger $p = 16{,}5^{\mathrm{kg}}$. Die Auflagerdrücke find alfo nach Gleichung 168

$$D_0 = D_1 = \frac{16{,}5 \,.\, 430}{2} = 3547^{\mathrm{kg}},$$

und das Moment nach Gleichung 171

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16{,}5 \,.\, 430^2}{8} = 381\,356^{\mathrm{kgcm}}.$$

Nun ift der Querfchnitt nach Art. 88 (S. 65) fo zu beftimmen, dafs $\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381\,356}{700} = 544{,}8$ ift. Falls ein I-Querfchnitt gewählt wird, ift Nr. 28 der »Deutfchen Normal-Profile« zu wählen, da bei demfelben $\frac{\mathcal{J}}{a} = 547$ ift [24]).

2) Es follen die Abmeffungen beftimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6^{m} zu geben find, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte $0{,}9^{\mathrm{m}}$ und die Gefammtbelaftung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlaft) 500^{kg} für 1^{qm} beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von $0{,}9^{\mathrm{m}}$ Breite zu tragen, d. h. eine Laft von $0{,}9 \,.\, 500 = 450^{\mathrm{kg}}$; mithin beträgt die Belaftung für das laufende Centimeter des Balkens $p = 4{,}5^{\mathrm{kg}}$. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6{,}3^{\mathrm{m}} = 630^{\mathrm{cm}}$ an. Das gröfste Moment, welches hier, da der Balkenquerfchnitt conftant ift, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden mufs, findet in der Balkenmitte ftatt und ift nach Gleichung 171

$$M_{max} = \frac{4{,}5 \,.\, 630^2}{8} = 223\,256^{\mathrm{kgcm}};$$

mithin nach Art. 93 (S. 67)

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223\,256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19: $\mathcal{J} = \frac{b\,h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ift, wird $\frac{b\,h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25^{\mathrm{cm}}$ angenommen wird,

---

[24]) Man mufs beim Einfetzen der Zahlenwerthe für p und l vorfichtig fein. Es ift eigentlich felbftverftändlich, dafs, wenn man l in Metern einführt, p die Belaftung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belaftung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K, die zuläffige Beanfpruchung, in Kilogramm für 1^{qcm} und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, fo find in der Gleichung $\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für $\mathcal{J}$ und a auf Centimeter bezogen einzufetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüffig fein, hier befonders darauf aufmerkfam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in diefer Hinficht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt fich, ftets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

$$h = \sqrt{\frac{6 \,.\, 3721}{25}} = 29{,}9 \text{ cm} = \infty\; 30 \text{ cm}.$$

Es genügt sonach ein Querschnitt von 25×30 cm.

153. Theilweise gleichförmig vertheilte Belastung.

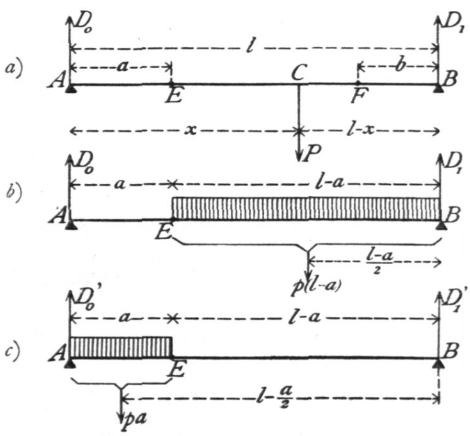
Dritter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

Eine Last P im Abstande x vom linken Auflager A (Fig. 159) erzeugt die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P\,(l-x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P\,x}{l}\,.$$

Die Querkraft ist für jeden Querschnitt E links vom Lastpunkte C: $Q = D_0 = \frac{P\,(l-x)}{l}$, d. h. positiv; für jeden Querschnitt F rechts vom Lastpunkt C: $Q_1 = D_0 - P = \frac{P\,(l-x)}{l} - P = -\frac{P\,x}{l}$, d. h. negativ. Daraus folgt der Satz:

Fig. 159.



Jede Belastung erzeugt in allen links von ihr gelegenen Querschnitten positive, in allen rechts gelegenen Querschnitten negative Querkräfte. Demnach wird in irgend einem Querschnitte, etwa E, die grösste Querkraft (Q_{max}) stattfinden, wenn die ganze Trägerabtheilung rechts von E belastet, der übrige Trägertheil ($A\,E$) unbelastet ist (Fig. 159*b*). Die kleinste Querkraft (Q_{min}) wird in E eintreten, wenn die Abtheilung $A\,E$ links von E belastet, die Abtheilung $E\,B$ rechts von E unbelastet ist (Fig. 159*c*).

Man erhält die Werthe von Q_{max}, bezw. Q_{min} für den Querschnitt E, welcher um a vom linken Auflager entfernt liegt, und für die Belastung p auf das laufende Meter, wie folgt. Für die Belastung nach Fig. 159*b* ist

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p\,(l-a)^2}{2\,l}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 173.$$

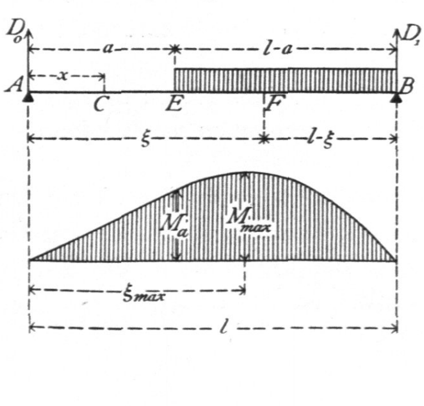
für die Belastung nach Fig. 159*c* ist

$$D_0' = \frac{p\,a}{l}\left(l - \frac{a}{2}\right) = p\,a - \frac{p\,a^2}{2\,l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - p\,a\,;$$

sonach

$$Q_{min} = -\frac{p\,a^2}{2\,l} \quad \ldots \quad 174.$$

Fig. 160.



Die Belastung nach Fig. 159 kommt im Hochbau sehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen sich Fenster- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querschnittsbemessung ist das grösste Moment massgebend, welches demnach aufgesucht werden soll.

Für irgend einen Punkt C der Strecke $A\,E$ (Fig. 160) ist das Moment

$M_x = D_0\, x = \frac{p\,(l-a)^2}{2\,l}\, x$; die graphifche Darftellung ergiebt eine Gerade. Für einen Punkt F der Strecke $C\,B$ ift daffelbe bequem durch Betrachtung des rechts von F gelegenen Trägertheiles zu finden. Es ift

$$M_\xi = D_1\,(l-\xi) - \frac{p\,(l-\xi)^2}{2}, \quad \text{woraus} \quad M_\xi = \frac{p}{2\,l}\,(l-\xi)\,(l\,\xi - a^2).$$

Auf diefer Strecke ergiebt alfo die graphifche Darftellung des Momentes eine Parabel. Diefelbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2\,l}.$$

Aus der Formel ergiebt fich, dafs das Maximum des Momentes ftets in einem Punkte der belafteten Strecke $E\,B$ ftattfindet. M_{max} wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für M_ξ ftatt ξ den für ξ_{max} gefundenen Werth einführt, alfo

$$M_{max} = \frac{p\,l^2}{8}\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 175.$$

Nachftehende kleine Tabelle ergiebt für eine Anzahl Werthe von a die Gröfse von M_{max} und von ξ_{max}:

Für a =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0 l
ξ_{max} =	0,5	0,505	0,52	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,9	1,0 l
M_{max} =	1	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0 $\frac{p\,l^2}{8}$

154. Gröfste Momente durch gleichförmig vertheilte Laften.

Eine Laft P im Abftande x vom linken Auflager erzeugt im Punkte E links vom Laftpunkte (Fig. 159 *a*) ein Moment $M_a = \frac{P\,(l-x)}{l}\,a$ und im Punkte F rechts vom Laftpunkte das Moment $M_b = \frac{P\,x}{l}\,b$. Beide Momentenwerthe find pofitiv; alfo erzeugt eine jede Einzellaft in allen Trägerquerfchnitten pofitive Momente. Die gröfsten Momente in den einzelnen Trägerquerfchnitten werden demnach ftattfinden, wenn alle Trägerpunkte belaftet find, d. h. bei voller Belaftung des Trägers. Ift alfo volle Belaftung eines Trägers mit gleichmäfsig vertheilter Laft p möglich, fo ruft diefe die gröfsten Momente hervor. Bei diefer Belaftung ift nach Gleichung 170 für einen Querfchnitt mit der Abfciffe x

$$M_x = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 176.$$

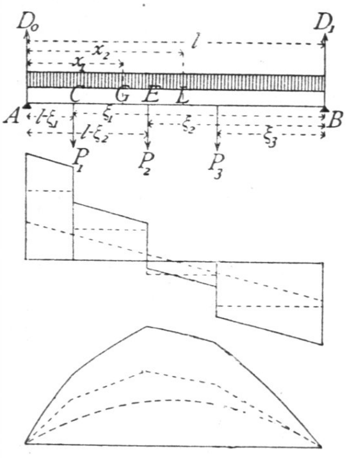
155. Gleichförmig vertheilte Laft und Einzellaften, bezw. theilweife Belaftung.

V i e r t e r B e l a f t u n g s f a l l: D e r T r ä g e r w i r d a u f f e i n e g a n z e L ä n g e d u r c h e i n e g l e i c h f ö r m i g v e r t h e i l t e L a f t u n d a u f s e r d e m d u r c h E i n z e l l a f t e n o d e r a u f e i n e n T h e i l f e i n e r L ä n g e d u r c h e i n e w e i t e r e g l e i c h f ö r m i g v e r t h e i l t e L a f t b e l a f t e t.

Da jeder Träger aufser der Nutzlaft noch das Eigengewicht tragen mufs, diefes aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, fo ift diefer Fall der am häufigften vorkommende.

In Art. 151 ift nachgewiefen, dafs jede Laft einen von den fonft noch auf dem Balken befindlichen Laften unabhängigen Stützendruck erzeugt, und dafs der Gefammt-Stützendruck gleich der algebraifchen Summe der Einzeldrücke ift. Daraus folgt, dafs auch die Querkräfte und Momente für alle Querfchnitte gleich den algebraifchen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente find.

Fig. 161.



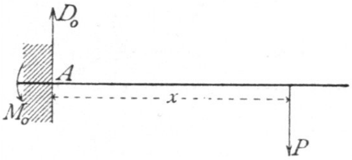
Es brauchen alſo im vorliegenden Falle nur die Stützendrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belaſtungen, derjenigen durch Einzellaſten und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Laſt u. ſ. w. ſich ergeben haben, algebraiſch addirt zu werden, was ſowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphiſch geſchehen kann.

Fig. 161 ſtellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verſchiedenen Querſchnitten durch gleichförmig vertheilte Laſt und Einzellaſten hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M nur für Einzellaſten, bezw. für gleichförmig vertheilte Laſt an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

2) Conſole-, Krag- oder Freiträger.

Conſole-, Krag- oder Freiträger ſind am einen Ende unterſtützte, am anderen Ende frei ſchwebende Träger. Als äuſsere Kräfte wirken auf dieſelben die Belaſtungen und die Auflagerdrücke der Unterſtützungsſtelle. Letztere laſſen ſich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht ſei, muſs zunächſt die algebraiſche Summe der lothrechten Kräfte gleich Null ſein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdrucks bei A (Fig. 162) gleich D_0 iſt, wird $0 = D_0 - P$ oder 156. Erklärung.

Fig. 162.



$$D_0 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 177.$$

Eine äuſsere wagrechte Belaſtung ſei nicht vorhanden; es wird alſo der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es muſs aber auch die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, alſo etwa für A, gleich Null ſein; mithin muſs, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null iſt, D_0 aber für den Drehpunkt A kein ſtatiſches Moment hat, an der Unterſtützungsſtelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren reſultirendes Moment mit demjenigen der Belaſtungen zuſammen die Summe Null ergiebt. Bei A wirkt alſo ein Moment M_0, deſſen Gröſse ſich ergiebt zu

$$M_0 = - P x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 178.$$

Dieſes Moment, deſſen Drehrichtung, wie das Vorzeichen angiebt, derjenigen von P entgegengeſetzt iſt, kann auf verſchiedene Weiſe erzeugt werden, am einfachſten durch Einmauerung, bezw. Einſpannung des Balkens.

Soll für jede Belaſtungsart Gleichgewicht vorhanden ſein, ſo muſs der Balken derart eingemauert werden, daſs das von der Mauer geleiſtete Moment auch die gröſsten Werthe des Momentes der Belaſtungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleiſtet, wonach dieſes zu beſtimmen iſt.

Auch in anderer Weiſe kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, daſs der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B,