Bei den aus Holz und Eiſen beſtehenden Druckſtäben, bezw. Freiſtützen tritt die erwähnte Schwierigkeit nicht auf; ſtatt derſelben iſt bei dieſen die Gefahr eines ſeitlichen Ausbiegens und weiter des Zerknickens in das Auge zu faſſen.

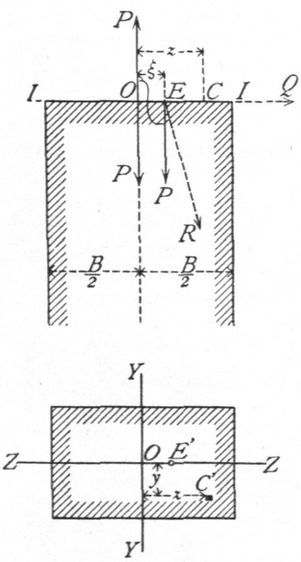
a) Stützen mit auſserhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rückſicht auf Zerknicken.

1) Druckvertheilung in Querſchnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

110. Allgemeine Unterſuchung.

Die nachfolgende Unterſuchung hat allgemeine Giltigkeit, findet aber vorwiegend auf gemauerte Pfeiler und Säulen Anwendung. Die Mittelkraft aller oberhalb irgend eines Querſchnittes II auf die Freiſtütze wirkenden Kräfte ſei R und ſchneide den Querſchnitt in einem Punkte E (Fig. 103), deſſen Abſtand von der Pfeileraxe mit ξ bezeichnet werden ſoll. Die Kraftebene ſchneide den Querſchnitt II und alle Querſchnitte des Pfeilers in Hauptaxen (gewöhnlich ſind dieſelben Symmetrie-Axen). R wird in eine Seitenkraft P, welche ſenkrecht zum Querſchnitt II wirkt, und eine Seitenkraft Q zerlegt, welche in den Querſchnitt fällt; letztere ſoll unbeachtet gelaſſen werden, da ſie das Endergebniss der Unterſuchung nur wenig beeinfluſſt. Es wird nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte O des Querſchnittes zwei Kräfte anbringt, welche je gleich und zu P parallel ſind, aber entgegengeſetzten Sinn haben, alſo einander aufheben. Dadurch ergiebt ſich als Wirkung der excentriſchen Kraft P: eine im Schwerpunkte O angreifende Kraft P und zwei (in Fig. 103 durch einen Bogen verbundene) Kräfte P, welche zuſammen ein Kräftepaar mit dem Momente $M = P\xi$ bilden; das Moment dreht im vorliegenden Falle nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers).

Fig. 103.



Aufriſs.

Grundriſs.

Durch die Kraft und das Kräftepaar werden im Querſchnitte die folgenden Beanſpruchungen hervorgerufen. Die im Schwerpunkte angreifende Kraft vertheilt ſich gleichmäſsig über die Querſchnittsfläche F; ſie erzeugt in allen Theilen deſſelben einen Druck für die Flächeneinheit $N_1 = \frac{P}{F}$. Das Moment $P\xi$ würde, wenn es allein wirkte, nach den Geſetzen der Biegungselaſticität (ſiehe Art. 86, S. 62) in den verſchiedenen Abſtänden von der wagrechten, ſenkrecht zur Kraftebene durch O gelegten Axe YY (Fig. 103, Grundriſs) verſchiedene Spannungen erzeugen, welche ſich für irgend einen Punkt C im Abſtande z von der erwähnten Axe zu $N_2 = \frac{Mz}{\mathfrak{J}}$ (Gleichung 42) ergeben. In letzterem Ausdruck iſt $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des Querſchnittes II für die Axe YY. Da es ſich bei den hier zu betrachtenden Conſtructionen hauptſächlich um Beanſpruchungen auf Druck handelt, ſo ſollen Druckbeanſpruchungen als poſitive, Zugbeanſpruchungen als negative Spannungen eingeführt werden.

Die geſammte Spannung im Punkte C iſt demnach

$$N = N_1 + N_2 = \frac{P}{F} + \frac{M\,z}{\mathfrak{J}} = \frac{P}{F} + \frac{P\,\xi\,z}{\mathfrak{J}}\,,$$

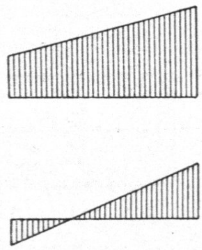
oder

$$N = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F\,\xi\,z}{\mathfrak{J}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 69.$$

Für eine gegebene Kraft P mit gegebenem Angriffspunkt E kann die Spannung ſämmtlicher Querſchnittspunkte durch Gleichung 69 ermittelt werden. Man braucht nur für z alle Werthe von $z = -\frac{B}{2}$ bis $z = +\frac{B}{2}$ einzuführen und die zugehörigen Gröſsen von N zu berechnen. Von der Spannungsvertheilung erhält man ein klares Bild, wenn man in jedem Punkte des Querſchnittes die Spannung als Ordinate aufträgt und die Endpunkte dieſer Ordinaten verbindet. Da bei den gemachten Annahmen die Entfernung y des beliebig gewählten Punktes C von der Kraftebene gar nicht in der Gleichung vorkommt, ſo folgt, daſs die Spannung N unabhängig von y iſt; alle in gleichem Abſtande z von der YY-Axe liegenden Punkte erleiden alſo gleiche Spannung. Demnach genügt es, die Spannungen aller Punkte aufzuſuchen, welche auf einer zur Kraftebene parallelen Linie des Querſchnittes liegen und dieſe nach beliebig gewähltem Maſsſtabe aufzutragen. Die z-Werthe ſind die Abſciſſen, die Spannungen N ſind die Ordinaten; die Vertheilung findet nach dem durch Gleichung 69 beſtimmten Geſetze ſtatt.

In dieſer Gleichung ſind N und z die einzigen Veränderlichen; beide kommen nur in der erſten Potenz vor. Daraus folgt, daſs die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten N eine Gerade iſt: die Gerade obiger Gleichung. Dieſe Linie iſt bekannt, wenn zwei Punkte derſelben bekannt ſind. Demnach kann man ſie leicht auffinden, indem man z. B. für die beiden Endwerthe $z = -\frac{B}{2}$ und $z = +\frac{B}{2}$ die Werthe von N ausrechnet und aufträgt. Man erhält etwa die Darſtellungen in Fig. 104. Die poſitiven Werthe von N ſind nach oben, die negativen nach unten abgetragen; die erſteren bedeuten Druck, die letzteren Zug. Wenn alle Ordinaten auf einer Seite der Abſciſſe liegen, ſo findet nur Druck ſtatt (Fig. 104a); ſonſt hat man im Querſchnitt theils Druck, theils Zug. Die Grenze, an welcher der Wechſel von Druck zum Zug ſtattfindet, iſt die Nulllinie, gewöhnlich neutrale Axe genannt (ſiehe auch Art. 87, S. 65, und Art. 96, S. 69). Die von der Abſciſſe und der Geraden der Gleichung 69 eingeſchloſſene (in Fig. 104 ſchraffirte) Fläche wird als **Druckfigur** bezeichnet.

Fig. 104.



a) b)

111. Neutrale Axe oder Nulllinie.

Von beſonderer Wichtigkeit ſind nun die Punkte des Querſchnittes, welche die Spannung Null erhalten, alſo in der neutralen Axe liegen. N wird für alle diejenigen Punkte gleich Null, für welche in Gleichung 69 der Klammerwerth gleich Null wird. Nennt man den beſonderen Werth von z, für den dies eintritt, z_0, ſo wird $N = 0$, wenn $1 + \frac{F\,\xi\,z_0}{\mathfrak{J}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathfrak{J}}{F\,\xi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 70.$$

Für alle Punkte, deren Ordinaten den Werth der Gleichung 70 haben, iſt $N = 0$; die Gleichung 70 iſt alſo die Gleichung der neutralen Axe, doch nur unter der Vorausſetzung, daſs die Kraftebene den Querſchnitt in einer Hauptaxe ſchneidet.

Aus der Gleichung 70 für die neutrale Axe ergeben ſich wichtige Folgerungen:

α) Da $\mathcal{J}$ und F ſtets poſitive Gröſsen ſind, ſo hat z_0 ſtets anderes Vorzeichen als ξ. Die ſämmtlichen Punkte, in denen die Spannung Null ſtattfindet, liegen alſo an derjenigen Stelle der Axe YY, an welcher der Schnittpunkt mit der Mittelkraft R nicht liegt.

β) Für eine beſtimmte Lage der Kraft R ſind alle Gröſsen auf der rechten Seite der Gleichung conſtant, iſt alſo auch z_0 conſtant; es liegen alſo alle Punkte, in denen N gleich Null iſt, in gleichem Abſtande von der Y-Axe, d. h. alle dieſe Punkte liegen in einer Geraden, die parallel iſt zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche zur Schnittlinie des Querſchnittes mit der Kraftebene ſenkrecht ſteht.

γ) Der Werth für z_0 iſt von der Kraftgröſse ganz unabhängig; er iſt nur von den Werthen $\mathcal{J}$ und F, alſo von der Querſchnittsform und -Gröſse, und von ξ, d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

δ) z_0 wird Null, d. h. die neutrale Axe fällt mit der zur Kraftebene ſenkrechten Schwerpunktsaxe zuſammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querſchnitt erſt in unendlich weiter Ferne ſchneidet, wenn alſo R zum Querſchnitte parallel gerichtet iſt, wenn alſo gar keine Axialkraft vorhanden iſt.

Die Gleichung 70 giebt ein bequemes Verfahren, die Lage der neutralen Axe graphiſch zu ermitteln. Beſonders einfach geſtaltet ſich die Aufgabe beim rechteckigen Querſchnitt.

Hier iſt nach Art. 48 (S. 33):

$$\mathcal{J} = \frac{b\,h^3}{12} \quad \text{und} \quad F = b\,h\,.$$

Aus Gleichung 70 folgt, wenn man zunächſt nur die abſolute Gröſse von z_0 beſtimmt,

$$z_0 = \frac{b\,h^3}{12\,b\,h\,\xi} = \frac{h^2}{12\,\xi} \quad \text{und} \quad z_0\,\xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6}\cdot\frac{h}{2}\,.$$

Daraus ergiebt ſich die folgende Conſtruction (Fig. 105).

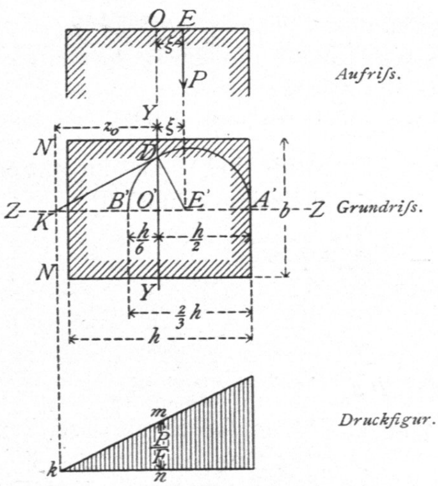
Man trägt von O' aus $\overline{O'B'} = \frac{h}{6}$ nach einer Seite ab, ſchlägt über $B'A' = \frac{2}{3}h$ als Durchmeſſer einen Halbkreis, welcher die in O' zur ZZ-Axe gezogene Lothrechte in D ſchneidet; dann iſt $\overline{O'D}^2 = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{6} = \frac{h^2}{12}$. Verbindet man nun D mit E' und zieht durch D eine Linie DK ſenkrecht zu $E'D$, ſo iſt $\overline{O'D}^2 = E'O'\,.\,\overline{O'K} = \xi\,.\,\overline{O'K}$, d. h.

$$\overline{O'K} = \frac{\overline{O'D}^2}{\xi} = \frac{h^2}{12\,\xi}\,;$$

mithin

$$\overline{O'K} = z_0\,.$$

Fig. 105.



K iſt alſo ein Punkt der neutralen Linie, und die durch K parallel zur Y-Axe gelegte Linie NN iſt die neutrale Axe ſelbſt.

Eine etwas geänderte Conſtruction iſt bei weniger einfachen Querſchnitten anwendbar. Nach Art. 64 (S. 43) iſt der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} = F\,R^2.$$

Demnach iſt nach Gleichung 70

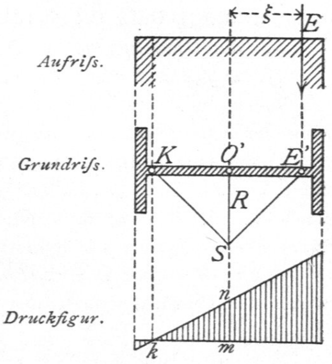
$$z_0 = -\frac{\mathcal{J}}{F\,\xi} = -\frac{F\,R^2}{F\,\xi} = -\frac{R^2}{\xi}\,,$$

woraus ſich die folgende Conſtruction (Fig. 106) ergiebt.

In O' errichte man zur ZZ-Axe die Lothrechte $\overline{O'S} = R$, verbinde S mit E' und ziehe durch S die Senkrechte $\overline{SK}$ zu $E'S$; dann iſt $\overline{O'S}^2 = R^2 = \overline{E'O} \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$; mithin

$$\overline{O'K} = \frac{R^2}{\xi} \text{ (abſolute Gröſse) } = z_0 .$$

Fig. 106.

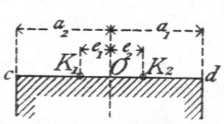


Der Punkt k in Fig. 105 u. 106 iſt ein Punkt der Geraden, welche die Veränderung von N darſtellt; wenn noch ein Punkt dieſer Geraden bekannt iſt, ſo kann ſie gezeichnet werden. Für $z = 0$ iſt nach Gleichung 69: $N_0 = \frac{P}{F}$, d. h. in den Querſchnittspunkten, welche in der zur Kraftebene ſenkrechten Schwerpunktsaxe liegen, iſt die Spannung genau ſo groſs, als wenn nur die Kraft P in der Axe wirkte. Man kann $\frac{P}{F}$ leicht ermitteln und nach beliebigem Maſsſtabe in dem entſprechen den Punkte n (Fig. 105) auftragen. Iſt $\overline{mn} = \frac{P}{F}$, ſo ergiebt die Verbindung von m mit k die Gerade für N.

112. **Kernpunkte.** Die Beanſpruchung der Querſchnittstheile iſt an den beiden Seiten der Nulllinie (neutralen Axe) verſchiedenartig, an der einen Seite Druck, an der anderen Zug. Es iſt nunmehr zu unterſuchen, wie die Kraft P liegen muſs, damit nur Druckſpannungen im Querſchnitte auftreten.

Offenbar ſind im ganzen Querſchnitte nur Druckſpannungen, wenn die den äuſserſten Querſchnittspunkten c und d (Fig. 107) entſprechenden Spannungen Druck bedeuten; denn dann fällt die Nulllinie auſserhalb des Querſchnittes (ſiehe Fig. 104). Nun iſt die Spannung im Punkte d, weil für denſelben $z = a_1$ iſt, nach Gleichung 69

Fig. 107.



$$N_{max} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{F\,\xi\,a_1}{\mathfrak{J}}\right),$$

diejenige im Punkte c, weil für dieſen $z = -a_2$ iſt,

$$N_{min} = \frac{P}{F}\left(1 - \frac{F\,\xi\,a_2}{\mathfrak{J}}\right).$$

Wenn ſowohl N_{max}, wie N_{min} Druck bedeuten, alſo poſitiv ſind, findet im ganzen Querſchnitte nur Druck ſtatt; dies iſt der Fall, wenn gleichzeitig erfüllt iſt

$$\left(1 + \frac{F\,\xi\,a_1}{\mathfrak{J}}\right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{F\,\xi\,a_2}{\mathfrak{J}}\right) > 0,$$

d. h. wenn

$$\xi > -\frac{\mathfrak{J}}{F a_1} \quad \text{und} \quad \xi < \frac{\mathfrak{J}}{F a_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 71.$$

iſt. Der Schnittpunkt E der Kraft P mit dem Querſchnitte muſs ſich alſo zwiſchen zwei Punkten K_1 und K_2 (Fig. 107) befinden, welche in den Abſtänden $-\frac{\mathfrak{J}}{F a_1}$, bezw. $\frac{\mathfrak{J}}{F a_2}$ von der Axe O liegen, wenn nur Druck im Querſchnitt herrſchen ſoll. Wir bezeichnen abkürzungsweiſe

$$\frac{\mathfrak{J}}{F a_1} = e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{F a_2} = e_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 72.$$

Man nennt die Punkte K_1 und K_2 die Kernpunkte.

Da auf die fämmtlichen für e_1 und e_2 mafsgebenden Gröfsen $\mathfrak{J}$, F, a_1 und a_2 nur die Querfchnittsgeftaltung Einflufs hat, fo ift die Lage der Kernpunkte blofs von der Form und Gröfse des Querfchnittes abhängig.

Für das Rechteck ift $\mathfrak{J} = \frac{b h^3}{12}$, $F = b h$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll alfo nur Druck im Querfchnitt ftattfinden, fo darf die Kraft den Querfchnitt in keinem gröfseren Abftande von der Axe fchneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: fie mufs den Querfchnitt im inneren Drittel fchneiden.

Für den Kreisquerfchnitt ift $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlaffen, wenn nur Druck auftreten foll.

Für den Kreisringquerfchnitt bei geringer Ringftärke ift $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft mufs alfo in der inneren Hälfte verbleiben.

2) Druckvertheilung in Querfchnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querfchnitte in Hauptaxen fchneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Gefetze gelten auch für Conftructionen, welche nur Druck aufnehmen können, fo lange die Kraft eine derartige Lage hat, dafs im ganzen Querfchnitt wirklich nur Druckfpannungen auftreten, fo lange alfo die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt. 113. Druckvertheilung in rechteckigen Querfchnitten.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querfchnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, fo kann die Lage der Nulllinie, fo wie die Druckvertheilung genau fo ermittelt werden, wie in Fig. 105 gezeigt ift. Diefe Conftruction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freiftützen mit rechteckigem Querfchnitt, fondern auch bei Stützmauern (an deren Bodenflächen), in Gewölben etc.

Als Mafs fenkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmäfsig die Einheit (gewöhnlich 1 m), fo dafs die gedrückte Fläche — der Querfchnitt — ein Rechteck von der Breite (fenkrecht zur Bildfläche) gleich der Einheit ift. Die zweite Abmeffung des Rechteckes ift bei den Gewölben (Fig. 108) die Gewölbftärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerftärke d (Fig. 109).

Fig. 108.

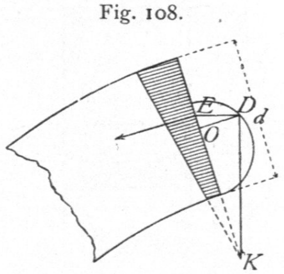
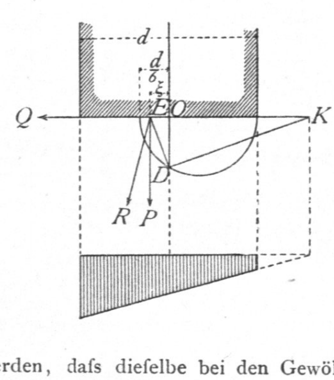


Fig. 109.



In den beiden neben ftehenden Figuren fchneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, fo dafs alfo nur Druck im Querfchnitt entfteht und der ganze Querfchnitt wirkfam ift. Die angewandte Conftruction ift ohne weitere Erläuterung verftändlich.

Es möge noch bemerkt werden, dafs diefelbe bei den Gewölben nur annäherungsweife richtig ift, weil die Vorausfetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler ift aber bei einigermafsen grofsem Halbmeffer des Gewölbes unerheblich.

Wenn aber die Kraft den Querſchnitt auſserhalb der Kernpunkte ſchneidet, ſo fällt die Nulllinie in den Querſchnitt, und es würden an der einen Seite derſelben Zugſpannungen entſtehen, falls das Material dieſelben aufnehmen könnte. Da dieſes nach der Annahme hier nicht möglich iſt, ſo wird auf dieſem ganzen Querſchnittstheile kein Uebertragen von Spannungen ſtattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckſeite der Nulllinie ſtatt. Man nennt dieſen Theil des Querſchnittes den w i r k ſ a m e n Q u e r ſ c h n i t t. Es iſt die Gröſse und Form des wirkſamen Querſchnittes und die gröſste in demſelben ſtattfindende Spannung zu ermitteln.

Der für die Spannung N gefundene Ausdruck (Gleichung 69) iſt hier nicht ohne Weiteres anwendbar, weil bei Aufſtellung deſſelben Spannungsvertheilung über die ganze Querſchnittsfläche angenommen war. Hier aber iſt nur ein Theil des Querſchnittes als vorhanden anzuſehen, indem der andere Theil an der Kraftübertragung gar nicht theilnimmt. Mit kleiner Aenderung kann aber die Gleichung 69 auch hier der Berechnung zu Grunde gelegt werden: man muſs nur unter F die Fläche des wirkſamen Querſchnittstheiles, unter M das Moment von P, bezogen auf die im Schwerpunkt des wirkſamen Querſchnittstheiles ſenkrecht zur Kraftebene liegende Axe YY und unter $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment des wirkſamen Querſchnittes für dieſe Axe verſtehen. Dann iſt, wenn zum Unterſchiede die Bezeichnungen F', M', $\mathfrak{J}'$ eingeführt werden,

$$N = \frac{P}{F'} + \frac{M' z'}{\mathfrak{J}'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73.$$

Die Spannung N in den verſchiedenen Querſchnittspunkten ändert ſich wiederum nach dem Geſetze einer Geraden, weil die einzigen Veränderlichen der Gleichung 73, N und z', nur in der erſten Potenz vorkommen. Dieſe Gerade (Fig. 110), deren Ordinaten in den verſchiedenen Punkten die Druckgröſsen für die Flächeneinheit angeben, ſchneide die Abſciſſenaxe in K; alsdann iſt für irgend einen Punkt C im ſenkrecht gemeſſenen Abſtand η von dem Nullpunkte K die Spannung $N = a\,\eta$, wo a eine noch zu beſtimmende Conſtante iſt. Das Gleichgewicht zwiſchen der äuſseren Kraft P und den inneren Spannungen N verlangt, daſs die Summe der im Querſchnitt wirkenden Druckſpannungen gleich der Kraft P ſei, ſo wie daſs das ſtatiſche Moment von P, bezogen auf eine beliebige Axe, gleich der Summe der Momente der Spannungen N für dieſelbe Axe ſei. Als Drehaxe werde die Nulllinie KK gewählt; alsdann ergeben ſich die Bedingungsgleichungen (Fig. 110):

$$P = \Sigma\, N\, df = \Sigma\, (a\,\eta\, df)$$

und

$$P\,r = \Sigma\, (N\,\eta\, df) = \Sigma\, (a\,\eta^2\, df).$$

Die Summirung iſt über die ganze wirkſame Querſchnittsfläche auszudehnen. Bei derſelben iſt a conſtant; mithin erhält man

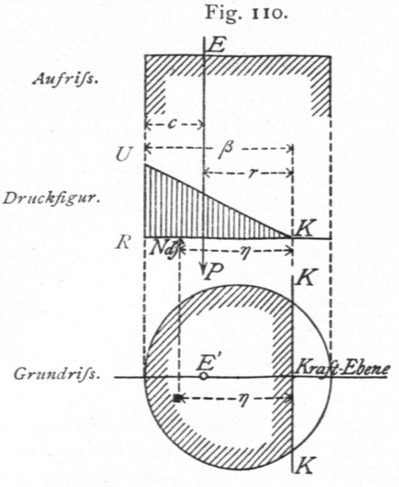
$$P = a\, \Sigma\, (\eta\, df) = a\, S_K$$

und

$$P\,r = a\, \Sigma\, (\eta^2 df) = a\, \mathfrak{J}_K \quad . \quad . \quad . \quad 74.$$

S_K und $\mathfrak{J}_K$ bedeuten das ſtatiſche und Trägheitsmoment des wirkſamen Querſchnittstheiles, bezogen

Fig. 110.



auf die Nulllinie KK. Dividirt man die zweite dieſer Gleichungen durch die erſte, ſo ergiebt ſich

$$r = \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 75.$$

Der Abſtand des Schnittpunktes E von der nächſten Kante, d. h. c, iſt bekannt; die ganze Breite β des wirkſamen Querſchnittstheiles iſt demnach

$$\beta = c + r = c + \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 76.$$

Die Ermittelung von r nach Gleichung 75 auf dem Wege der Rechnung führt bei einigermaſsen unregelmäſsigen Querſchnittsformen zu ſehr umſtändlichen Arbeiten; bei der am häufigſten vorkommenden Querſchnittsform, dem Rechtecke, ergiebt ſich aber r ſehr einfach.

Die zunächſt noch unbekannte Abmeſſung des wirkſamen Rechteckes, welche in die Kraftebene fällt, ſei $\mathfrak{h}$, d. h. es werde mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet, was oben β genannt war; die Breite des Rechteckes ſei b; alsdann iſt (ſiehe Art. 48, S. 33)

$$\mathfrak{J}_K = \frac{b\,\mathfrak{h}^3}{3} \quad \text{und} \quad S_K = \frac{b\,\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{h}}{2} = \frac{b\,\mathfrak{h}^2}{2};$$

demnach

$$r = \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K} = \frac{2\,b\,\mathfrak{h}^3}{3\,b\,\mathfrak{h}^2} = \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}.$$

Ferner iſt $\mathfrak{h} = \beta = c + r = c + \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}$, mithin

$$c = \frac{\mathfrak{h}}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{h} = 3\,c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 77.$$

Die Druckvertheilung findet alſo auf eine Fläche ſtatt, welche dreimal ſo breit iſt, als der Abſtand des Schnittpunktes E von der nächſten Kante.

Die Druckbeanſpruchung an irgend einer Querſchnittsſtelle C iſt nun $N = a\,\eta$, in welchem Ausdrucke a aus der Bedingungsgleichung $P = a\,S_K$ zu ermitteln iſt, d. h. $a = \frac{P}{S_K}$; daher

$$N = \frac{P\,\eta}{S_K} = \frac{2\,P\,\eta}{b\,\mathfrak{h}^2}.$$

N_{max} findet in denjenigen Punkten ſtatt, in denen η ſeinen gröſsten Werth $\mathfrak{h}$ hat, d. h. es iſt

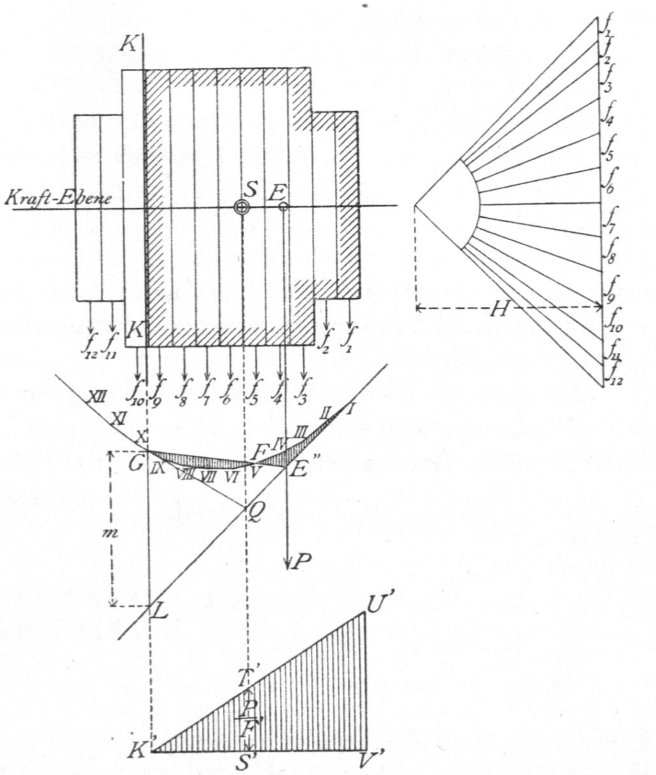
$$N_{max} = \frac{2\,P}{b\,\mathfrak{h}} = \frac{2\,P}{3\,b\,c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 78.$$

Wenn ſich der Druck P gleichmäſsig über die ganze gedrückte Fläche $F_1 = b\,\mathfrak{h} = 3\,b\,c$ vertheilen würde, ſo wäre die Druckſpannung für die Flächeneinheit gleich $\frac{P}{3\,b\,c}$; der wirklich ſtattfindende Maximaldruck iſt gleich $\frac{2\,P}{3\,b\,c}$, d. h. doppelt ſo groſs, als wenn P ſich gleichmäſsig vertheilte. Die Druckfigur in dieſem Falle wird alſo erhalten, indem man zunächſt c dreimal von R aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in R nach beliebigem Maſsſtabe $N_{max} = \frac{2\,P}{3\,b\,c} = \overline{RU}$ auf und verbindet U mit K. Die lothrecht ſchraffirte Fläche giebt die Druckfigur.

114\.
Druckvertheilung in unregelmäfsigen Querfchnitten.

Soll die Druckvertheilung in unregelmäfsigen Querfchnitten ermittelt werden, fo ift das rechnerifche Verfahren überaus umftändlich. Man kann daffelbe dadurch vermeiden, dafs man ein graphifches Verfahren anwendet. Es fei in dem durch Fig. 111 dargeftellten Querfchnitt *K K* die Nulllinie und der Querfchnittstheil rechts von diefer Linie der wirkfame Querfchnitt (derfelbe ift an den Rändern fchraffirt). Man zerlege diefen Querfchnitt in eine Anzahl fchmaler Streifen, deren Flächeninhalte $f_1, f_2, f_3 \ldots$ feien, trage diefelben nach beliebigem Flächenmafsftabe auf, conftruire für den beliebig angenommenen Polabftand *H* das Seilpolygon *I, II . . . VI, VII . . . XII* und verlängere die erfte Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte *L* mit der Linie *K K*; alsdann ift (nach Art. 44, S. 30) das ftatifche Moment der wirkfamen Querfchnittsfläche, bezogen auf die Axe *K K*

Fig. 111.



$$S_K = H\,m\,.$$

Ferner ift, wenn der Inhalt der Fläche *I II . . . X L I* mit φ bezeichnet wird, das Trägheitsmoment der wirkfamen Querfchnittsfläche, bezogen auf die Axe $\overline{K\,K}$ (nach Art. 57, S. 38)

$$\mathcal{J}_K = 2\,H\,\varphi\,,$$

und da nach Gleichung 75: $r = \frac{\mathcal{J}_K}{S_K}$ ift, fo wird $r = \frac{2\,\varphi}{m}$; mithin

$$\varphi = \frac{m\,r}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 79.$$

Die Nulllinie *K K* liegt alfo derart, dafs φ inhaltsgleich ift einem Dreieck, deffen Höhe gleich *r*, deffen Grundlinie gleich dem Stücke *m* ift, welches auf der Nulllinie zwifchen die verlängerte erfte Seilpolygonfeite und das Seilpolygon fällt. Verbindet man den Schnittpunkt *E''* der Kraftrichtung *P* und der verlängerten erften Seilpolygonfeite mit *X*, fo erhält man ein Dreieck *X L E''*, deffen Flächeninhalt gleich $\frac{m\,r}{2}$ ift, welches alfo, wenn *K K* richtig angenommen ift, inhaltsgleich mit φ ift. Dies findet ftatt, wenn die in Fig. 111 lothrecht fchraffirten Flächen *I II III F E'' I* und *F VI VII VIII IX G F* gleichen Inhalt haben. Sind beide an Inhalt nicht gleich, fo ift die Linie *E'' G* um *E''* zu drehen und damit auch *K K* nach rechts oder links fo lange zu verfchieben, bis diefe Bedingung erfüllt ift; die dann erhaltene Nulllinie ift die richtige. Demnach ift das Verfahren das folgende.

Man conftruire für den ganzen Querfchnitt das Seilpolygon $I\ II \ldots XII$, verlängere die erfte Seilpolygonfeite, ermittele deren Schnittpunkt E'' mit der Kraftlinie und fuche nun diejenige durch E'' gehende Linie, welche die beiden lothrecht fchraffirten Flächen einander gleich macht; der Punkt X, in welchem diefe Linie das Seilpolygon fchneidet, beftimmt die Lage der Nulllinie $K\ K$.

Es macht jetzt keine Schwierigkeit, die Druckvertheilung und das Druckmaximum zu ermitteln. Im Schwerpunkte der wirkfamen Querfchnittsfläche ift $z' = 0$, alfo nach Gleichung 73

$$N = \frac{P}{F'}\,.$$

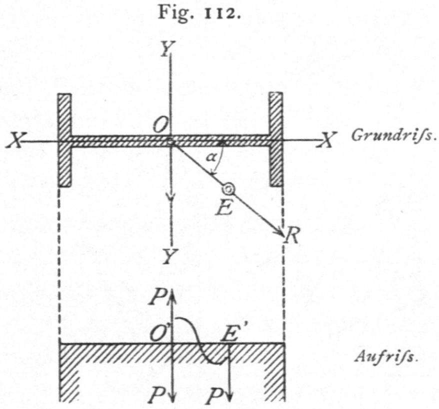
F' ift bekannt; es kann unmittelbar aus Fig. 111 entnommen werden, alfo auch $\frac{P}{F'}$. Die Lage des Schwerpunktes S folgt mit Leichtigkeit aus dem Seilpolygon. Trägt man an der dem Schwerpunkte entfprechenden Stelle des Aufriffes der Fuge den Werth $\frac{P}{F'}$ in beliebigem Mafsftabe als Ordinate auf ($= S'\,T'$), verbindet T' mit K', fo giebt die Linie $K'\,T'$ die Druckvertheilung an; der gröfste Druck für die Flächeneinheit ift $V'\,U'$.

3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querfchnitte nicht in Hauptaxen fchneidet.

α) Die Querfchnitte können Druck und Zug aufnehmen. Die Wirkung einer excentrifch auf den Querfchnitt (Fig. 112) im Punkte E angreifenden Kraft P ift eine dreifache. Wenn $X\,X$ und $Y\,Y$ die Hauptaxen des Querfchnittes find, fo wird zunächft nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte zwei einander gleiche Kräfte P anbringt, welche der gegebenen Kraft P parallel, alfo lothrecht gerichtet find. Zwei diefer Kräfte P bilden ein Kräftepaar in der durch $O\,E$ gelegten lothrechten Ebene; die dritte Kraft P greift im Punkte O an. Das Moment m des

115.
Querfchnitt nimmt Zug und Druck auf.

Fig. 112.



Kräftepaares kann man durch zwei wagrechte Kräfte R erzeugt annehmen, deren eine im Querfchnitt, deren andere in folcher Höhe h über dem Querfchnitt wirkt, dafs $R\,h = M$ ift. Zerlegt man die Kräfte R in zwei Seitenkräfte $R \cos \alpha$ und $R \sin \alpha$, welche in die lothrecht durch $X\,X$, bezw. $Y\,Y$ gelegten Ebenen fallen, fo erhält man zwei Momente: in der lothrechten durch $X\,X$ gelegten Ebene $M \cos \alpha = M_y$ und in der lothrechten durch $Y\,Y$ gelegten Ebene $M \sin \alpha = M_x$. Demnach ift die lothrechte Spannung, welche in einem Punkte C des Querfchnittes mit den Coordinaten x und y erzeugt wird,

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M_x\,y}{\mathfrak{J}_X} + \frac{M_y\,x}{\mathfrak{J}_Y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 80.$$

In diefer Gleichung bedeutet F den Flächeninhalt des Querfchnittes; $\mathfrak{J}_X$ und $\mathfrak{J}_Y$ find die Trägheitsmomente der Querfchnittsfläche, bezogen auf die $X\,X$- und $Y\,Y$-Axe.

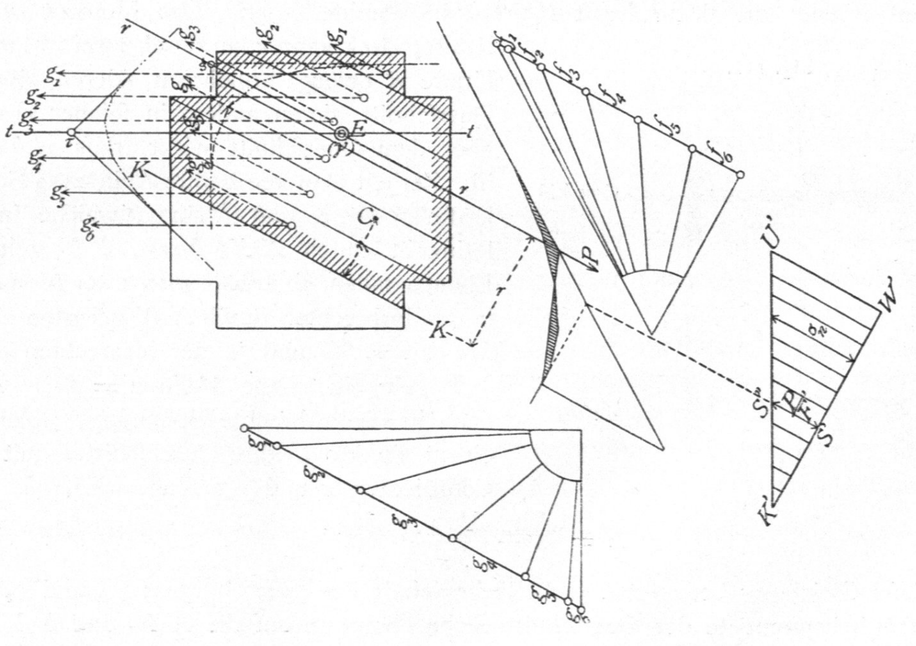
Bei gegebenem Querſchnitt und gegebener Kraft enthält die Gleichung 80 nur drei Veränderliche: N, x und y; alle drei kommen nur in der erſten Potenz vor. Ermittelt man demnach für alle Werthe von x und y, d. h. für alle Querſchnittspunkte, die zugehörigen Werthe von N und trägt dieſelben als Ordinaten auf, ſo liegen alle Endpunkte dieſer Ordinaten auf einer Ebene, der Ebene der Gleichung 80. Man findet leicht die Nulllinie, indem man $N = 0$ ſetzt und in der erhaltenen Gleichung für zwei Werthe von x die zugehörigen Werthe von y aufſucht.

116. Querſchnitt nimmt nur Druck auf.

β) Die Querſchnitte können nur Druck aufnehmen. Wenn die Querſchnitte nur Druck übertragen können, wie dies beim Mauerwerk nahezu der Fall iſt, behält, ſo lange die Nulllinie nicht den Querſchnitt ſchneidet, die Gleichung 80 ihre Giltigkeit, weil alsdann nur Druckſpannungen ſtattfinden. Sobald aber die Nulllinie in den Querſchnitt fällt, wird die Aufgabe eine ſehr ſchwierige. Denn es iſt nicht nur die Gröſse der gedrückten Fläche, ſondern auch die Richtung der Nulllinie unbekannt. Die Gleichung 80 bleibt auch für dieſen Fall giltig, wenn unter F die wirkſame Querſchnittsfläche, unter XX, bezw. YY die durch den Schwerpunkt derſelben gelegten Hauptaxen dieſes Theiles der Querſchnittsfläche verſtanden werden und die Coordinaten x und y, ſo wie $\mathcal{J}_X$ und $\mathcal{J}_Y$ auf dieſe Hauptaxen bezogen werden.

Die Endpunkte der in den einzelnen Querſchnittspunkten aufgetragenen Werthe für N liegen wiederum auf einer Ebene, der Spannungsebene, welche den Querſchnitt in der Nulllinie ſchneidet. Alle lothrechten Ebenen, welche parallel zur Nulllinie durch den wirkſamen Querſchnittstheil gelegt werden, ſchneiden dieſen und die Spannungsebene in zwei parallelen Linien, deren Abſtand die Spannung der geſchnittenen Querſchnittspunkte angiebt. Daraus folgt, daſs in allen Punkten, welche auf einer Parallelen zur Nulllinie KK liegen (Fig. 113), die Spannungen gleich groſs ſind. In einem Punkte C, deſſen ſenkrechter Abſtand von KK gleich η iſt, wird die Spannung $N = a\,\eta$ ſein, in welcher Gleichung a eine noch unbekannte Conſtante

Fig. 113.



ift. Die graphifche Darftellung der Spannung in den einzelnen Punkten des Querfchnittes bietet die Linie $U' K'$.

Wird zunächft die Richtung der Nulllinie $K K$ als bekannt und gegeben angenommen, fo ift die ganze Ableitung in Art. 114 (S. 92) auch hier giltig. Auch hier ift

$$N = a\,\eta\,, \quad P = \int a\,\eta\,df = a\,S_K \quad \text{und} \quad P\,r = \int N\,\eta\,df = a\int \eta^2\,df = a\,\mathfrak{J}_K\,;$$

fonach

$$r = \frac{\mathfrak{J}_K}{S_K}\,.$$

$\mathfrak{J}_K$ und S_K bedeuten das Trägheits- und ftatifche Moment der wirkfamen Querfchnittsfläche, bezogen auf die Axe $K K$. Man zerlege diefelbe nunmehr in Streifen, welche parallel zu $K K$ find und ermittele die Lage von $K K$, wie oben (in Art. 114, S. 92) gezeigt (Fig. 113 [20]).

Es ift nun zu unterfuchen, ob die angenommene Richtung der Nulllinie richtig ift. Die im Querfchnitt wirkenden Druckfpannungen müffen mit der Kraft P, welche den Querfchnitt im Punkte E fchneidet, im Gleichgewicht fein; demnach mufs deren Mittelkraft ebenfalls durch den Punkt E gehen, wenn die Richtung der Nulllinie richtig gewählt ift. Alsdann ift auch die gefundene wirkfame Fläche (in Fig. 113 fchraffirt) richtig; anderenfalls ift eine Verbefferung vorzunehmen. Alle Punkte des Querfchnittes, welche auf Parallelen zur Nulllinie liegen, haben nach Obigem gleiche Spannung; man kann alfo die Querfchnittsfläche in genügend fchmale, der Nulllinie parallele Streifen zerlegen, in welchen je gleiche Spannung ftattfindet. Der gefammte Druck in einem Streifen der Breite b_n, der Länge h_n und der Spannung σ_n für die Flächeneinheit ift offenbar

$$g_n = b_n\,h_n\,\sigma_n\,.$$

Man ermittele für alle Streifen die Werthe g, wobei die Werthe von σ_n durch die entfprechenden Ordinaten der Linie $U' K'$ dargeftellt find, und fuche die Entfernung der Mittelkraft diefer Werthe $g_1, g_2, g_3 \ldots$ von zwei Axen, welche beliebig angenommen werden können. Zweckmäfsig wird als eine Axe die Nulllinie, als die andere Axe eine Längsfeite des Querfchnittes gewählt; es können auch die Längs- und Querfeite genommen werden. Die Auffuchung der Mittelkraftslage erfolgt bequem mit Hilfe zweier Seilpolygone (Fig. 113). Der Abftand der Mittelkraft von den beiden Axen ergiebt fich aus den Schnittpunkten ρ und τ der äufserften Seilpolygonfeiten; der Schnittpunkt der Mittelkraft mit dem Querfchnitt liegt fowohl auf der durch ρ gezogenen Linie $r\,r$, wie auf der durch τ gezogenen Linie $t\,t$, ift alfo der Punkt V. Linie $r\,r$ ift parallel zu der Kraftrichtung im erften, $t\,t$ parallel zur Kraftrichtung im zweiten Seilpolygon.

Wenn V mit E zufammenfällt, wie in Fig. 113, fo ift die Nulllinie und die ganze Conftruction richtig; die wirklichen Druckfpannungen können dann, wie in Art. 114 (S. 92) gezeigt, ermittelt werden, indem man im Schwerpunkte der wirkfamen Querfchnittsfläche $\frac{P}{F_1}$ $(= S' S'')$ aufträgt und den Endpunkt S'' mit K' verbindet. $K' U' W'$ ift die Druckfigur.

---

[20]) In Fig. 113 find die Kräfte $f_1, f_2, f_3 \ldots$ nicht ausgezeichnet, um die Deutlichkeit nicht zu verringern.

Fällt aber V mit E nicht zusammen, so ist die Untersuchung für eine andere Lage der Nulllinie zu wiederholen. Man kann ohne Schwierigkeit schätzen, nach welcher Richtung KK gedreht werden muss, und erreicht meist bereits bei der ersten Wiederholung der Construction ein genügend genaues Zusammenfallen der Punkte E und V[21]).

Vorstehende Untersuchung ist für die Ermittelung der Standsicherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern etc. von grosser Wichtigkeit.

b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr.

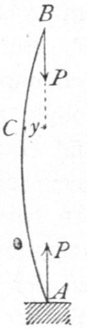
1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

117. Voraussetzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zusammenfallen, so findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanspruchung statt. Wirken auf einen eben solchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengesetzt, so müssten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanspruchungen stattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerschnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche gross ist, so wird unter dem Einflusse der drückenden Kräfte ein Ausbiegen stattfinden, und es wirkt alsdann auf jeden Querschnitt C (Fig. 114) ausser der Axialkraft P noch ein Moment Py. In diesem Falle findet Beanspruchung des Stabes auf Zerknicken statt, und derselbe ist mit Rücksicht auf diese Beanspruchungsweise zu berechnen.

Es kann auffallen, dass hier scheinbar ein Widerspruch zwischen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ist derselbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht statt; sobald aber in Folge von unvermeidlichen Ausführungsfehlern die Kräfte ausserhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entsteht für jeden Querschnitt des Stabes ein Biegungsmoment, welches unter Umständen ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in diesem Falle von einem labilen Gleichgewichtszustande sprechen.

Fig. 114.



Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig 114 gezeichneten Richtung stattfinden, sondern ist nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ist demnach zu untersuchen, nach welcher Richtung ein solches Ausbiegen am leichtesten stattfindet, und der Querschnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Untersuchungen soll angenommen werden, dass 1) als äussere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querschnitt habe.

---

21) Vergl. über den in Art. 113 bis 116 behandelten Gegenstand:

KECK. Excentrische Druckbelastung eines cylindrischen Mauerkörpers ausserhalb des Kernes. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1882, S. 301.

KECK. Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Kernes bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnittes. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1882, S. 627.

MOHR. Ueber die Vertheilung der excentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkskörpers. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1883, S. 163.

BARKHAUSEN. Druckvertheilung im rechteckigen Mauerschnitte. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1883, S. 469.

SCHEPP. Zur Ermittelung der Druckvertheilung in Mauerwerksquerschnitten. Centralbl. d. Bauverw 1884, S. 152.

HÜPPNER. Zur Ermittelung der Druckvertheilung in Mauerwerksquerschnitten. Civiling. 1885, S. 39