Rothgluth, die andere Seite hat eine bis zu 600 Grad C. geringere Temperatur, welche durch Anſpritzen der Säule mit kaltem Waſſer herbeigeführt iſt; die Beanſpruchung der Stützen erfolgt um 1 cm excentriſch, zwiſchen Gelenken (Fall 2). Die Stütze ſoll die Laſt $P$ noch mit einiger Sicherheit tragen. Die allgemeine Formel, in welcher alle Buchſtaben die frühere Bedeutung haben, lautet (vergl. Art. 141, S. 121)

$$P = K F \frac{1}{1 + \alpha \frac{F l^2}{\mathfrak{J}}} .$$

Die Zahlenwerthe $K$ und $\alpha$ ſind ſo beſtimmt, daſs ſich ergiebt

$$\text{für Schmiedeeiſen:} \quad P = 1000 \, F \frac{1}{1 + 0{,}0004 \frac{F l^2}{\mathfrak{J}}} \quad \ldots \ldots \quad 161.$$

$$\text{für Guſseiſen:} \quad P = 1200 \, F \frac{1}{1 + 0{,}0004 \frac{F l^2}{\mathfrak{J}}} \quad \ldots \ldots \quad 162.$$

In dieſen Ausdrücken iſt $l$ die freie Länge zwiſchen den Gelenken; wenn die Stützung als zwiſchen parallelen Enden erfolgend angenommen werden kann, ſo iſt ſtatt $l$ nur $\frac{2}{3}$ der wirklich vorhandenen freien Länge einzuführen.

---

## 2. Kapitel.

# Träger.

146. Allgemeines.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abſchnitte geſagt wurde, verſteht man unter Trägern ſolche Bauconſtructionen, bei denen die Belaſtungen ausſchlieſslich oder vorwiegend ſenkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann ſowohl eine gerade, wie eine gebrochene, bezw. krumme Linie ſein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachſtühle, die Sprengwerke u. A., bei denen allerdings die Längsaxe nicht ſo deutlich vor die Augen tritt, wie etwa bei den gewöhnlichen Balken, ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine krumme Linie iſt.

Um die obige Erklärung der Träger auch für dieſe Conſtructionen unbedingt richtig zu ſtellen, könnte man ſtatt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgendermaſsen erklären: Träger ſind Bauconſtructionen, bei denen die Belaſtungen ausſchlieſslich oder vorwiegend ſenkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der Stützpunkte der Conſtruction, wirken. Im vorliegenden Kapitel ſollen jedoch nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachſtühle und die Gewölbe in den beiden nächſten Abſchnitten beſprochen werden. Von den Sprengwerken wird bei den Dachſtühlen eine beſondere Form vorgeführt werden.

147. Aeuſsere Kräfte.

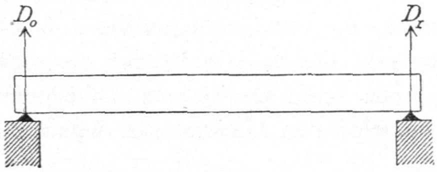
Die auf die Bauconſtructionen wirkenden äuſseren Kräfte ſind nach Art. 2 (S. 5): 1) die Belaſtungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlaſten, und 2) die Auflager- oder Stützendrücke (auch Reactionen der Auflager genannt), d. h.

diejenigen Kräfte, welche in den Auflagerpunkten auf die Conſtructionen übertragen werden.

Die Träger haben ſtets zwei oder mehrere Stützpunkte, die ſog. Auflagerpunkte; ſelbſt bei den Trägern, welche ſcheinbar nur einen Stützpunkt haben, bei den ſog. Krag- oder Conſole-Trägern, iſt Gleichgewicht ohne einen zweiten Stützpunkt nicht möglich, und in der That iſt noch ein ſolcher vorhanden.

Die Träger werden nach verſchiedenen Geſichtspunkten eingetheilt. Nach 148. Eintheilung.
der Art der Unterſtützung unterſcheidet man:

Fig. 152.




1) Balkenträger, d. h. Träger, auf welche bei lothrechten Belaſtungen nur lothrechte Stützendrücke wirken. Fig. 152 zeigt einen Balkenträger; $D_0$ und $D_1$ ſind die Auflagerdrücke.

2) Sprengwerks- und Hängewerksträger, d. h. Träger, welche bei lothrechten Belaſtungen ſchiefe Stützendrücke erleiden; dieſe ſchiefen Auflagerdrücke ſetzen ſich aus einer wagrechten und einer lothrechten Seitenkraft zuſammen.

Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Druck, ſo hat man den Sprengwerksträger (Fig. 153); falls die Trägeraxe eine krumme Linie iſt, den Bogenträger. Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Zug, ſo hat man den Hängewerksträger (Fig. 154).

Fig. 153.

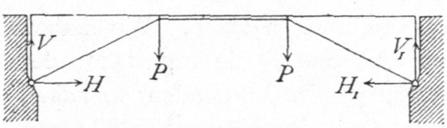
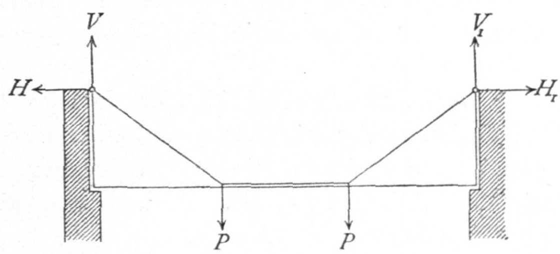



Fig. 154.




Für den Hochbau ſind die Balkenträger die weitaus wichtigſten; die Sprengwerks- und Hängewerksträger werden im Hochbau nicht gern angewendet, weil die Mauern, welche die Stützpunkte der Träger bilden, bei dieſen Trägerarten wagrechte Kräfte zu erleiden haben, wodurch eine groſse Mauerſtärke bedingt wird.

Der zwiſchen zwei Körpern auftretende Druck iſt nur dann ſtets lothrecht, wenn die Berührungsfläche beider wagrecht iſt und reibungsloſe Bewegung des einen gegen den anderen möglich iſt. Iſt die erwähnte Bedingung bei einem der beiden Auflager eines Trägers erfüllt, alſo der Auflagerdruck deſſelben lothrecht, ſo muſs auch der Stützendruck des anderen Auflagers für lothrechte Belaſtung lothrecht ſein; denn die etwaige wagrechte Seitenkraft deſſelben würde die einzige wagrechte Kraft ſein, welche auf den Träger wirkt, und dieſelbe muſs des Gleichgewichtes wegen gleich Null ſein. Wenn alſo ein Auflager feſt iſt und das andere wagrechte reibungsloſe Verſchiebung des betreffenden Trägerendes geſtattet, ſo iſt der Träger ein Balkenträger. Auch wenn ein Auflager feſt, eine Anzahl anderer aber wagrechte und reibungsloſe Verſchiebung geſtatten, hat man Balkenträger.

Meiſtens iſt die Längsaxe bei den Balkenträgern eine Gerade oder weicht von der Geraden nicht ſehr ab; man nennt deſshalb die Balkenträger auch wohl gerade Träger.

Man unterſcheidet ferner ſtatiſch beſtimmte Träger und ſtatiſch unbeſtimmte Träger.

Unter ſtatiſch beſtimmten Trägern verſteht man ſolche, bei denen zur Ermittelung der Stützendrücke die Geſetze der Statik feſter Körper hinreichen; bei den ſtatiſch unbeſtimmten Trägern genügen zur Ermittelung der Auflagerdrücke dieſe Geſetze nicht.

Zur Ermittelung der Stützendrücke bietet die Statik feſter Körper, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirkend angenommen werden können, drei Gleichungen (vergl. Art. 6, S. 7); falls alſo in den Stützendrücken nur drei Unbekannte enthalten ſind, ſo genügen dieſe drei Gleichungen zur Ermittelung der Unbekannten, d. h. die Conſtruction iſt ſtatiſch beſtimmt. Enthalten dagegen die Auflagerdrücke mehr als drei Unbekannte, ſo genügen die drei Gleichungen zu deren Ermittelung nicht mehr; der Träger iſt alsdann ſtatiſch unbeſtimmt. Die fehlenden Gleichungen liefert die Elaſticitätslehre.

Hierbei können zwei Hauptfälle vorkommen:

1) Alle drei Gleichgewichtsbedingungen ſind anwendbar, d. h. die Stützendrücke enthalten ſowohl wagrechte, wie lothrechte Seitenkräfte. Dieſer Fall tritt bei den Sprengwerksträgern, Bogenträgern etc. ein.

2) Nur zwei Gleichgewichtsbedingungen ſind anwendbar. Dieſer Fall tritt ein, wenn die äuſseren Kräfte gar keine wagrechten Seitenkräfte haben. Alsdann bleiben von den in Art. 6 (S. 7) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen nur die folgenden verwendbar:

α) die algebraiſche Summe der lothrechten Kräfte muſs gleich Null ſein;

β) die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente aller äuſseren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Drehpunkt, muſs gleich Null ſein.

Der einfachſte Fall iſt hier der des Balkens auf zwei Stützen. Wir haben bei dieſem zwei Gleichungen und zwei Unbekannte ($D_0$ und $D_1$ in Fig. 152); der Fall iſt alſo ſtatiſch beſtimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, ſo haben wir drei Unbekannte ($D_0$, $D_1$ und $D_2$), aber nur zwei Gleichungen, alſo einen ſtatiſch unbeſtimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, continuirliche Träger. Dieſelben ſind demnach ſtatiſch unbeſtimmte Träger.

Man hat von den ſtatiſch beſtimmten, bezw. ſtatiſch unbeſtimmten Trägern wohl zu unterſcheiden die ſtatiſch beſtimmten, bezw. unbeſtimmten Syſteme. Während es ſich bei den erſteren um die Ermittelung der äuſseren Kräfte handelt, iſt bei den ſtatiſch beſtimmten, bezw. unbeſtimmten Syſtemen die Frage, ob zur Ermittelung der Stabſpannungen die Geſetze der Statik feſter Körper ausreichen oder nicht.

## a) Aeuſsere Kräfte der Balkenträger.

149. Momente und Querkräfte.

Die Querſchnitte der Balken ſind ſo zu beſtimmen, daſs die zuläſſigen Beanſpruchungen auch unter ungünſtigſten Bedingungen in keinem Theile der Querſchnittsflächen je überſchritten werden. Wie im vorhergehenden Abſchnitt gezeigt wurde, ſind aber für die in den einzelnen Querſchnittsſtellen entſtehenden Beanſpruchungen oder Spannungen die äuſseren Kräfte maſsgebend, insbeſondere zwei von den äuſseren Kräften abhängige Gröſsen: die Biegungsmomente, auch kurz Momente genannt, und die Quer- oder Transverſalkräfte. Für jeden Querſchnitt ergiebt ſich bei einer gegebenen Belaſtung ein ganz beſtimmtes Moment und eine ganz beſtimmte Querkraft. Wir haben bei den lothrecht belaſteten Balkenträgern nur mit lothrechten Kräften zu thun und werden demnach zunächſt und, falls das Gegentheil nicht beſonders bemerkt wird, ſtets ſolche vorausſetzen.

Die Querkräfte werden als poſitiv eingeführt, wenn ſie auf den Trägertheil links von dem betrachteten Querſchnitt nach oben, bezw. auf den Trägertheil rechts von dem betrachteten Querſchnitt nach unten wirken; als negativ, wenn ſie auf den Theil links nach unten, bezw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Die Momente ſind (ſiehe Art. 85, S. 59) poſitiv, wenn ſie auf den Theil links vom Querſchnitt nach rechts drehend (alſo in der Richtung des Uhrzeigers), bezw. auf den Theil rechts vom Querſchnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken ſo zu drehen ſtreben, daſs er ſeine convexe Seite nach unten kehrt.

150. Belaſtungen.

Die Belaſtungen ſind entweder nach einem beſtimmten Geſetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meiſtens gleichmäſsig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder ſie greifen in einzelnen Punkten als Einzellaſten an. Zu den gleichmäſsig über die wagrechte Projection vertheilten Belaſtungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau iſt.

Die Gröſse des Eigengewichtes von Decken-Conſtructionen kann nach den Angaben in Art. 21 u. 22 (S. 17) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlaſt ſei auf Art. 24 (S. 19) verwieſen. Da die Belaſtungen bekannt ſind, handelt es ſich zunächſt um die Ermittelung der durch dieſelben erzeugten Stützendrücke, Momente und Querkräfte, ferner um die dieſen entſprechenden Querſchnittsabmeſſungen. Für jeden Querſchnitt iſt die ungünſtigſte mögliche Belaſtung einzuführen.

In den folgenden Artikeln ſoll für die wichtigſten Balkenträger und für verſchiedene Belaſtungsarten die Ermittelung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bezw. auf dem der Conſtruction gezeigt werden.

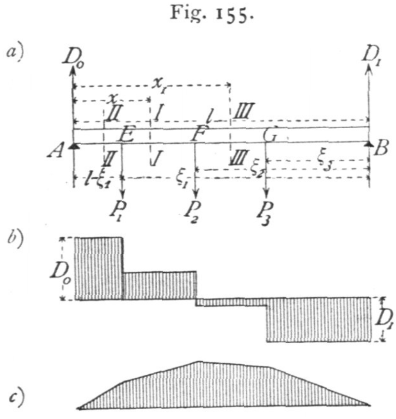
## 1) Balkenträger auf zwei Stützen.

151. Belaſtung durch Einzellaſten.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, ſei $l$.

Erſter Belaſtungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaſten belaſtet.

Fig. 155.




Die Laſten ſind $P_1$, $P_2$, $P_3$, wie aus neben ſtehender Fig. 155 erſichtlich; es ſollen die Querkräfte und Momente für alle Querſchnitte des Balkens ermittelt werden.

α) Berechnung. Zunächſt ſind die nicht gegebenen äuſseren Kräfte, die Auflagerdrücke $D_0$ und $D_1$, zu beſtimmen. Da Gleichgewicht ſtattfindet, ſo iſt die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um $D_0$ zu ermitteln, wählt man zweckmäſsig einen Punkt auf der Richtungslinie von $D_1$ als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte $D_1$ das ſtatiſche Moment Null habe, alſo nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann iſt, wenn $B$ als Drehpunkt für die Gleichung der ſtatiſchen Momente gewählt wird,

$$0 = D_0\, l - P_1\, \xi_1 - P_2\, \xi_2 - P_3\, \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1\, \xi_1}{l} + \frac{P_2\, \xi_2}{l} + \frac{P_3\, \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P\, \xi}{l}\right) \quad \ldots\ldots \quad 163.$$

Wählt man in gleicher Weife ein zweites Mal $A$ als Drehpunkt, fo ergiebt fich

$$D_1 = \frac{P_1\,(l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2\,(l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3\,(l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P\,(l - \xi)}{l}\right] \quad \ldots \quad 164.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellaft zum Gefammtauflagerdruck leiftet, ift, wie man aus den Gleichungen 163 u. 164 erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belaftungen; die Auflagerdrücke find die Summen der durch die einzelnen Laften erzeugten Einzeldrücke.

Nunmehr laffen fich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querfchnitt $I\,I$, im Abftande $x$ vom linken Auflager $A$, ift die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 165.$$

In diefem Ausdrucke kommt die Abfciffe $x$ des Querfchnittes gar nicht vor; die Querkraft ift alfo, fo lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von $x$, d. h. conftant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querfchnitte zwifchen $E$ und $F$; denn für einen Querfchnitt links von $E$, etwa für $II\,II$, ift

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen folchen rechts von $F$, etwa für $III\,III$, ift

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P\,\xi}{l}\right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Es folgt daraus: Falls eine Belaftung nur durch Einzellaften ftattfindet, ift die Querkraft für alle Querfchnitte zwifchen je zwei Laftpunkten, fo wie zwifchen einem Auflagerpunkt und einem Laftpunkt conftant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Laftpunkten ftatt.

Die Querkraft hat, abfolut genommen, denfelben Werth, möge der Trägertheil rechts oder derjenige links von dem betreffenden Querfchnitt betrachtet werden; denn die Querkraft für einen Querfchnitt ift die Mittelkraft aller an der einen Seite deffelben wirkenden äufseren Kräfte. Ermittelt man nun zunächft die Mittelkraft aller links, dann diejenige aller rechts wirkenden äufseren Kräfte und nennt diefelben bezw. $Q_{links}$ und $Q_{rechts}$, fo mufs, da diefe beiden alle auf den Körper wirkenden äufseren Kräfte in fich fchliefsen, des Gleichgewichtes halber ftattfinden

$$Q_{links} + Q_{rechts} = 0 \quad \text{und} \quad Q_{rechts} = -\, Q_{links}.$$

Wirkt alfo die Querkraft auf den Theil links vom Querfchnitte nach oben, fo mufs fie auf den Theil rechts vom Querfchnitte nach unten wirken und umgekehrt.

Das Gefetz der Aenderung der Querkräfte wird fehr anfchaulich, wenn man in jedem Querfchnitte die dafelbft ftattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem, aber für alle Querfchnitte gleichem Mafsftabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Es ergiebt fich die in Fig. 157 *b* gezeichnete Linie, in welcher die pofitiven Werthe von der Abfciffe aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen find.

Was endlich die Beftimmung der Momente anbelangt, fo ift für den Querfchnitt $I\,I$

$$M_I = D_0\, x - P_1\,(x - l + \xi_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 166.$$

Für den Querfchnitt $III\,III$ ift

$$M_{III} = D_0\, x_1 - P_1\,(x_1 - l + \xi_1) - P_2\,(x_1 - l + \xi_2) \quad \ldots\ldots \quad 167.$$

Innerhalb je zweier Laſtpunkte, ſo wie zwiſchen einem Auflagerpunkt und einem Laſtpunkt ändert ſich demnach das Moment nach dem Geſetze einer geraden Linie; denn für verſchiedene Werthe von $x$, bezw. $x_1$ bleiben alle in den Gleichungen 166 u. 167 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von $x$ und $x_1$ conſtant; dieſe einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der erſten Potenz vor. Trägt man alſo auch hier in den verſchiedenen Querſchnitten die Werthe von $M$ als Ordinaten auf, ſo erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Laſtpunkt ändert ſich der Ausdruck für $M$, alſo auch die Gerade. In Fig. 155 *c* iſt die Aenderung der Momente graphiſch dargeſtellt.

Da eine Gerade ihre gröſste Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, dieſe aber hier mit den Laſtpunkten zuſammenfallen, ſo folgt, daſs die gröſsten Momentenwerthe an den Laſtpunkten ſtattfinden. Dieſes Ergebniſs iſt von groſser Bedeutung. Wenn nur eine Einzellaſt $P$ vorhanden iſt, ſo iſt demnach das gröſste Moment ſtets am Laſtpunkte. Liegt alsdann $P$ in den Abſtänden $\xi$, bezw. $l - \xi$ von den beiden Auflagern, ſo iſt das Moment am Laſtpunkte, alſo das gröſste Moment, welches für die Querſchnittsbildung maſsgebend iſt,

$$M_{max} = \frac{P(l - \xi)\,\xi}{l}.$$

Liegt $P$ in der Mitte des Balkens, ſo iſt $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$, alſo

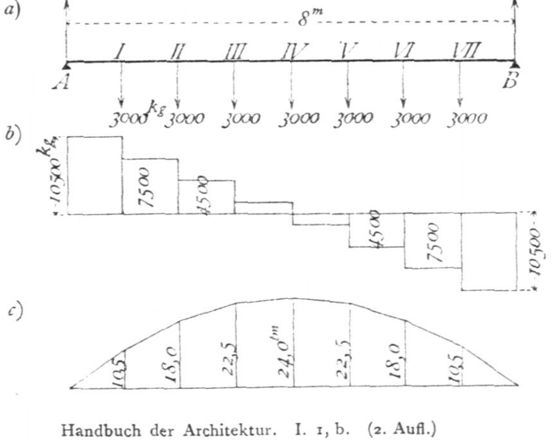
$$M_{max} = \frac{P\,l}{4}.$$

Sind zwei Einzellaſten auf dem Balken, ſo braucht man nur die beiden Momente an den Laſtpunkten zu ermitteln; das gröſsere von beiden iſt zugleich das gröſste. Wenn beide Laſten gleich groſs, und zwar je gleich $P$ ſind und im gleichen Abſtande $\frac{a}{2}$ von der Balkenmitte liegen, ſo iſt das Moment an jedem Laſtpunkte

$$M = \frac{P(l - a)}{2}.$$

Wenn endlich mehrere Laſten vorhanden ſind, braucht man nur die Momente an den Laſtpunkten aufzuſuchen. Falls der Balken conſtanten Querſchnitt erhält (wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall iſt), ſo iſt dieſer nach dem gröſsten überhaupt ſtattfindenden Momente zu beſtimmen.

Fig. 156.




Beiſpiel. Ein ſchmiedeeiſerner Unterzug (Fig. 156) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abſtand von Mitte zu Mitte je 1 m betrage. Jeder Balken belaſte den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Es ſind die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente zu ermitteln. Nach Gleichung 163 iſt

$$D_0 = \frac{3000}{8}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10\,500\ \text{kg};$$

eben ſo nach Gleichung 164

$$D_1 = \frac{3000}{8} 28 = 10\,500 \text{ kg}.$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belaſtungen ſymmetriſch zur Mitte des Balkens liegen und die Abſtände derſelben gleich ſind, faſſt man bequemer alle Laſten zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zuſammen, die in der Balkenmitte angreift. Es iſt alsdann $R = 7 \,.\, 3000 = 21\,000$ kg und $D_0 = \frac{21\,000}{l} \,.\, \frac{l}{2} = 10\,500 \text{ kg} = D_1$.

Die Querkräfte für die verſchiedenen Querſchnitte ſind:

| | |
|---|---|
| von $A$ bis $I = 10\,500$ kg, | von $IV$ bis $V = 10\,500 - 4 \,.\, 3000 = -1500$ kg, |
| » $I$ » $II = 10\,500 - 3000 = 7500$ kg, | » $V$ » $VI = 10\,500 - 5 \,.\, 3000 = -4500$ kg, |
| » $II$ » $III = 10\,500 - 2 \,.\, 3000 = 4500$ kg, | » $VI$ » $VII = 10\,500 - 6 \,.\, 3000 = -7500$ kg, |
| » $III$ » $IV = 10\,500 - 3 \,.\, 3000 = 1500$ kg, | » $VII$ » $B = 10\,500 - 7 \,.\, 3000 = -10\,500$ kg. |

Im Laſtpunkte $IV$ (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den poſitiven zu den negativen Werthen über.

Die Momente in den Laſtpunkten ſind:

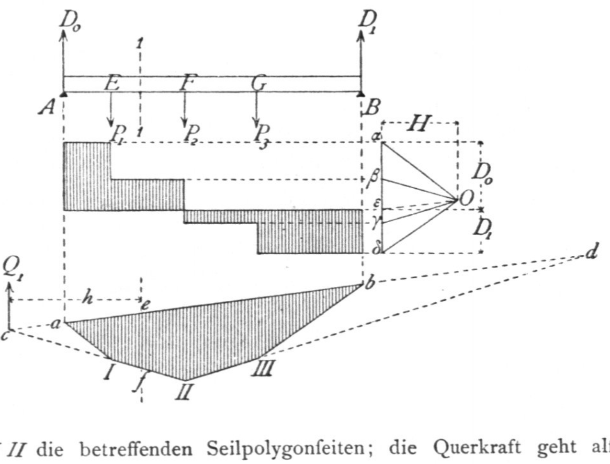
$$M_I = 10\,500 \,.\, 1 = 10\,500 \text{ kgm} = 1\,050\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_{II} = 10\,500 \,.\, 2 - 3000 \,.\, 1 = 18\,000 \text{ kgm} = 1\,800\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_{III} = 10\,500 \,.\, 3 - 3000 \,.\, 1 - 3000 \,.\, 2 = 22\,500 \text{ kgm} = 2\,250\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_{IV} = 10\,500 \,.\, 4 - 3000\,(1 + 2 + 3) = 24\,000 \text{ kgm} = 2\,400\,000 \text{ kgcm},$$
$$M_V = 10\,500 \,.\, 5 - 3000\,(1 + 2 + 3 + 4) = 22\,500 \text{ kgm} = 2\,250\,000 \text{ kgcm} = M_{III},$$
$$M_{VI} = M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0.$$

Hiernach ſind die Momente und Querkräfte in Fig. 156 *c* u. 156 *b* aufgetragen.

β) Graphiſche Ermittelung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, conſtruire man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol $O$ (Fig. 157) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schluſslinie $a\,b$ und parallel zu dieſer eine Linie $O\,\varepsilon$ durch den Pol $O$; dieſelbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen $\overline{\delta\,\varepsilon} = D_1$ und $\overline{\varepsilon\,\alpha} = D_0$ iſt (vergl. Art. 19, S. 14). Nun laſſen ſich die Querkräfte graphiſch leicht ermitteln.

Für alle Querſchnitte von $A$ bis $E$ iſt die Querkraft gleich $D_0$, d. h. gleich $\varepsilon\,\alpha$ (Fig. 157). Zieht man alſo durch $\varepsilon$ und $\alpha$ je eine Wagrechte, ſo giebt deren Abſtand die Gröſse der Querkraft zwiſchen $A$ und $E$ an. Zwiſchen $E$ und $F$ iſt die Querkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\,\alpha - \alpha\,\beta = \varepsilon\,\beta$; man ziehe alſo durch $\beta$ eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abſtand von der durch $\varepsilon$ gezogenen Geraden an jeder Stelle zwiſchen $E$ und $F$ die Gröſse der Querkraft. Eben ſo iſt zwiſchen $F$ und $G$ die Strecke $\varepsilon\,\gamma$, zwiſchen $G$ und $B$ die Strecke $\varepsilon\,\delta$ die Querkraft.

Fig. 157.




Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querſchnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 13) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonſeiten, welche bezw. der erſten und letzten dieſer Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querſchnitt zwiſchen $E$ und $F$ ſind $D_0$ und $P_1$ die Kräfte, $a\,b$ und $I\,II$ die betreffenden Seilpolygonſeiten; die Querkraft geht alſo durch deren Schnittpunkt $c$. Für jeden Querſchnitt zwiſchen $II$ und $III$ geht die Querkraft durch $d$ etc.

Die graphiſche Beſtimmung der Momente geſchieht in nachſtehender Weiſe.

Für einen beliebigen Querſchnitt *1 1* (Fig. 157) iſt das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Es iſt demnach $M_1 = Q_1\,h$. Nun iſt $\Delta\, c\,e\,f \backsim \Delta\, O\,\varepsilon\,\beta$, mithin $\frac{\overline{e\,f}}{h} = \frac{\overline{\varepsilon\,\beta}}{H}$, und, da $\overline{\varepsilon\,\beta} = Q_1$ iſt, $\overline{e\,f} = \frac{Q_1\,h}{H} = \frac{M_1}{H}$, alſo $M_1 = H \,.\, \overline{e\,f}$.

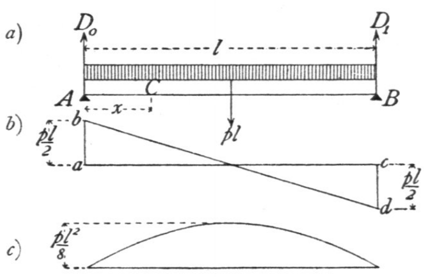
In vorftehendem Ausdruck für $M$ ift $H$, der wagrechte Abftand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabftand, für alle Querfchnitte conftant; die Gröfse des Momentes ift alfo mit $\overline{ef}$, d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

Das Moment in jedem Querfchnitte ift gleich dem Producte aus dem lothrechten Abftande der Seilpolygonfeiten bei diefem Querfchnitte und dem Polabftand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heifst die Momentenfläche.

Die Momente find Producte aus Kräften und Längen; $H$ ift eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit $10^t$, $20^t$ etc. Da das Moment in irgend einem Querfchnitt einen ganz beftimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten $H$ unabhängig ift, fo wird die Höhe des Seilpolygons defto gröfser, je kleiner $H$ ift, und umgekehrt.

Zweiter Belaftungsfall: Der Träger ift über feine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft belaftet. 152. Gleichförmig vertheilte Belaftung.

Fig. 158.



Die Belaftung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 158) fei $p$; alsdann ift die Mittelkraft gleich der Gefammtlaft, alfo gleich $p\,l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der ftatifchen Momente für $B$ als Drehpunkt heifst demnach:

$$D_0\, l - p\, l \frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p\,l}{2}; \text{ eben fo } D_1 = \frac{p\,l}{2} \; . \qquad 168.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querfchnitt $C$ im Abftande $x$ von $A$ ift

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p\,l}{2} - p\,x = \frac{p}{2}(l - 2\,x) \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 169.$$

Die graphifche Darftellung der Veränderung der Querkraft ergiebt die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ift $Q_0 = \frac{p\,l}{2}$; für $x = l$ ift $Q_l = -\frac{p\,l}{2}$. $Q_x$ wird Null für $l - 2\,x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie $bd$ (Fig. 158 $b$) find alfo die Querkräfte an den verfchiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querfchnitt $C$ ift

$$M_x = D_0\, x - p\, x \frac{x}{2} = \frac{p\,l}{2} x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l\,x - x^2) \; . \; . \; . \qquad 170.$$

Trägt man die Momente in den verfchiedenen Querfchnitten als Ordinaten auf, fo erhält man die Curve der Gleichung 170, d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ift $M_0 = 0$; für $x = l$ ift $M_l = 0$. $M_x$ wird ein Maximum für $\frac{d\,M_x}{d\,x} = \frac{p}{2}(l - 2\,x) = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$; demnach

$$M_{max} = \frac{p}{2}\left[l\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l^2}{8} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 171.$$

Hiernach kann die Parabel leicht conftruirt werden (Fig. 158 $c$). Man trage $\frac{p\,l^2}{8}$ nach beliebig angenommenem Momenten-Mafsftabe auf und verzeichne in bekannter Weife die Parabel; alsdann find alle Ordinaten auf diefem Mafsftabe zu meffen.

Nennt man die gefammte auf den Träger entfallende Laft $p\,l = P$, fo kann man auch fetzen

$$M_{max} = \frac{P\,l}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 172.$$

Diefer Ausdruck ift oft bequemer, als Gleichung 171. Wirkt eine Laft $P$ als Einzellaft in der Mitte, fo erzeugt fie nach Art. 151 (S. 129) ein Maximalmoment $M_{max} = \frac{P\,l}{4}$, d. h. ein doppelt fo grofses Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Laft $P$.

Beifpiele. 1) Ein Flurgang von $4^{m}$ Lichtweite ift mit einer Decke aus Kappengewölben zwifchen eifernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen fei $2{,}2^{m}$; die Träger follen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu $4{,}3^{m}$, d. i. zu $430^{cm}$ angenommen werden; alsdann ift $l = 430^{cm}$. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von $2{,}2^{m}$ Breite und $1^{m}$ Länge; mithin ift die Laft für das laufende Meter Träger, bei einer Maximalbelaftung von $750^{kg}$ für $1^{qm}$ Grundfläche, gleich $2{,}2 \cdot 750 = 1650^{kg}$ und für das laufende Centimeter Träger $p = 16{,}5^{kg}$. Die Auflagerdrücke find alfo nach Gleichung 168

$$D_0 = D_1 = \frac{16{,}5 \cdot 430}{2} = 3547^{kg},$$

und das Moment nach Gleichung 171

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16{,}5 \cdot 430^2}{8} = 381\,356^{kgcm}.$$

Nun ift der Querfchnitt nach Art. 88 (S. 65) fo zu beftimmen, dafs $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381\,356}{700} = 544{,}8$ ift. Falls ein I-Querfchnitt gewählt wird, ift Nr. 28 der »Deutfchen Normal-Profile« zu wählen, da bei demfelben $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 547$ ift [24]).

2) Es follen die Abmeffungen beftimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von $6^{m}$ zu geben find, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte $0{,}9^{m}$ und die Gefammtbelaftung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlaft) $500^{kg}$ für $1^{qm}$ beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von $0{,}9^{m}$ Breite zu tragen, d. h. eine Laft von $0{,}9 \cdot 500 = 450^{kg}$; mithin beträgt die Belaftung für das laufende Centimeter des Balkens $p = 4{,}5^{kg}$. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite $l$ nehmen wir zu $6{,}3^{m} = 630^{cm}$ an. Das gröfste Moment, welches hier, da der Balkenquerfchnitt conftant ift, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden mufs, findet in der Balkenmitte ftatt und ift nach Gleichung 171

$$M_{max} = \frac{4{,}5 \cdot 630^2}{8} = 223\,256^{kgcm};$$

mithin nach Art. 93 (S. 67)

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223\,256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19: $\mathfrak{J} = \frac{b\,h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ift, wird $\frac{b\,h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25^{cm}$ angenommen wird,

---

24) Man mufs beim Einfetzen der Zahlenwerthe für $p$ und $l$ vorfichtig fein. Es ift eigentlich felbftverftändlich, dafs, wenn man $l$ in Metern einführt, $p$ die Belaftung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn $l$ in Centimetern eingeführt wird, $p$ die Belaftung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner $K$, die zuläffige Beanfpruchung, in Kilogramm für $1^{qcm}$ und das Moment $M$ in Kilogramm-Centimetern an, fo find in der Gleichung $\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für $\mathfrak{J}$ und $a$ auf Centimeter bezogen einzufetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüffig fein, hier befonders darauf aufmerkfam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in diefer Hinficht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt fich, ftets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

$$h = \sqrt{\frac{6 \,.\, 3721}{25}} = 29{,}9 \text{ cm} = \infty\ 30 \text{ cm}.$$

Es genügt fonach ein Querfchnitt von $25 \times 30$ cm.

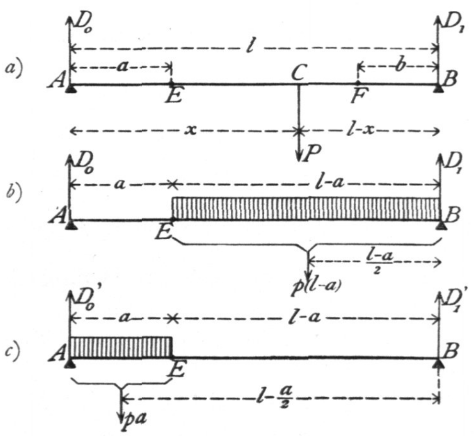
Dritter Belaftungsfall: Der Träger ift auf einen Theil feiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laft belaftet. 153. Theilweife gleichförmig vertheilte Belaftung.

Eine Laft $P$ im Abftande $x$ vom linken Auflager $A$ (Fig. 159) erzeugt die Auflagerdrücke

$$D_0 = \frac{P(l-x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P\,x}{l}.$$

Die Querkraft ift für jeden Querfchnitt $E$ links vom Laftpunkte $C$: $Q = D_0 = \frac{P(l-x)}{l}$, d. h. pofitiv; für jeden Querfchnitt $F$ rechts vom Laftpunkt $C$: $Q_1 = D_0 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{P\,x}{l}$, d. h. negativ. Daraus folgt der Satz:

Fig. 159.



Jede Belaftung erzeugt in allen links von ihr gelegenen Querfchnitten pofitive, in allen rechts gelegenen Querfchnitten negative Querkräfte. Demnach wird in irgend einem Querfchnitte, etwa $E$, die gröfste Querkraft ($Q_{max}$) ftattfinden, wenn die ganze Trägerabtheilung rechts von $E$ belaftet, der übrige Trägertheil ($A\,E$) unbelaftet ift (Fig. 159*b*). Die kleinfte Querkraft ($Q_{min}$) wird in $E$ eintreten, wenn die Abtheilung $A\,E$ links von $E$ belaftet, die Abtheilung $E\,B$ rechts von $E$ unbelaftet ift (Fig. 159*c*).

Man erhält die Werthe von $Q_{max}$, bezw. $Q_{min}$ für den Querfchnitt $E$, welcher um $a$ vom linken Auflager entfernt liegt, und für die Belaftung $p$ auf das laufende Meter, wie folgt. Für die Belaftung nach Fig. 159*b* ift

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p\,(l-a)^2}{2\,l}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 173.$$

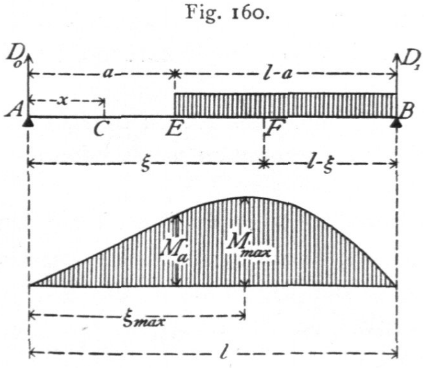
für die Belaftung nach Fig. 159*c* ift

$$D_0' = \frac{p\,a}{l}\left(l - \frac{a}{2}\right) = p\,a - \frac{p\,a^2}{2\,l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - p\,a;$$

fonach

$$Q_{min} = -\frac{p\,a^2}{2\,l} \quad \ldots \quad 174.$$

Fig. 160.



Die Belaftung nach Fig. 159 kommt im Hochbau fehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen fich Fenfter- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querfchnittsbemeffung ift das gröfste Moment mafsgebend, welches demnach aufgefucht werden foll.

Für irgend einen Punkt $C$ der Strecke $A\,E$ (Fig. 160) ift das Moment

$M_x = D_0\, x = \frac{p\,(l-a)^2}{2\,l}\, x$; die graphiſche Darſtellung ergiebt eine Gerade. Für einen Punkt $F$ der Strecke $C\,B$ iſt daſſelbe bequem durch Betrachtung des rechts von $F$ gelegenen Trägertheiles zu finden. Es iſt

$$M_\xi = D_1\,(l-\xi) - \frac{p\,(l-\xi)^2}{2}, \quad \text{woraus} \quad M_\xi = \frac{p}{2\,l}\,(l-\xi)\,(l\,\xi - a^2).$$

Auf dieſer Strecke ergiebt alſo die graphiſche Darſtellung des Momentes eine Parabel. Dieſelbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2\,l}.$$

Aus der Formel ergiebt ſich, daſs das Maximum des Momentes ſtets in einem Punkte der belaſteten Strecke $E\,B$ ſtattfindet. $M_{max}$ wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für $M_\xi$ ſtatt $\xi$ den für $\xi_{max}$ gefundenen Werth einführt, alſo

$$M_{max} = \frac{p\,l^2}{8}\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 175.$$

Nachſtehende kleine Tabelle ergiebt für eine Anzahl Werthe von $a$ die Gröſse von $M_{max}$ und von $\xi_{max}$:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Für | $a$ = | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 $l$ |
| | $\xi_{max}$ = | 0,5 | 0,505 | 0,52 | 0,545 | 0,58 | 0,625 | 0,68 | 0,745 | 0,82 | 0,9 | 1,0 $l$ |
| | $M_{max}$ = | 1 | 0,98 | 0,92 | 0,83 | 0,71 | 0,56 | 0,41 | 0,26 | 0,13 | 0,04 | 0 $\frac{p\,l^2}{8}$ |

154. Gröſste Momente durch gleichförmig vertheilte Laſten.

Eine Laſt $P$ im Abſtande $x$ vom linken Auflager erzeugt im Punkte $E$ links vom Laſtpunkte (Fig. 159 *a*) ein Moment $M_a = \frac{P\,(l-x)}{l}\, a$ und im Punkte $F$ rechts vom Laſtpunkte das Moment $M_b = \frac{P\,x}{l}\, b$. Beide Momentenwerthe ſind poſitiv; alſo erzeugt eine jede Einzellaſt in allen Trägerquerſchnitten poſitive Momente. Die gröſsten Momente in den einzelnen Trägerquerſchnitten werden demnach ſtattfinden, wenn alle Trägerpunkte belaſtet ſind, d. h. bei voller Belaſtung des Trägers. Iſt alſo volle Belaſtung eines Trägers mit gleichmäſsig vertheilter Laſt $p$ möglich, ſo ruft dieſe die gröſsten Momente hervor. Bei dieſer Belaſtung iſt nach Gleichung 170 für einen Querſchnitt mit der Abſciſſe $x$

$$M_x = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 176.$$

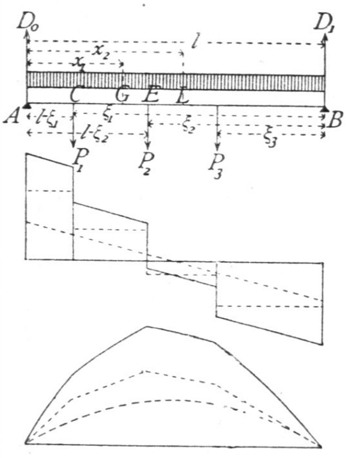
155. Gleichförmig vertheilte Laſt und Einzellaſten, bezw. theilweiſe Belaſtung.

Vierter Belaſtungsfall: Der Träger wird auf ſeine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Laſt und auſserdem durch Einzellaſten oder auf einen Theil ſeiner Länge durch eine weitere gleichförmig vertheilte Laſt belaſtet.

Da jeder Träger auſser der Nutzlaſt noch das Eigengewicht tragen muſs, dieſes aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, ſo iſt dieſer Fall der am häufigſten vorkommende.

In Art. 151 iſt nachgewieſen, daſs jede Laſt einen von den ſonſt noch auf dem Balken befindlichen Laſten unabhängigen Stützendruck erzeugt, und daſs der Geſammt-Stützendruck gleich der algebraiſchen Summe der Einzeldrücke iſt. Daraus folgt, daſs auch die Querkräfte und Momente für alle Querſchnitte gleich den algebraiſchen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente ſind.

Fig. 161.



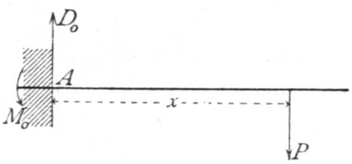
Es brauchen alſo im vorliegenden Falle nur die Stützendrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belaſtungen, derjenigen durch Einzellaſten und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Laſt u. ſ. w. ſich ergeben haben, algebraiſch addirt zu werden, was ſowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphiſch geſchehen kann.

Fig. 161 ſtellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verſchiedenen Querſchnitten durch gleichförmig vertheilte Laſt und Einzellaſten hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von $Q$ und $M$ nur für Einzellaſten, bezw. für gleichförmig vertheilte Laſt an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

## 2) Conſole-, Krag- oder Freiträger.

Conſole-, Krag- oder Freiträger ſind am einen Ende unterſtützte, am anderen Ende frei ſchwebende Träger. Als äuſsere Kräfte wirken auf dieſelben die Belaſtungen und die Auflagerdrücke der Unterſtützungsſtelle. Letztere laſſen ſich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht ſei, muſs zunächſt die algebraiſche Summe der lothrechten Kräfte gleich Null ſein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdrucks bei $A$ (Fig. 162) gleich $D_0$ iſt, wird $0 = D_0 - P$ oder 156. Erklärung.

Fig. 162.



$$D_0 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 177.$$

Eine äuſsere wagrechte Belaſtung ſei nicht vorhanden; es wird alſo der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es muſs aber auch die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, alſo etwa für $A$, gleich Null ſein; mithin muſs, da das Moment der gegebenen Kräfte für $A$ nicht gleich Null iſt, $D_0$ aber für den Drehpunkt $A$ kein ſtatiſches Moment hat, an der Unterſtützungsſtelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren reſultirendes Moment mit demjenigen der Belaſtungen zuſammen die Summe Null ergiebt. Bei $A$ wirkt alſo ein Moment $M_0$, deſſen Gröſse ſich ergiebt zu

$$M_0 = - P x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 178.$$

Dieſes Moment, deſſen Drehrichtung, wie das Vorzeichen angiebt, derjenigen von $P$ entgegengeſetzt iſt, kann auf verſchiedene Weiſe erzeugt werden, am einfachſten durch Einmauerung, bezw. Einſpannung des Balkens.

Soll für jede Belaſtungsart Gleichgewicht vorhanden ſein, ſo muſs der Balken derart eingemauert werden, daſs das von der Mauer geleiſtete Moment auch die gröſsten Werthe des Momentes der Belaſtungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergewicht geleiſtet, wonach dieſes zu beſtimmen iſt.

Auch in anderer Weiſe kann ein Moment in $A$ erzeugt werden, z. B. dadurch, daſs der Balken über den Punkt $A$ hinaus, bis zu einer zweiten Stütze $B$,

$$M_g = P(\xi + 25) + g\,l\left(\frac{l}{2} + 25\right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000^{\text{kgcm}},$$

$$M_p = p \cdot 170\left(\frac{170}{2} + 25\right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600^{\text{kgcm}}.$$

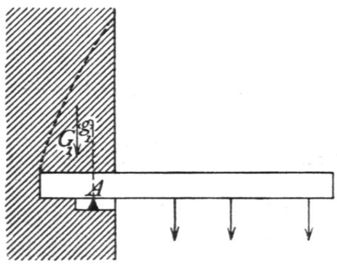
Der Querfchnitt an der Stelle $A$ ift fo zu beftimmen, dafs, wenn als zuläffige Beanfpruchung $K = 800^{\text{kg}}$ gewählt wird, ftattfinde

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{289\,000 + 149\,600}{800} = 548.$$

Profil Nr. 28 der »Deutfchen Normal-Profile für I-Eifen« hat ein Widerftandsmoment $\frac{\mathcal{J}}{a} = 547$, dürfte alfo für den vorliegenden Fall genügen.

Es möge hier noch befonders darauf hingewiefen werden, dafs die Confole-Träger hauptfächlich dann gefährdet find, wenn das am Einfpannungspunkte von der Mauer geleiftete Moment nicht die genügende Gröfse hat. Damit Gleichgewicht beftehe, mufs diefes Moment wenigftens fo grofs fein, wie das gröfstmögliche Moment der äufseren Kräfte für $A$. Auch hier ift aber ein Sicherheits-Coefficient $n$ nöthig, und wenn beifpielsweife diefes Einfpannungs-moment durch das Gewicht des auf dem hinteren Balkentheile ruhenden Mauerwerkes geleiftet wird (Fig. 167), fo mufs $G_1 g_1 = n M_0$ fein. Es dürfte fich empfehlen, $n$ nicht kleiner als 4 zu nehmen.

Fig. 167.




Dabei ift aber auch zu beachten, dafs die Art der Conftruction dafür Gewähr bieten mufs, dafs das Gewicht $G_1$ wirklich zur Wirkfamkeit kommt — etwa durch angemeffene Unterlagsplatten, Verband, Cementmörtel u. dergl. Unter Umftänden kann man auch das Gewicht des unterhalb gelegenen Mauerwerkes durch Anker und Ankerplatten am Balkenende aufhängen und dadurch für die Stabilität des Confole-Trägers nutzbar machen. Zu beachten ift auch, ob nicht ein Ausreifsen nach der punktirten Linie in Fig. 167 möglich ift.

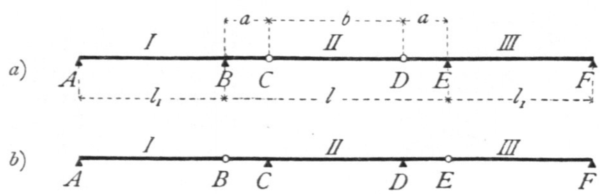
### 3) Continuirliche Gelenkträger.

160. Princip.

Die Querfchnittsgröfse der Träger und damit die zu denfelben gebrauchte Materialmenge ift wefentlich von der Gröfse der in den einzelnen Querfchnitten ftattfindenden gröfsten Momente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querfchnittsverringerung zur Folge. Eine folche Verringerung der Momente wird gegenüber den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen durch die fog. continuirlichen Gelenkträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles der Träger durch die übergekragten Enden der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verfchiedenen Oeffnungen verfchiedene Trägerarten, und zwar wechfelt immer ein Träger mit einem, bezw. zwei Kragftücken an den Enden und ein folcher ohne Kragftücke ab.

Für drei neben einander liegende Oeffnungen $I$, $II$, $III$ find die hauptfächlich vorkommenden Anordnungen in Fig. 168 $a$ u. $b$ dargeftellt. Entweder hat, wie in Fig. 168 $a$ gezeichnet, jeder Seitenträger $I$ und $III$ eine über das Auflager $B$, bezw. $E$ vorragende Confole $BC$, bezw. $DE$, auf deren Enden der Mittelträger $CD$ frei aufruht, oder der Mittelträger $CD$ hat, wie

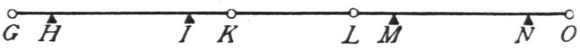
Fig. 168.



in Fig. 168 $b$, jederſeits ein Kragſtück $B\,C$, bezw. $D\,E$, und die Seitenträger $A\,B$ und $E\,F$ ruhen einerſeits auf den Endſtützpunkten $A$, bezw. $F$, andererſeits auf den Enden $B$ und $E$ der erwähnten Kragſtücke.

Die Pfetten der gröſseren eiſernen Dächer werden neuerdings meiſtens als ſolche Träger nach Fig. 169 hergeſtellt, wobei immer ein Träger mit zwei Conſolen an den Enden und ein auf dieſen Conſolen frei aufgelagerter Träger abwechſeln. Die Beanſpruchung in dieſem Falle ſtimmt genau mit derjenigen der in Fig. 168 $b$ angegebenen Anordnung überein; jeder Träger mit zwei Conſolen an den Enden wird wie Träger $B\,C\,D\,E$ in Fig. 168 $b$ beanſprucht; jeder andere Träger wie $A\,B$, bezw. $E\,F$ dieſer Figur. Es genügt deſshalb, die beiden Anordnungen in Fig. 168 $a$ u. $b$ in das Auge zu faſſen.

Fig. 169.




Weiter ſoll in Folgendem nur die für den Hochbau wichtigſte Belaſtungsart durch gleichmäſsig vertheilte Belaſtung des ganzen Trägers behandelt werden.

Erſte Anordnung: Die Kragſtücke befinden ſich an den Seiten- 161. Erſte Anordnung.
trägern (Fig. 168 $a$).

$\alpha$) Seitenträger mit einſeitigem Kragſtück. Es ſei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, alſo $l = 2a + b$; es ſei ferner die Belaſtung für die Längeneinheit des Trägers $p$. Alsdann wirkt auſser dieſer Belaſtung auf den Seitenträger in $C$ eine Kraft nach unten, welche dem im Punkte $C$ auf den Balken $C\,D$ nach oben wirkenden Auflagerdruck (nach dem Geſetze der Wechſelwirkung, vergl. Art. 9, S. 9) genau gleich iſt, d. h. eine Kraft $\frac{p\,b}{2}$. Der Stützendruck im Auflagerpunkte $A$ (Fig. 170 $a$) ergiebt ſich durch Aufſtellung der Gleichung der ſtatiſchen Momente für Punkt $B$ zu

$$D_0 = \frac{p\,l_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{a\,b + a^2}{l_1}.$$

Setzt man die nur von den Längen abhängige Conſtante $\frac{a\,b + a^2}{l_1} = c_1$, ſo iſt

$$D_0 = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 186.$$

Weiters iſt der Stützendruck im Auflagerpunkte $B$

$$D_1 = \frac{p\,l_1}{2} + \frac{p\,b}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + p\,a\,\frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2}\,(l_1 + c_1 + 2\,a + b) \quad \ldots \quad 187.$$

In der Strecke $A\,B$ beträgt die Querkraft für einen Punkt $L$ mit der Abſciſſe $x$, von $A$ aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - p\,x = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1 - 2\,x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 188.$$

d. h. die graphiſche Darſtellung ergiebt eine Gerade. Für $x = 0$ iſt $Q_0 = \frac{p}{2}\,(l_1 - c_1)$; für $x = l_1$ iſt $Q_{l_1} = -\frac{p}{2}\,(l_1 + c_1)$; die Querkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke $B\,C$ iſt die Querkraft für einen Punkt $L_1$ mit der Abſciſſe $x_1$, von $C$ aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2}(b + 2\,x_1), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 189.$$

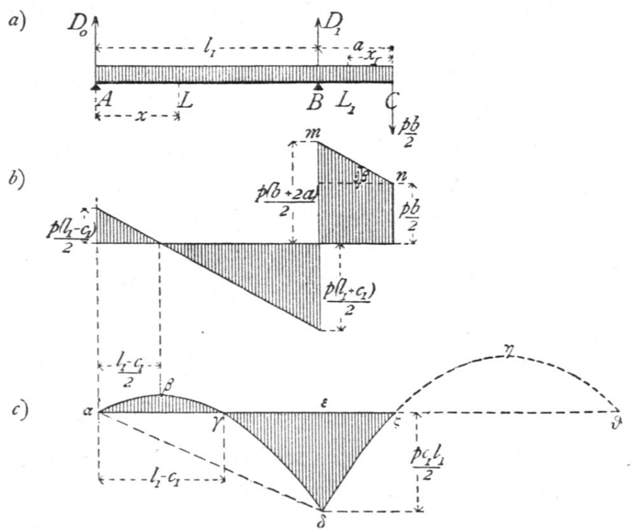
d. h. die graphische Darstellung derselben ergiebt eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{p\,b}{2}$; für $x_1 = a$ ist $Q_a = \frac{p}{2}(b + 2\,a)$. Die Querkräfte sind in Fig. 170*b* graphisch dargestellt.

In der Strecke *A B* ist das Moment für den Punkt *L*

$$M_x = D_0\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l_1 - c_1)\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p}{2}(l_1\,x - x^2) - \frac{p\,c_1\,x}{2} \quad \ldots \quad 190.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken *A B* von der Länge $l_1$ entstehen würde; in Folge der Console und ihrer Belastung erhält man demnach hier an jeder Stelle ein um $\frac{p\,c_1\,x}{2}$ kleineres Moment. Die graphische Darstellung ergiebt eine Parabel $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ (Fig. 170*c*); die Linie $\alpha\,\delta$ ist die Linie der Gleichung: $y = -\frac{p\,c_1\,x}{2}$. Trägt man also von dieser aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2}(l_1\,x - x^2)$ auf, so ergeben die von $\alpha\,\varepsilon$ aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$;

Fig. 170.




für $x = l_1$ ist $M_{l_1} = -\frac{p\,c_1\,l_1}{2} = \varepsilon\,\delta$. $M_x$ wird Null für jenen Werth von $x$, für welchen stattfindet: $0 = \frac{p}{2}(l_1 - x) - \frac{p\,c_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha\,\gamma$ ist also gleich $l_1 - c_1$. $M_x$ hat sein Maximum für $\frac{d\,M_x}{d\,x} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{p\,c_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p\,(l_1 - c_1)^2}{8}.$$

In der Strecke *B C* ist das Moment für den Punkt $L_1$

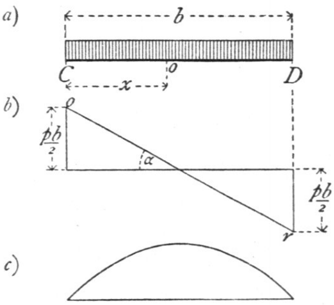
$$M_{x_1} = -\frac{p\,b}{2}x_1 - \frac{p\,{x_1}^2}{2} = -\frac{p}{2}(b\,x_1 + {x_1}^2), \quad \ldots\ldots \quad 191.$$

d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. $M_{x_1}$ wird Null für $x_1 = 0$ und für $b\,x_1 + {x_1}^2 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt *C*, und wenn die Curve über den Nullpunkt *C* nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt *D* (Fig. 168*a*). Ferner wird $M_{x_1}$ ein Maximum für $0 = b + 2\,x_1$, d. h. es wird $x_{1max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt *B*, wird

$M_{x_1} = -\frac{p}{2}(a\,b + a^2) = -\frac{p}{2}c_1\,l_1$, wie bereits oben gefunden. Hiernach ift die Parabel $\delta\,\zeta\,\eta\,\vartheta$ in Fig. 170*c* conftruirt.

β) Balkenträger auf den beiden Kragftücken. Für diefen Träger $C\,D$ (Fig. 171) gilt das unter 1 für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Es ift alfo für einen Punkt $o$ mit der Abfciffe $x$

Fig. 171.

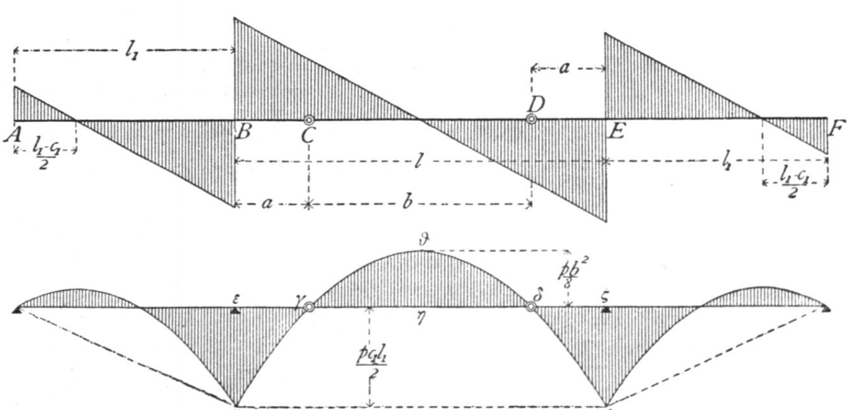



$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2\,x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2}(b\,x - x^2) \qquad 192.$$

Die graphifchen Darftellungen der Querkräfte und Momente giebt Fig. 171.

γ) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 172), fo fieht man zunächft, dafs die Querkräfte und Momente in $C$ gleiche Gröfse haben, ob man vom Träger $A\,B\,C$ oder vom Träger $C\,D$ ausgeht. Auch die Neigung der Linie $o\,r$, welche die Querkraft auf $C\,D$ darftellt (Fig. 171), ftimmt mit derjenigen von $m\,n$ (Fig. 170), welche die Querkraft der Strecke $B\,C$ darftellt, überein; denn es ift (Fig. 171)

Fig. 172.




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{p\,b}{2}}{\frac{b}{2}} = p \quad \text{und (Fig. 170}b\text{)} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{p\,a}{a} = p, \quad \text{d. h.} \quad \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien $o\,r$ und $m\,n$ eine einzige Linie. Auch die Momenten-Curven beider Theile ftimmen überein; denn für die Abtheilung $B\,C$ ift nach Gleichung 191: $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(b\,x_1 + x_1^2)$ und für negative $x_1$, d. h. für Punkte, welche rechts von $C$ liegen, ift $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(-b\,x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2}(b\,x_1 - x_1^2)$. Dies ift aber nach Gleichung 192 der Werth, welcher fich für das Moment auf der Strecke $C\,D$ ergiebt. Die in Fig. 170*c* gezeichnete Curve $\delta\,\zeta\,\eta\,\vartheta$ ift alfo die richtige Momenten-Curve.

In Fig. 172 find die Momente und Querkräfte für den ganzen Träger angegeben.

δ) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Theil $B\,C\,D\,E$ (Fig. 172) find die Querkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2\,a + b$; für die Seitenträger find die Querkräfte an jeder Stelle um $\frac{p\,c_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen $A$ und $B$ aufruhenden Balkenträger. Die abfoluten Werthe der Querkräfte find alfo auf der pofitiven Seite um $\frac{p\,c_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{p\,c_1}{2}$ gröfser, als dort.

Was die Momente anbelangt, fo ift für die Seitenträger oben bereits nachgewiefen, dafs das Moment an jeder Stelle um $\frac{p\,c_1\,x}{2}$ kleiner ift, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite $l_1$. Falls der Mittelträger in $B$ und $E$ frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abfciffe $\xi$, von $B$ aus gemeffen, das Moment $M_\xi = \frac{p}{2}(l\,\xi - \xi^2) = \frac{p}{2}\left[(b + 2\,a)\,\xi - \xi^2\right] = p\,a\,\xi + \frac{p}{2}\,b\,\xi - \frac{p\,\xi^2}{2}$ fein, oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abfciffen vom Punkt $C$ aus rechnet und mit $x$ bezeichnet (nach rechts pofitiv), fo wird $\xi = a \pm x$ und nach einigen Umformungen

$$M_x = \frac{p}{2}\,(b\,x - x^2) + \frac{p}{2}\,c_1\,l_1 .$$

Für den Mittelträger $B\,C\,D\,E$ mit den Gelenken in $C$ und $D$ ift, wie oben gezeigt, das Moment $M_x = \frac{p}{2}\,(b\,x - x^2)$, alfo um $\frac{p}{2}\,c_1\,l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weife in $B$ und $E$ erfolgte. Nun ift aber diefe Differenz $\frac{p}{2}\,c_1\,l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen $B$ und $E$; die von der Wagrechten $\alpha\,\beta$ in Fig. 172 aus gemeffenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in $B$ und $E$ frei aufliegenden Trägers. Conftruirt man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2}\,(l\,\xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weife und zieht durch die Punkte $\gamma$ und $\delta$, in welchen die Lothrechten der Confolenenden die Parabel fchneiden, eine Wagrechte $\varepsilon\,\zeta$, fo find die von diefer Linie aus gemeffenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt fich, die Confolenlänge fo zu beftimmen, dafs das negative Moment über den Stützen abfolut genommen genau fo grofs ift, wie das pofitive Moment in der Mitte. Man theile zu diefem Zwecke einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha\,\vartheta\,\beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Wagrechte; alsdann geben die Längen $\varepsilon\,\gamma$, bezw. $\delta\,\zeta$ die Längen der Confolen.

Bei den im Hochbau verwendeten continuirlichen Gelenkträgern ift meiftens der Querfchnitt für jeden der drei Einzelbalken conftant gebildet; derfelbe mufs demnach unter Zugrundelegung des betreffenden gröfsten Momentes (abfolut genommen) beftimmt werden. Für den Seitenträger ift dann entweder der Maximalwerth $\frac{p}{8}\,(l_1 - c_1)^2$ oder (häufiger) derjenige im Querfchnitt über der Stütze $B$ mafsgebend; d. h. es ift $M_{max} = \frac{p\,c_1\,l_1}{2}$ zu fetzen, fo dafs

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{p\,c_1\,l_1}{2\,K} .$$

Für das Mittelftück ergiebt fich in gleicher Weife als Bedingung für die Querfchnittsbildung

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{p\,b^2}{8\,K} .$$

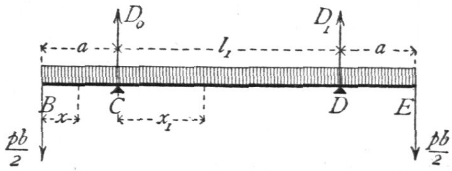
162. Zweite Anordnung.

Zweite Anordnung: Die Kragftücke befinden fich am Mittelträger.

$\alpha$) Mittelträger mit beiderseitigen Kragstücken. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 173) sei $l_1$, diejenige des Kragstückes sei $a$ und die Länge jedes Seitenträgers $b$; alsdann ist bei voller Belastung der Auflagerdruck

$$D_0 = \frac{p}{2}(l_1 + 2a + b) = D_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 193.$$

Fig. 173.




In der Strecke $B\,C$ ist die Querkraft

$$Q_x = -\frac{p\,b}{2} - p\,x \quad . \quad . \quad 194.$$

Für $x = 0$ ist $Q_0 = -\frac{p\,b}{2}$; für $x = a$ ist

$$Q_a = -\frac{p\,b}{2} - p\,a = -\frac{p}{2}(b + 2\,a).$$

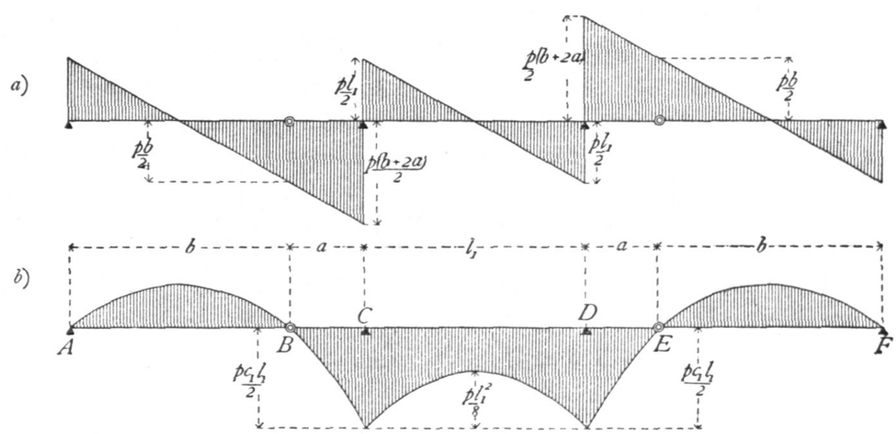
In der Strecke $C\,D$ ist die Querkraft

$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{p\,b}{2} - p\,a - p\,x_1 = \frac{p}{2}(l_1 - 2\,x_1), \quad \ldots\ldots \quad 195.$$

d. h. genau so grofs, wie ohne Kragstücke. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{p\,l_1}{2}$; für $x_1 = l_1$ ist $Q_{l_1} = -\frac{p\,l_1}{2}$.

In der Strecke $D\,E$ ist die Querkraft eben so grofs, wie in $B\,C$; nur ist hier positiv, was dort negativ ist. Die graphische Darstellung der Querkräfte ergiebt Fig. 174$a$.

Fig. 174.




In den Strecken $B\,C$ und $D\,E$ haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 161 (S. 139) behandelten Consolen. Es ist demnach, vom Punkte $B$ aus gerechnet,

$$M_x = -\frac{p\,b}{2}\,x - \frac{p\,x^2}{2} = -\frac{p}{2}(b\,x + x^2) \quad \ldots\ldots \quad 196.$$

Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = a$ ist $M_a = -\frac{p}{2}(a\,b + a^2) = -\frac{p}{2}\,c_1\,l_1$.

In der Strecke $C\,D$ ist das Moment

$$M_{x_1} = D_0\,x_1 - \frac{p\,x_1^{\,2}}{2} - p\,a\left(\frac{a}{2} + x_1\right) - \frac{p\,b}{2}(a + x_1) = \frac{p}{2}(l_1\,x_1 - x_1^{\,2}) - \frac{p}{2}\,c_1\,l_1\,. \quad 197.$$

Der erfte Theil des Momentes ift das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite $l_1$; der zweite Theil ift das Moment über der Stütze $C$, bezw. $D$.

Alfo auch hier gilt daffelbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger gefagt wurde. Die graphifche Darftellung der Momente ift in Fig. 174 *b* gegeben.

β) Seitenträger. Die Seitenträger find frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 152 (S. 131) entwickelt wurde. Demnach ift, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2}(b\,x - x^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 198.$$

und es ergiebt fich leicht, wie in Art. 161, dafs die Curven für die Momente und die Querkräfte diefelben find, wie die für die Confole $B\,C$ gefundenen.

Die Momente und Querkräfte für die verfchiedenen Querfchnitte find in Fig. 174 graphifch aufgetragen.

163. Günftigftes Verhältnifs von $a$ und $b$.

Zum Schluffe erübrigt noch eine Unterfuchung über das günftigfte Verhältnifs der Gröfsen $a$ und $b$, d. h. über das Verhältnifs, welches den geringften Materialaufwand bedingt.

Im Hochbau wird man meiftens Träger mit conftantem oder nahezu conftantem Querfchnitt verwenden; derfelbe mufs alsdann fo grofs fein, wie das gröfste überhaupt im Träger vorkommende Moment es verlangt. Die Anordnung ift demnach fo zu treffen, dafs die an den verfchiedenen Stellen ftattfindenden Maximalmomente einander (abfolut genommen) gleich find.

Beim Träger mit beiderfeitigen Kragftücken (fiehe Art. 162, S. 142 u. Fig. 168 *b*) finden die gröfsten Momente über den Stützen $C$, bezw. $D$ und in der Mitte der Oeffnung ftatt. Die Bedingung, dafs diefelben einander (abfolut genommen) gleich fein follen, giebt eine Gleichung für die günftigfte Länge von $a$. Es ift

$$M_c = \frac{p}{2}c_1\,l_1 \quad \text{und} \quad M_{mitte} = \frac{p\,l_1^2}{8} - \frac{p}{2}c_1\,l_1 .$$

Es mufs demnach $\frac{p}{2}c_1\,l_1 = \frac{p\,l_1^2}{8} - \frac{p}{2}c_1\,l_1$ fein, woraus $\frac{l_1}{8} = c_1$. Da nun $c_1 = \frac{a^2 + a\,b}{l_1}$ ift, wird $a^2 + a\,b = \frac{l_1^2}{8}$; da ferner $b = l - a$, wird

$$a^2 + a\,l - a^2 = \frac{l_1^2}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{8}\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 199.$$

Für $l_1 = l$ würde $a = \frac{l}{8}$; für $l_1 = \frac{4}{3}l$ würde $a = \frac{2}{9}l$ etc.

Beim Träger mit einfeitigem Kragftück (fiehe Art. 161, S. 139 u. Fig. 168 *a*) würde fich diefes Verhältnifs in folgender Weife ergeben. Das Moment über dem Auflager ift $\frac{p}{2}c_1\,l_1$; das Maximalmoment in der Oeffnung ift $M_{max} = \frac{p}{8}(l_1 - c_1)^2$; mithin ift die Bedingungsgleichung

$$\frac{p}{8}(l_1 - c_1)^2 = \frac{p}{2}c_1\,l_1 .$$

Die Auflöfung diefer Gleichung ergiebt $c_1 = l_1 (3 - \sqrt{8}) = 0{,}172\, l_1$ und, da $c_1 = \frac{a^2 + a\, b}{l_1}$, ferner $b = l - 2\, a$, fo wird nach einfachen Umformungen

$$\frac{a}{l} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0{,}688 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2}}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 200.$$

Für die verfchiedenen Werthe von $\frac{l_1}{l}$ ergeben fich aus den Gleichungen 199 u. 200 die nachfolgenden Werthe für $\frac{a}{l}$:

| Träger | $\frac{l_1}{l} =$ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mit beiderfeitigem Kragftück: | $\frac{a}{l} =$ | 0,06 | 0,08 | 0,11 | 0,125 | 0,15 | 0,18 | 0,21 |
| mit einfeitigem Kragftück: | $\frac{a}{l} =$ | 0,093 | 0,125 | 0,168 | 0,22 | 0,30 | — | — |

Es kann oft zweckmäfsig fein, die Werthe von $a$ fo zu beftimmen, dafs das Maximalmoment im frei aufliegenden Trägertheile demjenigen über der Stütze gleich ift, weil man vielfach allen Trägertheilen, fowohl dem frei aufliegenden Träger, wie demjenigen mit den Kragftücken, gleichen Querfchnitt giebt.

Für die zweite Anordnung (Träger mit beiderfeitigem Kragftück) ift dann die Bedingungsgleichung

$$\frac{p\, b^2}{8} = \frac{p\, c_1\, l_1}{2},$$

und wenn man $c_1\, l_1 = a^2 + a\, b$ und $b = l - a$ einführt, ergiebt fich

$$a = 0{,}172\, l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 201.$$

Bei der erften Anordnung (Träger mit einfeitigem Kragftück) lautet die Bedingungsgleichung ebenfalls

$$\frac{p\, b^2}{8} = \frac{p\, c_1\, l_1}{2},$$

und man erhält nach Einfetzung von $c_1\, l_1 = a^2 + a\, b$ und $b = l - 2\, a$ als denjenigen Werth von $a$, bei welchem die bez. Momente einander (abfolut genommen) gleich find,

$$a = 0{,}146\, l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 202.$$

## 4) Continuirliche Träger.

Die continuirlichen Träger oder Träger auf mehr als zwei Stützpunkten find nach Art. 148 (S. 126) ftatifch unbeftimmt. Die Stützendrücke werden mit Hilfe der Elafticitätslehre ermittelt. Bei der verhältnifsmäfsig geringen Verwendung diefer Träger im Hochbau und weil der Raum für die eingehende Befprechung im vorliegenden »Handbuch« nicht ausreicht, foll nur für eine Reihe von gewöhnlichen Belaftungsfällen die Gröfse der Stützendrücke, der Momente und Querkräfte an- 164. Princip.

gegeben werden. Wegen des eingehenden Studiums wird auf die unten [25]) ſtehenden Werke verwieſen.

Im Folgenden bezeichnen: $D_0$, $D_1$, $D_2$ ... die Auflagerdrücke in den verſchiedenen Stützpunkten *0, 1, 2* ...; $M_0$, $M_1$, $M_2$ ... die Momente an dieſen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ ... die Maximalmomente in den Oeffnungen *1, 2, 3* ...; $l$ die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich groſs ſind; $l_1$, $l_2$, $l_3$ ... die Stützweiten der Oeffnungen *1, 2, 3* ..., falls nicht alle Stützweiten gleich groſs ſind; $p_1$, $p_2$, $p_3$ ... die gleichförmig vertheilten Belaſtungen für die Längeneinheit in den Oeffnungen *1, 2, 3* ... des Trägers.

$\alpha$) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite $l$ und die gleiche volle Belaſtung $p$ für die Längeneinheit zu tragen. Die maſsgebenden Werthe von $M$, $D$ und $\mathfrak{M}$ ſind in folgender Tabelle zuſammengeſtellt:

| Anzahl der Oeffnungen: | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | | | 2 | 3 | 4 | | | 2 | 3 | 4 | |
| $M_0 =$ | 0 | 0 | 0 | | $D_0 =$ | 0,375 | 0,400 | 0,3929 | | $\mathfrak{M}_1 =$ | 0,07031 | 0,08 | 0,0771 | |
| $M_1 =$ | 0,125 | 0,10 | 0,10714 | | $D_1 =$ | 1,250 | 1,100 | 1,1428 | | $\mathfrak{M}_2 =$ | 0,07031 | 0,025 | 0,0363 | |
| $M_2 =$ | 0 | 0,10 | 0,0714 | $p\,l^2$ | $D_2 =$ | 0,375 | 1,100 | 0,9186 | $p\,l$ | $\mathfrak{M}_3 =$ | — | 0,08 | 0,0363 | $p\,l^2$ |
| $M_3 =$ | — | 0 | 0,10714 | | $D_3 =$ | — | 0,400 | 1,1428 | | $\mathfrak{M}_4 =$ | — | — | 0,0771 | |
| $M_4 =$ | — | — | 0 | | $D_4 =$ | — | — | 0,3929 | | | | | | |

$\beta$) Die Stützweiten ſind ungleich; jede Oeffnung iſt voll mit $p_1$, $p_2$, $p_3$ ... auf die Längeneinheit belaſtet.

Nimmt man zunächſt zwei Oeffnungen mit den Stützweiten $l_1$ und $l_2$ an, ſo iſt

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1\,l_1^3 + p_2\,l_2^3}{8\,(l_1 + l_2)}, \qquad 203.$$

$$\left.\begin{aligned} D_0 = \frac{p_1\,l_1}{2} - \frac{p_1\,l_1^3 + p_2\,l_2^3}{8\,l_1\,(l_1 + l_2)}, \quad D_1 = \frac{p_1\,l_1^3 + p_2\,l_3^3}{8\,l_1\,l_2} + \frac{p_1\,l_1}{2} + \frac{p_2\,l_2}{2}, \\ D_2 = \frac{p_2\,l_2}{2} - \frac{p_1\,l_1^3 + p_2\,l_2^3}{8\,l_2\,(l_1 + l_2)}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 204.$$

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten $l_1$, $l_2$ und $l_1$ ergeben ſich folgende Werthe:

---

25) Für das Studium der «Theorie der continuirlichen Träger» ſeien folgende Schriften empfohlen:


CLAPEYRON. *Calcul d'une poutre élaſtique repoſant librement ſur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus*, Bd. 45, S. 1076.

MOHR. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eiſen-Conſtructionen. Zeitſchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1860, S. 323; 1868, S. 19.

CULMANN, K. Die graphiſche Statik. Zürich 1866. S 273.

WINKLER, E. Die Lehre von der Elaſticität und Feſtigkeit etc. I. Theil. Prag 1867. S. 112.

RITTER, W. Die elaſtiſche Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. 2. Aufl. Zürich 1883.

LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers conſtanten Querſchnittes. Allg. Bauz. 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Sonderabdruck erſchienen: Wien 1871.)

WEYRAUCH, J. J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.

WINKLER, E. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. I. Heft. Aeuſsere Kräfte gerader Träger. 3. Aufl. Wien 1886.

LAISSLE, F. u. A. SCHÜBLER. Der Bau der Brückenträger mit beſonderer Rückſicht auf Eiſen-Conſtructionen. I. Theil. 4. Aufl. Stuttgart 1876. S. 161.

GRASHOF, F. Theorie der Elaſticität und Feſtigkeit etc. 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.

CANOVETTI. *Théorie des poutres continues* etc. Paris 1882.

STELZEL, K. Grundzüge der graphiſchen Statik und deren Anwendung auf die continuirlichen Träger. Graz 1882.

OTT, K. v. Grundzüge der graphiſchen Statik. 4. Aufl. Prag 1885.

CASTIGLIANO, A. *Théorie de l'équilibre des syſtèmes élaſtiques*. Turin. — Deutſch von E. HAUFF. Wien 1886.

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3 l_2 + 2 l_1)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4 l_1 (3 l_2 + 2 l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}. \quad 206.$$

Aus diefen allgemeinen Gleichungen kann man in befonderen Fällen die betreffenden Werthe leicht finden. Wenn z. B. eine ganze Oeffnung unbelaftet ift, fo ift einfach in den obigen Ausdrücken das entfprechende $p$ gleich Null zu fetzen.

### b) Innere Kräfte der Gitterträger.

Die Balkenträger find entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den erfteren bildet der ganze Querfchnitt eine zufammenhängende Fläche; bei den letzteren befteht derfelbe aus zwei getrennten Theilen, den fog. Gurtungsquerfchnitten; beide Gurtungen find durch Stäbe mit einander verbunden. 165. Allgemeines

Die Ermittelung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gufseifernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äufseren Kräfte erzeugt werden, ift bereits im 4. Kapitel des 2. Abfchnittes vorgeführt worden; dafelbft ift auch die Querfchnittsbeftimmung für diefe Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel follen defshalb nur die in den Gitterträgern entftehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

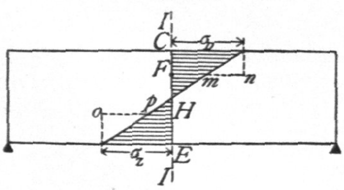
Gitterträger find aus einzelnen Stäben zufammengefetzte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heifsen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwifchen ihnen angeordnete Gitterwerk.

Man nennt jedes aus Stäben, welche in den Schnittpunkten ihrer Axen mit einander verbunden find, beftehende Stabwerk ein Fachwerk; die Gitterträger bilden demnach Fachwerke.

Die Vortheile der Gitterträger gegenüber den vollwandigen Trägern ergeben fich leicht durch die folgende Ueberlegung. Die auf Biegung beanfpruchten Träger erleiden in allen Punkten eines jeden Querfchnittes verfchiedene Beanfpruchungen. Wenn die äufseren Kräfte nur fenkrecht zur Balkenaxe gerichtet find, fo ift im einfachften und häufigften Falle die Spannung eines in der Höhe $z$ über, bezw. unter der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punktes nach Gleichung 42: $N = \frac{M}{\mathcal{J}} z$.

Die graphifche Darftellung der an den verfchiedenen Stellen des Querfchnittes auftretenden Spannungen $N$ ift die durch Fig. 175 veranfchaulichte, da $\frac{M}{\mathcal{J}}$ für irgend einen Querfchnitt conftant ift. Im Punkte $C$ des Querfchnittes $II$ ift die Spannung $\sigma_D$ (Druck), in $E$ ift fie $\sigma_Z$ (Zug); in allen anderen Punkten des Querfchnittes hat fie geringere Werthe. Da aber die Beanfpruchungen $\sigma_D$ und $\sigma_Z$ die zuläffigen Grenzen $K''$ für Druck und $K'$ für Zug nicht überfchreiten dürfen, fo ift $\sigma_D = K''$ und $\sigma_Z = K'$ zu fetzen und danach die Querfchnittsfläche zu beftimmen. Die zuläffige Beanfpruchung findet alfo nur in wenigen Querfchnittspunkten ftatt, nämlich in denjenigen, welche am weiteften nach oben, bezw. unten von der wagrechten Schwerpunktsaxe

Fig. 175.



abliegen. In allen anderen Querſchnittspunkten iſt die wirklich höchſtens vorhandene Spannung viel kleiner, als zuläſſig wäre, ſo z. B. im Punkte $F$ um $\overline{mn}$ und im Punkte $H$ um $\overline{op}$. Demnach wird bei einem vollwandigen, auf Biegung beanſpruchten Träger das Material durchaus nicht ausgenutzt. Eine Ausnutzung des Materials bis zur zuläſſigen Grenze kann nur ſtattfinden, wenn die Stäbe in der Richtung ihrer Axe, alſo auf Zug oder Druck beanſprucht werden, weil nur dann die Annahme einer gleichmäſsigen Vertheilung der Kraft über den ganzen Querſchnitt annähernd erfüllt iſt. Bei den richtig conſtruirten Gitterträgern werden aber alle Stäbe nur auf Zug oder Druck in der Richtung ihrer Axe beanſprucht, ſo daſs man das Material voll ausnutzen und folglich mit geringerem Materialaufwande als bei vollwandigen Trägern auskommen kann. Hierzu möge noch bemerkt werden, daſs dieſe Vortheile nur bei gröſseren Weiten voll in die Erſcheinung treten; bei kleineren Weiten ergeben ſich die Stabquerſchnitte für die praktiſche Ausführung zu klein, ſo daſs für ſolche Aufgaben vollwandige Träger vorzuziehen ſind.

166. Eintheilung der Gitterträger.

Nach der Form der Gurtung unterſcheidet man:

1) Parallelträger, d h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch wagrecht) ſind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die erſteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null iſt und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade iſt, Bogenſehnenträger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade iſt, Fiſchbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterſcheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipſenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden.

Eintheiliges Gitterwerk iſt ſolches, bei welchem ſich jeder Gitterſtab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterſtäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk iſt ſolches, bei welchem jeder Gitterſtab ſich auſser in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterſtäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues iſt wohl immer das eintheilige Gitterwerk, welches eine genaue und einfache Berechnung zuläſſt, ausreichend, ſo daſs hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk beſprochen werden ſollen.

Die Gitterſtäbe ſind entweder geneigt oder lothrecht; ſie werden in der Folge bezw. als Diagonalen und Verticalen oder Pfoſten bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennt man Netzwerk; Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Verticalen bezeichnet man wohl beſonders mit dem Namen Fachwerk.

Die Dachbinder ſind in den allermeiſten Fällen Gitterträger, ſo daſs die hier zunächſt zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Geſetze auch für die im nächſten Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig ſind.

167. Voraus-ſetzungen.

Bei den nachſtehenden Unterſuchungen werden folgende Annahmen gemacht:

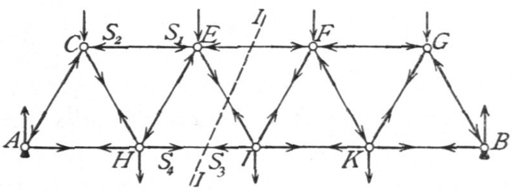
1) die Belaſtungen finden nur in den Knotenpunkten ſtatt, und

2) die Stäbe ſind in den Knotenpunkten ſo mit einander verbunden, daſs ſie ſich um dieſelben frei drehen können.

## 1) Verfahren für die Beſtimmung der Stabſpannungen.

Die Ermittelung der Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 4 (S. 6) angegeben worden iſt. 168. Erläuterungen. Man unterſucht den Gleichgewichtszuſtand irgend eines Theiles des Fachwerkes unter der Einwirkung aller an demſelben thätigen Kräfte. In jeder Stabaxe wirken zwei Kräfte, welche einander an Gröſse gleich ſind, aber entgegengeſetzten Sinn haben, die Stabſpannungen. Im Stabe $CE$ (Fig. 176) wird von $C$ eine Kraft $S_1$ auf $E$ übertragen, und eine gleich groſse Kraft $S_2$ von $E$ auf $C$; beide ſind Druck. In $HI$ wird von $H$ auf $I$ ein Zug $S_3$, von $I$ auf $H$ ein gleich groſser Zug $S_4$ ausgeübt. In Fig. 176 ſind alle auf die Knotenpunkte wirkenden Stabſpannungen angegeben.

Fig. 176.




Betrachtet man nur einen Theil des Trägers, etwa den links vom Schnitte $II$ gelegenen, ſo wirken auf denſelben auſser den äuſseren Kräften die Stabſpannungen. Alle Stäbe, von denen zwei Knotenpunkte dem betreffenden Theile angehören, enthalten zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, alſo für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht in Betracht kommen. In anderer Lage ſind diejenigen Stäbe, welche vom Schnitte $II$ getroffen werden, von denen alſo nur ein Knotenpunkt links vom Schnitte liegt. Nur diejenigen Spannungen dieſer Stäbe, welche auf die dem betreffenden Trägertheile angehörenden Knotenpunkte wirken, ſind als auf das Bruchſtück wirkende Kräfte einzuſetzen; ſo viele Stäbe alſo durch den Schnitt getroffen werden, ſo viele Stabſpannungen ſind in den Gleichgewichtsgleichungen vorhanden, welche für den Trägertheil aufzuſtellen ſind. Dieſe Spannungen ſind die unbekannten Kräfte, für deren Ermittelung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu Gebote ſtehen. Da für Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden ſind, ſo iſt die Aufgabe auf dem angegebenen, rein ſtatiſchen Wege nur dann lösbar, wenn ſich bei jedem Schnitte nur drei unbekannte Stabſpannungen ergeben.

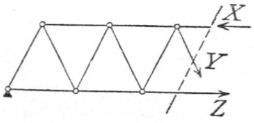
Ein ſolches Fachwerk, bei welchem ſämmtliche Stabſpannungen durch die Geſetze des Gleichgewichtes ſtarrer Körper beſtimmbar ſind, nennt man ſtatiſch beſtimmt; reichen dieſe Geſetze dazu nicht aus, ſo iſt das Fachwerk ſtatiſch unbeſtimmt. In letzterem Falle ſind die Stabſpannungen auch noch von den elaſtiſchen Formänderungen abhängig. Es iſt aus verſchiedenen Gründen empfehlenswerth, im Hochbau nur ſtatiſch beſtimmte Fachwerke zu verwenden.

Unter Berückſichtigung des Vorſtehenden iſt nun folgendermaſsen zu verfahren. 169. Verfahren im Allgemeinen. Das Fachwerk wird an derjenigen Stelle durchſchnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabſpannungen, kennen lernen will; an den Schnittſtellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Bruchſtück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar ſind, ſo muſs jede Stabſpannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zuſammenfallen. Es ergiebt ſich ſonach die folgende Regel.

Man denke fich den Träger fo durchfchnitten, dafs die Stäbe, deren Spannung man fucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zufammenfallenden Stabfpannungen als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 177) und ftelle für das Bruchftück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im erften Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab ($Y$ und $Z$ in Fig. 177); im zweiten Falle wirkt fie nach dem Knotenpunkt hin ($X$ in Fig. 177). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanfpruchung kennt, fo werden wir zunächft ftets alle Spannungen als Zugfpannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergiebt entweder einen pofitiven oder negativen Werth. Das erftere Ergebnifs bedeutet, dafs die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. dafs im Stabe Zug herrfcht; das zweite Ergebnifs bedeutet, dafs die wirkliche Spannung der angenommenen gerade entgegengefetzt (mit cos $180^0$ zu multipliciren) ift, d. h. dafs im Stabe Druck herrfcht.

Fig. 177.




170. Verfahren durch Rechnung.

$\alpha$) Analytifche Beftimmung der Stabfpannungen. Diefelbe kann in zweifacher Weife gefchehen: entweder durch Aufftellung aller Gleichgewichtsbedingungen oder nach der fog. Momenten-Methode.

171. Gleichgewichts-bedingungen.

a) Die Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Bruchftück (Fig. 178), welches, wie im vorigen Artikel angegeben, behandelt ift, ergiebt drei Gleichungen, welche nach Art. 6 (S. 7) lauten:

$$\left.\begin{array}{l} X\cos\sigma + Y\sin\tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X\sin\sigma - Y\cos\tau = 0 \\ \qquad\qquad D_0 \,.\, 2\,a - P_1\,a - Z\,z = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad 207.$$

Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ift der Punkt $C$ gewählt; alsdann haben $X$, $Y$ und $P_2$ kein ftatifches Moment, weil fie für diefen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

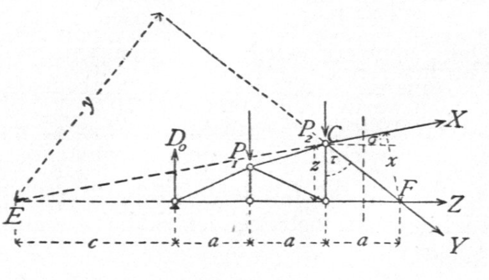
Der angegebene Weg führt ftets, wenn nur 3 Unbekannte, alfo 3 gefchnittene Stäbe vorhanden find, zum Ziele; er hat den Nachtheil, dafs meiftens 3 Gleichungen gelöst werden müffen, felbft wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

172. *Ritter*'fche Methode.

b) Das Charakteriftifche der von *Ritter* angegebenen Momenten-Methode ift, dafs man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die dritte Gleichgewichtsbedingung des vorhergehenden Artikels. Wird der Momentenpunkt fo gewählt, dafs zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, fo bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das ftatifche Moment jeder der beiden Kräfte ift aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Kraftrichtungen, weil für diefen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Das Verfahren ift demnach das folgende.

Man lege durch den Träger einen Schnitt, fo dafs nur 3 Stäbe mit unbekannten Spannungen gefchnitten werden, bringe diefe Spannungen und alle am Bruchftück wirkenden äufseren Kräfte an, fetze die algebraifche Summe der ftatifchen Momente diefer Kräfte gleich Null und

Fig. 178.



wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannung eines Stabes ftets den Schnittpunkt der beiden mitdurchfchnittenen Stäbe.

Um in Fig. 178 die Spannung $X$ zu finden, wählt man $F$ als Momentenpunkt; die Gleichung der ftatifchen Momente heifst dann

$$X x + D_0 . 3 a - P_1 . 2 a - P_2 a = 0,$$

woraus fich die einzige Unbekannte $X$ leicht finden läfft. Für $C$ als Momentenpunkt ergiebt fich

$$D_0 . 2 a - P_1 a - Z z = 0,$$

woraus $Z$ zu berechnen ift, und für $E$ als Momentenpunkt

$$Y y - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2 a) = 0,$$

woraus $Y$ zu ermitteln ift.

Die Länge der Hebelsarme ergiebt fich meiftens genügend genau aus der Zeichnung, kann aber auch leicht rechnerifch ermittelt werden.

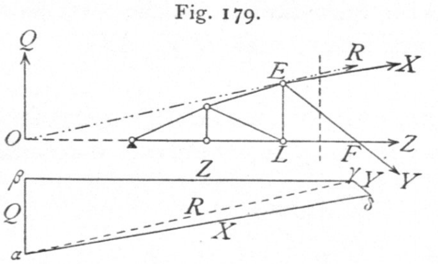
Wir werden den für einen Stab nach diefer Methode fich ergebenden Momentenpunkt den diefem Stabe conjugirten Punkt nennen.

β) Graphifche Beftimmung der Stabfpannungen. Auch das graphifche Verfahren kann nach verfchiedenen Arten durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Vieleckmethode oder nach einer aus Zeichnung und Rechnung zufammengefetzten Weife. 173. Graphifches Verfahren.

α) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben. 174. *Culmann*'fche Methode.

Werden die fämmtlichen am Bruchftück wirkenden äufseren Kräfte zu einer Mittelkraft $Q$ (Fig. 179) zufammengefafft, fo wirken auf daffelbe 4 Kräfte, nämlich $Q$ und die 3 unbekannten Spannungen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe. Für diefe 4 Kräfte ergiebt fich ein gefchloffenes Kraftpolygon. Von einer diefer Kräfte, nämlich von $Q$, ift Gröfse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl die Richtung und Lage, nicht aber die Gröfse. Erfetzt man 2 der unbekannten Kräfte, etwa $X$ und $Y$, durch ihre Mittelkraft $R$, fo bleiben nur noch die 3 Kräfte $Q$, $Z$ und $R$, welche fich nach Art. 8 (S. 8) in einem Punkte fchneiden müffen. $R$ mufs alfo durch den Schnittpunkt $O$ von $Q$ und $Z$ gehen. Da $R$ aufserdem durch den Schnittpunkt $E$ von $X$ und $Y$ geht, fo find 2 Punkte der Richtungslinie von $R$, es ift alfo auch diefe Richtung felbft bekannt. $R$ hat demnach die Richtung $O E$. Im Punkte $O$ halten fich nun die drei Kräfte $Q$, $R$ und $Z$ das Gleichgewicht; das für diefelben conftruirte Kraftpolygon ift eine gefchloffene Figur, hier ein Dreieck. Ift $Q = \alpha \beta$, fo ziehe man durch $\beta$ eine Parallele zur Richtung von $Z$, durch $\alpha$ eine folche zur Richtung von $R$; der Schnittpunkt $\gamma$ beider Linien ergiebt die beiden Kräfte $R = \gamma \alpha$ und $Z = \beta \gamma$.

Fig. 179.

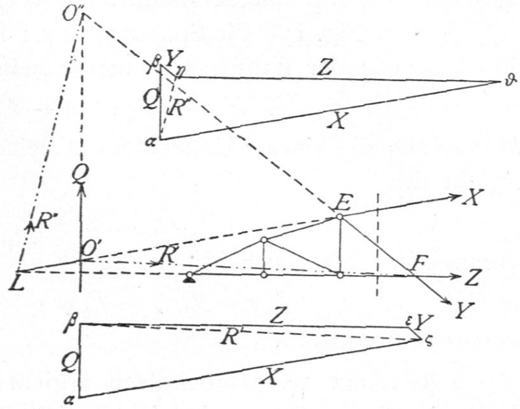



In derfelben Weife kann nun $R$ in feine beiden Seitenkräfte $X$ und $Y$ zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von $R$ Parallelen zu den Richtungen von bezw. $X$ und $Y$ zieht. Es ergiebt fich $\gamma \delta = Y$ und $\delta \alpha = X$.

Es ift für das Endergebnifs gleichgiltig, welche zwei von den unbekannten Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch $Y$ und $Z$ (Fig. 180) durch ihre Mittelkraft $R'$ erfetzen, welche dann durch $F$ und den Schnittpunkt $O'$ der Kraft $X$ mit $Q$ geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha \beta \varepsilon \zeta$.

Eben fo kann man auch $X$ und $Z$ zu einer Refultirenden vereinen, und erhält die ebenfalls in Fig. 180 gezeichnete Conftruction.

Fig. 180.




Die angegebene Conftruction giebt zugleich Auffchlufs darüber, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt werden. Da die am Bruchftück wirkenden Kräfte im Gleichgewicht find, fo haben fie nach Art. 15 (S. 11) u. Art. 19 (S. 14) denfelben Umfahrungsfinn, und es ift demnach der Sinn aller im Kraftpolygon vorkommenden Kräfte bekannt, wenn der Sinn einer derfelben bekannt ift. Hier ift ftets der Sinn von $Q$ bekannt; denn diefes ift die Querkraft für den bezüglichen Querfchnitt. $Q$ hat den Sinn von $\alpha$ nach $\beta$; alfo ift in Fig. 179 $Z$ von $\beta$ nach $\gamma$, d. h. vom Knotenpunkt $L$ ab gerichtet, $Y$ von $\gamma$ nach $\delta$ und $X$ von $\delta$ nach $\alpha$ gerichtet. $X$ wirkt alfo nach dem Knotenpunkt $E$ hin, ift demnach Druck, während $Z$ und $Y$ Zug bedeuten. Richtung, Gröfse und Lage der Kraft $Q$ für eine gegebene Belaftung find mit Hilfe des Kraft- und Seilpolygons leicht beftimmbar. (Siehe Art. 151, S. 130.)

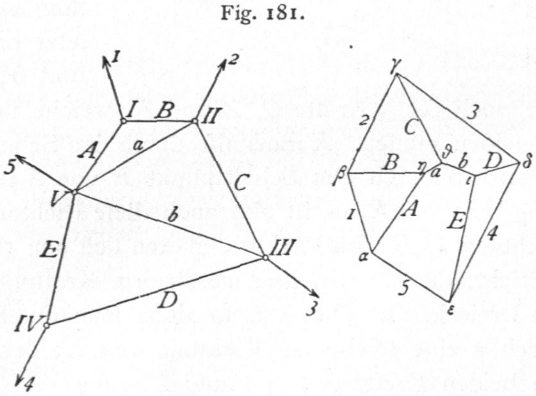
175. *Cremona*'fche Methode.

b) Die Vieleckmethode ift von *Cremona* angegeben worden.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Randftäbe feien Stäbe, welche zwei auf einander folgende äufsere Knotenpunkte mit einander verbinden, alfo *I II*, *II III* . . . in Fig. 181; Zwifchenftäbe feien Stäbe, welche zwei nicht auf einander folgende äufsere Knotenpunkte verbinden, alfo *II V*, *III V* . . . in Fig. 181.

Da alle auf das Fachwerk wirkenden äufseren Kräfte im Gleichgewichte find, fo ift für diefelben ein gefchloffenes Kraftpolygon möglich, welches, wenn alle äufseren Kräfte nach Gröfse und Richtung gegeben find, leicht conftruirt werden kann. Aufserdem find an jedem Knotenpunkte die an demfelben wirkenden Kräfte für fich im Gleichgewicht; es ift alfo für jeden diefer Knotenpunkte ein weiteres, fich fchliefsendes Kraftpolygon zweiter Ordnung möglich. An jedem Knotenpunkte wirken: eine äufsere Kraft, die im befonderen Falle Null fein kann, und die Spannungen der Stäbe, welche fich in ihm fchneiden, alfo im Knotenpunkte *II* die Kräfte 2, *B*, *C*, *a*.

Fig. 181.

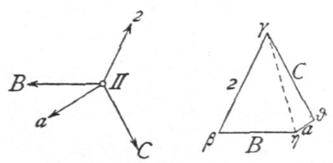



In den meiften der kleinen Kraftpolygone kommt nun je eine äufsere Kraft vor, welche bereits im grofsen Hauptpolygon der äufseren Kräfte enthalten ift; es wird alfo offenbar möglich fein, jedes kleine Kraftpolygon fo an das grofse zu legen, dafs die beiden gemeinfame äufsere Kraft durch diefelbe Gerade dargeftellt wird.

Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, fo kommt jede Stabfpannung in zwei Kraftpolygonen zweiter Ordnung vor. Es wird nun durch zweckmäfsige Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone fo in das grofse einzufchachteln, dafs nicht nur jede äufsere Kraft, fondern auch jede Stabfpannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt; d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann fo zufammen, dafs die zweien gemeinfame Stabfpannung durch diefelbe Gerade dargeftellt wird.

Für die Conftruction der kleinen Kraftpolygone ift nun Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier die Richtung fämmtlicher Kräfte bekannt ift und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte fich fchliefst, fo ift die Conftruction deffelben ftets möglich, wenn am Knotenpunkte nur zwei unbekannte Kräfte vorhanden find. Denn feien etwa in Fig. 182 $B$ und $2$ bekannt, $a$ und $C$ unbekannt, fo erfordert das Gleichgewicht, dafs die Mittelkraft von $a$ und $C$ der bekannten Mittelkraft von $2$ und $B$ der Gröfse nach genau gleich ift. Die bekannte Mittelkraft von $2$ und $B$ ift aber die Verbindungslinie $\eta\gamma$ im Kraftpolygon, und es ift diefelbe im entgegengefetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte $C$ und $a$ zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa $\gamma$, eine Parallele zu $C$, durch den anderen Endpunkt, etwa $\eta$, eine Parallele zu $a$ gezogen wird. Der Schnittpunkt $\vartheta$ ergiebt $\gamma\,\vartheta = C$ und $\vartheta\,\eta = a$. Alsdann ift $\beta\,\gamma\,\vartheta\,\eta$ das kleine Kraftpolygon für Punkt $II$. Man mufs es demnach bei der Conftruction der kleinen Kraftpolygone fo einrichten, dafs ftets nur 2 Unbekannte da find. Zu diefem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem fich nur 2 Stäbe fchneiden, hier alfo etwa mit $I$ (Fig. 181). Die äufsere Kraft ift bekannt; unbekannt find demnach nur $A$ und $B$ und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu $II$. Bekannt find hier $2$ und $B$, unbekannt $C$ und $a$, demnach leicht ermittelt. So fchreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem fich nur 2 Stäbe fchneiden, ift bei den in der Praxis üblichen Gitterträgern ftets vorhanden.

Fig. 182.




Damit nun jede äufsere Kraft und jede Stabfpannung nur einmal in dem entftehenden Kraftzuge — dem Kräfteplan — vorkomme, ift folgende Regel zu befolgen. Man vereine fämmtliche äufsere Kräfte zu einem gefchloffenen Kraftpolygon, indem man fie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man fagt, in cyclifcher Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte diefes Kraftpolygons Parallelen zu den Randftäben derart, dafs die Parallele zu einem Randftabe, etwa zu $A$, durch denjenigen Eckpunkt des grofsen Kraftpolygons geht, welcher zwifchen den beiden äufseren Kräften liegt, zwifchen denen der betreffende Randftab im Fachwerk fich befindet. Der Randftab $A$ liegt im Fachwerk zwifchen den äufseren Kräften $1$ und $5$; die Parallele zu $A$ wird alfo durch den Punkt $\alpha$ zwifchen $1$ und $5$ gezogen; eben fo die Parallele zum Randftab $B$ durch $\beta$ zwifchen $1$ und $2$ etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen conftruire man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone; alsdann erhält man einen Linienzug zwifchen den Randftäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwifchenftabfpannung darftellt und in welchem jede Zwifchenftabfpannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randftäben abgefchnittenen Längen geben die Spannungen der Randftäbe an.

Der Sinn der Stabfpannungen wird hier genau in derfelben Weife aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ift.

c) Verfahren von Zimmermann für Fachwerke, welche durch parallele äufsere Kräfte beanfprucht werden.

Die Mittelkraft aller links vom Schnitte $II$ auf den Träger wirkenden äufseren Kräfte fei $Q$ (Fig. 183); alsdann ift das Moment derfelben

für den Punkt $C$ als Drehpunkt: $M_C = Q\,\xi$; für den Punkt $D$ als Drehpunkt: $M_D = Q\,(\xi + a)$.

Demnach wird

$$Q\,a = M_D - M_C \quad \text{und} \quad Q = \frac{M_D}{a} - \frac{M_C}{a}.$$

Man trage nun nach einem beliebigen Mafsftabe $\frac{M_C}{a}$ von $C'$ nach oben ab, eben fo $\frac{M_D}{a}$ nach demfelben Mafsftabe von $D$ aus, fo dafs

$$DD'' = \frac{M_D}{a} \quad \text{und} \quad C'C'' = \frac{M_C}{a}$$

ift, ziehe durch $C''$ und $D''$ je eine Parallele zu demjenigen Gurtungsftabe, welcher an derfelben Seite der Diagonale liegt, wie der betreffende Punkt, alfo durch $C''$ eine Parallele zu $FD$, durch $D''$ eine folche zu $CE$. Dann wird $JD'' = \frac{M_D}{a} - \frac{M_C}{a} = Q$; in dem fo erhaltenen, fchraffirten Vierecke $JD''GH$ ift alsdann:

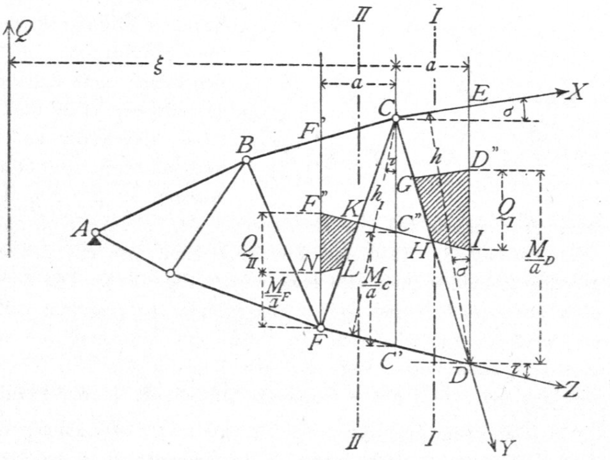
$D''G$ die Spannung im Gurtungsftabe $CE$,

$GH$ die Spannung in der Diagonalen $CD$,

$HJ$ die Spannung im Gurtungsftabe $FD$,

und zwar in demfelben Mafsftabe, nach welchem $\frac{M_D}{a}$, bezw. $\frac{M_C}{a}$ aufgetragen find.

Fig. 183.




Nach dem Vorftehenden ift nämlich, da die auf das Trägerftück links von $II$ wirkenden äufseren Kräfte mit $X$, $Y$, $Z$ zufammen Gleichgewicht herftellen müffen, die algebraifche Summe der ftatifchen Momente diefer Kräfte für einen beliebigen Drehpunkt, alfo auch für $D$, gleich Null; mithin

$$0 = Q(a + \xi) + Xh, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{Q(a+\xi)}{h} = -\frac{M_D}{h}.$$

Das Vorzeichen foll zunächft unberückfichtigt gelaffen und nur die abfolute Gröfse von $X$ in das Auge gefafft werden. Es ift alsdann

$$X = \frac{M_D}{h} = \frac{M_D}{a}\,\frac{a}{h} = \frac{M_D}{a}\,\frac{\frac{a}{\cos\sigma}}{\frac{h}{\cos\sigma}}.$$

Nun ift $\frac{a}{\cos\sigma} = \overline{CE}$ und $\frac{h}{\cos\sigma} = \overline{DE}$, demnach

$$X = \frac{M_D}{a}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \overline{DD''}\,\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}.$$

Es ift aber auch nach Fig. 183

$$\frac{\overline{D''G}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DD''}}{\overline{DE}}, \quad \text{daher} \quad \overline{D''G} = \overline{DD''}\,\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}},$$

woraus folgt, dafs $X = \overline{D''G}$ ift. Auf den Trägertheil links vom Schnitte $II$ wirken nun vier Kräfte: die Mittelkraft $Q$ aller äufseren Kräfte und die Spannungen der vom Schnitte $II$ getroffenen Stäbe, alfo $X$, $Y$, $Z$. Da diefe Kräfte einander das Gleichgewicht halten, fo mufs fich aus ihnen ein gefchloffenes Kraftpolygon herftellen laffen. Zwei von den vier Kräften find bekannt, nämlich $Q$ und $X$, und bereits an einander gereiht ($JD''G$); das gefuchte Kraftpolygon ift alfo nach bekannten Regeln leicht dadurch zu vervollftändigen, dafs man durch den einen Endpunkt $G$ des Linienzuges die Parallele zu $Y$ (diefelbe fällt mit der Diagonalen zufammen) und durch den anderen Endpunkt $J$ des Linienzuges die Parallele zu $Z$ zieht; das erhaltene Viereck $JD''GH$ ift das gefuchte Kraftpolygon, womit die obige Behauptung erwiefen ift. Die Art der Beanfpruchung ergiebt fich, wie ftets, aus dem Umfahrungsfinne im Kraftpolygon.

Legt man in gleicher Weife den Schnitt $II\,II$ durch den Träger, trägt von $F$ aus $FN = \frac{M_F}{a}$ nach oben ab, zieht durch $N$ eine Parallele zum Gurtungsftabe $BC$, durch $C''$ eine Parallele zum Gurtungsftabe $FD$, fo erhält man, wie oben, ein Viereck $NF''KL$, deffen Seitenlängen entfprechende Stabfpannungen darftellen. Es ift nämlich

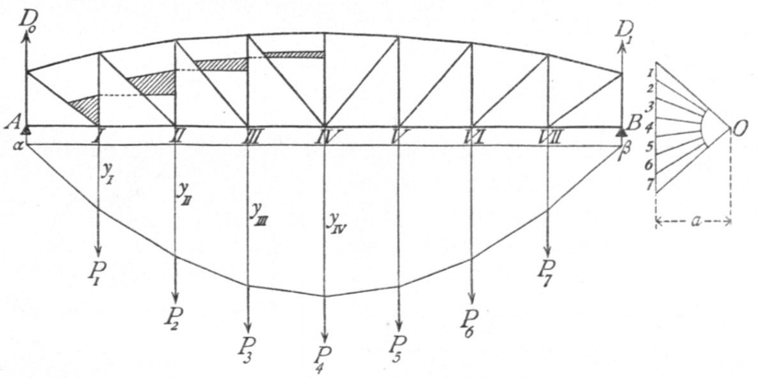
$$\overline{NF''} = \frac{M_C}{a} - \frac{M_F}{a} = Q_{II},$$

$$Z = \frac{M_C}{h_1} = \frac{M_C}{a} \cdot \frac{a}{h_1} = \frac{M_C}{a} \cdot \frac{\frac{a}{\cos\tau}}{\frac{h_1}{\cos\tau}} = \overline{FF''}\,\frac{\overline{FC'}}{\overline{CC'}} = \overline{F''K}\,.$$

Die weitere Vervollftändigung des den vier Kräften, welche bei Schnitt $II\,II$ in Betracht kommen, entfprechenden Kraftpolygons ift, wie oben, vorzunehmen. Es ift $\overline{F''K}$ die Spannung im Gurtungsftabe $FD$, $\overline{KL}$ die Spannung in der Diagonalen $FC$ und $\overline{LN}$ die Spannung im Gurtungsftabe $BC$.

Meiftens hat die Feldweite $a$ im ganzen Träger die gleiche Gröfse; es ändert fich aber in der Grundlage nichts, wenn einzelne Felder des Trägers andere Knotenpunktsabftände als $a$ aufweifen. Die Werthe $\frac{M}{a}$ können durch Rechnung oder durch Conftruction ermittelt werden.

Fig. 184.




Sollen die Ausdrücke $\frac{M}{a}$ für die einzelnen Knotenpunkte rechnerifch beftimmt werden, fo führt man zweckmäfsig die Feldweite $a$ als Einheit ein. Sind in Fig. 184 alle Knotenpunktlaften gleich $P$, fo wird

$$D_0 = D_1 = \frac{7\,P}{2} \quad \text{und} \quad \frac{M_I}{a} = \frac{7\,P}{2} = \frac{M_{VII}}{a},$$

$$\frac{M_{II}}{a} = \frac{7\,P}{2}\,2 - P \cdot 1 = 6\,P = \frac{M_{VI}}{a},$$

$$\frac{M_{III}}{a} = \frac{7\,P}{2}\,3 - P \cdot 1 - P \cdot 2 = 7{,}5\,P = \frac{M_V}{a},$$

$$\frac{M_{IV}}{a} = \frac{7\,P}{2}\,4 - P\,(1 + 2 + 3) = 8\,P.$$

Conſtruirt man für die gegebenen Laſten und den Polabſtand $a$ ein Seilpolygon, ſo geben die den einzelnen Knotenpunkten entſprechenden lothrechten Höhen des Seilpolygons (von der Schluſslinie $\alpha\,\beta$ aus gemeſſen) die Werthe von $\frac{M}{a}$. In Fig. 184 iſt $y_I = \frac{M_I}{a}$, $y_{II} = \frac{M_{II}}{a}$ etc.

Um nicht weit über die Zeichnung fallende Kraftpolygone zu erhalten, iſt in Fig. 184 bei Conſtruction der ſchraffirten Kraftpolygone überall $\frac{M_D}{2\,a}$ aufgetragen; der für den Kräftezug gewählte Maſsſtab iſt $1^{mm} = 1$ Tonne; es müſſen demnach die Spannungen, welche ſich in den ſchraffirten Kraftpolygonen ergeben, auf einem doppelt ſo groſsen Maſsſtabe abgegriffen werden, auf welchem alſo $1^{mm} = 2$ Tonnen bedeutet.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

176. Berechnung der Gurtungsſpannungen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um dieſe Spannungen für eine beliebige Belaſtung zu ermitteln, nennen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchſtück links vom Schnitte $I\,I$ (Fig. 185) wirkenden Kräfte $Q$. Für irgend einen Stab $C\,E$ der oberen Gurtung iſt $F$ der Momenten- oder conjugirte Punkt, und es iſt das Moment der äuſseren Kräfte in Bezug auf dieſen Punkt $M = Q\,\eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

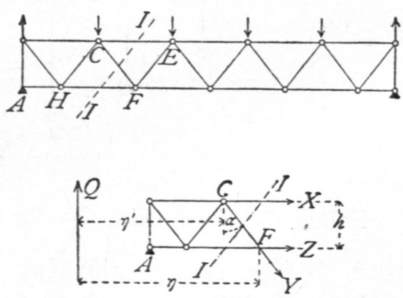
$$0 = M + X\,h, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{M}{h} \quad \ldots\ldots \quad 208.$$

In gleicher Weiſe ergiebt ſich für $C$ als Momentenpunkt, wenn $M_1$ das Moment von $Q$ in Bezug auf $C$ iſt,

$$0 = M_1 - Z\,h, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M_1}{h} \quad \ldots\ldots \quad 209.$$

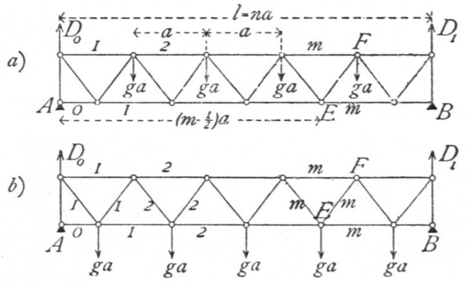
Da bei einem Träger auf zwei Stützen $M$ ſtets die angegebene Drehrichtung hat (ſtets poſitiv iſt, vergl. Art. 85, S. 59), ſo folgt aus den Gleichungen 208 u. 209: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsſtäbe ſtets gedrückt, die unteren Gurtungsſtäbe ſtets gezogen. Ferner: $X_{max}$ und $Z_{max}$ wird bei derſelben Belaſtung wie $M_{max}$ ſtattfinden, d. h. in jedem Gurtungsſtabe findet gröſste Beanſpruchung bei derjenigen Belaſtung ſtatt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt ſein Maximum erreicht. Wird gleichmäſsig vertheilte Belaſtung zu Grunde gelegt, ſo findet für jeden Querſchnitt das gröſste Moment bei voller Belaſtung ſtatt; ſämmtliche Gurtungsſtäbe werden demnach bei voller Belaſtung am meiſten beanſprucht.

Fig. 185.




α) Das Eigengewicht der Conſtruction kann als eine gleichmäſsig über die Länge des Trägers vertheilte Belaſtung angeſehen werden. Wir bezeichnen es mit $g$ für die Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, daſs alle Belaſtungen durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für den Hochbau ftets ausreicht. Die Entfernung der Knotenpunkte fei $a$ (Fig. 186), die Felderzahl des Trägers $n$, mithin $l = n\,a$. Jeder Mittenknotenpunkt ift mit $g\,a$ belaftet; die Belaftungen der Knotenpunkte über den Auflagern berückfichtigen wir nicht, weil diefe unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden.

Fig. 186.



Greifen die Laften an der oberen Gurtung an (Fig. 186*a*), fo ift bei der angenommenen Diagonalenanordnung der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = (n-1)\,\frac{g\,a}{2}.$$

Für den $m$-ten Stab der oberen Gurtung ift $E$ der Momentenpunkt und

$$M = D_0\left(m - \frac{1}{2}\right) a - (m-1)\,g\,a\left(\frac{m-2}{2}\,a + \frac{a}{2}\right);$$

$$M = \frac{g\,a^2}{2}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right];$$

$$X_m^g = -\frac{g\,a^2}{2\,h}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \quad \ldots\ldots \quad 210.$$

Für den $m$-ten Stab der unteren Gurtung ift $F$ der Momentenpunkt und

$$M_1 = D_0\,m\,a - (m-1)\,g\,a\,\frac{m\,a}{2} = \frac{g\,a^2}{2}\,m\,(n-m);$$

$$Z_m^g = \frac{g\,a^2}{2\,h}\,m\,(n-m) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 211.$$

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an (Fig. 186*b*), fo ift

$$D_0 = D_1 = \frac{n\,g\,a}{2}.$$

Genau wie oben erhält man

$$X_m^g = -\frac{g\,a^2}{2\,h}\left[m\,(n-m+1) - \frac{n}{2}\right] \quad \text{und} \quad Z_m^g = \frac{g\,a^2}{2\,h}\,m\,(n-m)\,. \quad 212.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, fo dafs die erfte vom Auflagerpunkt nach der Mitte anfteigt, fo ergeben fich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weife, wie eben gezeigt, zu ermitteln find.

b) Die gröfsten Gurtungsfpannungen in Folge gleichmäfsig vertheilter Nutzlaft finden ftatt, wenn der ganze Träger belaftet ift. Nennt man die gleichmäfsig vertheilte Nutzlaft für die Längeneinheit $p$, fo ergeben fich offenbar für diefe Belaftung, die für den Knotenpunkt gleich $p\,a$ ift, genau diefelben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur $g$ durch $p$ zu erfetzen ift. Man erhält alfo für an der oberen Gurtung angreifende Laften (Fig. 186*a*)

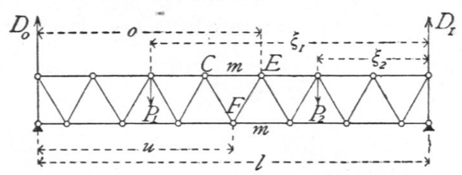
$$X_m^p = -\frac{p\,a^2}{2\,h}\left[(n+1)\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2\right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p\,a^2}{2\,h}\,m\,(n-m), \quad 213.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Laften (Fig. 186*b*)

$$X_m^p = -\frac{p\,a^2}{2\,h}\left[m\,(n-m+1) - \frac{n}{2}\right] \quad \text{und} \quad Z_m^p = \frac{p\,a^2}{2\,h}\,m\,(n-m)\ . \quad 214.$$

c) Für eine Belastung des Trägers durch Einzellasten $P_1$, $P_2$ (Fig. 187) sind in die allgemeinen Gleichungen 208 u. 209 die den einzelnen Stäben entsprechenden Momentenwerthe einzusetzen.

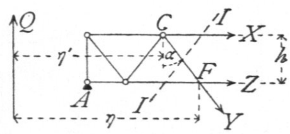
Fig. 187.



177. Berechnung d. Gitterstabs-spannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für eine beliebige Belastung sei $Q$ die Mittelkraft aller links vom Schnitte $II$ (Fig. 188) wirkenden äusseren Kräfte. Nennt man die Spannung der vom Schnitte getroffenen nach rechts fallenden Diagonale $Y$, so muss, weil die algebraische Summe der auf das Bruchstück wirkenden lothrechten Kräfte gleich Null ist, stattfinden:

Fig. 188.



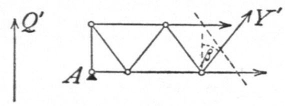
$$0 = Q - Y \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 215.$$

für eine nach rechts steigende Diagonale (Fig. 189) ist

$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 216.$$

α) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, den Auflagerdruck (Fig. 186*a*)

Fig. 189.



$$D_0 = D_1 = (n-1)\frac{g\,a}{2}.$$

Für den $m$-ten nach rechts fallenden Stab ist

$$Q_m = (n-1)\frac{g\,a}{2} - (m-1)\,g\,a = \frac{g\,a}{2}(n - 2\,m + 1),$$

sonach

$$Y_m^g = \frac{g\,a}{2\cos\alpha}(n - 2\,m + 1); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 217.$$

für den $m$-ten nach rechts steigenden Stab ist

$$Q'_m = \frac{g\,a}{2}(n - 2\,m + 1), \quad \text{daher} \quad Y'^g_m = -\frac{g\,a}{2\cos\beta}(n - 2\,m + 1) \quad . \quad 218.$$

Aus den Gleichungen 217 u. 218 für $Y^g_m$ und $Y'^g_m$ folgt leicht: Bei gleichmässig über den Träger vertheilter Belastung $g$ (oder $p$) auf die Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 186*b*), so ist für die $m$-te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g\,a}{2\cos\alpha}(n - 2\,m + 2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 219.$$

für die $m$-te rechts steigende Diagonale

$$Y' = -\frac{g\,a}{2\cos\beta}(n - 2\,m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 220.$$

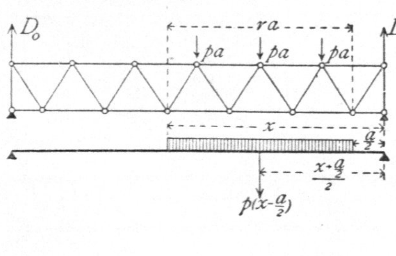
Das Gesetz, dass bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier giltig.

b) Um die ungünſtigſten Gitterſtabſpannungen, welche in Folge der Nutzlaſt entſtehen, zu ermitteln, erwäge man, daſs bei beliebiger Belaſtung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 215: $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$ und für rechts ſteigende Diagonalen nach Gleichung 216: $Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta}$ iſt. Der gröſste Werth von $Y$ findet demnach bei derjenigen Belaſtung ſtatt, bei welcher die Querkraft $Q$ ihren gröſsten Werth hat. Nach Art. 153 (S. 133) hat aber die Querkraft für einen Querſchnitt ihren gröſsten poſitiven Werth, wenn der Trägertheil rechts vom betrachteten Querſchnitte belaſtet, der Trägertheil links davon unbelaſtet iſt, ihren gröſsten negativen Werth bei der umgekehrten Belaſtung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den gröſsten Zug durch Nutzlaſt, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaſtet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelaſtet ſind; dagegen den gröſsten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaſtet, die übrigen unbelaſtet ſind. Da $Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta}$, ſo findet in den nach rechts ſteigenden Diagonalen der gröſste Druck ſtatt, wenn $Q'$ ſeinen gröſsten poſitiven Werth hat, wenn alſo nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte belaſtet ſind, der gröſste Zug dagegen, wenn $Q'$ ſeinen gröſsten negativen Werth hat, wenn alſo nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belaſtet ſind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgeſprochen werden: Jede Diagonale erleidet den gröſsten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwiſchen ihrem Fuſspunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieſer Fuſspunkt zeigt, belaſtet ſind; jede Diagonale erleidet den gröſsten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwiſchen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem dieſer Kopfpunkt hinweist. Dieſer Satz gilt allgemein, ob die Laſtpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen. Daraus folgt, daſs für die Diagonalen nicht die volle, ſondern die theilweiſe Belaſtung die ungünſtigſte iſt und daſs man demnach auch im Hochbau, falls einſeitige Belaſtung möglich iſt (in Verſammlungsräumen, Schulen etc.) bei der Berechnung der Träger auf dieſelbe Rückſicht nehmen muſs. Für jede Diagonale iſt eine andere ungünſtigſte Belaſtung einzuführen.

Nachdem nunmehr die ungünſtigſten Belaſtungsarten für die einzelnen Stäbe ermittelt ſind, handelt es ſich um die Aufſuchung der durch dieſelben erzeugten poſitiven, bezw. negativen Maxima von $Y$ und $Y'$. Greifen die Laſten an der oberen Gurtung an (Fig. 190), ſo iſt $Q$ genau eben ſo groſs, als wenn beim vollwandigen Träger die Einzellaſten $p\,a$ je auf die Längen $a$ gleichmäſsig vertheilt wären, d. h. als wenn die Laſt $p$ für die Längeneinheit von der Mitte des äuſserſten Feldes am rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt iſt, dem die Diagonale angehört. Denn im erſten Falle iſt, wenn $r$ belaſtete Knotenpunkte vorhanden ſind,

Fig. 190.




$$D_0 = \frac{r\,a\,p}{l}\left(\frac{r\,a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{r\,p\,a^2}{2\,l}\,(r+1)\,,$$

und da $x = r\,a + \frac{a}{2} = a\left(r + \frac{1}{2}\right)$, alſo $x + \frac{a}{2} = a\,(r+1)$ iſt, ſo wird

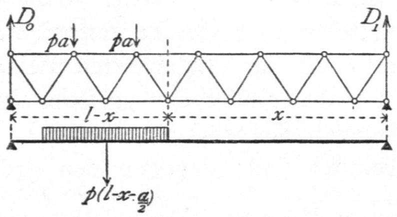
$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2}\right) \frac{r p a}{2 l} = \frac{p}{2 l} \left(x + \frac{a}{2}\right) \left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2 l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Derſelbe Werth ergiebt ſich für den vollwandigen Träger in Fig. 190, nämlich

$$D_0 = \frac{p}{2 l} \left(x - \frac{a}{2}\right) \left(x + \frac{a}{2}\right).$$

Es gilt dies allgemein, falls die den Auflagern zunächſt liegenden Knotenpunkte der mit der Nutzlaſt belaſteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Fig. 191.




Nun iſt für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belaſtung den gröſsten Zug, bezw. gröſsten Druck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, daher nach Gleichung 215

$$Y_{max} = \frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad 221.$$

In gleicher Weiſe ergiebt ſich nach Fig. 191

$$D_0 = \frac{p\left(l - x - \frac{a}{2}\right)}{l} \left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{p}{2 l} \left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right];$$

$$Q_{x\,min} = \frac{p}{2 l} \left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] - p \left(l - \frac{a}{2} - x\right) = -\frac{p}{2 l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

und

$$Y_{min} = -\frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 222.$$

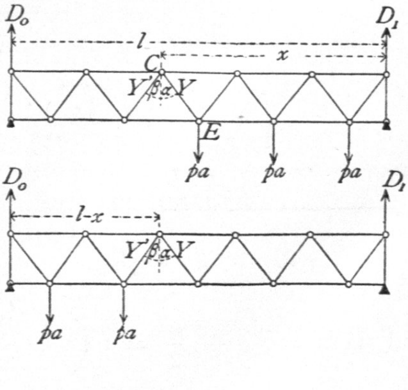
Dem entſprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta} = -\frac{p}{2 l \cos \beta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 223.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2 l \cos \beta} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 224.$$

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an (Fig. 192), ſo iſt (wenn mit ganz geringem Fehler die Belaſtung der beiden den Auflagern zunächſt liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit $p\,a$ eingeführt wird) $Q_{max}$, bezw. $Q_{min}$ eben ſo groſs, wie bei einem vollwandigen Träger, bei welchem die Laſt $p$ für die Längeneinheit vom rechten, bezw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vorgerückt iſt, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis iſt in gleicher Weiſe, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächſt liegenden Knotenpunkte der mit Nutzlaſt belaſteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt ſind. Demnach iſt

Fig. 192.




$$Q_{max} = \frac{p\,x^2}{2\,l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p\,(l - x)^2}{2\,l}.$$

$x$ bedeutet in dieſen Gleichungen den Abſtand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Man erhält

$$Y_{max} = \frac{p\,x^2}{2\,l\cos\alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p\,(l-x)^2}{2\,l\cos\alpha}, \quad \ldots \quad 225.$$

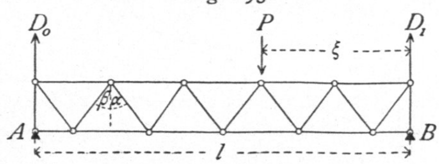
$$Y'_{min} = -\frac{p\,x^2}{2\,l\cos\beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p\,(l-x)^2}{2\,l\cos\beta} \quad \ldots \quad 226.$$

Die zusammengehörigen Werthe von $Y$ und $Y'$ beziehen sich auf zwei Diagonalen, welche demselben Felde der unteren Gurtung angehören.

𝔠) Erfährt der Träger eine volle Belastung $p$ für die Längeneinheit, so sind die unter 𝔞 für Eigengewichtsbelastung gefundenen Werthe auch für diesen Fall giltig, wenn statt des dortigen $g$ die Gröfse $p$ eingeführt wird.

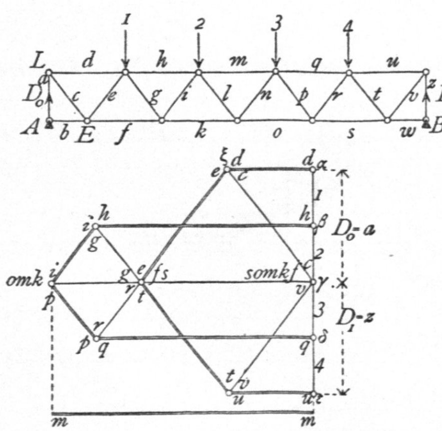
𝔡) Wird endlich der Träger durch Einzellasten beansprucht (Fig. 193), so erzeugt die Last $P$ im Abstande $\xi$ von $B$ den Stützendruck $D_0 = \frac{P\,\xi}{l}$. In sämmtlichen rechts fallenden Diagonalen links vom Lastpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos\alpha} = \frac{P\,\xi}{l\cos\alpha}$; in sämmtlichen rechts steigenden Diagonalen links vom Lastpunkte ist $Y' = -\frac{P\,\xi}{l\cos\beta}$. Eben so ist für alle Querschnitte rechts vom Lastpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P\,(l-\xi)}{l}$, mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieser Strecke $Y_1 = -\frac{P\,(l-\xi)}{l\cos\alpha}$, für die nach rechts steigenden Diagonalen dieser Strecke $Y_1' = \frac{P\,(l-\xi)}{l\cos\beta}$. Daraus folgt die Regel: Die nach dem Lastpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demselben steigenden Diagonalen werden gedrückt.

Fig. 193.




γ) Graphische Ermittelung der Spannungen. Setzt man zunächst eine gleichmäfsig vertheilte Belastung (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlast) voraus, so macht es für das Verfahren keinen Unterschied, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 194) die Belastung $g\,a$, bezw. $p\,a$ wirkt, so empfiehlt sich für die Ermittelung der Spannungen die Vieleckmethode, weil dieselbe sämmtliche Stabspannungen in einem Linienzuge giebt. 178. Graphische Ermittelung der Spannungen.

Fig. 194.




Nachdem $D_0$ und $D_1$ auf bekannte Art gefunden sind, trägt man alle äufseren Kräfte *1*, *2*, *3*, *4*, $D_1$ und $D_0$ in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander. Es sei $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma\delta = 3$, $\delta\varepsilon = 4$; nun trägt man an $\varepsilon$ (den Endpunkt von *4*) $D_1 = \varepsilon\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$. Damit schliefst sich das Kraftpolygon der äufseren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, d. h. von $A$ aus. In $A$ wirken $D_0$, $a$ und $b$; die Zerlegung von $D_0$ in die beiden Componenten $a$ und $b$ ergiebt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte $L$ wirken jetzt $a$, $c$ und $d$. Bei der Zerlegung von $a$ ($= \gamma\,\alpha$) ist zu beachten, dafs die Parallele zum Randstabe $d$ durch den

Punkt im Kraftpolygon gehen mufs, der zwifchen $D_0$ und *1* liegt, d. h. durch $\alpha$. Man erhält $\alpha\,\xi = d$ und $\xi\,\gamma = c$. (Nach Art. 174, S. 151 ift $d$ Druck und $c$ Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte $E$ über, fo wirken dafelbft $(b = 0)$ $c$, $e$ und $f$; bekannt ift $c = \gamma\,\xi$. Demnach find $e$ und $f$ durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallele zum Randftabe $f$ durch den Punkt $\gamma$ im Kraftpolygon gehen mufs, welcher zwifchen $D_1$ und $D_0$ liegt, da der Randftab $f$ im Syftem fich zwifchen den Kräften $D_0$ und $D_1$ befindet. Man erhält leicht $e$ und $f$. (Da $c$, wie oben gefunden, Zug ift, erhält $e$ Druck, $f$ Zug.) Geht man fo weiter, fo ergiebt fich der in Fig. 194 gezeichnete Kräfteplan. In demfelben find die Druckfpannungen durch doppelte, die Zugfpannungen durch einfache Linien bezeichnet; $m$ ift Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugfpannungen zufammen und ift desfhalb befonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabfpannungen find ftets durch diejenigen Buchftaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im Syftem führen. Die Spannungen $b$, $l$, $n$, $w$ werden gleich Null.

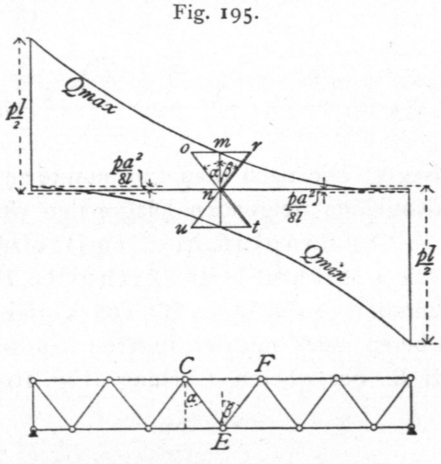
Um die gröfsten in den Gitterftäben durch die Nutzlaften erzeugten Zug-, bezw. Druckfpannungen zu beftimmen, beachte man, dafs $Y_{max} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$, $Y_{min} = \frac{Q_{min}}{\cos\alpha}$, $Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos\beta}$ und $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta}$ ift.

Wenn die Laften $p\,a$ an der oberen Gurtung angreifen oder allgemein, wenn die den Auflagern zunächft gelegenen Knotenpunkte der belafteten Gurtung von diefen um eine ganze Feldweite $a$ abliegen, fo ift

$$Q_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Die graphifche Darftellung von $Q_{max}$ ergiebt eine Parabel (Fig. 195*a*).

Fig. 195.




Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{p\,a^2}{8\,l}$; für $x = l$ wird $Q_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{p\,l}{2} - \frac{p\,a^2}{8\,l}$. $Q_{max}$ wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2\,x$, d. h. für $x = 0$. Danach ift die Curve in Fig. 195*a* conftruirt.

Hier find diejenigen Ordinaten der Curve als Werthe von $Q_{max}$ einzuführen, welche den Fufspunkten der betreffenden Diagonalen entfprechen. Für die Diagonale $CE$ ergiebt fich $m\,n$ als Werth von $Q_{max}$. Die durch $n$ parallel zur Diagonale $CE$ gezogene Linie $n\,o$ giebt den Werth von $Y = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$; denn es ift $\overline{n\,o} = \frac{\overline{m\,n}}{\cos\alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos\alpha}$.

Nach Gleichung 223 ift $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos\beta}$, alfo $n\,r$ der gröfste Druck in der rechts fteigenden Diagonale $EF$.

Es ift ferner

$$Q_{min} = -\frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Wird die Differenz $l - x = \xi$ gefetzt, fo ergiebt fich, dafs die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2\,l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ derjenigen für $Q_{max}$ congruent ift.

Für $\xi = 0$ ift $Q_{min} = +\frac{p\,a^2}{8\,l}$; für $\xi = l$ ift $Q_{min} = -\frac{p}{2\,l}\left[l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = -\frac{p\,l}{2} + \frac{p\,a^2}{8\,l}$. Man erhält die in Fig. 195*a* gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale $CE$ das Minimum $n\,t$, für die rechts fteigende Diagonale das Maximum $n\,u$ eingezeichnet ift.

Greifen die Laſten an der unteren Gurtung an oder allgemein, ſind die an der mobil belaſteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächſt den Auflagern von dieſen um je eine halbe Feldweite entfernt, ſo ergiebt die Verzeichnung der Curven für $Q_{max}$ und $Q_{min}$ entſprechend den Gleichungen in Art. 177 (S. 160) unten ſtehende Parabeln (Fig. 196 *a*).

Man erhält genau wie oben: der Maximalzug in *CE* iſt *cd*; der Maximaldruck in *CF* iſt *cf*; der Maximaldruck in *CE* iſt *cv*; der Maximalzug in *CF* iſt *cw*.

Fig. 196.

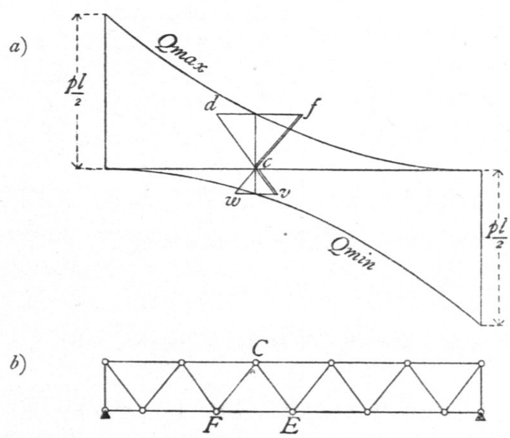
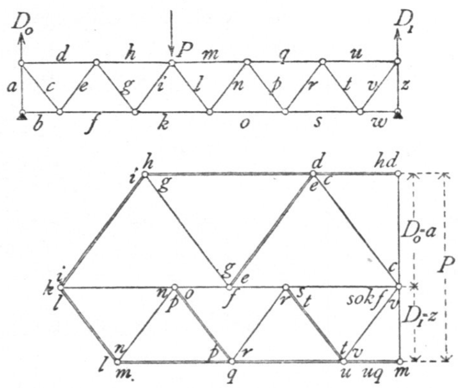



Fig. 197.




Für eine Einzellaſt wird die Ermittelung der Spannungen bequem mittels des *Cremona*'ſchen Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 197 geſchehen iſt; dieſelbe iſt ohne Weiteres verſtändlich.

δ) Art der Beanſpruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 176 (S. 156) werden die oberen Gurtungsſtäbe ſtets gedrückt, die unteren ſtets gezogen. Die Diagonalen erhalten verſchiedene Beanſpruchungen. Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu ſteigenden Diagonalen Druck; durch die ungünſtigſte Nutzlaſt erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen ſowohl Zug, wie Druck. Wenn der gröſste Druck, der in einer Diagonalen durch Nutzlaſt entſteht, kleiner iſt, als der Zug durch Eigengewicht, ſo erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager iſt der Zug in Folge des Eigengewichtes meiſtens viel gröſser, als der gröſste Druck durch Nutzlaſt, und es werden daher dieſe Diagonalen meiſtens nur gezogen. Eben ſo ergiebt ſich, daſs die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu anſteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen im mittleren Theile des Trägers werden dagegen ſowohl gezogen, wie gedrückt.

179.
Art
der Stab-
beanſpruchung.

### 3) Parallelträger mit Diagonalen und Verticalen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belaſtung wird genau ſo, wie in Art. 176 (S. 156), wenn *M* das Biegungsmoment für den zu einem oberen Gurtungsſtabe gehörigen Momentenpunkt, *M'* das Biegungsmoment für den zu einem unteren Gurtungsſtabe gehörigen Momentenpunkt bezeichnet,

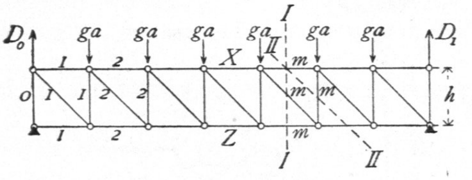
180.
Berechnung
d. Gurtungs-
ſpannungen.

$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h}.$$

Auch hier findet alſo die gröſste Beanſpruchung der Gurtungsſtäbe bei voller Belaſtung des Trägers ſtatt.

Für die Belaſtung durch Eigengewicht, bezw. volle gleichmäſsig vertheilte Nutzlaſt (Fig. 198) iſt die Spannung in den Gurtungsſtäben davon unabhängig, ob die Laſten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen.

Fig. 198.



Für den $m$-ten Stab der oberen, bezw. der unteren Gurtung erhält man die durch das Eigengewicht $g$ für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g\,a^2\,m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g\,a^2}{2\,h}(m-1)(n-m+1) \quad . \quad 227.$$

und die durch volle Nutzlaſt $p$ für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p\,a^2\,m\,(n-m)}{2\,h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p\,a^2}{2\,h}(m-1)(n-m+1) \quad . \quad 228.$$

$X_p$ und $Z_p$ ſind zugleich die gröſsten Spannungen, die durch Nutzlaſt hervorgebracht werden.

181. Berechnung d. Gitterſtabsſpannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterſtäben. Für das Bruchſtück in Fig. 199 ſei bei beliebiger Belaſtung die Querkraft $Q$; alsdann iſt für die Spannung in der Diagonalen

$$Y \cos\alpha = Q, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 229.$$

Iſt in Fig. 200 die Querkraft für das Bruchſtück $Q'$, ſo iſt die Spannung in der Verticalen

$$V = -Q' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 230.$$

Für die Diagonalen iſt es, da der Schnitt lothrecht gelegt werden kann, gleichgiltig, ob die Laſt in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für die Verticalen dagegen ergiebt ſich, da der Schnitt bei dieſen ſchräg gelegt wird, ein anderes $Q'$, wenn die Laſt oben, als wenn ſie unten liegt.

Fig. 199.

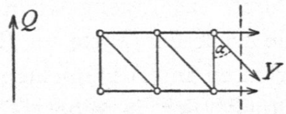
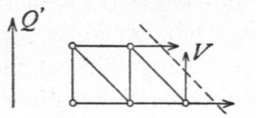


Fig. 200.



α) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 198) in der $m$-ten Diagonale (Schnitt $I\,I$) die Querkraft

$$Q_m = D_0 - (m-1)\,g\,a = \frac{g\,a}{2}(n - 2\,m + 1) \quad \text{und}$$

$$Y_m^g = \frac{Q_m}{\cos\alpha} = \frac{g\,a}{2\cos\alpha}(n - 2\,m + 1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 231.$$

Denſelben Ausdruck fanden wir in Art. 177 (S. 158), Gleichung 217, für die beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort gefundenen Ergebniſſe gelten demnach auch hier: Die nach der Mitte fallenden Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte ſteigenden Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittelung der Spannungen in den Verticalen iſt zu unterſcheiden, ob ſich die Laſtpunkte oben oder unten befinden. Im erſteren Falle (Fig. 198) iſt

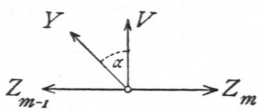
$$V_m = - Q_m = - \frac{g\,a}{2}\,(n - 2\,m + 1), \quad \ldots \ldots \quad 232.$$

im zweiten Falle

$$V'_m = - Q'_m = - \frac{g\,a}{2}\,(n - 1 - 2\,m) \quad \ldots \ldots \quad 233.$$

Die Art der Beanſpruchung ergiebt ſich durch Betrachtung eines beliebigen nicht belaſteten Knotenpunktes (Fig. 201). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn die Laſten an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche ſich an ihm treffen. Die algebraiſche Summe aller lothrechten Seitenkräfte muſs Null ſein, d. h. es muſs $0 = Y \cos \alpha + V$, alſo $V = - Y \cos \alpha$ ſein. Hieraus folgt der Satz: Die beiden Gitterſtabsſpannungen am Knotenpunkte der nicht belaſteten Gurtung haben entgegengeſetzte Beanſpruchung; die Belaſtung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in derjenigen Verticalen, welche mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belaſteten Gurtung zuſammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 201.




𝔟) Für die ungünſtigſte Beanſpruchung der Gitterſtäbe, welche durch die Nutzlaſt hervorgebracht wird, ergiebt ſich bezüglich der Diagonalen durch dieſelbe Beweisführung, wie in Art. 177 (S. 158), die gleiche Regel wie dort. Für die Verticalen ergiebt ſich zugleich aus dem Schluſsſatze unter 𝔞: Jede Verticale erhält ihren gröſsten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belaſtung, bei welcher die mit ihr an einem unbelaſteten Knotenpunkte zuſammentreffende Diagonale ihren gröſsten Zug (bezw. Druck) erhält.

Fig. 202.

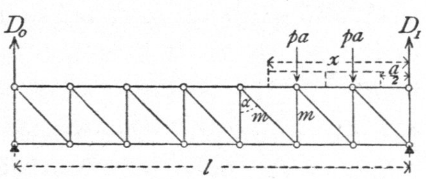
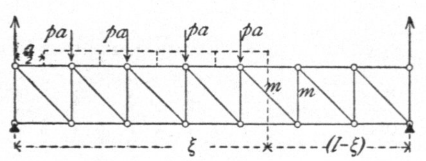



Fig. 203




Wirken die Laſten an der oberen Gurtung, ſo ergeben ſich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittelung von $Q$ die Knotenpunktsbelaſtungen durch gleichförmig vertheilte Laſten erſetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von $Y_m$ und das Minimum von $V_m$ ergiebt ſich nach Fig. 202 der Auflagerdruck

$$D_0 = \frac{p\left(x - \frac{a}{2}\right)}{2\,l}\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = Q_m.$$

Sonach

$$\underset{max}{Y_m} = \frac{p}{2\,l \cos \alpha}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad \underset{min}{V_m} = - \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad 234.$$

Für $Y_{min}$ und $V_{max}$ findet man nach Fig. 203

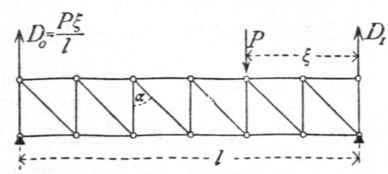
$$Q = - \frac{p}{2\,l}\left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right];$$

$$\underset{min}{Y_m} = - \frac{p}{2\,l \cos \alpha}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad \text{und} \quad \underset{max}{V_m} = + \frac{p}{2\,l}\left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad 235.$$

$x$ bedeutet den Abſtand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Verticalen die Mitte des Feldes, zu welchem diejenige Diagonale gehört, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht belafteten Gurtung zufammentrifft (hier alfo der unteren Gurtung).

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an, fo ftimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Verticalen, wenn man beachtet, dafs $x$ den foeben erwähnten Werth hat, dafs fich alfo $x$ hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche fich mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung fchneidet; ftatt $V_m$ ift alfo dann $V_{m-1}$ zu fetzen.

Fig. 204.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellaft belaftet wird (Fig. 204), fo erhält jede Diagonale zwifchen dem Laftpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen fteigen, einen Zug

$$Y = \frac{P\,\xi}{l \cos \alpha}, \qquad 236.$$

jede Verticale auf diefer Seite der Laft einen Druck

$$V = -\frac{P\,\xi}{l}. \qquad 237.$$

Jede Diagonale zwifchen dem Laftpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

$$Y = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}, \qquad 238.$$

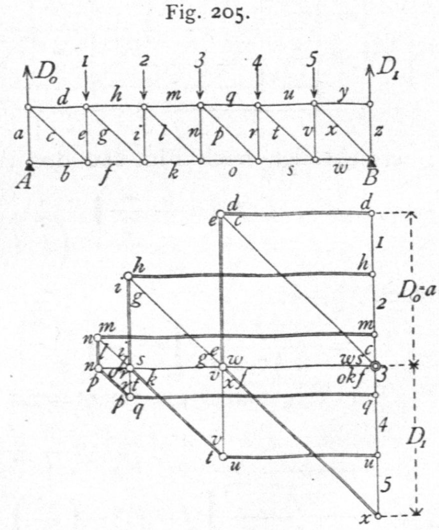
jede Verticale auf diefer Seite einen Zug

$$V = \frac{P(l-\xi)}{l}. \qquad 239.$$

182. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

γ) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Der Träger fei durch eine gleichmäfsig vertheilte Laft (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlaft) belaftet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Laft $g\,a$, bezw. $p\,a$. Hiernach ift in Fig. 205 der Kräfteplan nach der *Cremona*-fchen Methode gezeichnet, worüber weitere Bemerkungen unnöthig find.

Fig. 205.



Wenn die Zeichnung für eine Belaftung $g$ auf die Längeneinheit conftruirt ift, fo geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanfpruchungen für die Belaftung $p$ auf die Längeneinheit, falls diefelben nur auf einem Mafsftabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge $p\,a$ bedeutet, welche vorher $g\,a$ bedeutet hatte.

Sind die Maximalfpannungen in den Gitterftäben, welche durch Verkehrslaft erzeugt werden, zu beftimmen, fo ergiebt die Vergleichung der in Art. 180 (S. 164) für $Y_{\substack{max\\min}}$ und $V_{\substack{max\\min}}$ gefundenen Werthe mit den in Art. 177 (S. 158) für den Parallelträger mit Netzwerk gefundenen Werthen für $Y$ und $Q$ die genaue Uebereinftimmung beider, falls $x$ den in Art. 180 (S. 165) angegebenen Werth hat.

Fig. 206.

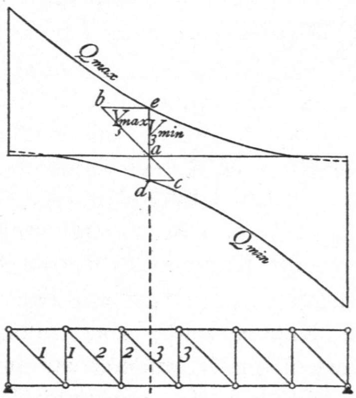
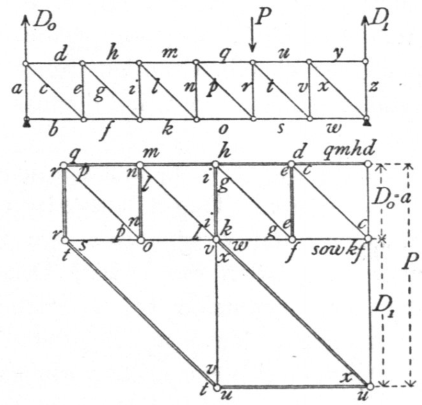



Fig. 207.




Die oben stehende Curve (Fig. 206) ergiebt demnach die Werthe für $Q_{max}$, so wie $Q_{min}$ und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für $Y$ und $V$. Der für $V_{3\,min}$ angegebene Werth entspricht einer Belastung der oberen Gurtung.

Sämmtliche durch eine Einzellast erzeugten Spannungen können leicht mittels eines *Cremona*'schen Kräfteplanes (Fig. 207) ermittelt werden.

### 4) Parallelträger mit nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen.

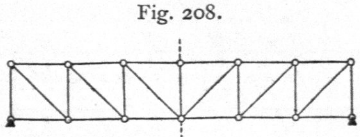
Im vorhergehenden Kapitel ist gezeigt worden, dass die gedrückten Stäbe mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken unter Umständen wesentlich stärker construirt werden müssen, als die einfache Druckbeanspruchung erfordert. Bei der Bestimmung der Querschnittsgrösse sind vielfach Zuschläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig sind. Man wird desshalb bei gewissen Materialien, besonders bei Schmiedeeisen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichst beschränken und statt deren, wenn möglich, gezogene anordnen. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es sich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene anzuordnen. Bei manchen Materialien hingegen, insbesondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichst geringe Verwendung von Zugstäben und eine möglichst ausgedehnte Verwendung von Druckstäben wünschenswerth. 183. Grundsatz.

Bei den Trägern mit Fachwerk ist die Anordnung von nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

Wir betrachten zunächst die Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

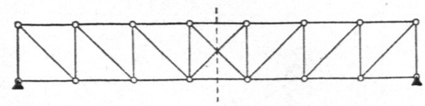
Wie in Art. 180 (S. 164) nachgewiesen ist, erzeugt das Eigengewicht, so wie auch eine gleichmässige Belastung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte steigenden Diagonalen Druck. Soll also durch die angegebene Belastung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigste ist, in den Diagonalen nur Zug entstehen, so ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, construirt also den Träger genau symmetrisch zur Mitte (Fig. 208). Ist die Felderzahl ungerade, so erhalten die Diagonalen im Mittelfelde bei dieser Be- 184. Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Fig. 208.



laſtung den Zug und Druck Null (Fig. 209). Bei dieſer Trägerform erhalten je zwei ſymmetriſch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieſelben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und ſind demnach leicht zu übertragen.

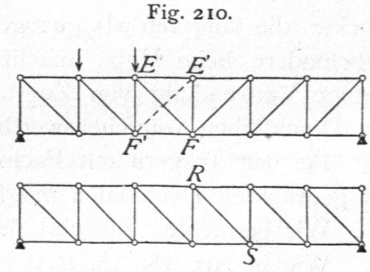
Fig. 209.



Die in Fig. 208 u. 209 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belaſtungen unter Umſtänden Druckbeanſpruchungen, und zwar findet, wie in Art. 177 (S. 158) u. 180 (S. 164) ermittelt, in einer Diagonalen der gröſste Druck ſtatt, wenn die Knotenpunkte vom Kopfpunkte der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belaſtet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelaſtet ſind. Durch das ſtets noch vorhandene Eigengewicht findet andererſeits in den Diagonalen eine beſtändige Zugſpannung ſtatt, welche die erwähnte Druckbeanſpruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides abſolut genommen) die Zugſpannung durch das Eigengewicht gröſser iſt, als die gröſstmögliche Druckſpannung in Folge der Verkehrslaſt, werden ſtets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünſtigſtenfalls der Druck durch Nutzlaſt beträgt (wiederum beides abſolut genommen), wird eine Druckbeanſpruchung eintreten, die zu vermeiden iſt. Man bringt deſshalb in dem betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer ſolchen Richtung an, daſs die Belaſtung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugen würde, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muſs demnach ſo gerichtet ſein, daſs die erwähnte Nutzlaſt die Knotenpunkte vom Fuſspunkte dieſer Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belaſtet, nach welchem dieſer Fuſspunkt hinweist; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine ſog. Gegendiagonale (in Fig. 210 die punktirte Diagonale $E' F'$).

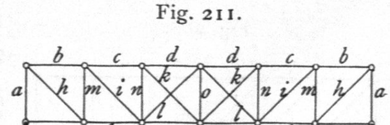
Damit dieſelbe aber auch wirkſam ſei, erhält die Hauptdiagonale $EF$ einen derartigen Querſchnitt, daſs ſie bei Druckſpannungen ausbiegt, daſs ſie alſo in dieſem Falle als nicht vorhanden angeſehen werden kann.

Fig. 210.




Solche Gegendiagonalen ſind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen unter Umſtänden Druckſpannungen erhalten. In den Feldern nahe am Auflager iſt die Zugſpannung durch das Eigengewicht meiſtens groſs, die Druckſpannung durch Nutzlaſt meiſtens klein, ſo daſs in dieſen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig ſind; in den mittleren dagegen ſind ſie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen ſind dann genau ſo zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. $E' F'$, befindet ſich genau in derſelben Lage, wie die ſymmetriſch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale im Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, alſo hier wie $RS$ (Fig. 210). Die oben gefundenen Spannungen ſind daher hier ſofort zu verwerthen. Der Träger würde demnach

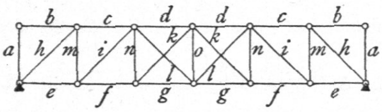
Fig. 211.



die in Fig. 211 dargeftellte Form erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

Bei der Conftruction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen ift nach gleichem Grundfatze zu verfahren. Zunächft find beiderfeits nur nach der Mitte anfteigende Diagonalen zu verwenden, damit man für Belaftung durch Eigengewicht, bezw. Gefammtlaft nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen unter Umftänden Zugfpannung erhalten würden, find wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 212). Die Verbindung in den Knotenpunkten ift fo anzuordnen, dafs die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können. 185. Träger mit nur gedrückten Diagonalen.

Fig. 212.




Die Beanfpruchung der Verticalen ergiebt fich nach Art. 180 (S. 164) ftets der Beanfpruchung derjenigen Diagonalen entgegengefetzt, welche an einem unbelafteten Knotenpunkte mit der Verticalen zufammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, fo werden alle Verticalen nur gedrückt (Fig. 211); werden alle Diagonalen nur gedrückt, fo werden alle Verticalen nur gezogen (Fig. 212). Im zweiten Falle werden diefelben meiftens aus Schmiedeeifen hergeftellt, während die Diagonalen aus Holz beftehen.

Beifpiel. Ein als Parallelträger mit Diagonalen und Verticalen (nach Art der Fig. 208) hergeftellter Unterzug hat folgende Abmeffungen und Belaftungen: Stützweite $l = 12$ m; Höhe zwifchen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 1{,}5$ m; Anzahl der Felder $n = 8$; Feldweite $a = 1{,}5$ m. Die Diagonalen fallen jederfeits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen find nicht vorhanden. Die Belaftung durch das Eigengewicht für das laufende Meter ift $g = 1800$ kg, diejenige durch Nutzlaft $p = 2400$ kg; mithin find die Knotenpunktslaften bezw. $g\,a = 2700$ kg und $p\,a = 3600$ kg. Die Laftpunkte liegen in der oberen Gurtung. Es find die durch diefe Belaftungen entftehenden Spannungen zu berechnen. 186. Beifpiel.

α) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 227 u. 228 find für den $m$-ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = -\frac{1800 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 1{,}5}\, m\,(8 - m) = -1350\, m\,(8 - m)$$

und

$$X_p = -\frac{2400 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 1{,}5}\, m\,(8 - m) = -1800\, m\,(8 - m).$$

Für den $m$-ten Stab der unteren Gurtung find nach Gleichung 227 u. 228

$$Z_g = \frac{1800 \cdot 1{,}5^2}{2 \cdot 1{,}5}(m - 1)(9 - m) = 1350\,(m - 1)(9 - m) \quad \text{und} \quad Z_p = 1800\,(m - 1)(9 - m).$$

Man erhält aus vorftehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für $m$ die Werthe 1, 2, 3, 4 einführt, die Gurtungsfpannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäben find den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe $X_g$ und $X_p$ ergiebt die Maximalfpannungen in der oberen, die Addition der Werthe $Z_g$ und $Z_p$ die Maximalfpannungen in der unteren Gurtung. Die Ergebniffe find in umftehender Tabelle angegeben.

β) Spannungen in den Diagonalen. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 231 ift für die $m$-te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos\alpha = \cos 45^0 = 0{,}707$ ift,

$$Y_g = \frac{1800 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 0{,}707}(9 - 2\,m) = 1910\,(9 - 2\,m).$$

Durch Einfetzung der Zahlenwerthe $m = 1, 2, 3, 4$ erhält man die Spannungen $Y_g$.

b) Durch die Nutzlaft. Die gröfsten Zug- und Druckfpannungen, welche in den Diagonalen hervorgerufen werden, find nach Gleichung 234 u. 235

$$Y_{p\,max} = \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0{,}707}\left(x^2 - 0{,}75^2\right) = 141{,}4\left(x^2 - 0{,}56\right)$$

und

$$Y_{p\,min} = -\frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0{,}707}\left[(l - x)^2 - 0{,}75^2\right] = -141{,}4\left[(l - x)^2 - 0{,}56\right].$$

Man erhält für $m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$x = 11{,}25 \quad 9{,}75 \quad 8{,}25 \quad 6{,}75\ m$

$(l - x) = 0{,}75 \quad 2{,}25 \quad 3{,}75 \quad 5{,}25\ m$

und für $Y_{p\,max}$, bezw. $Y_{p\,min}$ die Werthe, welche in der unten ftehenden Tabelle folgen.

γ) Spannungen in den Verticalen. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 232 ift, da die Laftpunkte oben liegen,

$$V_g = - \frac{1800 \cdot 1{,}5}{2} (9 - 2\,m) = - 1350\,(9 - 2\,m).$$

b) Durch die Nutzlaft. Die gröfsten Druck-, bezw. Zugfpannungen ergeben fich aus den Gleichungen 234 u. 235 zu

$$V_{p\,min} = - \frac{2400}{2 \cdot 12} \left(x^2 - 0{,}75^2\right) = - 100 \left(x^2 - 0{,}56\right) \quad \text{und} \quad V_{p\,max} = 100 \left[(l - x)^2 - 0{,}56\right].$$

Für $x$ find diefelben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der unten ftehenden Tabelle.

In der Endverticalen ift die Druckfpannung ftets gleich dem Auflagerdruck, alfo hier, da die Belaftung des Endknotenpunktes mit $\frac{g\,a}{2}$, bezw. $\frac{p\,a}{2}$ hinzukommt,

$$\underset{0}{V_g} = - (3{,}5 + 0{,}5)\,g\,a = - 4\,g\,a = - 4 \cdot 1800 \cdot 1{,}5 = - 10800^{\text{kg}},$$

$$\underset{0}{V_{p\,min}} = - 4\,p\,a = - 4 \cdot 2400 \cdot 1{,}5 = - 14400^{\text{kg}}.$$

Zug kann in diefer Verticalen nicht entftehen.

Auf die Mittelverticale find die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an ihrem unteren Endpunkte fich die zwei Diagonalen der anftofsenden Felder treffen, alfo der fchräge Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwickelung der Formeln vorgefehen war. Da am oberen Endpunkt der Verticalen keine Diagonale anfetzt, fo kann diefelbe nur folche lothrechte Kräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte unmittelbar angreifen. Wir erhalten alfo die Spannungen in derfelben genau fo grofs, wie die Knotenpunktsbelaftungen. Diefe Werthe find in die Tabelle eingefetzt worden.

Tabelle der Stabfpannungen.

| Theil der Conftruction | $m$ = | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Obere Gurtung | $X_g$ = | | −9450 | −16200 | −20250 | −21600 | −21600 | −20250 | −16200 | −9450 |
| | $X_p$ = | | −12600 | −21600 | −27000 | −28800 | −28800 | −27000 | −21600 | −12600 |
| Untere Gurtung | $Z_g$ = | | 0 | 9450 | 16200 | 20250 | 20250 | 16200 | 9450 | 0 |
| | $Z_p$ = | | 0 | 12600 | 21600 | 27000 | 27000 | 21600 | 12600 | 0 |
| Diagonalen | $Y_g$ = | | 13370 | 9550 | 5730 | 1910 | 1910 | 5730 | 9550 | 13370 |
| | $Y_{p\,max}$ = | | 17820 | 13362 | 9545 | 6363 | 6363 | 9545 | 13362 | 17820 |
| | $Y_{p\,min}$ = | | 0 | −636 | −1910 | −3818 | −3818 | −1910 | −636 | 0 |
| Verticalen | $V_g$ = | −10800 | −9450 | −6750 | −4050 | −2700 | −4050 | −6750 | −9450 | −10800 |
| | $V_{p\,min}$ = | −14400 | −12600 | −9450 | −6750 | −3600 | −6750 | −9450 | −12600 | −14400 |
| | $V_{p\,max}$ = | 0 | 0 | 4500 | 1350 | 0 | 1350 | 450 | 0 | 0 |

Kilogramm

Zur Beftimmung der Querfchnitte nach den Gleichungen 36 u. 37 (fiehe Art. 77, S. 51) dient die Zufammenftellung der nachftehenden Tabelle.

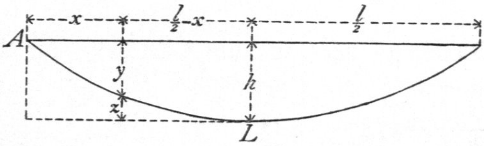
| Obere Gurtung: Druck | | | Untere Gurtung: Zug | | | Diagonalen: Ueberwiegender Zug | | | | Verticalen: Ueberwiegender Druck | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ |
| 1 u. 8 | −9450 | −12600 | 1 u. 8 | 0 | 0 | 1 u. 8 | 13370 | 17820 | 0 | 0 u. 8 | −10800 | −14400 | 0 |
| 2 u. 7 | −16200 | −21600 | 2 u. 7 | 9450 | 12600 | 2 u. 7 | 9550 | 13362 | −636 | 1 u. 7 | −9450 | −12600 | 0 |
| 3 u. 6 | −20250 | −27000 | 3 u. 6 | 16200 | 21600 | 3 u. 6 | 5730 | 9545 | −1910 | 2 u. 6 | −6750 | −9450 | 450 |
| 4 u. 5 | −21600 | −28800 | 4 u. 5 | 20250 | 27000 | 4 u. 5 | 1910 | 6363 | −3818 | 3 u. 5 | −4050 | −6750 | 1350 |
| | | | | | | | | | | 4 | −2700 | −3600 | 0 |
| Kilogramm | | | Kilogramm | | | Kilogramm | | | | Kilogramm | | | |

## 5) Parabelträger.

Parabelträger ſind Träger, bei denen die Knotenpunkte einer oder beider Gurtungen auf Parabeln liegen. Es ſollen hier nur ſolche Parabelträger behandelt werden, bei welchen die obere Gurtung eine gerade Linie, die untere Gurtung ein der Parabel eingeſchriebenes Vieleck iſt (Fig. 213). Bezeichnet man die Pfeilhöhe der Parabel mit $h$, die Trägerſtützweite mit $l$, und legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in das linke Auflager (nach $A$), ſo iſt, wenn $L$ der Scheitel der Parabel iſt,

187. Berechnung der Spannungen:

Fig. 213.




$$\frac{z}{h} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}, \quad \text{woraus} \quad z = h\left(1 - \frac{2\,x}{l}\right)^2, \quad \text{ferner} \quad y = (h - z), \quad \text{ſonach}$$

$$y = \frac{4\,h}{l^2}\,(l\,x - x^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 240.$$

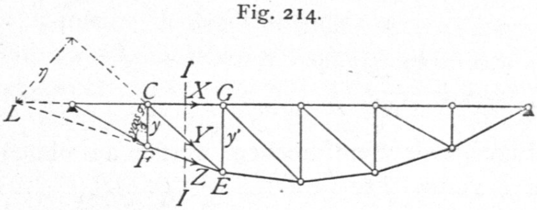
Die Spannungen in den ſämmtlichen Stäben können nun mittels der in Art. 168 bis 175 (S. 149 bis 156) vorgeführten Verfahren leicht ermittelt werden. Dabei macht es keine Schwierigkeit, die Berechnung auch für den Fall durchzuführen, daſs die obere Gurtung gekrümmt, die untere eine gerade Linie iſt.

188. in den Gurtungen;

α) Spannungen in den Gurtungen. Für einen Stab $F\,E$ der unteren Gurtung (Fig. 214) iſt $C$ der conjugirte Punkt; wird mit $M$ das Moment der an der einen Seite des Schnittes $I\,I$ wirkenden äuſseren Kräfte bezeichnet, ſo ergiebt ſich

$$0 = M - Z\,y\cos\sigma, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{M}{y\cos\sigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 241.$$

Fig. 214.




Für einen Stab $C\,G$ der oberen Gurtung iſt $E$ der conjugirte Punkt, und wenn das Moment der äuſseren Kräfte für dieſen Punkt mit $M'$ bezeichnet wird,

$$0 = M' + X\,y', \text{ woraus } X = -\frac{M'}{y'} \quad 242.$$

Wie beim Parallelträger in Art. 176 (S. 156) ergiebt ſich auch hier, daſs die oberen Gurtungsſtäbe ſtets gedrückt, die unteren Gurtungsſtäbe ſtets gezogen werden, ſo wie daſs alle Gurtungsſtäbe bei voller Belaſtung am meiſten beanſprucht werden.

Nunmehr können die durch Eigengewicht, bezw. durch gleichmäſsig über den ganzen Träger vertheilte Nutzlaſt erzeugten Gurtungsſpannungen ermittelt werden. Das erſtere ſei $g$, die letztere $p$ für die Längeneinheit; beide Belaſtungsarten ſind einander genau gleich; es genügt alſo eine, etwa die letztere, zu betrachten. Es wird wieder angenommen, daſs die Laſten nur in den Knotenpunkten wirken; bei einer Feldweite $a$ (Fig. 215) iſt die Knotenpunktslaſt gleich $p\,a$ (bezw. $g\,a$). Die Auflagerdrücke ſind $D_0 = D_1 = \frac{p\,a\,(n-1)}{2}$ und, da $a\,(n-1) = (l - a)$ iſt,

$$D_0 = D_1 = \frac{p\,(l-a)}{2} \;.\;\ldots\ldots\ldots\; 243.$$

Für einen beliebigen Knotenpunkt $E$ mit der Abſciſſe $x$ iſt nun das Moment

$$M_x = \frac{p\,(l-a)}{2}\,x - p\,(x-a)\left(\frac{x-a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2}\,(l\,x - x^2).$$

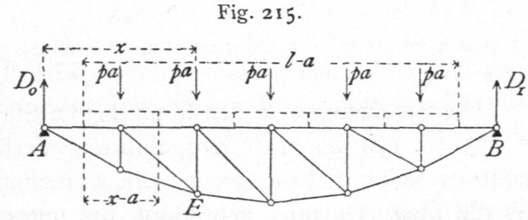
Dies iſt aber nach Art. 152 (S. 131) auch der Ausdruck für das Moment im Punkte $E$ bei einem vollwandigen, gleichmäſsig mit $p$ für die Längeneinheit belaſteten Träger.

Werden die Werthe von $M$ und $y$ (Gleichung 240) in die Ausdrücke für $Z$ und $X$ eingeführt, ſo ergiebt ſich allgemein

$$\left.\begin{aligned} Z\cos\sigma &= \frac{M}{y} = \frac{p}{2}\cdot\frac{(l\,x - x^2)\,l^2}{4\,.\,h\,(l\,x - x^2)} = \frac{p\,l^2}{8\,h} \\ X &= -\,\frac{p}{2}\cdot\frac{(l\,x - x^2)\,l^2}{4\,h\,(l\,x - x^2)} = -\,\frac{p\,l^2}{8\,h} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; 244.$$

$Z\cos\sigma$ iſt die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung. Die rechte Seite obiger Ausdrücke enthält nur conſtante Gröſsen, ſo daſs ſich ergiebt: Beim Parabelträger iſt für gleichmäſsige Belaſtung des ganzen Trägers die Spannung in der geraden Gurtung ($X$) und die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung conſtant.

Fig. 215.




Da $\cos\sigma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{y' - y}{a}\right)^2}}$ iſt, erhält man aus Gleichung 244

$$Z = \frac{p\,l^2}{8\,h}\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \;\ldots\ldots\ldots\; 245.$$

Die Spannungen $Z$ und $X$, welche dem Eigengewicht entſprechen, werden aus obigen Gleichungen erhalten, indem man $p$ mit $g$ vertauſcht.

189. in den Gitterſtäben.

β) Spannungen in den Gitterſtäben. Für die Diagonale $CE$ (Fig. 214) iſt $L$ der conjugirte Punkt, $\eta$ der Hebelsarm von $Y$, und wenn mit $M_1$ das Moment der äuſseren Kräfte am Bruchſtück links vom Schnitt $II$, bezogen auf $L$ als Drehpunkt, bezeichnet wird, iſt

$$0 = Y\,\eta - M_1, \quad \text{woraus} \quad Y = +\,\frac{M_1}{\eta} \;\ldots\ldots\; 246.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, ſo fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufſtellung der Momentengleichung für dieſen Punkt ergiebt genau wie in Gleichung 246 die Diagonalſpannung als Quotienten aus dem Moment der am Bruchſtück wirkenden äuſseren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalſpannung.

Häufig iſt ein anderer Ausdruck der Diagonalſpannung bequemer, als Gleichung 246. Die am Knotenpunkt $C$ der geraden Gurtung (Fig. 216) angreifenden Kräfte ſind im Gleichgewicht; die algebraiſche Summe aller wagrechten Seitenkräfte iſt demnach gleich Null; mithin

Fig. 216.

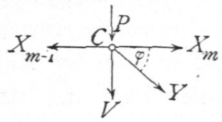
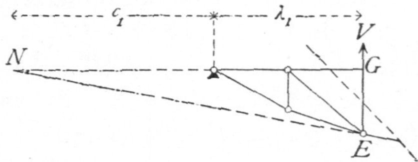



Fig. 217.




$$0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, \quad \text{woraus} \quad Y = -\frac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi} \quad . \quad . \quad 247.$$

Für die Beſtimmung der Spannungen in den Verticalen iſt der Schnitt ſchief zu legen (Fig. 217). Der conjugirte Punkt für die Verticale $E\,G$ iſt $N$. Bezeichnet $-M_2$ das Moment der am Bruchſtück wirkenden äuſseren Kräfte für $N$ als Drehpunkt, ſo wird

$$0 = -V(\lambda_1 + c_1) - M_2, \quad \text{woraus} \quad V = -\frac{M_2}{\lambda_1 + c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 248.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergiebt ſich eine geringe Abänderung der Gleichung 248.

Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergiebt ſich, da die Kräfte an demſelben im Gleichgewicht ſind,

$$0 = Y \sin \varphi + V + P, \quad \text{woraus} \quad V = -(Y \sin \varphi + P) \quad . \quad . \quad . \quad 249.$$

a) Das Eigengewicht, bezw. eine gleichmäſsig über den ganzen Parabelträger vertheilte Laſt $p$ für die Längeneinheit erzeugt in allen Diagonalen die Spannung Null. Denn bei dieſer Belaſtung iſt nach Art. 187 (S. 171) die Gurtungsſpannung $X$ conſtant, alſo $X_m = X_{m-1}$, mithin nach Gleichung 247: $Y = 0$.

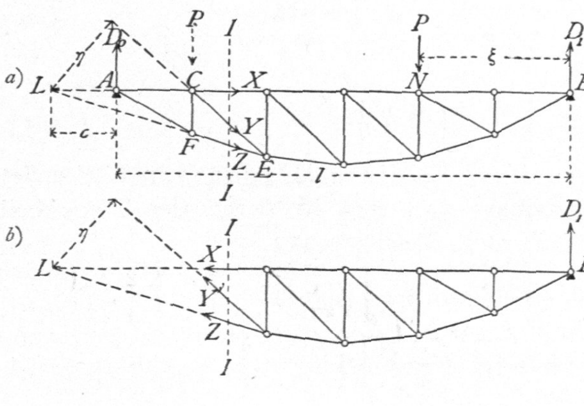
Die Spannung in den Verticalen ergiebt ſich nach Gleichung 249, da $Y = 0$ und $P = p\,a$ (bezw. $g\,a$) iſt, zu

$$V_p = -p\,a, \quad \text{bezw.} \quad V_g = -g\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 250.$$

Die Spannung in den Verticalen iſt ſonach beim Parabelträger und der angegebenen Belaſtung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Laſt, und zwar Druck, wenn, wie hier angenommen iſt, die obere gerade Gurtung belaſtet iſt.

b) Ungünſtigſte Belaſtungen und gröſste Stabſpannungen der Gitterſtäbe. Die ungünſtigſte Belaſtung für eine Diagonale $C\,E$ (Fig. 218) wird folgendermaſsen erhalten. Eine rechts von dem durch die Diagonale verlaufenden Schnitte $I\,I$ gelegene Laſt $P$ erzeugt in $A$ den Auflagerdruck $D_0 = \frac{P\,\xi}{l}$ und in $C\,E$ eine Diagonalſpannung $Y$, welche aus der Momentengleichung für Punkt $L$ und das links vom Schnitte liegende Bruchſtück folgt:

Fig. 218.



$$0 = Y\eta - D_0\, c, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{D_0\, c}{\eta} = \frac{P\, \xi\, c}{l\, \eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 251.$$

So lange ſich die Laſt rechts vom Schnitt $II$ befindet, gilt der hier für $Y$ gefundene Ausdruck. Jede Laſt rechts vom Schnitt erzeugt alſo in $CE$ einen Zug.

Befindet ſich die Laſt $P$ links vom Schnitte $II$, ſo betrachte man das Bruchſtück an der rechten Seite des Schnittes (Fig. 218 *b*). Auf daſſelbe wirken der Auflagerdruck $D_1$ in $B$ und die 3 Spannungen $X$, $Y'$ und $Z$; die Gleichung der ſtatiſchen Momente für $L$ als Drehpunkt heiſst dann:

$$0 = Y'\eta + D_1\,(l + c), \quad \text{woraus} \quad Y' = -\,\frac{D_1\,(l+c)}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 252.$$

Die Laſt $P$ links von $II$ erzeugt alſo in der Diagonale Druck und in gleicher Weiſe jede links vom Schnitt liegende Laſt.

Für die rechts von der Mitte liegenden Diagonalen, bei welchen der Momentenpunkt rechts von $B$ liegt, ergiebt ſich die gleiche Geſetzmäſsigkeit.

Es folgt, daſs auch hier das für die Parallelträger (Art. 177, S. 158) gefundene Geſetz gilt: Jede Belaſtung zwiſchen dem durch die Diagonalenmitte gelegten lothrechtem Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Fuſspunkt der Diagonalen hinweist, erzeugt in derſelben Zug; jede Belaſtung zwiſchen dem erwähnten Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, erzeugt in derſelben Druck.

Gröſster Zug findet demnach in einer Diagonalen dann ſtatt, wenn alle Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Fuſs der Diagonale hinweist; gröſster Druck, wenn die Knotenpunkte zwiſchen dem Schnitte und demjenigen Auflager belaſtet ſind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Fig. 219.

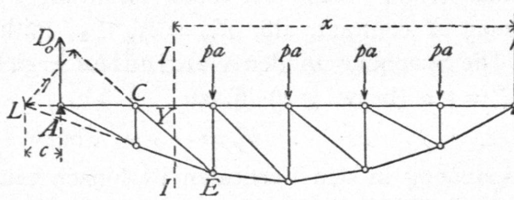
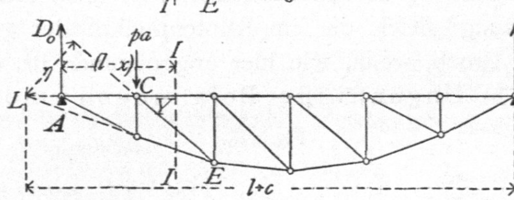



Fig. 220.




D i e  g r ö ſ s t e  Z u g b e a n ſ p r u c h u n g  i n  e i n e r  D i a g o n a l e n $CE$ findet daher bei der in Fig. 219 gezeichneten Belaſtung ſtatt; ſie iſt

$$Y_{max} = \frac{D_0\, c}{\eta}.$$

Genau, wie in Art. 177 (S. 159), erhält man für den Auflagerdruck:

$$D_0 = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

alſo

$$Y_{max} = \frac{p\,c}{2\,l\,\eta}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 253.$$

D i e  g r ö ſ s t e  D r u c k b e a n ſ p r u c h u n g  i n  e i n e r  D i a g o n a l e n $CE$ findet bei der in Fig. 220 gezeichneten Belaſtung ſtatt und iſt (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitte $II$ betrachtet wird) nach Gleichung 252

$$Y_{min} = -\,D_1\left(\frac{l+c}{\eta}\right) \quad \text{und, da} \quad D_1 = \frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

$$Y_{min} = -\,\frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\left(\frac{l+c}{\eta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 254.$$

Die Gleichungen 253 u. 254 gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der Momentenpunkt rechts von $B$ fällt, ergeben ſich folgende Werthe, in denen $\eta_1$ den Hebelsarm von $Y$, $c_2$ den Abſtand des Momentenpunktes von $B$ bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_2}{\eta_1} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_2}{\eta_1} \qquad 255.$$

Bei der angenommenen Belaſtungsart genügt es, $Y_{max}$ oder $Y_{min}$ auszurechnen; denn für die Belaſtung aller Knotenpunkte mit je $p\,a$ iſt die Diagonalſpannung (ſiehe oben) gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belaſtet, ſo iſt die Spannung in der Diagonalen gleich $Y_{min}$; ſind nur die Knotenpunkte der Zugabtheilung belaſtet, ſo iſt die Spannung gleich $Y_{max}$. Bei totaler Belaſtung iſt die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$ und zwar iſt $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = - Y_{max}$.

Um die ungünſtigſte Belaſtung der Verticalen zu ermitteln, verfährt man eben ſo, wie bei den Diagonalen gezeigt iſt. Man findet, daſs Diagonale und Verticale, welche an einem Knotenpunkte der unbelaſteten Gurtung zuſammentreffen, dieſelbe ungünſtigſte Belaſtungsart haben; nur findet in der Verticalen gröſster Druck ſtatt bei derjenigen Belaſtung, welche in der entſprechenden Diagonalen gröſsten Zug

Fig. 221.

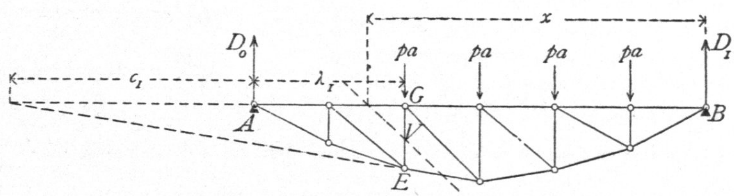
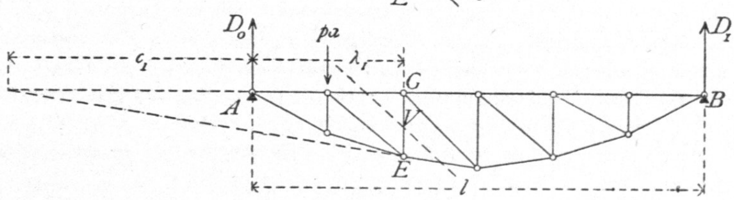



Fig. 222.




erzeugt und umgekehrt. Es wird alſo gröſster Druck in $G\,E$ bei der in Fig. 221 gezeichneten Belaſtung, gröſster Zug bei der in Fig. 222 gezeichneten Belaſtung ſtattfinden.

Die gröſsten Spannungen in den Verticalen ergeben ſich mit

$$\left.\begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0\,c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1\,(l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 256.$$

Falls der Momentenpunkt um $c'_1$ nach rechts von $B$ fällt, was hier bei allen Verticalen rechts der Mitte, einſchl. der Mittelverticalen, ſtattfindet, ſo ergeben ſich für $V_{min}$ und $V_{max}$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0\,(l + c_1')}{c_1' + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{l + c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1\,c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} = \frac{p}{2\,l}\left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\frac{c_1'}{c_1' + l - \lambda_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 257.$$

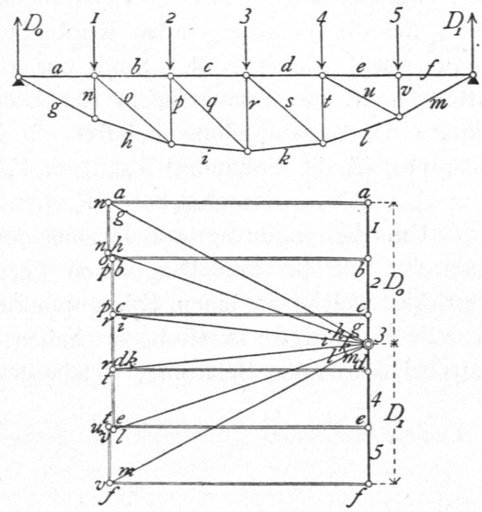
c) Bei entgegengeſetzter Richtung der Diagonalen ergeben ſich nur geringe Aenderungen, welche leicht aus Vorſtehendem folgen.

Die Spannungen durch eine oder mehrere Einzellaſten ſind gleichfalls nach einem der in Art. 171 u. 172 (S. 150) angegebenen Verfahren leicht zu finden.

190. Graphiſche Ermittelung der Spannungen.

γ) Graphiſche Ermittelung der Spannungen. Wird eine gleichmäſsig vertheilte Belaſtung (Eigengewicht, bezw. volle zufällige Belaſtung) vorausgeſetzt, ſo ergiebt der in Fig. 223 gezeichnete *Cremona*'ſche Kräfteplan ſofort die Spannungen.

Fig. 223.



Was die durch zufällige Belaſtung erzeugten Maximalſpannungen betrifft, ſo ergeben ſich die gröſsten Gurtungsſpannungen aus dem eben erwähnten Kräfteplan (Fig. 223), falls eine Belaſtung des ganzen Trägers mit der Laſt $p$ für die Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Beſtimmung der gröſsten Diagonalſpannungen, welche bei den oben angegebenen Belaſtungen ſtattfinden, empfiehlt ſich die Schnittmethode.

Auf das Trägerſtück links vom Schnitte $II$ wirken bei der in Fig. 224*a* gezeichneten Maximal-Zugbelaſtung für die Diagonale $CE$ die Kräfte $D_0$, $X$, $Y$, $Z$. Die Werthe von $D_0$, welche für die verſchiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen ſind, ergeben ſich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2\,l}\left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$; dieſelben ſind in der Curve (Fig. 224*b*) aufgetragen. — Für die Diagonale $CE$ z. B. iſt $D_0 = mn$; dieſe Kraft iſt nach den Richtungen $AE$ und $X$ zerlegt in $no$ und $om$; $no$ iſt alsdann noch nach den Richtungen $Z$ und $Y$ in $np$ und $po$ zerlegt; $po$ iſt gleich $Y_{max}$ ($Y_{min} = - Y_{max}$).

In der Verticalen $CF$ findet gröſster Druck bei der in Fig. 225 gezeichneten Belaſtung ſtatt. $D_0$ iſt hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 224*b*, welche zu $x'$ gehört, d. h. gleich $rs$. Nun wird genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = ut$. Entſprechend ſo iſt der Maximalzug in $CF$ zu ermitteln.

Fig. 224.

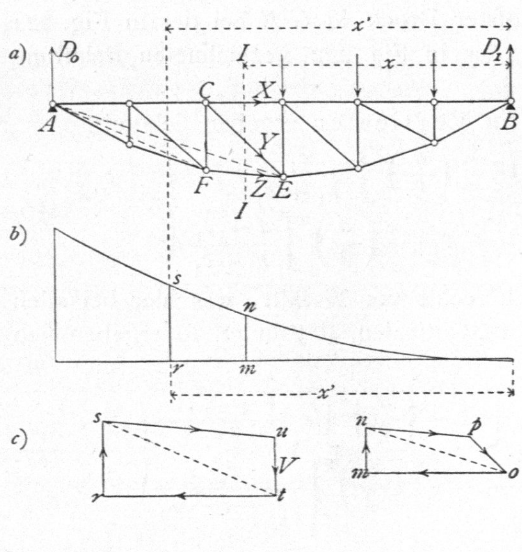


Fig. 225.

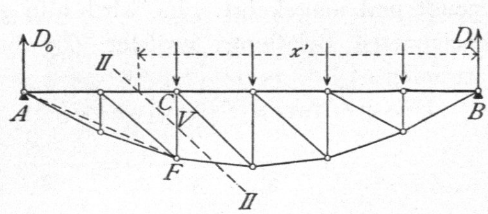
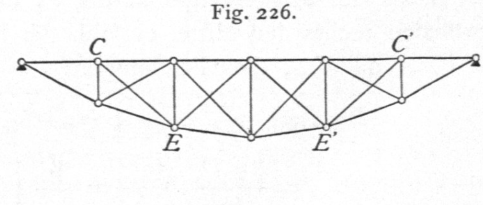


Fig. 226.



δ) Träger mit Gegendiagonalen. Durch die Verkehrslaft erhält jede Diagonale fowohl Zug wie Druck, durch das Eigengewicht gar keine Spannung. Die ungünftigften Zug-, bezw. Druckfpannungen find alfo genau fo grofs, wie diejenigen durch die ungünftigften Verkehrslaften. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, fo wird nach Art. 184 (S. 167) in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müffen. Man erhält die in Fig. 226 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C' E'$ wird genau eben fo beanfprucht, wie die fymmetrifch zur Mitte liegende Hauptdiagonale $C E$ des Trägers mit einfeitig fallenden Diagonalen. Daffelbe gilt von allen Gegendiagonalen; es wird alfo die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen. 191. Gegendiagonalen.

Beifpiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmeffungen und Belaftungen: Stützweite $l = 12{,}0$ m; Pfeilhöhe $h = 1{,}20$ m; Feldweite $a = 1{,}0$ m; Eigengewicht für das laufende Meter des Trägers $g = 320$ kg, alfo $g\,a = 320$ kg; Verkehrslaft für das laufende Meter des Trägers $p = 1280$ kg, alfo $p\,a = 1280$ kg. Der Träger hat ein aus Verticalen und Diagonalen beftehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderfeits nach der Mitte zu; der Träger ift alfo zur Mitte fymmetrifch angeordnet. Es find die in den einzelnen Stäben entftehenden Spannungen zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers braucht man nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu beftimmen; die fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanfpruchungen. 192. Beifpiel.

α) Form der unteren Gurtung. Die Parabel-Ordinaten ergeben fich nach Gleichung 240 aus der Beziehung $y = \frac{4 \cdot 1{,}2}{144}\, x\,(12 - x) = 0{,}033\, x\,(12 - x)$. Man erhält:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| für $x =$ | 1 m | 2 m | 3 m | 4 m | 5 m | 6 m | 7 m | 8 m | 9 m | 10 m | 11 m |
| $y =$ | 0,36 m | 0,66 m | 0,89 m | 1,06 m | 1,16 m | 1,2 m | 1,16 m | 1,06 m | 0,89 m | 0,66 m | 0,36 m. |

β) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bezw. volle zufällige Belaftung entfteht in fämmtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 244

$$X_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -4800 \text{ kg} \quad \text{und} \quad X_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1{,}2} = -19\,200 \text{ kg}.$$

$X_p$ ift zugleich die gröfste durch zufällige Belaftung entftehende Spannung.

γ) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 245 find

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19\,200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man die in der linksfeitigen Hälfte der nächftfolgenden Tabelle zufammengeftellten Ergebniffe. Die Werthe $Z_p$ find zugleich die gröfsten durch die zufällige Laft entftehenden Spannungen.

δ) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht find gleich Null (fiehe Art. 189, S. 172). Die durch Verkehrslaft erzeugten gröfsten Zug- und Druckfpannungen find für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 253 u. 254

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12}\,(x^2 - 0{,}25)\,\frac{c}{\eta} = 53{,}33\,\frac{c}{\eta}\,(x^2 - 0{,}25) \quad \text{und} \quad Y_{min} = -53{,}33\left[(l - x)^2 - 0{,}25\right]\frac{l + c}{\eta}.$$

Die Gröfsen $c$ und $\eta$ können berechnet oder conftruirt werden; die Werthe für $c$ werden beffer berechnet, weil die Zeichnung wegen der fpitzen Schnittwinkel der Gurtungsftabrichtungen nicht genaue Werthe ergiebt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht

$$\frac{c_2 + a}{y_1} = \frac{a}{y_2 - y_1}; \quad \frac{c_3 + 2\,a}{y_2} = \frac{a}{y_3 - y_2}; \quad \frac{c_4 + 3\,a}{y_3} = \frac{a}{y_4 - y_3} \text{ u. f. w.}$$

Die Werthe für $\eta$ können in ähnlicher Weife leicht berechnet werden; doch kann man, befonders wenn $c$ berechnet und der Schnittpunkt entfprechend den Rechnungsergebniffen aufgetragen wird, die $\eta$ mit hinreichender Genauigkeit conftruiren. Die Werthe für $c$, $\eta$, $x$, $Y_{max}$ und $Y_{min}$ find in nachftehender Tabelle zufammengeftellt.

| Stab Nr. | $y'$ | $y$ | $Z_g$ | $Z_p$ | Diagonale Feld-Nr. | $c$ | $\eta$ | $x$ | $Y_{max}$ | $Y_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,36 | 0,0 | 5102 | 20 410 | 2 | 0,2 | 0,66 | 10,5 | + 1777 | — 1971 |
| 2 | 0,66 | 0,36 | 5011 | 20 045 | 3 | 0,87 | 1,91 | 9,5 | + 2186 | — 2156 |
| 3 | 0,89 | 0,66 | 4925 | 19 699 | 4 | 2,23 | 3,8 | 8,5 | + 2304 | — 2396 |
| 4 | 1,06 | 0,89 | 4867 | 19 469 | 5 | 6,6 | 8,03 | 7,5 | + 2449 | — 2460 |
| 5 | 1,16 | 1,06 | 4824 | 19 296 | 6 | 24 | 22,3 | 6,5 | + 2410 | — 2582 |
| 6 | 1,20 | 1,16 | 4804 | 19 216 | | | | | | |
| | Meter | | Kilogramm | | | Meter | | | Kilogramm | |

Nach Art. 189 (S. 172) müffen die abfoluten Werthe von $Y_{max}$ und $Y_{min}$ einander gleich fein; dies ift hier nicht der Fall, und es hat dies feinen Grund darin, dafs nicht die genauen Parabel-Ordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt find, fondern eine Abrundung auf zwei Decimalen ftattgefunden hat. Aus demfelben Grunde würden fich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man fie nach Gleichung 246 berechnete. Immerhin ergeben fich diefe Unterfchiede fo gering, dafs fie vernachläffigt werden können.

e) Spannungen in den Verticalen. Durch das Eigengewicht entfteht in jeder Verticalen nach Art. 189 (S. 172) der Druck $V = -320$ kg. Die durch Verkehrslaft in den Verticalen links der Mitte erzeugten Maximalfpannungen find nach Gleichung 256

$$V_{min} = -53{,}33\,(x^2 - 0{,}25)\,\frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = +53{,}33\left[(l-x)^2 - 0{,}25\right]\frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält die in folgender Tabelle zufammengeftellten Werthe von $c_1$, $\lambda_1$, $x$, $(l - x)$, $V_{min}$ und $V_{max}$. Die 6. (die Mittel-)Verticale, an deren Fufspunkt fich die beiden Diagonalen der anfchliefsenden Felder fchneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Vorausfetzungen hier nicht zutreffen. Da aber im oberen Knotenpunkte derfelben keine Diagonale anfetzt, fo kann diefelbe nur die Kräfte aufnehmen, welche unmittelbar in derfelben wirken, d. h. der gröfste Druck ift gleich der Knotenpunktsbelaftung dafelbft.

| Verticale Nr. | $c_1$ | $\lambda_1$ | $x$ | $l - x$ | $V_{min}$ | $V_{max}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,2 | 1,0 | 11,5 | 0,5 | — 1173 | 0 |
| 2 | 0,87 | 2,0 | 10,5 | 1,5 | — 1778 | + 478 |
| 3 | 2,23 | 3,0 | 9,5 | 2,5 | — 2047 | + 870 |
| 4 | 6,60 | 4,0 | 8,5 | 3,5 | — 2391 | + 1123 |
| 5 | 24 | 5,0 | 7,5 | 4,5 | — 2469 | + 1324 |
| 6 | — | — | — | — | — 1280 | 0 |
| | Meter | | | | Kilogramm | |

f) Zur Beftimmung der Querfchnitte nach den Gleichungen 36 u. 37 (fiehe Art. 77, S. 51) dient die Zufammenftellung in der folgenden Tabelle:

| Obere Gurtung: Druck | | | Untere Gurtung: Zug | | | Diagonalen: | | | | Verticalen: Druck überwiegt | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | Stab Nr. | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ |
| 1 u. 12 | — 4800 | — 19 200 | 1 u. 12 | 5102 | 20 410 | | | | | 1 u. 11 | — 320 | — 1173 | 0 |
| 2 u. 11 | — 4800 | — 19 200 | 2 u. 11 | 5011 | 20 045 | 2 u. 11 | 0 | 1777 | — 1971 | 2 u. 10 | — 320 | — 1778 | 478 |
| 3 u. 10 | — 4800 | — 19 200 | 3 u. 10 | 4925 | 19 699 | 3 u. 10 | 0 | 2186 | — 2156 | 3 u. 9 | — 320 | — 2047 | 870 |
| 4 u. 9 | — 4800 | — 19 200 | 4 u. 9 | 4867 | 19 469 | 4 u. 9 | 0 | 2304 | — 2396 | 4 u. 8 | — 320 | — 2391 | 1123 |
| 5 u. 8 | — 4800 | — 19 200 | 5 u. 8 | 4824 | 19 296 | 5 u. 8 | 0 | 2449 | — 2460 | 5 u. 7 | — 320 | — 2469 | 1324 |
| 6 u. 7 | — 4800 | — 19 200 | 6 u. 7 | 4804 | 19 216 | 6 u. 7 | 0 | 2410 | — 2582 | 6 | — 320 | — 1280 | 0 |
| | Kilogr. | | | Kilogr. | | | | Kilogramm. | | | | Kilogramm. | |

In die Gleichungen 36 u. 37 find die abfoluten Zahlenwerthe für $P_0$, $P_1$ und $P_2$ einzufetzen.

### 6) Dreieckträger.

Dreieck- und Trapezträger ſind, wie bereits in Art. 166 (S. 148) geſagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltrapez bilden. Die eine 193. Trägerformen.

Fig. 227.

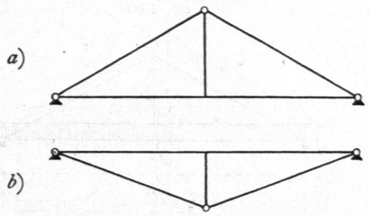
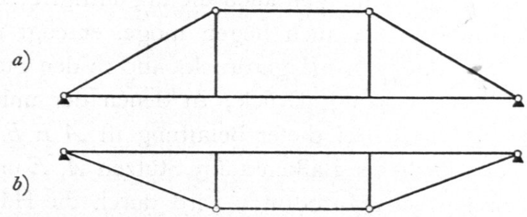


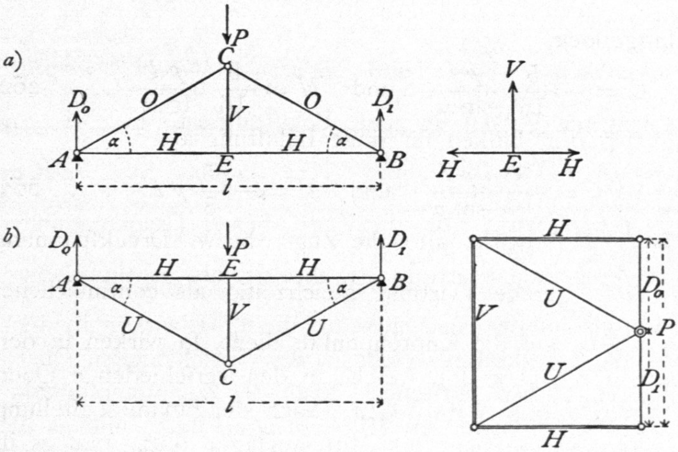
Fig. 228.



Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Iſt die untere Gurtung gerade, ſo erhält man die unter dem Namen des **einfachen**, bezw. **doppelten Hängebockes** bekannte Trägerform (Fig. 227*a*, bezw. 228*a*) — nicht zu verwechſeln mit den Hängewerksträgern, welche nach Art. 148 (S. 125) von der hier betrachteten weſentlich verſchieden ſind. Iſt die obere Gurtung gerade, ſo erhält man die unter dem Namen des **armirten Balkens** bekannte Trägeranordnung (Fig. 227*b* u. 228*b*).

α) **Belaſtung durch Einzellaſt** (Fig. 229). Wenn in dem Knotenpunkte $C$ oder $E$ des Hängebockes (Fig. 229*a*) die Laſt $P$ wirkt, ſo wird der Auflagerdruck 194. Belaſtung durch Einzellaſt.

Fig. 229.




$$D_0 = D_1 = \frac{P}{2}.$$

Die im Punkte $A$ wirkenden 3 Kräfte $D_0$, $O$ und $H$ halten einander das Gleichgewicht, und es ſind demnach die algebraiſchen Summen der in dieſem Knotenpunkte wirkenden wagrechten, bezw. lothrechten Seitenkräfte je gleich Null, d. h. es iſt

$$0 = D_0 + O \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad O = -\frac{P}{2\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 258.$$

$$0 = O\cos\alpha + H, \quad \text{woraus} \quad H = \frac{P}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 259.$$

Die Spannungen der ſymmetriſch zur Mitte liegenden Stäbe ſind gleich.

Falls die Laſt $P$ im Punkte $C$ angreift, ſo ergiebt ſich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt $E$ die Beziehung $0 = V$; falls $P$ in $E$ angreift, ſo heiſst die Gleichgewichtsbedingung $0 = V - P$, woraus

$$V = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 260.$$

Eben ſo ergiebt ſich für den armirten Träger (Fig. 229*b*)

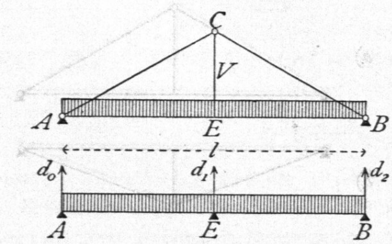
$$U = \frac{P}{2\sin\alpha}, \quad H = -\frac{P}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 261.$$

Die Conſtruction der Spannungen ergiebt den Kräfteplan in Fig. 229, welcher ohne weitere Erläuterung verſtändlich iſt.

195. Gleichförmig vertheilte Belaſtung.

β) Gleichförmig vertheilte volle Belaſtung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belaſtung zu Grunde gelegt, ſo iſt die volle Belaſtung für die Stabſpannungen auch die ungünſtigſte; denn jede Laſt, wo ſie auch liegen möge, erzeugt in $A$ und $B$ (Fig. 230) Auflagerdruck, alſo in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieſer Belaſtung iſt $A\,E\,B$ wie ein continuirlicher Balken auf 3 Stützen $A$, $E$ und $B$ aufzufaſſen; die Mittelſtütze wird durch die Hängeſäule $C\,E$ gebildet. In derſelben entſteht demnach ein Zug, welcher genau ſo groſs iſt, wie der Auflagerdruck bei der Mittelſtütze $E$ des continuirlichen Trägers $A\,E\,B$. Nach der Zuſammenſtellung in Art. 164 (S. 146) iſt dieſelbe hier $d_1 = 1{,}25\, p\, \frac{l}{2} = \frac{5}{8} p\, l$, während $d_0 = d_2 = 0{,}375\, p\, \frac{l}{2} = \frac{3}{16} p\, l$ iſt; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belaſten den Träger nicht. Die Stabſpannungen werden demnach die unter α gefundenen Werthe haben, wenn ſtatt $P$ die Gröſse $\frac{5}{8} p\, l$ eingeſetzt wird. Es wird alſo beim Hängebock

Fig. 230.




$$V = P = \frac{5}{8} p\, l, \quad O = -\frac{5}{16} \frac{p\, l}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{p\, l}{\operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad 262.$$

Eben ſo ergiebt ſich im armirten Balken für dieſe Belaſtungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{p\, l}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad U = \frac{5}{16} \frac{p\, l}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} p\, l. \quad . \quad . \quad 263.$$

In der geraden Gurtung $A\,E\,B$ wirkt alſo die Zug-, bezw. Druckſpannung $H = \pm \frac{5}{16} \frac{p\, l}{\operatorname{tg} \alpha}$; da aber dieſe gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Uebertragen der Laſten auf die Knotenpunkte dient, ſo wirken in derſelben auch noch die Momente und Querkräfte, welche in den verſchiedenen Querſchnitten des continuirlichen Trägers $A\,E\,B$ entſtehen. Nach der Zuſammenſtellung in Art. 164 (S. 146) findet das gröſste Moment am Mittelauflager ſtatt, und es iſt daſſelbe

$$M_1 = 0{,}125\, p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{p\, l^2}{32}.$$

196. Querſchnittsbeſtimmung.

γ) Querſchnittsbeſtimmung. Die Querſchnitte der nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Stäbe ergeben ſich leicht, wie in Art. 77 (S. 51 ff.) und im vorhergehenden Kapitel angegeben iſt. Der Querſchnitt der geraden Gurtung $A\,E\,B$ iſt für die gemeinſame Beanſpruchung durch Zug, bezw. Druck und die Momente zu conſtruiren. Wird der ganze Querſchnitt (für Holz) als conſtant angenommen, ſo iſt das gröſste im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An Stelle des gröſsten Momentes $M_{max}$ iſt die gröſste in den äuſserſten Querſchnittspunkten ſtattfindende Axialſpannung für die Flächeneinheit nach Art. 107 (S. 80)

$$N_{max} = \pm \left(\frac{H}{F} + \frac{M_{max}\, a}{\mathcal{J}}\right).$$

Beim Rechteckquerſchnitt iſt $F = b\, h$, $\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{b\, h^2}{6}$, und wenn noch ſtatt $N_{max}$ die gröſste zuläſſige Spannung $K$ eingeführt wird, ſo ergiebt ſich als Bedingungsgleichung für den Querſchnitt:

$$K = \pm \left(\frac{H}{b\,h} + \frac{6\,M_{max}}{b\,h^2}\right) \quad \ldots \quad 264.$$

In diefer Gleichung find $b$ und $h$ unbekannt. Man nimmt zunächft für $b$ einen Werth probeweife an und beftimmt $h$ aus Gleichung 264; ergiebt fich für $h$ eine unzweckmäfsige Gröfse, fo nehme man für $b$ einen anderen Werth an und beftimme wiederum $h$ nach Gleichung 264. Es werden fich meiftens bei der zweiten Rechnung entfprechende Werthe für $b$ und $h$ ergeben.

## 7) Trapezträger.

$\alpha$) Einzellaften. Für die Belaftungen in Fig. 231 $a$ find die Auflagerdrücke beim Hängebock 197. Einzellaften.

$$D_0 = \frac{P_2\,a + P_1\,(a+b)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P_1\,a + P_2\,(a+b)}{l}.$$

Die Stabfpannungen ergeben fich dann durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, wie folgt:

$$0 = D_0 + O_1 \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad O_1 = -\frac{P_2\,a + P_1\,(a+b)}{l \sin\alpha} \quad \ldots \quad 265.$$

$$0 = O_1 \cos\alpha + U_1, \quad \text{woraus} \quad U_1 = \frac{P_2\,a + P_1\,(a+b)}{l \operatorname{tg}\alpha} = [P_2\,a + P_1(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \quad 266.$$

$$0 = U_1 - U_2, \quad \text{woraus} \quad U_2 = U_1 = [P_2\,a + P_1\,(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \quad \ldots \quad 267.$$

$$0 = D_1 + O_3 \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad O_3 = -\frac{P_1\,a + P_2\,(a+b)}{l \sin\alpha} \quad \ldots \quad 268.$$

$$0 = U_3 + O_3 \cos\alpha, \quad \text{woraus} \quad U_3 = \frac{P_1\,a + P_2\,(a+b)}{l \operatorname{tg}\alpha} = [P_1\,a + P_2(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \quad 269.$$

$$0 = O_2 - O_3 \cos\alpha, \quad \text{woraus} \quad O_2 = -\frac{P_1\,a + P_2\,(a+b)}{l \operatorname{tg}\alpha} = -[P_1 a + P_2(a+b)]\,\frac{a}{l\,h} \quad 270.$$

$$0 = V_1 \ (\text{falls die Laft } P_1 \text{ in } C \text{ wirkt, fo ift } V_1' = P_1) \quad \ldots \quad 271.$$

$$0 = P_2 + V_2 + O_3 \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad V_2 = (P_1 - P_2)\,\frac{a}{l} \quad \ldots \quad 272.$$

Falls die Laft $P_2$ in $E$ wirkt, fo wird

$$0 = V_2' + O_3 \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad V_2' = \frac{P_1\,a + P_2\,(a+b)}{l} \quad \ldots \quad 273.$$

$$0 = U_2 + Y \cos\beta - U_3, \quad \text{woraus} \quad Y = -\frac{U_2 - U_3}{\cos\beta} = -\frac{a\,b}{l\,h \cos\beta}\,(P_1 - P_2),$$

$$Y = +\,(P_2 - P_1)\,\frac{a}{l \sin\beta} \quad \ldots \quad 274.$$

Falls die Laften in der unteren Gurtung, in $C$ und $E$, angreifen, fo wird

$$Y' \sin\beta + V_2' - P_2 = 0, \quad \text{woraus} \quad Y' = \frac{P_2 - V_2'}{\sin\beta} = \frac{P_2}{\sin\beta} - \frac{P_1\,a + P_2\,(a+b)}{l \sin\beta},$$

$$Y' = (P_2 - P_1)\,\frac{a}{l \sin\beta}, \quad \ldots \quad 275.$$

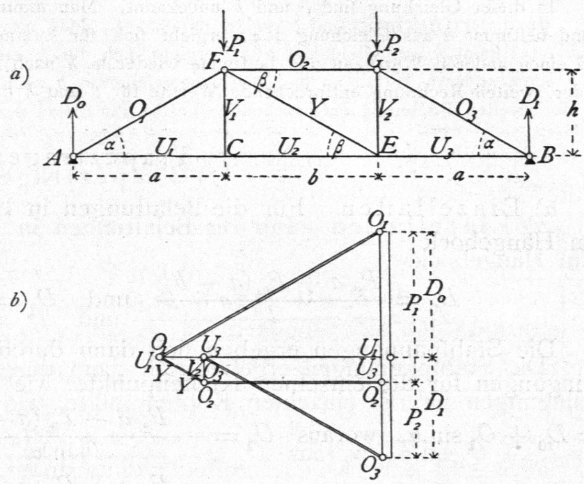
d. h. eben fo grofs, wie in Gleichung 274.

Wenn, wie meiftens, $P_1 = P_2 = P$ ift, wird

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = -\dfrac{P}{\sin\alpha}; \quad U_1 = \dfrac{P\,a}{h} = U_2; \quad O_2 = -\dfrac{P\,a}{h}; \quad O_3 = -\dfrac{P}{\sin\alpha}; \\ \qquad U_3 = \dfrac{P\,a}{h}; \quad V_1 = 0; \quad V_2 = 0; \quad Y = 0 \end{array}\right\} . \quad 276.$$

Die Conftruction ergiebt den neben ftehenden, ohne Erklärung verftändlichen Kräfteplan (Fig. 231 *b*).

Fig. 231.

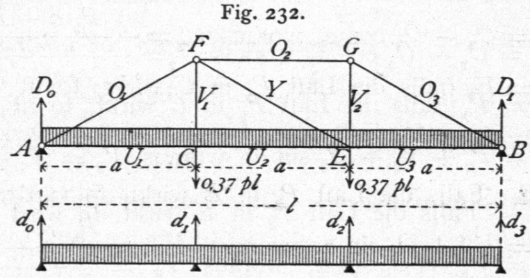



Was den armirten Balken (Fig. 228 *b*) anbelangt, fo find bei diefem die Spannungen fowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den foeben für die gerade, bezw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der abfoluten Gröfse nach gleich, dem Sinne nach entgegengefetzt. Die Werthe derfelben können demnach aus den Gleichungen 265 bis 270 durch Umkehrung der Vorzeichen genommen werden. Die Spannungen in der Diagonalen und in den Verticalen ergeben fich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ift.

198. Gleichförmig vertheilte Belaftung.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belaftung (Fig. 232). Jede Belaftung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie fich aus den Gleichungen 265 bis 270 ergiebt. Maximalzug, bezw. -Druck findet alfo in den Gurtungen bei Belaftung des ganzen Trägers ftatt.

Fig. 232.



Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derfelben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endftützen find *A* und *B*; die Mittelftützen werden durch die Verticalen *F C* und *G E* gebildet. Wird $a = b$ gefetzt, fo ergiebt fich bei Belaftung des ganzen Trägers mit der Laft $p$ für die Längeneinheit als Auflagerdruck der Mittelftützen nach der Zufammenftellung in Art. 164 (S. 146) $d_1 = d_2 = 1{,}1 \, \frac{p\,l}{3} = 0{,}37 \, p\,l$. Eben fo grofs ift die Laft, welche in den Knotenpunkten *C* und *E* des Syftemes nach unten wirkt. Werden diefe Werthe für $P_1$ und $P_2$ in die obigen Gleichungen eingeführt, fo ergiebt fich

$$\left.\begin{array}{l} O_1 = -\frac{0{,}37\,p\,l}{\sin\alpha}; \quad U_1 = 0{,}37\,p\,l\frac{a}{h}; \quad O_2 = -0{,}37\,p\,l\frac{a}{h}; \quad O_3 = -\frac{0{,}37\,p\,l}{\sin\alpha}; \\ U_2 = 0{,}37\,p\,l\,\frac{a}{h}; \quad U_3 = 0{,}37\,p\,l\,\frac{a}{h}; \quad V_1 = 0{,}37\,p\,l; \quad V_2 = 0{,}37\,p\,l; \; Y = 0 \end{array}\right\} \; . \quad 277.$$

Die hier gefundenen Spannungen *O* und *U* find die gröfsten Stabfpannungen, welche durch gleichförmig vertheilte Nutzlaft entftehen. Wird ftatt $p$ das Eigengewicht $g$ für die Längeneinheit eingeführt, fo ergeben fich die durch das Eigengewicht entftehenden Stabfpannungen.

γ) Ungünftigfte Beanfpruchung der Diagonale und der Verticalen. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalfpannung giebt die Gleichung 274. $Y$ wird feinen gröfsten pofitiven Werth (Zug) haben, wenn $P_2$ möglichft grofs, $P_1$ möglichft klein ift; $Y$ wird feinen gröfsten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn $P_2$ möglichft klein, $P_1$ möglichft grofs ift. Wird als Nutzlaft eine gleichmäfsig vertheilte Laft eingeführt, fo kann man, wenn $a = b$ ift, mit für die Zwecke des Hochbaues hinreichender Sicherheit annehmen, dafs die Diagonale den gröfsten Zug erleidet, wenn der Punkt $E$ am Fufspunkte derfelben mit $p\,a + 0{,}37\,g\,l$ belaftet ift, der Punkt $C$ (in der Verticalen des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht $0{,}37\,g\,l$ trägt. Bei der umgekehrten Belaftung dagegen erleidet die Diagonale ihren gröfsten Druck. Demnach wird 199. Ungünftigfte Beanfpruchung der Gitterftäbe.

$$Y_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{p\,a^2}{l \sin \beta} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 278.$$

Ferner ift hier, wo die Laften unten wirken, $V_1 = P_1$, d. h.

$$V_{1\,max} = 0{,}37\,(g + p)\,l \quad \text{und} \quad V_{1\,min} = 0{,}37\,g\,l \qquad \ldots\ldots \qquad 279.$$

Auch $V_2$ erleidet den gröfsten Zug bei voller Belaftung; da bei diefer Belaftung $Y = 0$ ift, fo wird auch

$$V_{2\,max} = 0{,}37\,(g + p)\,l \quad \text{und} \quad V_{2\,min} = 0{,}37\,g\,l \qquad \ldots\ldots \qquad 280.$$

δ) Die Querfchnittsbeftimmung ift in genau gleicher Weife vorzunehmen, wie dies in Art. 195, (S. 180) beim Dreieckträger gezeigt ift. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei $C$ und $E$ ftatt und find genau genug für $a = b$ nach der Zufammenftellung in Art. 164 (S. 146) $M = p\left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p\,l^2}{90}$. Die Abmeffungen $b$ und $h$ des rechteckigen Querfchnittes (für Holz) find demnach aus der Gleichung zu beftimmen: 200. Querfchnittsbeftimmung.

$$N_{max} = K = \pm \left(\frac{U}{b\,h} + \frac{6\,M_{max}}{b\,h^2}\right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer gröfseren Anzahl von Laftpunkten werden durch Einfügen von Dreiecken in die oben (Fig. 227 u. 228) dargeftellten Trägerformen hergeftellt. Die Berechnung entfpricht der vorftehenden, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

## Literatur.

Bücher über »Statik der Stützen und Träger«.

KLOSE, H. A. Theorie der eifernen Träger mit Doppelflanfchen. Hannover 1862.

ASSMANN, G. Hilfstafeln zur Berechnung eiferner Träger und Stützen. Berlin 1865.

FRANCIS, J. B. *On the ftrength of caft-iron pillars.* New-York 1866.

KLERITJ, Lj. J. Abhandlung über genauere Berechnung und Conftruction einiger Träger von gleichem Widerftande. Freiberg 1869.

LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers conftanten Querfchnittes. Elementare Darftellung der von CLAPEYRON und MOHR begründeten analytifchen und graphifchen Methoden und ihres Zufammenhanges. Wien 1871.

RITTER, W. Die elaftifche Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken etc. Zürich 1871. — 2. Aufl. 1883.

KECK, W. Ueber die Ermittlung der Spannungen in Fachwerksträgern, mit Hilfe der graphifchen Statik. Hannover 1872.

WEYRAUCH, J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.

TETMAJER, L. Die äufsern und innern Kräfte an ftatifch beftimmten Brücken- und Dachftuhl-Conftructionen. Zürich 1875.

PINZGER, L. Neue Methode zur Berechnung von Trägern mit unfymmetrifchen Querfchnittsformen. München 1879.

CLERC, A. *Mémoire fur une nouvelle théorie de la réfiftance des poutres.* Paris 1880.

ZIMMERMANN, H. Trägheitsmomente, Widerftandsmomente und Gewichte genieteter Blechträger. Berlin 1881.

CANOVETTI. *Théories des poutres continues etc.* Paris 1882.

HULEWICZ. *Calcul de réfiftance des poutres droites à plufieurs travées.* Paris 1882.

MÜLLER-BRESLAU, H. F. B. Die wichtigften Refultate für die Berechnung eiferner Träger und Stützen etc. Berlin 1883.

STONEY, B. B. *The theory of ftreffes in girders and fimilar ftructures.* London 1886.

WEYRAUCH, J. J. Theorie der ftatifch beftimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1887.

WEYRAUCH, J. J. Beifpiele und Aufgaben zur Berechnung der ftatifch beftimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.