

Fällt aber V mit E nicht zusammen, so ist die Unterfuchung für eine andere Lage der Nulllinie zu wiederholen. Man kann ohne Schwierigkeit schätzen, nach welcher Richtung KK gedreht werden muss, und erreicht meist bereits bei der ersten Wiederholung der Construction ein genügend genaues Zusammenfallen der Punkte E und V^{21} .

Vorstehende Unterfuchung ist für die Ermittlung der Standficherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern etc. von grosser Wichtigkeit.

b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

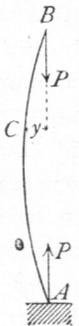
117.
Voraus-
setzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zusammenfallen, so findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanspruchung statt. Wirken auf einen eben solchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengesetzt, so müssten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanspruchungen stattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerschnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche gross ist, so wird unter dem Einflusse der drückenden Kräfte ein Ausbiegen stattfinden, und es wirkt alsdann auf jeden Querschnitt C (Fig. 114) ausser der Axialkraft P noch ein Moment P_y . In diesem Falle findet Beanspruchung des Stabes auf Zerknicken statt, und derselbe ist mit Rücksicht auf diese Beanspruchungsweise zu berechnen.

Es kann auffallen, dass hier scheinbar ein Widerspruch zwischen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ist derselbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht statt; sobald aber in Folge von unvermeidlichen Ausführungsfehlern die Kräfte ausserhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entsteht für jeden Querschnitt des Stabes ein Biegemoment, welches unter Umständen ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in diesem Falle von einem labilen Gleichgewichtszustande sprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig 114 gezeichneten Richtung stattfinden, sondern ist nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ist demnach zu unterfuchen, nach welcher Richtung ein solches Ausbiegen am leichtesten stattfindet, und der Querschnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Unterfuchungen soll angenommen werden, dass 1) als äussere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querschnitt habe.

Fig. 114.



²¹⁾ Vergl. über den in Art. 113 bis 116 behandelten Gegenstand:

KECK. Excentrische Druckbelastung eines cylindrischen Mauerkörpers ausserhalb des Kernes. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1882, S. 301.

KECK. Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Kernes bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnittes. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1882, S. 627.

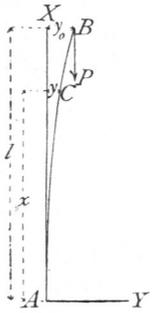
MOHR. Ueber die Vertheilung der excentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkskörpers. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1883, S. 163.

BARKHAUSEN. Druckvertheilung im rechteckigen Mauerfchnitte. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1883, S. 469.

SCHIEPP. Zur Ermittlung der Druckvertheilung in Mauerwerksquerschnitten. Centralbl. d. Bauverw 1884, S. 152.

HÜPPNER. Zur Ermittlung der Druckvertheilung in Mauerwerksquerschnitten. Civiling. 1885, S. 39

Fig. 115.



Unter Einwirkung der Kraft P möge der Stab (Fig. 115), dessen Axe ursprünglich mit AX zusammenfiel, in die Lage $A'B$ gekommen sein; die Bildebene XAY , in welcher AB liegt, schneide alle Querschnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt B habe nach der Formänderung die Ordinate y_0 . Für irgend einen Punkt C mit der Abscisse x sei die Ordinate y ; das Moment für diesen Punkt ist $M = P(y_0 - y)$ und die elastische Linie demnach aus der Gleichung 67 zu ermitteln. Danach wird

118.
Elastische
Linie.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(y_0 - y)}{E \mathcal{I}} \dots \dots \dots 81.$$

Hierin ist \mathcal{I} das Trägheitsmoment des Querschnittes bei C , bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe desselben, welche senkrecht zur Kräfteebene, also zur XY -Ebene, steht. Der Querschnitt ist nach obiger Voraussetzung constant, also auch \mathcal{I} für die Integration constant; da P und E gleichfalls constant sind, so hat bei der Integration $\frac{P}{E \mathcal{I}}$ einen constanten Werth. Abkürzungsweise werde

$$\frac{P}{E \mathcal{I}} = a^2 \dots \dots \dots 82.$$

gesetzt, so dass die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 (y_0 - y) \dots \dots \dots 83.$$

Die zweimalige Integration ergibt als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = y_0 + A \sin ax + B \cos ax \dots \dots \dots 84.$$

Die beiden Constanten A und B sind für die verschiedenen Arten der Stabunterstützung verschieden.

Bekanntlich ist

$\sin \alpha = \sin (2\pi + \alpha) = \sin (2n\pi + \alpha)$ und $\cos \alpha = \cos (2\pi + \alpha) = \cos (2n\pi + \alpha)$, worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, also gleich 0, 1, 2, 3... gesetzt werden kann. Es ist also auch

$$\sin ax = \sin (ax + 2\pi) = \sin \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right]$$

und

$$\cos ax = \cos (ax + 2\pi) = \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 84 kann daher auch geschrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] \dots \dots 85.$$

Man erhält sonach gleich große Werthe für y , wenn man x und wenn man $x + \frac{2\pi}{a}$ einsetzt; die Ordinaten je zweier Punkte, deren Abscissen um $\frac{2\pi}{a}$ von einander verschieden sind, haben daher die gleichen Werthe. Die elastische Linie ist demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} \dots \dots \dots 86.$$

und, da nach Gleichung 82: $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{I}}}$ ist,

$$\lambda = 2 \pi \sqrt{\frac{E \mathcal{F}}{P}} \dots \dots \dots 87.$$

Aus dieser Gleichung kann man, falls E , \mathcal{F} und P gegeben ist, die Wellenlänge berechnen. Ist dagegen λ gegeben, so kann man aus Gleichung 87 diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Es folgt aus Gleichung 87

$$P = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}}{\lambda^2} \dots \dots \dots 88.$$

Es soll hier noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 83 hingewiesen werden. Dieselbe bleibt gültig, wenn man beiderseits mit der beliebigen Zahl m multiplicirt; sie heisst alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es sei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann ist auch $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, also

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \dots \dots \dots 89.$$

Die Gleichung 83 gilt also für beliebig groſse Werthe von y . Ergeben sich demnach unter Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y als möglich, so können dieselben auch m -mal so groſs, d. h. beliebig groſs werden, also auch so groſs, daſs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 88, welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann also auch den Stab zerknicken. P ist sonach der Grenzwert der Tragkraft.

Bei der vorstehenden Ableitung ist angenommen worden, daſs die Ausbiegung in der XY -Ebene erfolge; dieselbe kann aber auch in der senkrecht zu ersterer stehenden XZ -Ebene stattfinden, welche die zweiten Hauptaxen der Querschnitte enthält. Die Entwicklung für diesen Fall bleibt genau dieselbe, wie die obige, und man erhält für P denselben Ausdruck, wie dort; nur ist alsdann unter \mathcal{F} das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die zur XZ -Ebene senkrechte Schwerpunktsaxe, zu verstehen, welche Axe parallel zur Y -Axe ist. Nennen wir dasselbe \mathcal{F}_1 , die entsprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1 , so ist

$$P_1 = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}_1}{\lambda_1^2} \dots \dots \dots 90.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun sowohl in der XY -Ebene, wie in der XZ -Ebene stattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belastung darf den Grenzwert nicht erreichen. Die Gleichungen 90 u. 88 geben zwei Grenzwerte, und es ist naturgemäſs der kleinere von beiden als maſsgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, so unterscheiden sich beide Grenzwerte nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. Es ist demnach in den Ausdruck für P von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzusetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ist, so kann man mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daſs dieselbe senkrecht zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entspricht; denn dieses ist nach Art. 59 (S. 39) das kleinste der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente. Von einer genauen Untersuchung, nach welcher Richtung die Ausbiegung erfolgen wird, kann hier füglich abgesehen werden.

Für die weiteren Betrachtungen sind die verschiedenen möglichen Fälle in das Auge zu fassen.

α) Einseitig eingespannter, an einem Ende in der Richtung der Axe belasteter Stab (Fig. 116). Aus der allgemeinen Gleichung 84 für die elastische Linie:

119.
Einseitig
eingespannter
Stab.

Fig. 116.

Linie:

$$y = y_0 + A \sin ax + B \cos ax$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = Aa \cos ax - Ba \sin ax \dots 91.$$

Die Constanten A und B werden aus den besonderen Bedingungen für diesen Fall bestimmt.

Für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, weil der Stab an dieser Stelle wegen der Einspannung stets die Richtung der X -Axe hat; demnach ist in Gleichung 91

$$Aa = 0,$$

oder, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Eben so ist für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 84: $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall:

$$y = y_0 - y_0 \cos ax = y_0 (1 - \cos ax) \dots 92.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$; demnach $y_0 = y_0 (1 - \cos al)$. Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\cos al = 0 \dots 93.$$

ist. Soll also der Stab unter Einwirkung der Kraft P sich so durchbiegen, wie Fig. 116 zeigt, also im Punkte C die Ordinate y , im Endpunkte die Ordinate y_0 haben können, so muß $\cos al = 0$ sein, es muß also

$$al = 90^\circ, \text{ bzw. } 270^\circ, \text{ bzw. } 450^\circ \text{ u. f. w.},$$

oder allgemein

$$al = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \dots 94.$$

sein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3... annehmen kann. Daraus folgt auch der Werth von P , welcher den Stab in der angegebenen Weise biegen, also nach den

Fig. 117.

Erklärungen in Art. 118 (S. 97) auch zerknicken kann. Es ist für

diesen Fall nach Gleichung 94: $a = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$, und,

da $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{I}}}$ ist, $\sqrt{\frac{P}{E \mathcal{I}}} = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$; also

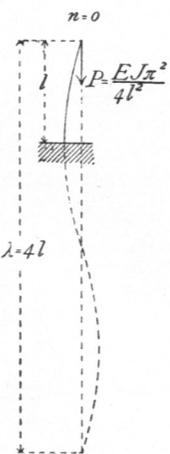
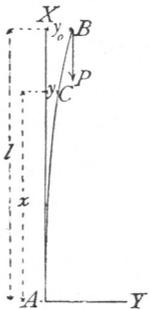
$$P = \frac{E \mathcal{I} \pi^2}{4 l^2} (2n + 1)^2 \dots 95.$$

Die zugehörige Wellenlänge λ folgt aus Gleichung 86. Es ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = \frac{4l}{2n + 1} \dots 96.$$

Die beiden Gleichungen geben Aufschluss über die Größe der Grenzwerte P , welche bei den verschiedenen Anordnungen des eingespannten Stabes einzuführen sind.

Bei dem in Fig. 117 vorgeführten Falle ist die ganze Wellenlänge λ viermal so groß, als die freie Länge l , d. h. es ist $\lambda = 4l$;



demnach folgt für diesen Fall aus der Gleichung 96: $n = 0$; und damit aus Gleichung 95

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} \dots \dots \dots 97.$$

Wird ein Punkt E im Abstände $\frac{l}{3}$ vom Einspannungspunkte fest gelegt, so muß die Formänderung so erfolgen, daß $l = \frac{3}{4} \lambda$ (Fig. 119) wird; dafür folgt aus Gleichung 96: $\lambda = \frac{3 \lambda}{2 n + 1}$ die Größe $n = 1$, ferner aus Gleichung 95 als zerknickende Kraft

$$P = \frac{9 E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} \dots \dots \dots 98.$$

Werden endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{5}$ und $\frac{3}{5} l$ vom Einspannungspunkte fest gehalten (Fig. 118), so wird $\lambda = \frac{4}{5} l$ und aus Gleichung 96: $n = 2$; alsdann ist die zerknickende Kraft

$$P = \frac{25}{4} \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} \dots \dots 99.$$

Man sieht, wie wesentlich der Grenzwert P durch angemessene Construction erhöht werden kann.

β) Stab mit beiderseits frei drehbaren Enden (Fig. 120). Die symmetrische Belastung des Stabes wird zur Folge haben, daß beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, sich genau gleich verhalten; man kann demnach diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, daß man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält sich dann genau eben so, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P , d. h. der Grenzwert von P , ist demnach aus der Gleichung 95 zu entnehmen, jedoch mit der Aenderung, daß statt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzusetzen ist, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

120.
Stab
mit freien
Enden.

Fig. 118.

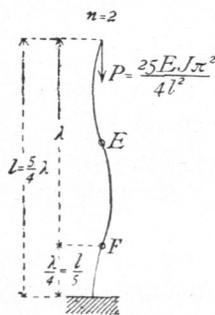


Fig. 119.

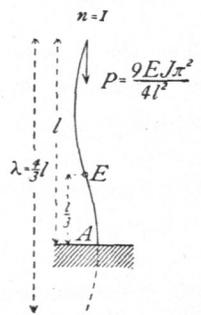


Fig. 120.

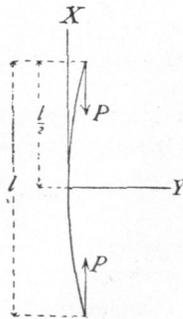
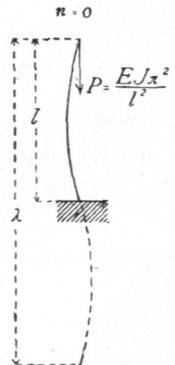


Fig. 121.



Für den vorliegenden Fall ist also

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2 (2 n + 1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} (2 n + 1)^2 \dots \dots \dots 100.$$

und

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{2n+1} = \frac{2l}{2n+1} \dots \dots \dots 101.$$

Bei dem in Fig. 121 dargestellten Falle ist $\lambda = 2l$, d. h. $n = 0$, mithin

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Wird ein Punkt E in der Mitte des Stabes fest gehalten, so findet die Durchbiegung nach Fig. 122 so statt, dafs $l = \lambda$,

Fig. 123.

also $n = \frac{1}{2}$ wird; alsdann hat P den Werth:

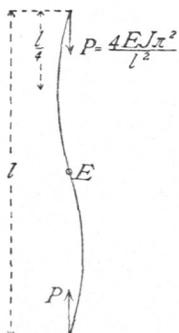
$$P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Sind endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{3}$ von den Endpunkten fest gehalten, so dafs die Formänderung nach Fig. 123 eintreten mufs, so wird $l = \frac{3}{2} \lambda$, also $n = 1$

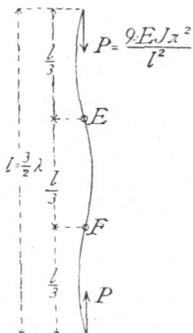
und

$$P = \frac{9 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Fig. 122.



n = 1



Die Formänderung kann auch unter Beibehaltung der Punkte E, F und der Endpunkte so eintreten, dafs die Bogenlinien auf diejenige Seite der ursprünglichen Axe fallen, welche der gezeichneten entgegengesetzt ist.

γ) Stab mit eingespannten Enden (Fig. 124). Beide Endpunkte des Stabes verbleiben in Folge der Einspannung in der Lothrechten der Axe XX ; die Tangente an die Axe in diesen Punkten, d. h. die Axenrichtung, kann sich nicht verändern. Es mufs also an jedem Einspannungspunkte ein Kräftepaar wirken, dessen Moment stets genügend grofs ist, um den Stab in der ursprünglichen Richtung zu erhalten; dieses Moment möge M_0 genannt werden. Für einen beliebigen Punkt C mit der Abscisse x ist das Biegemoment

124.
Stab mit
eingespannten
Enden.

$$M = M_0 - Py = \left(\frac{M_0}{P} - y\right)P.$$

Demnach lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie hier:

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{dx^2} = P \left(\frac{M_0}{P} - y\right) \text{ oder } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} \left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

Es werde wieder abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$ gesetzt; alsdann ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 \left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

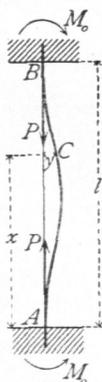
Als Gleichung der elastischen Linie ergibt sich

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin ax + B \cos ax; \dots \dots \dots 102.$$

ferner

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax - B a \sin ax \dots \dots \dots 103.$$

Fig. 124.



Die Constanten A und B ergeben sich in folgender Weise. Für $x = 0$ ist $y = 0$, demnach in Gleichung 102: $0 = \frac{M_0}{P} + B$ und $B = -\frac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird

$\frac{d y}{d x} = 0$, folglich in Gleichung 103: $0 = A a$ und, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Die Gleichung der elastischen Linie lautet sonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a x = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a x) \dots \dots \dots 104.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, demnach $0 = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a l)$ oder

$$\cos a l = 1 \dots \dots \dots 105.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, muß

$$a l = 2 n \pi \dots \dots \dots 106.$$

fein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... haben kann.

Aus Gleichung 86 folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2 \pi l}{2 n \pi} = \frac{l}{n} \text{ oder } \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n} \dots \dots \dots 107.$$

Ferner wird nach Gleichung 86

$$a^2 = \frac{P}{E \mathcal{J}} = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2} \text{ und } P = \frac{4 E \mathcal{J} \pi^2}{\lambda^2} \dots \dots \dots 108.$$

Die beiden Gleichungen 107 u. 108 geben über die GröÙe von P Aufschluß. Es ist

für $n = 1$:

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \text{ oder } \lambda = l;$$

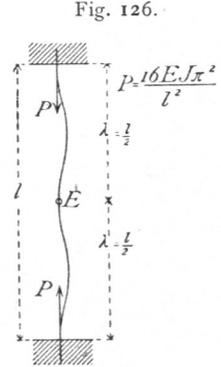
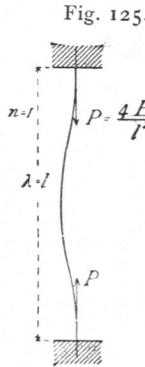
$$P = \frac{4 E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots 109.$$

für $n = 2$:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{l}{2};$$

$$P = \frac{16 E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots 110.$$

Der erstere Fall ist durch Fig. 125, der zweite durch Fig. 126 dargestellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte fest gehalten wird.



122.
Stab mit einem
eingespannten
und einem
geführten Ende.

δ) Stab mit einem eingespannten und einem in der Lothrechten geführten Ende (Fig. 127). Wenn der Punkt B nicht in der lothrechten Linie geführt wäre, würde er etwa die punktirte Lage eingenommen haben; es muß also die Führung durch eine wagrechte Kraft H verursacht werden, welche stets genügend groß ist, um ein Ausweichen von B zu verhüten. Diese Kraft H ist ihrer GröÙe nach nicht bekannt.

Das Biegemoment für irgend einen Punkt C des Stabes mit der Abcisse x ist nun

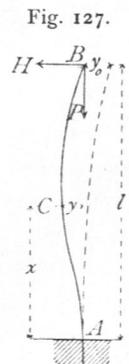
$$M = H (l - x) - P y = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right],$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie (siehe Gleichung 67)

$$E \mathcal{J} \frac{d^2 y}{d x^2} = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right]$$

oder

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{P}{E \mathcal{J}} \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \dots \dots \dots III.$$



Man setzt, um diese Gleichung aufzulösen, $\frac{d^2 y}{dx^2} = z$; es sei wieder abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$; alsdann ist

$$z = a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = a^2 \left(-\frac{H}{P} - \frac{dy}{dx} \right);$$

ferner

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 z.$$

Die Auflöfung dieser Differentialgleichung ergibt wiederum genau, wie in Art 118 (S. 97)

$$z = A \sin ax + B \cos ax, \dots \dots \dots 112.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] = A \sin ax + B \cos ax \dots \dots \dots 113.$$

Die Differentiation nach x ergibt

$$-a^2 \left(\frac{H}{P} + \frac{dy}{dx} \right) = A a \cos ax - B a \sin ax \dots \dots \dots 114.$$

Aus den beiden Gleichungen 113 u. 114 ergeben sich die Werthe der Constanten A und B , wie folgt.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also nach Gleichung 113: $\frac{a^2 H}{P} l = B$; für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, also nach Gleichung 114: $-\frac{a^2 H}{P} = A a$ und $-\frac{a H}{P} = A$. Endlich ist für $x = l$ auch $y = 0$, weil der Endpunkt des Stabes in der Lothrechten geführt wird, also nach Gleichung 113

$$0 = A \sin (al) + B \cos (al), \text{ woraus } \operatorname{tg} al = -\frac{B}{A}$$

folgt, und wenn für B und A die soeben gefundenen Werthe eingesetzt werden,

$$\operatorname{tg} al = al \dots \dots \dots 115.$$

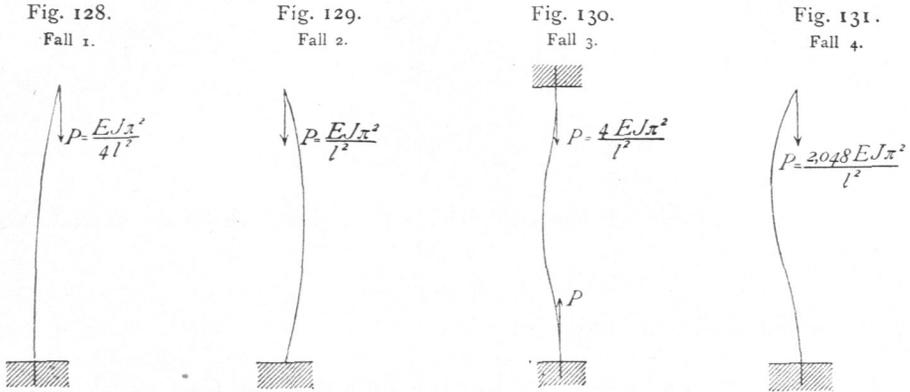
Diese Beziehung findet statt für $al = 0$, außerdem aber auch für den Winkel $257^\circ 27' 12''$; für diesen Winkel ist $\operatorname{tg} al = al = 4,4934$, also $a = \frac{4,4934}{l}$ und da $a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}}$ ist, so wird

$$P = \frac{E \mathcal{F} (4,4934)^2}{l^2} = 20,19 \frac{E \mathcal{F}}{l^2} \dots \dots \dots 116.$$

Dies ist der Werth von P , für welchen Gleichung 115 erfüllt ist und einen Sinn hat; der Werth $al = 0$ ist nicht zu verwerthen. Dieses P vermag sonach die in Fig. 127 gezeichnete Formänderung hervorzurufen, also nach Früherem auch den Stab zu zerknicken.

In Art. 119 bis 122 sind diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptsächlich von Bedeutung sind. Nachstehend sind dieselben in Fig. 128 bis 131 übersichtlich zusammengestellt, wobei überall der Stab auf seine ganze Länge frei angenommen ist; der Werth

von P im vierten Falle ist des bequemen Vergleiches wegen ebenfalls als Product mit dem Factor $\frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}$ dargestellt.



Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält sich demnach
in den Fällen 1 2 4 3
wie $\frac{1}{4} : 1 : 2,048 : 4$.

Durch entsprechende Endanordnung würde man also die Tragfähigkeit des Stabes verfehzhenfachen können. Die angegebenen Kräfte sind thatfächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und es sind deshalb Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querschnittsermittlung bei centrischer Druckbelastung.

124.
Zulässige
Beanspruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Gröfse derjenigen Kraft P an, welche im Stande ist, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Last darf naturgemäfs diesen Werth niemals erreichen; sie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Versteht man unter s den fog. Sicherheits-Coefficienten, unter C einen von der Endbefestigung des Stabes abhängigen Coefficienten, so ist die Kraft, welche mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2} \dots \dots \dots 117.$$

Dieser Werth ist aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge l , also auch die im Nenner vorkommende Gröfse l^2 , sehr klein ist, so ergeben sich für P sehr grofse Werthe, gröfsere Werthe, als die einfache Druckbeanspruchung des Stabes gestattet. Wird die zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes mit K , die Querschnittsfläche mit F bezeichnet, so darf höchstens sein

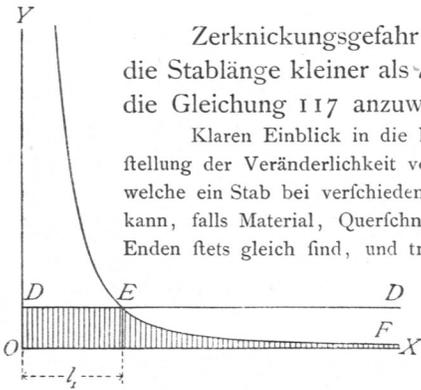
$$P = F K \dots \dots \dots 118.$$

Gröfser, als der Werth in Gleichung 118 ist, darf P mit Rücksicht auf die zulässige Druckbeanspruchung nicht werden; gröfser, als der Werth in Gleichung 117 ist, darf P der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; es ist also stets der kleinere dieser beiden Werthe für diejenige Belastungsgröfse maßgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei grofser Stablänge l ergibt die Gleichung 117, bei

geringer Stablänge l die Gleichung 118 kleinere Werthe für P . Der Grenzwert von l , etwa l_1 , wird derjenige sein, für welchen aus beiden Gleichungen derselbe Werth von P folgt. Dieser Grenzwert ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von P in den Ausdrücken 117 u. 118 zu

$$l_1 = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{Ks}} \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}} \dots \dots \dots 119.$$

Fig. 132.



Zerknickungsgefahr tritt erst auf, wenn $l > l_1$ ist; demnach ist, falls die Stablänge kleiner als l_1 ist, die Gleichung 118, falls sie größer als l_1 ist, die Gleichung 117 anzuwenden.

Klaren Einblick in die hier maßgebenden Verhältnisse verschafft die graphische Darstellung der Veränderlichkeit von P in Fig. 132. Ermittelt man diejenigen Werthe von P , welche ein Stab bei verschiedenen Längen mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr ertragen kann, falls Material, Querschnittsform und Querschnittsgröße, so wie Befestigungsweise der Enden stets gleich sind, und trägt diese Werthe von P als Ordinaten auf, während die zugehörigen Längen als Abscissen gewählt werden, so erhält man eine Curve, offenbar die Curve der Gleichung 117.

Für $l = 0$ wird $P = \infty$; für $l = \infty$ wird $P = 0$; die Y - und X -Axe sind also Asymptoten an die Curve. Dagegen ist der Werth für P aus Gleichung 118 unabhängig von der Stablänge; werden demnach für alle möglichen Längen diese Werthe ermittelt und als Ordinaten in gleichem Maßstabe aufgetragen, wie die Werthe aus Gleichung 117, so ergibt sich eine zur X -Axe parallele Linie DD . Im Punkte E schneiden sich beide Linien; die zugehörige Abscisse ist offenbar die Länge l_1 , für welche beide Gleichungen denselben Werth von P ergeben. Links von E ist die Linie DE , rechts von E die Curve EF maßgebend. Die schraffierte Fläche deutet dies an.

Wenn, wie gewöhnlich, die Last P und die Länge l gegeben sind, so handelt es sich um die Form und Größe des Stabquerschnittes. Für diese Bestimmung stehen die beiden Gleichungen 117 u. 118 zur Verfügung. F und \mathcal{J} müssen wenigstens die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe

$$F = \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} = \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 120$$

haben, wobei noch zu bemerken ist, daß, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, unter \mathcal{J} das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes zu verstehen ist. Ist Ausbiegen nur nach bestimmten Richtungen möglich, so ist \mathcal{J} das kleinste in Betracht kommende Trägheitsmoment.

Wenn beide Werthe genau die Größen haben, welche aus 120 folgen, so hat auch der Stab die Länge l_1 der Gleichung 119. Bei manchen Querschnitten ist es möglich, das Verhältniß von \mathcal{J} und F so zu gestalten, daß die Stablänge gleich l_1 ist.

Der Ausdruck 119 für l_1 enthält drei Wurzelzeichen; der Coefficient C unter dem ersten Wurzelzeichen ist von der Länge und dem Material des Stabes ganz unabhängig; derselbe hängt nach Obigem nur von der Art der Endbefestigung ab. Für die in Fig. 128 bis 131 dargestellten Fälle hat C folgende Werthe:

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4 \pi^2$	$= 2 \pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1,57$	$= 3,14$	$= 6,28$	$= 4,44.$

Die Coefficienten E , K und s , welche unter dem zweiten Wurzelzeichen der Gleichung 119 vereinigt sind, haben für alle Stäbe aus demselben Material gleiche Werthe; wird als Flächeneinheit das Quadrat-Centimeter, als Krafteinheit das Kilo-

125.
Querschnitts-
ermittelung.

gramm angenommen, und werden für K und E die Werthe aus der Tabelle auf S. 53 eingeführt, so ist

für Schmiedeeisen:	für Gufseisen:	für Holz:
$E = 2000000$	1000000	120000 kg für 1 qcm
$K = 700$	500	65 » »
$s = 5$	8	10
$\sqrt{\frac{E}{Ks}} = 23,9$	$15,8$	$13,6$.

Die beiden Gröfsen \mathcal{F} und F endlich, welche sich unter dem dritten Wurzelzeichen der Gleichung 119 befinden, sind von der Form und Gröfse der Querschnittsfläche abhängig. Die einfache Druckgleichung wird für die Querschnittsermittlung ausreichen, wenn $l \leq l_1$ ist. (Man vergleiche auch Fig. 132.)

Bezeichnet man eine, in der Regel die kleinste, Abmessung des Stabquerschnittes mit h , einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten mit c und setzt

$$\mathcal{F} = c F h^2, \dots \dots \dots 121.$$

so ist $\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} = \sqrt{\frac{c F h^2}{F}} = h \sqrt{c}$, und Gleichung 119 übergeht in

$$\frac{l_1}{h} = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{Ks}} \sqrt{c} \dots \dots \dots 122.$$

In dieser Gleichung ist, wenn die Querschnittsform bestimmt ist, Alles gegeben bis auf h . Es ist deshalb für diese Abmessung meistens derjenige Werth leicht zu ermitteln, bei welchem Gleichung 122 erfüllt ist, für welchen also die Querschnittsberechnung nach der einfachen Druckgleichung vorgenommen werden kann.

Die Werthe von $\frac{l_1}{h}$, welche sich nach Obigem für die verschiedenen Materialien und verschiedenen Befestigungsweisen ergeben, sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Constructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingepannt.	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere lothrecht geführt.
Schmiedeeisen .	$\frac{l_1}{h} = 23,9 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 37,52 \sqrt{c}$	$= 75,04 \sqrt{c}$	$= 150,1 \sqrt{c}$	$= 106 \sqrt{c}$
Gufseisen . . .	$\frac{l_1}{h} = 15,8 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 24,8 \sqrt{c}$	$= 49,6 \sqrt{c}$	$= 95,2 \sqrt{c}$	$= 70,15 \sqrt{c}$
Holz	$\frac{l_1}{h} = 13,6 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 21,35 \sqrt{c}$	$= 42,7 \sqrt{c}$	$= 85,4 \sqrt{c}$	$= 60,38 \sqrt{c}$

Mittels dieser Tabelle sind für die verschiedenen Querschnitte der Praxis die Grenzwerte l_1 , bzw. h vielfach ohne Schwierigkeit zu ermitteln, und es soll das einzuschlagende Verfahren weiter unten für eine Reihe von Querschnitten gezeigt werden.

Bei sehr grossen Stablängen ergeben sich häufig aus der Gleichung 122 für h Werthe, welche praktisch nicht wohl ausführbar sind; in diesem Falle muss man den Querschnitt des Stabes nach der Zerknickungsformel (Gleichung 117) berechnen. Die auf den Stab entfallende Last P ist dann (nach Fig. 132) kleiner, als die wegen einfachen Druckes zulässige Kraft $K F$; es findet also eine geringere Beanspruchung

126.
Querschnitts-
ermittlung
für lange
Stäbe.

auf die Flächeneinheit statt, als ohne Zerknickungsgefahr möglich wäre. Der Querschnitt wird demnach nicht voll ausgenutzt: es ist ein Zuschlag an Material gemacht worden.

Mit einigen Abänderungen kann aber auch hier der im vorhergehenden Artikel gezeigte Rechnungsgang beibehalten werden. Es bezeichne zu diesem Zwecke k diejenige Spannung, welche auf die Flächeneinheit in dem mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken berechneten Querschnitt entfällt; alsdann ist, wenn die Querschnittsfläche wieder = F ist,

$$k = \frac{P}{F} \dots \dots \dots 123.$$

Nun ist aber nach Gleichung 117 die zulässige Tragkraft

$$P = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2},$$

also die zulässige Beanspruchung für die Flächeneinheit der Querschnittsfläche

$$k = \frac{C E \mathcal{F}}{s F l^2} \dots \dots \dots 124.$$

und, wenn wiederum $\mathcal{F} = c F h^2$ eingesetzt wird,

$$k = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 125.$$

Berechnet man nach dieser Formel die zulässige Beanspruchung für gegebene Verhältnisse von $\frac{h}{l}$ und setzt man den gefundenen Werth in Gleichung 123 ein, so ergibt sich die nöthige Querschnittsfläche aus derselben zu

$$F = \frac{P}{k}, \dots \dots \dots 126.$$

in welcher Gleichung P die wirkliche Belastung des Stabes ist.

Selbstverständlich darf k nie gröfser werden, als K . Es wird aber k zu K , wenn l zu l_1 wird. Es gelten also nur diejenigen Werthe für k , welche kleiner als K sind.

Es ist demnach

$$k = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l} \right)^2, \quad K = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{k}{K} = \frac{l_1^2}{l^2};$$

folglich

$$k = K \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 127.$$

Trägt man die Werthe von k , welche sich für die verschiedenen Gröfsen von l ergeben, als Ordinaten, die zugehörigen l als Abscissen auf und beachtet, dafs für $l < l_1$ stets $k = K$ sein mufs, so erhält man eine graphische Darstellung, welche die Veränderlichkeit der zulässigen Beanspruchung bei verschiedenen Stablängen darstellt.

Nach der Formel 125 lassen sich Tabellen für die verschiedenen Querschnittsformen berechnen, aus denen sodann für die möglichen Werthe von $\frac{h}{l}$ die Werthe von k leicht entnommen werden können.

Für die Haupt-Constructionsmaterialien und die Hauptfälle der Praxis sind die aus Gleichung 125 sich ergebenden Ausdrücke in der umstehenden Tabelle zusammenge stellt.

Constructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingepannt.	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere lothrecht geführt.
Schmiedeeisen	$k = 400\,000 c C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 986\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 3\,944\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 15\,776\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 7\,888\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Gusseisen . . .	$k = 125\,000 c C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 1\,230\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 4\,920\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 2\,460\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Holz	$k = 12\,000 c C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 29\,520 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 118\,080 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 472\,320 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 236\,160 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$

127.
Ermittlung von l_1 und k für:

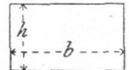
Es wird sich nunmehr darum handeln, für die wichtigeren in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen von auf Druck, bezw. Zerknicken beanspruchten Stäben die Werthe von l_1 und k zu ermitteln. Bei diesen Untersuchungen und Berechnungen wird der Fall 2, bei welchem beide Enden frei drehbar sind, zu Grunde gelegt werden, da derselbe der häufigste ist und die anderen Fälle durch einfache Multiplication leicht auf denselben zurückgeführt werden können.

128.
rechteckige Querschnitte.

α) Rechteckiger Querschnitt (Fig. 133). Die beiden Abmessungen desselben seien h und b , wobei $h < b$; alsdann ist

$$c = \frac{f}{F h^2} = \frac{b h^3}{12 b h^3} = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,289.$$

Fig. 133.



Nach Gleichung 122 wird für den zweiten Zerknickungsfall

für Schmiedeeisen:	Gusseisen:	Holz:	
$\frac{l_1}{h} = 21,68$	$= 14,33$	$= 12,84$ 128.

Soll also die einfache Druckgleichung anwendbar sein, so darf die Stablänge nicht mehr als rund das 21-fache, bezw. das 14- und 12-fache der kleineren Querschnittsabmessung betragen.

Da $h < b$ angenommen wurde, wird h bei gleicher Größe der Querschnittsfläche am größten, wenn $h = b$, d. i. wenn das Rechteck zum Quadrat wird. Für gedrückte Stäbe ist also der günstigste Rechteckquerschnitt der quadratische.

In den meisten Fällen ergibt die Ermittlung von k aus der Gleichung 128 so große Werthe, dass die Gleichung $F = \frac{P}{K}$ nicht mehr zutrifft; alsdann ist k nach Gleichung 125 zu bestimmen. Man erhält wiederum für den Fall 2 abgerundet

für Schmiedeeisen:	Gusseisen:	Holz:	
$k = 329\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 102\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 9800 \left(\frac{h}{l}\right)^2$ 129.

Für eine Anzahl häufig vorkommender Werthe von $\frac{h}{l}$ sind die zulässigen Beanspruchungen k berechnet und in der Tabelle auf S. 115 zusammengestellt.

129.
kreisförmige Querschnitte.

β) Kreisförmiger Querschnitt. Ist der Durchmesser d , so wird

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}, \quad f = \frac{d^4 \pi}{64}, \quad h = d, \quad c = \frac{f}{F h^2} = \frac{4 d^4 \pi}{64 d^2 \pi d^2} = \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,25.$$

Wiederum für den Fall 2 wird aus Gleichung 122

für Schmiedeeisen:	Gusseisen:	Holz:	
$\frac{l_1}{h} = 18,76$	$= 12,4$	$(= 10,7)$ 130.

Der Werth für Holz ist eingeklammert, weil diese Querschnittsform beim Holz nur ausnahmsweise vorkommt.

Aus Gleichung 125 ergibt sich für den Fall 2 und

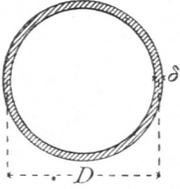
für Schmiedeeisen:	Gusseisen:	
$k = 246\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 76\,900 \left(\frac{h}{l}\right)^2$ 131.

woraus man die in der Tabelle auf S. 115 angegebenen Werthe von k erhält.

γ) Kreisringförmiger Querschnitt (Fig. 134). Ist die als gering angenommene Wandstärke gleich δ , der mittlere Durchmesser D , so ist annähernd

130.
kreisringförmige
Querschnitte.

Fig. 134.



$$F = D \pi \delta, \quad \mathcal{I} = \frac{D^3 \pi \delta}{8}, \quad h = D,$$

$$c = \frac{\mathcal{I}}{F h^2} = \frac{D^3 \pi \delta}{8 D \pi \delta D^2} = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,353.$$

Nach Gleichung 122 wird für Fall 2 und für Schmiedeeisen:

$$\frac{l_1}{h} = 26,49 \quad \text{Gufseisen:} \quad = 17,5 \dots \dots \dots 132.$$

Die Construction der Enden ist bei den gusseisernen Säulen meistens eine derartige, das man den Fall 4 der Rechnung zu Grunde legen, also annehmen kann, das untere Ende frei eingespannt, das obere lothrecht geführt. Alsdann ist (siehe die Tabelle auf S. 106)

$$\frac{l_1}{h} = 70,15 \cdot 0,353 = 24,76 = \frac{l_1}{D}, \quad D = 0,04 l,$$

$$\delta = \frac{P}{D \pi K} = \frac{25 P}{l \pi K} = 0,00016 \frac{P}{l} \text{ Centim. } (P \text{ in Kilogr. und } l \text{ in Met.)}$$

Nach Gleichung 125 ergibt sich

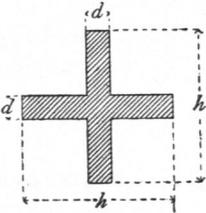
	für Schmiedeeisen:	Gufseisen:
für Fall 2:	$k = 490\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 153\,750 \left(\frac{h}{l}\right)^2$
für Fall 4:	$k = 980\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$

δ) Kreuzförmiger Querschnitt.

131.
kreuzförmige
Querschnitte.

a) Gufseisen. Wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, so wird man den Querschnitt am besten so anordnen, das die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen gleich sind, d. h. das die beiden Hauptträgheitsmomente gleich sind. Diese Gleichheit findet statt, wenn die beiden Kreuzarme gleiche Länge und gleiche Dicke haben (Fig. 135). Alsdann ist

Fig. 135.



$$\mathcal{I} = \frac{1}{12} [d h^3 + h d^3 - d^4] = \frac{d h^3}{12} \left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 - \left(\frac{d}{h}\right)^3 \right].$$

In den meisten Fällen ist $\frac{d}{h}$ ein kleiner Bruch, so das ohne merklichen Fehler $\left(\frac{d}{h}\right)^2$ und $\left(\frac{d}{h}\right)^3$ vernachlässigt werden können, jedenfalls

dann, wenn der vorläufigen Querschnittsbestimmung eine nachträgliche genauere Berechnung folgt. Man erhält alsdann

$$\mathcal{I} = \frac{d h^3}{12}, \quad F = 2 h d - d^2 = 2 h d \left(1 - \frac{d}{2 h} \right) \quad \text{oder angenähert } F = 2 h d;$$

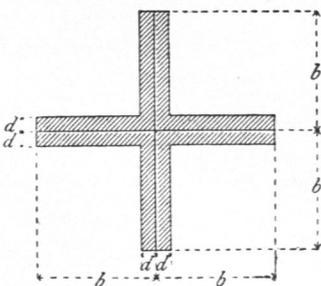
$$c = \frac{\mathcal{I}}{F h^2} = \frac{d h^3}{12 \cdot 2 h^3 d} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Auf Grundlage der Gleichungen 122 u. 125 wird für den Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 10,12 \quad \text{und} \quad k = 51\,250 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 133.$$

Hiernach sind die betreffenden Werthe in der Tabelle auf S. 115 berechnet.

Fig. 136.



b) Schmiedeeisen. Bei diesem Material werde zunächst nach Fig. 136 der aus vier gleichschenkeligen Winkeleisen zusammengesetzte Querschnitt betrachtet. Es ist

$$F = 4 (2 b d - d^2) = 8 b d - 4 d^2 \quad \text{oder angenähert } F = 8 b d;$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{12} [2 d (2 b)^3 + 2 b (2 d)^3 - 2 d (2 d)^3],$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{16}{12} b^3 d \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] \quad \text{oder angenähert } \mathcal{I}_1 = \frac{16}{12} b^3 d;$$

$$h = 2 b, \quad c = \frac{16 b^3 d}{12 \cdot 8 b d \cdot 4 b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Demnach ist

$$\frac{l_1}{h} = \frac{l_1}{2 b} = 15,31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 134.$$

In den meisten Fällen befinden sich zwischen den vier Winkeleifen des Querschnittes Zwischenräume von der Breite e (Fig. 137). Alsdann ist zunächst wieder $F = 8 b d$; das Trägheitsmoment \mathcal{J} ergibt sich, wie folgt. Es sei das Trägheitsmoment eines Winkeleifens bezogen auf die zu einer äußeren Kante parallele Schweraxe i_s , bezogen auf die zur Kante parallele Schweraxe $A A$ des Gesamtschnittes i und der Abstand des Winkeleifen-Schwerpunktes S von der äußeren Kante gleich a ; alsdann ist nach Art. 47 (S. 33)

$$i = i_s + f \left(a + \frac{e}{2} \right)^2 = i_s + f a^2 + f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right),$$

und das Trägheitsmoment des Gesamtschnittes für die Axe $A A$

$$\mathcal{J} = 4 i_s + 4 f a^2 + 4 f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right).$$

Der oben für den Querschnitt ohne Zwischenraum gefundene Werth des Trägheitsmomentes ist offenbar

$$\mathcal{J}_1 = 4 i_s + 4 f a^2, \text{ also } \mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + 4 f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right).$$

Nun war $\mathcal{J}_1 = \frac{16}{12} b^3 d$; mithin wird $\mathcal{J} = \frac{16}{12} b^3 d + 4 f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right)$, und, da $4 f = 8 b d$,

$$\frac{\mathcal{J}}{F} = \frac{\frac{16}{12} b^3 d + 8 b d \left(e a + \frac{e^2}{4} \right)}{8 b d} = \frac{b^2}{6} + a e + \frac{e^2}{4}.$$

Ferner ist $h = 2 b + e$, $c = \frac{\mathcal{J}}{F h^2} = \frac{\frac{b^2}{6} + a e + \frac{e^2}{4}}{(2 b + e)^2} = \frac{1}{12} \frac{2 b^2 + 12 a e + 3 e^2}{4 b^2 + 4 b e + e^2}$.

Bei den »Deutschen Normal-Profilen« ist nahezu $a = 0,33 b$; daher wird

$$c = \frac{1}{12} \frac{2 + 3,6 \left(\frac{e}{b} \right) + 3 \left(\frac{e}{b} \right)^2}{4 + 4 \left(\frac{e}{b} \right) + \left(\frac{e}{b} \right)^2}.$$

$\frac{e}{b}$ ist meistens ein kleiner Bruch; in Folge dessen ist genau genug

$$c = \frac{1}{12} \frac{2 + 3,6 \frac{e}{b}}{4 + 4 \frac{e}{b}}.$$

Man erhält

für $\frac{e}{b} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	im Mittel
$c = 0,0472$	0,0465	0,0457	0,0453	0,0450	0,0447	0,046
$\sqrt{c} = 0,2173$	0,2156	0,2138	0,2128	0,2121	0,2114	0,215.

Legt man die Mittelwerthe von c und \sqrt{c} zu Grunde, so ergibt sich (immer wieder für den Fall 2)

$$\frac{l_1}{h} = 16,13 \text{ und } k = 180\,000 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 135.$$

Der häufig für Druckstäbe verwendete I-förmige, aus vier Winkeleifen bestehende Querschnitt (Fig. 138) hat ein kleinstes Trägheitsmoment, welches genau mit dem des zuletzt betrachteten Querschnittes übereinstimmt. Es ist also für diesen Querschnitt $\frac{l_1}{h}$, so wie k nach Gleichung 135 zu ermitteln, wobei für h die kleinere Abmessung des Querschnittes einzuführen ist.

Fig. 137.

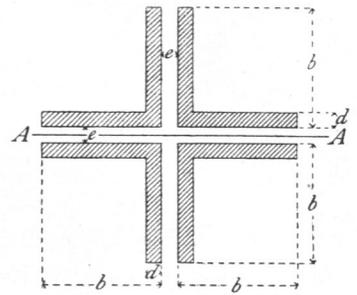


Fig. 138.

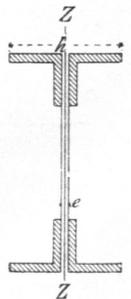
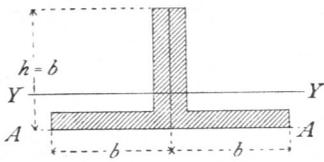


Fig. 139.



ε) Querschnitte aus zwei Winkelleifen.

α) Die beiden Winkelleifen bilden ein **T** und sind gleichschenkelig (Fig. 139). \mathcal{J}_{min} findet für die Axe YY statt. Für ein Winkelleifen ist

132.
Querschnitte aus 2 Winkelleifen.

$$i_A = \frac{1}{3} [db^3 + bd^3 - d^4] = \frac{b^3d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right]$$

und

$$f = 2bd - d^2 = bd \left[2 - \frac{d}{b} \right].$$

Ferner ist

$$i_Y = i_A - f a^2 = \frac{b^3d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - bd \left(2 - \frac{d}{b} \right) a^2.$$

Im Mittel ist

$$a = \frac{b}{3,3}, \text{ also } a^2 = \frac{b^2}{10,89},$$

sonach

$$i_Y = \frac{b^3d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 - \frac{2}{3,6} + \left(\frac{1}{3,6}\right) \frac{d}{b} \right] = \frac{b^3d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 - 0,56 + 0,28 \frac{d}{b} \right]$$

und genügend genau für kleine Werthe von $\frac{d}{b}$

$$i_Y = \frac{b^3d}{3} \left(0,44 + 0,28 \frac{d}{b} \right).$$

Für den ganzen Querschnitt ist demnach

$$\mathcal{J}_Y = \frac{b^3d}{3} \left(0,88 + 0,56 \frac{d}{b} \right)$$

und, da $h = b$ ist,

$$c = \frac{\mathcal{J}_Y}{F h^2} = \frac{\frac{b^3d}{3} \left(0,88 + 0,56 \frac{d}{b} \right)}{2bd \left(2 - \frac{d}{b} \right) b^2} = \frac{\left(0,88 + 0,56 \frac{d}{b} \right)}{6 \left(2 - \frac{d}{b} \right)}.$$

Im Mittel wird

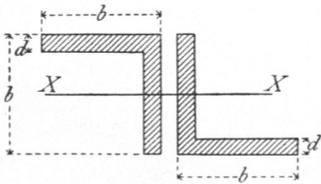
$$c = 0,085 \text{ und } \sqrt{c} = 0,291.$$

Unter Benutzung der Mittelwerthe erhält man für den Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 21,8 \text{ und } k = 335\,000 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 136.$$

Da nur das Trägheitsmoment für die Axe YY in Frage kommt, dieses aber von der Größe des Zwischenraumes der beiden Winkelleifen ganz unabhängig ist, so gelten die gefundenen Werthe auch, falls zwischen beiden Winkelleifen ein Raum von der beliebigen Breite e ist.

Fig. 140.



β) Die beiden Winkelleifen bilden ein **Z** und sind gleichschenkelig (Fig. 140).

Für alle praktischen Verhältnisse von d zu b ist das Trägheitsmoment für die Axe XX das kleinste, also hier in Betracht zu ziehen. In ähnlicher Weise, wie oben, erhält man

$$\mathcal{J}_X = \frac{d b^3}{3} \left[2 - \frac{9}{2} \left(\frac{d}{b}\right) + 5 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 2 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right],$$

und genügend genau

$$\mathcal{J}_X = \frac{d b^3}{3} \left[2 - \frac{9}{2} \left(\frac{d}{b}\right) + 5 \left(\frac{d}{b}\right)^2 \right].$$

Nun ist $F = 4db$ und $h = b$, mithin

$$c = \frac{\mathcal{J}_X}{F h^2} = \frac{1}{12} \left[2 - \frac{9}{2} \left(\frac{d}{b}\right) + 5 \left(\frac{d}{b}\right)^2 \right] = 0,167 - 0,375 \left(\frac{d}{b}\right) + 0,417 \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Im Mittel ist $c = 0,12$, sonach $\sqrt{c} = 0,346$ und für Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 25,96 \text{ und } k = 473\,300 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 137.$$

c) Die beiden Winkeleifen sind über Ecke gestellt (Fig. 141).

\mathcal{F}_{min} findet für die Axe VV , \mathcal{F}_{max} für die zu ersterer senkrechte Symmetrie-Axe WW statt. Als Coordinatenachsen sollen die Y - und Z -Axe gewählt werden. \mathcal{F}_{min} wird wie folgt ermittelt. Bei dem vollen, aus vier Winkeleifen gebildeten Querschnitte ist das Trägheitsmoment für alle Schwerpunktsachsen gleich und hat den in Art. 131 (S. 109) gefundenen Werth. Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Fig. 141 in Bezug auf die Y - und Z -Axe ist offenbar halb so groß, als dasjenige des vollen Querschnittes für diese Axen, d. h. es ist

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Z = \frac{8}{12} b^3 d + 2f \left(a e + \frac{e^2}{4} \right).$$

Wie in Art. 58 (S. 38) nachgewiesen wurde, ist

$\mathcal{F}_V = \mathcal{F}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{F}_Z \sin^2 \alpha - H \sin 2 \alpha$, in welcher Gleichung $H = \int y z d f$ ist. Im vorliegenden Falle ist $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Z$ und $\alpha = 45$ Grad, also

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V = \mathcal{F}_Y - H \quad \text{und} \quad H &= 4 b d \left(\frac{e+d}{2} \right) \left(\frac{e+b}{2} \right) - 2 d^2 \left(\frac{e+d}{2} \right)^2, \\ H &= b d (e+d) (e+b) - \frac{d^2 (e+d)^2}{2}. \end{aligned}$$

Sonach

$$\mathcal{F}_V = \frac{8}{12} b^3 d + 2 \cdot 2 b d \left(a e + \frac{e^2}{4} \right) - b d (e+d) (e+b) + \frac{d^2 (e+d)^2}{2}.$$

Wird wiederum $a = 0,33 b$ eingeführt, so ergibt sich nach einigen Umformungen und bei Vernachlässigung der sehr kleinen Glieder mit $\left(\frac{d}{b}\right)^2$ und $\left(\frac{d}{b}\right)^3$,

$$\mathcal{F}_V = \mathcal{F} = b^3 \left[\frac{2}{3} d + \frac{d}{b} (0,2 e - d) \right] \dots \dots \dots 138.$$

Ferner ist angenähert $F = 4 b d$ und $h = 2 b + e$, so dass

$$c = \frac{\mathcal{F}}{F h^2} = \frac{\frac{b^3 d}{3} \left[2 + \frac{1}{b} (0,6 e - 3 d) \right]}{4 b d (2 b + e)^2} = \frac{1}{12} \left[2 + \frac{0,6 e - 3 d}{b} \right].$$

In den meisten Fällen ist $e = d$ oder sehr wenig von d verschieden. Setzt man für solche Fälle $e = d$, so wird, wiederum unter Fortlassung von $\left(\frac{d}{b}\right)^2$,

$$c = \frac{2 - 2,4 \frac{d}{b}}{12 \left(4 + 4 \frac{d}{b} \right)} = \frac{1 - 1,2 \frac{d}{b}}{24 \left(1 + \frac{d}{b} \right)},$$

und genügend genau für die meisten Fälle der Praxis

$$c = \frac{1}{12} \left[0,5 - 1,1 \frac{d}{b} \right].$$

Man erhält als Mittelwerthe $c = 0,03$, daher $\sqrt{c} = 0,173$ und für Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 12,98 = \infty 13 \quad \text{und} \quad k = 118320 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 139.$$

133.
L-förmige
Querschnitte.

§) Das einfache gleichschenkelige Winkeleifen (Fig. 143). Das Trägheitsmoment des neben stehenden Kreuzquerschnittes (Fig. 142) ist bei geringer Schenkelfstärke für alle Schweraxen (siehe Art. 131, S. 109)

$$\mathcal{F} = \frac{d h^3}{12}, \quad \text{und da } h = 2 b, \text{ auch } \mathcal{F} = \frac{2 d b^3}{3}.$$

Zu diesem Trägheitsmomente trägt der Theil an der einen Seite der Axe VV genau eben so viel

Fig. 141.

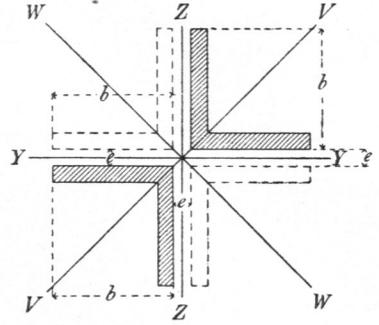


Fig. 142.

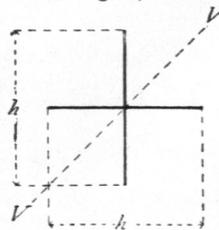
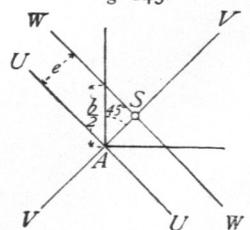


Fig. 143.



bei, wie der Theil an der anderen Seite. Wir können also auch angenähert annehmen, dafs für jede beliebige durch A gelegte Axe das Trägheitsmoment des Winkeleisens halb so grofs ist, als der obige Ausdruck, d. h. dafs für jede durch A gelegte Axe, also auch für die Symmetrieaxe VV (Fig. 143) stattfindet:

$$i_V = i_U = \frac{d b^3}{3}.$$

Wir suchen das Trägheitsmoment für diejenige Schwerpunktsaxe, in Bezug auf welche es ein Minimum wird; ein Minimum wird das Trägheitsmoment für die zur Symmetrieaxe VV im Schwerpunkt S senkrechte Hauptaxe WW . Demnach ist i_W zu ermitteln. Es ist nach Gleichung 18

$$i_U = i_W + F e^2 \quad \text{und} \quad i_W = i_U - F e^2 = \frac{d b^3}{3} - 2 b d e^2.$$

Der Schwerpunkt S ist aber der Schnittpunkt der Symmetrieaxe VV mit der Verbindungslinie der beiden Schenkelschwerpunkte (wenigstens für den vorliegenden Zweck genau genug), also

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e}{b} = \frac{2e}{b} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{b^2}{4 \cdot 2} = \frac{b^2}{8};$$

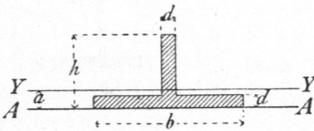
mithin

$$i_W = \frac{d b^3}{3} - \frac{2 b^3 d}{8} = \frac{d b^3}{12}, \quad c = \frac{i_W}{F h^2} = \frac{d b^3}{12 \cdot 2 b d b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Man erhält nunmehr

$$\frac{l_1}{b} = \frac{l_1}{h} = 15,31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000 \left(\frac{b}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 140.$$

Fig. 144.



γ) Der T-förmige Querschnitt.

a) Breitfüßiges T-Eisen der »Deutschen Normal-Profile« (Fig. 144). Bei diesem ist $h = \frac{b}{2}$, und das kleinste Trägheitsmoment findet für die Axe YY statt. Das selbe ist

134.
T-förmige
Querschnitte.

$$J_Y = J_A - F a^2 = \frac{d h^3}{3} + \frac{b d^3}{3} - \frac{d^4}{3} - F a^2 = \frac{d b^3}{24} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - F a^2.$$

Es ist $F = b d + h d - d^2 = d(1,5 b - d)$ oder angenähert $F = \frac{3 b d}{2}$, fonach

$$c = \frac{J}{F h^2} = \frac{\frac{d b^3}{24} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - F a^2}{\frac{3 b d}{2} \cdot \frac{b^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{9} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - 4 \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Im Mittel ist bei den »Deutschen Normal-Profilen« $a = \frac{h}{4,3} = \frac{b}{8,3}$, also

$$c = \frac{1}{9} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - \frac{1}{18,5},$$

und mit einer für vorliegenden Fall hinreichenden Annäherung

$$c = 0,057 + 0,89 \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Als Mittelwerth kann man $c = 0,063$ und $\sqrt{c} = 0,25$ setzen. Hieraus folgt für Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 18,76 \quad \text{und} \quad k = 248\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 141.$$

β) Hochstegiges T-Eisen der »Deutschen Normal-Profile« (Fig. 145). Das kleinste Trägheitsmoment ist J_Z , und zwar ist $h = b$, mithin

$$J_Z = \frac{1}{12} [b d^3 + d b^3 - d^4] = \frac{d b^3}{12} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right].$$

Da ferner $F = 2 b d - d^2 = b d \left(2 - \frac{d}{b}\right)$ ist, so wird

$$c = \frac{\mathcal{F}}{F h^3} = \frac{\mathcal{F}}{F b^3} = \frac{d b^3 \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right]}{12 b^3 d \left(2 - \frac{d}{b} \right)} = \frac{1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3}{12 \left(2 - \frac{d}{b} \right)}$$

und genügend genau

$$c = \frac{0,0833 \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 \right]}{2 - \frac{d}{b}}$$

Man erhält als Mittelwerth $c = 0,045$ und $\sqrt{c} = 0,212$ und für diese Mittelwerthe und Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 15,9 \quad \text{und} \quad k = 177400 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 142.$$

c) Zwei Winkeleisen (Fig. 139). Siehe das unter ϵ , α (S. 111) Gefagte.

⊕ Der I-förmige Walzbalken-Querschnitt (Fig. 146). \mathcal{F}_{min} findet in Bezug auf die Z-Axe statt. Es ist

$$\mathcal{F}_Z = \mathcal{F} = \frac{1}{12} \left[2 t b^3 + d^3 (h - 2 t) \right] = \frac{t b^3}{12} \left[2 + \left(\frac{d}{b}\right)^3 \left(\frac{h}{t} - 2\right) \right].$$

Unbedenklich kann man angenähert setzen

$$F = 2 b t + d h \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \frac{t b^3}{6}.$$

Die früher im Ausdrucke für c mit h bezeichnete Größe ist hier gleich b , folglich

$$c = \frac{t b^3}{6 (2 b t + d h) b^2} = \frac{1}{6 \left(2 + \frac{d h}{b t} \right)}$$

Für die »Deutschen Normal-Profile« Nr. 8 bis 24, welche hier vorzugsweise in Betracht kommen, liegt c zwischen den Grenzen 0,0511 und 0,0476, und es ist im Mittel

$$c = 0,049 \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,22.$$

Man erhält aus diesen Mittelwerthen für den Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 16,51 \quad \text{und} \quad k = 193000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 143.$$

Wegen des I-förmigen aus vier Winkeleisen bestehenden Querschnittes (Fig. 138) wird auf die Bemerkung auf S. 110 (unter δ am Schlusse) hingewiesen; für denselben ist im Mittel (Fall 2)

$$\frac{l_1}{h} = 16,13 \quad \text{und} \quad k = 180000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 144.$$

Aus den im Vorstehenden gefundenen Ergebnissen sind für eine Reihe von Werthen des $\frac{h}{l}$ und für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen die zulässigen Beanspruchungen ausgerechnet und in neben stehender Tabelle zusammengestellt.

Wenn der auf Druck beanspruchte Stab keine drehbaren Enden hat, also Fall 2 nicht zu Grunde gelegt werden kann, so ist die neben stehende Tabelle mit kleiner Abänderung verwendbar. Die zulässigen Beanspruchungen für die Fälle 1, 3 und 4 ergeben sich durch Multiplication der Tabellenwerthe mit $\frac{1}{4}$, 4, bzw. 2. Diese Werthe sind natürlich nur verwendbar, wenn sie kleiner als K sind; anderenfalls ist K als zulässige Beanspruchung der Berechnung zu Grunde zu legen.

Der Gebrauch der in den Art. 124 bis 126 (S. 104 bis 108) vorggeführten allgemeinen Regeln, so wie der für verschiedene Querschnittsformen entwickelten Ableitungen in den Art. 128 bis 135 (S. 108 bis 114) mag an einigen Beispielen erläutert werden.

α) In einem aus Gufseisen mit kreisförmigem Querschnitte herzustellenden Stabe herrsche ein größter Druck $P = 3300$ kg. Die Länge l des Stabes betrage 100 cm; der Kreisdurchmesser d soll bestimmt werden unter Zugrundelegung des Falles 2.

Fig. 145.

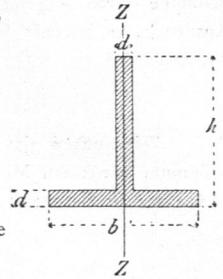
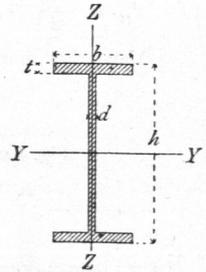


Fig. 146.



135.
I-förmige
Querschnitte.

136.
Beispiele.

Tabelle

der zulässigen Beanspruchungen k (in Kilogramm für 1 qcm Querschnittsfläche) für lange gedrückte Stäbe.
Fall 2: Drehbare Enden (Fig. 129, S. 104).

$\frac{l}{h}$	Rechteck- querschnitt			Kreis- querschnitt		Kreising- querschnitt		Kreuzförmiger Querschnitt		Zwei Winkel- eisen bilden ein			Winkel- eisen		T-Eisen		I-Quer- schnitt
	Schmiede- eisen	Gußeisen	Holz	Schmiede- eisen	Gußeisen	Schmiede- eisen	Gußeisen	Gußeisen	Schmiede- eisen: 4 L-Eisen (Fig. 137)	T	Z	Kreuz	gleich- schenkelig	breitfüßig	hochfüßig	Schmiede- eisen	
11	—	—	—	—	—	—	—	423	—	—	—	—	—	—	—	—	
12	—	—	—	—	—	—	—	356	—	—	—	—	—	—	—	—	
13	—	—	58	—	473	—	—	303	—	—	—	700	—	—	—	—	
14	—	—	50	—	392	—	—	261	—	—	—	603	—	—	—	—	
15	—	455	43,5	—	340	—	—	228	—	—	—	525	—	—	—	—	
16	—	400	38	—	300	—	—	200	—	—	—	462	—	—	693	—	
17	—	355	34	—	266	—	—	177	623	—	—	409	623	—	613	667	
18	—	313	30	—	237	—	474	158	555	—	—	365	555	—	547	596	
19	—	284	27	683	213	—	426	142	498	—	—	327	498	687	491	535	
20	—	256	24,5	616	192	—	384	128	450	—	—	295	450	620	443	482	
22	680	212	20	509	159	—	317	106	372	692	—	244	372	512	366	400	
24	571	178	17	428	133	—	267	89	312	581	—	205	312	430	308	335	
25	526	164	15,7	394	123	—	246	82	288	536	—	189	288	396	283	308	
26	487	151	14	364	113	—	227	—	266	495	700	175	266	366	262	285	
27	451	140	13	338	105	672	210	—	247	459	649	162	247	340	243	265	
28	420	131	12,5	314	98	625	196	—	230	427	603	150	229	316	226	246	
29	391	122	11,6	293	91,4	582	183	—	214	398	562	140	214	294	210	229	
30	365	114	11,0	274	85	544	171	—	200	372	526	131	200	275	197	214	
32	321	100	9,5	240	75	478	150	—	175	327	462	115	176	242	173	188	
35	268	83	8	201	63	400	125	—	147	273	386	96	140	202	144	166	
40	205	64	6	154	48	306	96	—	112	209	296	74	112	155	110	120	

Soll man nach der einfachen Druckgleichung rechnen dürfen, so muß nach Gleichung 130: $\frac{l_1}{d} = 12,4$

sein. Es würde $f = \frac{3300}{500} = 6,6$ qcm und $d = \sqrt{\frac{4f}{\pi}} = 2,9$ cm, woraus sich $\frac{l}{d} = \frac{100}{2,9} = 34,4$ ergibt. Bei diesem Verhältniß ist die einfache Druckgleichung also nicht mehr anwendbar. Wählt man den Durchmesser vorläufig etwas stärker als 2,9, etwa $d = 5$ cm, so wird $\frac{l}{h} = 20$ und nach obiger Tabelle $k = 192$.

Alsdann ist $f = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3300}{192} = 17$ qcm und $d = 4,7$ cm. Der zu 5 cm angenommene Durchmesser würde also als angemessen zu bezeichnen sein.

β) Für denselben Stab soll der Querschnitt als Kreuzquerschnitt bestimmt werden. Wenn die einfache Druckgleichung angewendet wird, ergibt sich $f = \frac{3300}{500} = 6,6$ qcm. Wählt man etwa vorläufig $d = 1$ cm und $h = 6$ cm, demnach die Querschnittsfläche $= 6 + 5 = 11$ qcm, so ergibt sich $\frac{l}{h} = \frac{100}{6} = 16,67$ und nach obiger Tabelle (durch Interpolation) $k = 184$ kg. Mithin beträgt die erforderliche Querschnittsfläche $f = \frac{3300}{184} = 18$ qcm, und es ist deshalb noch eine Vergrößerung des Querschnittes vorzunehmen.

Wird $h = 7$ cm gewählt, so ist $\frac{l}{h} = \frac{100}{7} = 14$ und nach obiger Tabelle $k = 261$ kg. Sonach wird nunmehr $f = \frac{3300}{261} = 12,6$ qcm, während der gewählte Querschnitt 13 qcm mißt, also fast genau mit dem für f gefundenen Werthe übereinstimmt.

γ) In einem aus Schmiedeeisen zu konstruierenden Stabe herrsche der größte Druck $P = 3300$ kg. Es sei $l = 100$ cm; der Stab werde aus einem einfachen Winkeleisen konstruiert, dessen Abmessungen zu bestimmen sind. Es ist der Zerknickungsfall 4 zu Grunde zu legen.

Bei allen Querschnittsbestimmungen für schmiedeeiserne Stäbe soll, sobald Zerknicken in Frage kommt, von der Verchwächung durch Nietlöcher abgesehen werden, weil auf dieselbe auch in der Herleitung der Formeln für k und l_1 keine Rücksicht genommen ist. Wenn sich die volle Beanspruchung K als zulässig ergibt, so ist die Verchwächung durch Niete zu berücksichtigen.

Würde man für einfachen Druck konstruieren, so würde sich der Querschnitt $f = \frac{3300}{700} = 4,7$ qcm ergeben.

Es möge ein Winkeleisen mit den Abmessungen $5,5 \times 5,5 \times 0,8$ cm gewählt werden; alsdann ist $\frac{l}{h} = \frac{100}{5,5} = 18$; für den Fall 2 ist nach der Tabelle auf S. 115: $k = 555$ kg, für den Fall 4 also größer, als 700 kg. Es braucht daher hier auf Zerknicken keine Rücksicht genommen zu werden. Der Brutto-Querschnitt des erwähnten Winkeleisens beträgt 8,16 qcm (siehe die »Deutschen Normalprofile« für gleichschenkelige Winkeleisen), der Netto-Querschnitt nach Abzug eines Nietloches von 1,6 cm Durchmesser $8,16 - 1,28 = 6,88$ qcm. Es könnte also noch ein kleineres Winkeleisen-Caliber gewählt werden.

δ) Es sei $P = 9500$ kg und $l = 300$ cm; der Stab sei aus Eichenholz mit quadratischem Querschnitt herzustellen, und es soll der Fall 4 zu Grunde gelegt werden.

Für einfachen Druck wäre $f = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wählt man die Seite des Quadrates 14 cm, so wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14} = \infty 22$ und nach der Tabelle auf S. 115: $k = 2 \cdot 20 = 40$ kg. Mithin muß $f = \frac{9500}{40} = 237$ qcm sein. Bei den gewählten Abmessungen ist $f = 14^2 = 196$ qcm, also zu klein.

Wählt man die Seite des Quadrates gleich 14,5 cm, so wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14,5} = 20,7$ und nach Gleichung 129

$$k = \frac{2 \cdot 9800}{(20,7)^2} = \infty 46 \text{ kg.}$$

Hieraus findet man

$$f = \frac{9500}{46} = 213 \text{ qcm.}$$

Der gewählte Querschnitt hat eine Fläche von $14,5 \cdot 14,5 = 210,25$ qcm, ist also als genügend zu betrachten.

Weitere Beispiele für weniger einfache Querschnitte folgen im nächsten Artikel.

137.
Querschnitts-
ermittelung
bei complicirten
Querschnitts-
formen.

Wenn die Form des Querschnittes einigermaßen complicirt ist, so stößt die Aufstellung einfacher und genauer Formeln für c und k auf Schwierigkeiten. Alsdann empfiehlt es sich, aus der Gleichung 117 diejenige Größe des Trägheitsmomentes zu berechnen, welche der Querschnitt bei gegebener Länge des Stabes und gegebenem Werthe von P zum mindesten haben muß. Es ergibt sich aus Gleichung 117 für das Trägheitsmoment der Werth

$$\mathcal{J} = \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 145.$$

Der Querschnitt ist nun so zu entwerfen, daß dessen kleinstes Trägheitsmoment wenigstens so groß ist, wie der aus Gleichung 145 für \mathcal{J} ermittelte Werth; gleichzeitig muß aber die Querschnittsfläche F mindestens so groß sein, um der Gleichung 118 zu genügen.

Man erhält für \mathcal{J} sehr einfache Ausdrücke, wenn man P und E in Tonnen, l in Metern einführt und π^2 gleich 10 setzt, was mit hinreichender Genauigkeit geschehen kann; dann muß \mathcal{J} für Fall 2 nachstehende Werthe haben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schmiedeeisen} \dots \dots \mathcal{J} = 2,5 P l^2 \\ \text{» Gufseisen} \dots \dots \mathcal{J} = 8 P l^2 \\ \text{» Holz} \dots \dots \mathcal{J} = 83 P l^2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 146.$$

Die Zusammenstellung für alle vier Fälle ergibt nachstehende Tabelle:

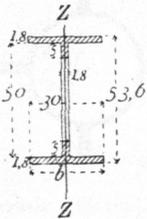
Constructionsmaterial	Fall 1 (Fig. 128)	Fall 2 (Fig. 129)	Fall 3 (Fig. 130)	Fall 4 (Fig. 131)
Schmiedeeisen	10	2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
Gufseisen	32	8	2	4
Holz	332	83	20	41

P Tonnen $\times l$ (Meter)²

Je mehr sich der Flächeninhalt des Querschnittes, welcher dem notwendigen Trägheitsmomente entspricht, dem Quotienten $\frac{P}{K}$ nähert, desto zweckmäßiger ist nach Früherem die Constraction. Man nimmt gewöhnlich zunächst einen Querschnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ stattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment deselben. Genügt dasselbe nicht, so ist die Querschnittsfläche entsprechend zu vergrößern, bis das verlangte \mathcal{F} vorhanden ist. Dieses Verfahren soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Beispiele. $\alpha)$ In einer gusseisernen Stütze sei der Maximaldruck $P = 50\,000$ kg = 50 Tonnen; die Länge der Stütze sei $l = 4,5$ m; die Enden sollen als bewegliche vorausgesetzt werden; die Querschnittsform sei die neben stehende (Fig. 147); die Querschnittsmaße sind zu ermitteln.

Fig. 147.



Für einfachen Druck muß $F = \frac{50\,000}{500} = 100$ qcm und nach Gleichung 146 $\mathcal{F} = 8 \cdot 50 \cdot 4,5^2 = 8100$ fein.

Die Höhe des Querschnittes sei durch constructive Rücksichten zu 53,6 cm vorgeschrieben, die Stärke des Steges und der Gurte sei 1,8 cm; alsdann findet, wenigstens bei nicht aufsergewöhnlich großer Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe Z Z statt, und es ist

$$\mathcal{F} = \frac{2 \cdot 1,8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1,8^3}{12} = 0,3 b^3 + 24,3 = 8100,$$

woraus sich für $b = \approx 30$ cm ergibt.

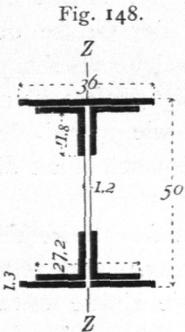
Die Querschnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1,8 \cdot 30 + 50 \cdot 1,8 = 198$ qcm, während nur 100 qcm Querschnittsfläche nöthig sind. Daraus folgt, daß unbedenklich ein Theil des Steges auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querschnittsfläche der schraffierte Theil übrig, und zwar in diesem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1,8 + 2 \cdot 5 \cdot 1,8 = 126$ qcm, und diese Querschnittsgröße genügt. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unwesentlich beeinflusst.

$\beta)$ In einem schmiedeeisernen Stabe herrscht ein Druck $P = 130\,000$ kg = 130 Tonnen; die Stablänge betrage 6,0 m, der Stab sei beiderseits eingespannt.

Nach obiger Tabelle muß

$$\mathcal{F} = \frac{5}{8} \cdot 130 \cdot 6^2 = 2925;$$

ferner $F = \frac{130\,000}{700} = 186$ qcm fein.



Der Querschnitt (Fig. 148) wurde vorläufig, wie folgt, zusammengesetzt:

4 Winkeleisen zu $13 \times 13 \times 1,2$ cm	= 29,8 qcm	= 119,2 qcm
1 obere Deckplatte $36 \times 1,3$ cm		= 46,8 »
1 untere Deckplatte $34,8 \times 1,3$ cm		= 45,2 »

Summe des Brutto-Querschnittes

211,2 qcm

ab für 4 Nietlöcher $4 \times 2,5 \times 2,3$ cm = 23,0 »

bleibt Netto-Querschnitt 188,2 qcm.

Für diesen Querschnitt findet \mathcal{J}_{min} für die ZZ-Axe statt, und es ist

$$\mathcal{J}_Z = \frac{1}{12} \left[2 \cdot 1,3 \cdot 36^3 + 2 \cdot 1,2 \cdot 27,2^3 + 2 \cdot 11,8 \cdot 3,6^3 - (2 \cdot 13 + 1,3) 1,2^3 \right] - 4 \cdot 2,5 \cdot 2,8 \cdot 7^2 = 13094.$$

Das Trägheitsmoment ist also bei ausreichender Querschnittsfläche wesentlich gröfser, als es zu fein braucht, der Querschnitt sonach genügend.

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man den Querschnitt aus den »Deutschen Normal-Profilen für Walzeisen« bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente im vorhergehenden Halbband dieses »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Baufstoffe) angegeben sind. Man berechnet das nothwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querschnittsfläche aus den beiden Gleichungen 146, bzw. 118, und sucht aus den Tabellen ein Profileisen, bzw. einen aus Profileisen zusammengesetzten Querschnitt, dessen Minimal-Trägheitsmoment und Querschnittsfläche den verlangten zum mindesten gleich sind.

Beispiel. In einem schmiedeeisernen Stabe herrsche ein Druck $P = 18000 \text{ kg} = 18 \text{ Tonnen}$; die Stablänge sei $l = 5,0 \text{ m}$; die Stabenden seien drehbar, mithin Fall 2 zu Grunde zu legen.

Es mufs nach Gleichung 146: $\mathcal{J} = 2,5 \cdot 18 \cdot 5^2 = 1125$ und nach Gleichung 118: $F = \frac{18000}{700}$
 $= 26 \text{ qcm}$ fein.

Soll der Stab aus einem I-förmigen Walzbalken gebildet werden, so ist das Caliber Nr. 38 (siehe die angezogenen Tabellen) zu wählen; bei demselben ist $\mathcal{J}_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) $= 107,5 - 4 \cdot 2 \cdot 2,05 = 91,1 \text{ qcm}$ und das Gewicht für 1 m $83,9 \text{ kg}$.

Wollte man statt dessen einen aus 4 kreuzförmig gestellten Winkeleisen gebildeten Querschnitt verwenden, so könnte man 4 Winkeleisen Nr. 9 (siehe die angezogenen Tabellen) zu $9 \times 9 \times 1,3 \text{ cm}$ verwenden, deren $\mathcal{J} = 1284$ ist, also genügt; dabei ist der Netto-Querschnitt $F = 4 \cdot 21,7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,3$ (für Niete) $= 76,4 \text{ qcm}$ und das Gewicht $4 \cdot 16,9 \text{ kg} = 67,6 \text{ kg}$. Zweckmäßiger ist die Verwendung von 4 Winkeleisen Nr. 10 zu $10 \times 10 \times 1 \text{ cm}$ mit $\mathcal{J} = 1346$, $F = 4 \cdot 19 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 68 \text{ qcm}$ und einem Gewicht für 1 m von $4 \cdot 14,8 \text{ kg} = 59,2 \text{ kg}$.

Würde endlich der Querschnitt aus 4 Quadranteisen (nach Fig. 149) konstruirt, so wird bei neben stehendem Querschnitt (siehe die angezogenen Tabellen) $\mathcal{J} = 2046$, $F = 54,9 - 4 \cdot 2 \cdot 0,8$ (für Niete) $= 48,59 \text{ qcm}$, und das Gewicht für das laufende Meter $42,9 \text{ kg}$.

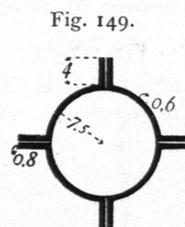
Am ungünstigsten ist demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit $83,9 \text{ kg}$ Gewicht, alsdann folgt das kreuzförmige Profil mit $59,2 \text{ kg}$, und am günstigsten ist das aus Quadranteisen zusammengesetzte, röhrenförmige Profil mit $42,9 \text{ kg}$ Gewicht.

3) Querschnittsermittlung bei excentrischer Druckbelastung.

138.
Zulässige
Beanspruchung.

Man ist neuerdings vielfach befrebt gewesen, Gröfse und Form des Querschnittes auf Knicken axial beanspruchter Stäbe aus der Bedingung zu bestimmen, dafs die gröfste, wirklich auftretende Beanspruchung σ an keiner Stelle die für das Material als zulässig erachtete Beanspruchung überschreite. Die Spannung σ ist, sobald die Kraft für den Querschnitt ein Moment hat, in hohem Mafse von der Gröfse der Ausbiegung y abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung y hervorrufen kann, auch nach Obigem ein beliebig großes y und damit auch ein beliebig großes σ erzeugen kann, so ist σ , eben so wie y , bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbestimmte Gröfse, eignet sich demnach nicht als Grundlage für die Querschnittsbestimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, dafs die Versuchsergebnisse mit den theoretisch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinstimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentrisch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder das



Material des Stabes nicht ganz gleichmäfsig ist. Allen diesen Möglichkeiten, welche theoretisch nicht gut verfolgt werden können, wird am besten dadurch Rechnung getragen, dafs man einen Sicherheits-Coefficienten n einführt, also nur den n -ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läßt, welche denselben nach der Formel zerknicken könnte. Es ist gut, dafs man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unsicherheiten zusammentreffen und diese ganz klar bezeichnet.

Wenn man das Mafs der Excentricität der wirkenden Kräfte kennt, so wäre auch eine genaue Berechnung möglich; denn dann hat der Pfeil einen ganz bestimmten Werth, und damit ergeben sich auch für σ gewisse, von der Gröfse der Kraft P abhängige Werthe. Da unter Umständen die Gröfse der Excentricität bekannt ist, bezw. angenommen werden kann, so soll die Berechnung hier vorgeführt werden.

139.
Querschnitts-
ermittlung.

Für irgend einen Punkt C des Stabes AB (Fig. 150), welcher ursprünglich mit der Axe AX zusammenfiel, ist

Fig. 150. $M = P(\rho + y_0 - y) = E \mathcal{J} \frac{d^2 y}{dx^2}$ oder $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{J}}(\rho + y_0 - y)$,

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{J}} = a^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2(\rho + y_0 - y).$$

Die zweimalige Integration dieser Gleichung ergibt

$$y = (\rho + y_0) + A \sin ax + B \cos ax \quad \dots \quad 147.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax - B a \sin ax \quad \dots \quad 148.$$

Die Constanten A und B ergeben sich folgendermaßen.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also $0 = \rho + y_0 + B$ und $B = -(\rho + y_0)$;

für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, also $0 = A a$ und $A = 0$; demnach heifst die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = (\rho + y_0)(1 - \cos ax) \quad \dots \quad 149.$$

Für $x = l$ ist $y = y_0$, d. h. $y_0 = (\rho + y_0)(1 - \cos al)$ oder

$$y_0 = \rho \frac{1 - \cos al}{\cos al} \quad \dots \quad 150.$$

y_0 ist also eine ganz bestimmte Gröfse. Das größte Moment findet am Einspannungspunkte A statt, wo es den Werth

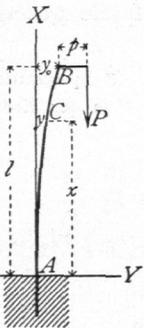
$$P(\rho + y_0) = P\rho \left(1 + \frac{1 - \cos al}{\cos al}\right) = \frac{P\rho}{\cos al}$$

hat. Es wird in diesem Querschnitte der größte Druck den Werth haben

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P\rho r}{\mathcal{J} \cos al} \quad \dots \quad 151.$$

In dieser Gleichung ist r der Abstand des meist gespannten Querschnittspunktes von der Axe, \mathcal{J} das in Betracht kommende Trägheitsmoment. Stellt man die Bedingung, dafs σ_{max} höchstens gleich K sein solle, so ergibt sich

$$K = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\rho r}{\mathcal{J} \cos al}\right), \quad \dots \quad 152.$$



und die zulässige Belastung der Stütze vom Querschnitt F und dem Trägheitsmomente \mathcal{J}

$$P = \frac{FK}{1 + \frac{Fpr}{\mathcal{J} \cos al}} \dots \dots \dots 153.$$

Da $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathcal{J}}}$ eine Größe ist, welche sowohl vom Drucke P , wie von der Querschnittsgealtung, also von Werthen abhängt, welche meistens von vornherein nicht gleichzeitig gegeben sind, so kann der Ausdruck für P aus Gleichung 153 nicht in geschlossener Form entwickelt werden; denn a kommt auch auf der rechten Seite vor. Man wird deshalb zunächst eine angenäherte Rechnung vornehmen, auf welche die genauere zu folgen hat. Aehnlich ist es, wenn P und das Maß der Excentricität gegeben ist und der Querschnitt gesucht wird. Dann ist aus Gleichung 153, wenn mit R der Trägheitsradius bezeichnet wird, also $\mathcal{J} = FR^2$ gesetzt wird,

$$F = \frac{P}{K} \left(1 + \frac{pr}{R^2 \cos al} \right) \dots \dots \dots 154.$$

140.
Beispiel.

Die Anwendung dieses Ausdruckes soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

Die Stütze sei eine Holzstütze von der Länge $l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$; der Querschnitt sei quadratisch und habe die Seitenlänge d ; die Excentricität soll so weit gehen können, daß die Kraft P in der Kante angreift. Dann ist

$$p = \frac{d}{2}, \quad F = d^2, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \mathcal{J} = FR^2 = \frac{d^4}{12} = d^2 R^2,$$

$$R^2 = \frac{d^2}{12}, \quad E = 120000 \text{ kg}, \quad K = 65 \text{ kg}, \quad pr = \frac{d^2}{4}.$$

Ferner solle eine Kraft $P = 16000 \text{ kg}$ ertragen werden. Es ist also

$$a = \sqrt{\frac{P}{E\mathcal{J}}} = \sqrt{\frac{16000 \cdot 12}{120000 d^4}} = \frac{1,265}{d^2}, \quad \text{ferner } al = \frac{632,5}{d^2}, \quad \text{sonach}$$

$$F = \frac{16000}{65} \left(1 + \frac{d^2 \cdot 12}{4 d^2 \cos al} \right) = 246 \left(1 + \frac{3}{\cos \frac{632,5}{d^2}} \right).$$

Es werde zunächst $d = 25 \text{ cm}$ angenommen; dann wird $F = 246 (1 + 5,66) = 1638 \text{ qcm}$; demnach müßte $d = \text{ca. } 40 \text{ cm}$ sein. Wählt man $d = 35 \text{ cm}$, so wird

$$F = 246 (1 + 3,45) = 1095 \text{ qcm}.$$

Dieser Werth würde einer Seitenlänge $d = 33 \text{ cm}$ entsprechen; 35 cm ist also ein angemessener Werth.

4) Empirische Formeln.

141.
Allgemeine
Formel.

Der Umstand, daß man je nach der größeren oder geringeren Länge des Stabes mit verschiedenen Formeln rechnen muß, ist ein Uebelstand, dem man durch Einführung empirischer Formeln abzuhelpen gestrebt hat. Eine solche Formel muß für P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 118, dagegen bei großen Werthen von l die mit Rücksicht auf Zerknicken gefundene Gleichung 117 ergeben. Diesen Anforderungen entspricht folgende Formel ²²⁾:

$$P = \frac{KF\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{KsFl^2}{CE}}, \dots \dots \dots 155.$$

in welcher alle Buchstaben die früheren Bedeutungen haben.

²²⁾ Siehe: SCHÄFFER. Bestimmung der zulässigen Spannung und der Querschnitte für Eisenconstruktionen. Deutsche Bauz. 1877, S. 498.

Für $l=0$ wird entsprechend der für kurze Stäbe aufgestellten Gleichung 118 auch hier $P=KF$; für den Werth $l=\infty$ mag obiger Formel die Gestalt

$$P = \frac{KF}{1 + \frac{KsFl^2}{CE\mathcal{J}}} \dots \dots \dots 156.$$

gegeben werden. Ist l sehr groß, bezw. $=\infty$, so ist das erste Glied im Nenner verschwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann:

$$P = \frac{KF}{\frac{KsFl^2}{CE\mathcal{J}}} = \frac{CE\mathcal{J}}{sl^2},$$

demnach übereinstimmend mit der Formel 117 für lange Stäbe. Die Gleichung 155 kann also als empirische Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Versuchen übereinstimmende Werthe. Aus derselben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{Ks}{CE}Fl^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefestigung abhängige Factor $\frac{Ks}{CE} = \alpha$ gesetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha Fl^2} \dots \dots \dots 157.$$

$\frac{P}{K}$ ist diejenige Querschnittsfläche, welche der Stab haben müsste, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen dieselbe mit f , alsdann ist

$$f = \frac{F\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha Fl^2} \dots \dots \dots 158.$$

Die Gleichung 158 kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querschnittsfläche zu berechnen. Denn es ist nach derselben

$$F = \frac{f\mathcal{J}}{\mathcal{J} - \alpha fl^2} \dots \dots \dots 159.$$

Das zur Ermittlung der nothwendigen Querschnittsform und -Größe einzuschlagende Verfahren ist nun folgendes. Der Maximaldruck P , welcher auf den Stab wirken kann, ist bekannt, durch Rechnung oder Zeichnung gefunden; alsdann ist $f = \frac{P}{K}$ ebenfalls leicht zu ermitteln. Man construirt nun einen dieser Querschnittsfläche entsprechenden Querschnitt und ermittle das kleinste Trägheitsmoment desselben für eine Schweraxe, also \mathcal{J} . Bekannt sind jetzt die Größen f , \mathcal{J} , α und l , und die Gleichung 159 ergibt nun die dem Querschnitt wirklich zugegebene Flächengröße F . Fällt dieselbe größer aus, als die angenommene Querschnittsfläche, so ist letztere entsprechend zu vergrößern, das neue Trägheitsmoment einzusetzen, F aus Gleichung 159 aufs Neue zu berechnen und dieses Verfahren so lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinstimmung der wirklichen Querschnittsfläche mit der nöthigen stattfindet. Dabei hat man sich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den späteren Berechnungen den neuen Werth der Querschnittsfläche für f einzuführen, da ja f nicht die wirkliche Querschnittsfläche, sondern den für einen bestimmten Stab unveränderlichen Werth $\frac{P}{K}$ angiebt. Bei einiger Uebung

ist es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entsprechende Querschnittsfläche zu finden.

142.
Vereinfachung.

Die mehrmalige Berechnung des Trägheitsmomentes ist unbequem und kann auf die nachstehend angegebene Weise vermieden werden.

Nach Gleichung 121 ist $\mathcal{F} = c F h^2$, worin c ein von der besonderen Querschnittsform abhängiger Coefficient, h eine Abmessung des Querschnittes ist. Wird dieser Werth in Gleichung 159 eingeführt, so wird

$$F = \frac{f c F h^2}{c F h^2 - \alpha f l^2} \text{ oder } F c h^2 = f (c h^2 + \alpha l^2),$$

und

$$\frac{F}{f} = 1 + \frac{\alpha}{c} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \dots \dots \dots 160.$$

Für eine Reihe von einfachen Querschnittsformen: Quadrat, Kreis, Kreuz-, Winkel-, I-Eisen etc. ist, wie in den Art. 128 bis 135 (S. 108 bis 114) gezeigt wurde, c ohne besondere Schwierigkeiten zu bestimmen; für α giebt die nachstehende Tabelle die betreffenden Werthe an. Sonach ist mittels Gleichung 160 F leicht zu ermitteln.

Tabelle für die Werthe von $\alpha = \frac{K s}{C E}$.

Constructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingepannt.	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere lothrecht geführt.
Schmiedeeisen	$\frac{0,00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Gusseisen	$\frac{0,004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz	$\frac{0,0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

143.
Anwendung auf verschiedene Querschnitte.

Die Gleichung 160 ergibt für die verschiedenen, in Art. 128 bis 135 (S. 108 bis 114) behandelten Querschnittsformen, wenn die dort ermittelten Werthe für c zu Grunde gelegt werden, folgende besondere Gleichungen:

- a) Rechteck und Quadrat: $\frac{F}{f} = 1 + 12 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- β) Kreis: $\frac{F}{f} = 1 + 16 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- γ) Kreisring: $\frac{F}{f} = 1 + 8 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- δ) Kreuzquerchnitt (voller Querschnitt, bezw. 4 Winkeleisen): $\frac{F}{f} = 1 + 24 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ε) Zwei Winkeleisen bilden: ein **T** $\frac{F}{f} = 1 + 12 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ein **Z** $\frac{F}{f} = 1 + 8,5 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ein **Kreuz** $\frac{F}{f} = 1 + 33 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ζ) Einfaches gleichschenkeliges Winkeleisen: $\frac{F}{f} = 1 + 24 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.

η) T-förmiger Querschnitt:

$$\text{Breitfüßiges T-Eisen (Deutsche Normal-Profile) . . . } \frac{F}{f} = 1 + 16 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

$$\text{Hochfestiges T-Eisen (Deutsche Normal-Profile) . . . } \frac{F}{f} = 1 + 22 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

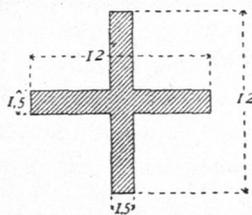
$$\delta) \text{ I-förmiger Walzbalken-Querschnitt: . . . } \frac{F}{f} = 1 + 20,4 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

Diese aus der empirischen Formel 155 abgeleiteten, eben angegebenen Formeln ergeben naturgemäß Resultate, welche mit den auf frühere Weise gefundenen nicht genau übereinstimmen; denn die Formel 155 ist, wie oben gezeigt, nur für die Grenzwerte von l , d. h. für $l = 0$ und $l = \infty$, richtig, stimmt aber für die Mittelwerte nicht genau. Es dürfte sich deshalb empfehlen, die hier angegebenen Formeln nur für eine vorläufige Querschnittsbestimmung zu benutzen und nachher auf Grund der genaueren Formeln eine Verbesserung vorzunehmen.

Die Anwendung obiger Formeln soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

α) Es sei für einen gußeisernen Stab mit beweglichen Enden und kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 151) $P = 4800$ kg, $l = 200$ cm. Alsdann ist $f = \frac{4800}{500} = 9,6$ qcm und bei vorläufig,

Fig. 151.



wie in Fig. 151, angenommenem Querschnitt $\frac{l}{h} = \frac{200}{12} = 16,7$. Hier-

nach wird $\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0,0004 \cdot 16,7^2 = 3,68$ und $F = 9,6 \cdot 3,68 = 35,33$ qcm. Der gewählte Querschnitt hat $1,5 \cdot 2 \cdot 12 - 1,5 \cdot 1,5 = 33,75$ qcm, womit man sich wohl begnügen kann.

β) Es sei $P = 3300$ kg, $l = 100$ cm; der Stab werde durch ein einfaches gleichschenkeliges Winkeleisen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächst ist $f = \frac{3300}{700} = 4,7$ qcm. Gewählt werde

ein Winkeleisen von $5,5 \times 5,5 \times 0,8$ cm; alsdann ist $\frac{l}{h} = \frac{100}{5,5} = 18$,

ferner

$$\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0,00009 \cdot 18^2 = 1,7 \quad \text{und} \quad F = 1,7 \cdot 4,7 = 7,99 \text{ qcm.}$$

Das gewählte Winkeleisen hat eine Querschnittsfläche von $8,16$ qcm, ist also genügend.

γ) In einem Holzstabe mit quadratischem Querschnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgesetzt werden kann, herrscht ein Druck $P = 9500$ kg; wenn ferner $l = 300$ cm angenommen wird, ist $f = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wird vorläufig die Querschnittsseite mit 18 cm gewählt, so ist

$\frac{l}{h} = \frac{300}{18} = 16,7$; es wird ferner $\frac{F}{f} = 1 + 12 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2 = 1 + 12 \cdot 0,00028 \cdot 279 = 1,87$ und $F = 1,87 \cdot 146 = 273$ qcm. Der angenommene Querschnitt mißt $18 \cdot 18 = 326$ qcm, ist also zu groß.

Wird $h = 17$ cm gewählt, so wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{17} = 18$, weiters $\frac{F}{f} = 1 + 12 \cdot 0,00026 \cdot 324 = 2,01$ und $F = 2,01 \cdot 146 = 293$ qcm. Der nunmehr gewählte Querschnitt hat eine Fläche von $17 \cdot 17 = 289$ qcm, stimmt also gut überein.

Nach der genaueren Berechnung auf S. 116 (unter δ) ergab sich ein quadratischer Querschnitt von nur $14,5$ qcm Seitenlänge als genügend.

Die üblen Erfahrungen, welche man neuerdings bei verschiedenen großen Bränden mit eisernen Stützen gemacht hat, führten zur Unterfuchung der Frage, in welcher Weise die Tragfähigkeit solcher Stützen bei erhöhter Temperatur verändert werde, und zur Aufstellung von Formeln für diese Tragfähigkeit. Die nachstehend aufgeführten Formeln sind von Möller²³⁾ auf Grund von Versuchen unter folgenden Annahmen aufgestellt. Die dem Feuer zugewendete Seite der Stütze zeigt schwache

^{145.}
Tragfähigkeit
der Stützen bei
erhöhter
Temperatur.

²³⁾ Siehe: MÖLLER, M. u. R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionsteile bei erhöhter Temperatur. Berlin 1888.

Rothgluth, die andere Seite hat eine bis zu 600 Grad C. geringere Temperatur, welche durch Anspritzen der Säule mit kaltem Wasser herbeigeführt ist; die Beanspruchung der Stützen erfolgt um 1 cm excentrisch, zwischen Gelenken (Fall 2). Die Stütze soll die Last P noch mit einiger Sicherheit tragen. Die allgemeine Formel, in welcher alle Buchstaben die frühere Bedeutung haben, lautet (vergl. Art. 141, S. 121)

$$P = K F \frac{1}{1 + \alpha \frac{F l^2}{\mathcal{F}}}$$

Die Zahlenwerthe K und α sind so bestimmt, dass sich ergibt

$$\text{für Schmiedeeisen: } P = 1000 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{F l^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 161.$$

$$\text{für Gufseisen: } P = 1200 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{F l^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 162.$$

In diesen Ausdrücken ist l die freie Länge zwischen den Gelenken; wenn die Stützung als zwischen parallelen Enden erfolgend angenommen werden kann, so ist statt l nur $\frac{2}{3}$ der wirklich vorhandenen freien Länge einzuführen.

2. Kapitel.

Träger.

146.
Allgemeines.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abschnitte gesagt wurde, versteht man unter Trägern solche Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschliesslich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann sowohl eine gerade, wie eine gebrochene, bezw. krumme Linie sein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachstühle, die Sprengwerke u. A., bei denen allerdings die Längsaxe nicht so deutlich vor die Augen tritt, wie etwa bei den gewöhnlichen Balken, ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine krumme Linie ist.

Um die obige Erklärung der Träger auch für diese Constructions unbedingt richtig zu stellen, könnte man statt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgendermassen erklären: Träger sind Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschliesslich oder vorwiegend senkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der Stützpunkte der Construction, wirken. Im vorliegenden Kapitel sollen jedoch nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachstühle und die Gewölbe in den beiden nächsten Abschnitten besprochen werden. Von den Sprengwerken wird bei den Dachstühlen eine besondere Form vorgeführt werden.

147.
Äußere
Kräfte.

Die auf die Bauconstructions wirkenden äußeren Kräfte sind nach Art. 2 (S. 5): 1) die Belastungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlasten, und 2) die Auflager- oder Stützendrücke (auch Reactionen der Auflager genannt), d. h.