

3. Abschnitt.

Stützen und Träger.

Man bezeichnet mit dem Namen Stützen solche Bauconstructions, bei denen die Längsaxe ganz oder nahezu mit der Richtung der Belastungen zusammenfällt. Die Belastungen wirken in den meisten Fällen lothrecht, in der Richtung der Schwere, und es ergibt sich daraus, daß die Stützen meistens lothrechte oder nahezu lothrechte Längsaxen haben. Wir rechnen dahin die Pfeiler und die Säulen, die sich wohl auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Freistützen zusammenfassen lassen.

Träger sind Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschließlich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Da die Belastungen meist lothrecht gerichtet sind, haben die Träger meist wagrechte oder nur wenig davon abweichende Längsaxen.

1. Kapitel.

Stützen.

109.
Vor-
bemerkungen.

Im vorliegenden Kapitel sollen ganz allgemein solche Constructions, bezw. Constructionstheile behandelt werden, welche auf Druck in Anspruch genommen werden, also nicht allein die Freistützen (Pfeiler und Säulen), sondern auch sonstige gedrückte Stäbe, wie sie bei Trägern für Decken und Dächer vorkommen. Je nach dem zu dem gedrückten Theile verwendeten Material ist der Widerstand desselben ein wesentlich verschiedener: Stützen aus Eisen und Holz sind im Stande, sowohl Druck- wie Zugwiderstand zu leisten; Stützen aus Mauerwerk dagegen können keinen mit Sicherheit in Rechnung zu ziehenden, bemerkenswerthen Zugwiderstand leisten.

Wenn die auf einen Querschnitt wirkende Mittelkraft außerhalb der Längsaxe des Pfeilers wirkt, ist sie mit einem Momente verbunden, welches in den einzelnen Querschnittstheilen Zugbeanspruchungen erzeugt. Dieselben werden allerdings zum Theile durch Druckbeanspruchungen wieder aufgehoben; sobald jedoch die Excentricität gewisse Grenzen erreicht, so sind Zugbeanspruchungen vorhanden, falls das Material dieselben übertragen kann; anderenfalls treten vollständig veränderte Spannungsverhältnisse auf. Dieser letztere Fall kommt bei den gemauerten Pfeilern sehr häufig vor und ist deshalb besonders zu untersuchen.

Bei den aus Holz und Eisen bestehenden Druckstäben, bezw. Freistützen tritt die erwähnte Schwierigkeit nicht auf; statt derselben ist bei diesen die Gefahr eines seitlichen Ausbiegens und weiter des Zerknickens in das Auge zu fassen.

a) Stützen mit außerhalb der Längsaxe wirkenden Kräften, ohne Rücksicht auf Zerknicken.

1) Druckvertheilung in Querschnitten, welche Druck und Zug aufnehmen können, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet.

Die nachfolgende Untersuchung hat allgemeine Giltigkeit, findet aber vorwiegend auf gemauerte Pfeiler und Säulen Anwendung. Die Mittelkraft aller oberhalb irgend eines Querschnittes II auf die Freistütze wirkenden Kräfte sei R und schneide den Querschnitt in einem Punkte E (Fig. 103), dessen Abstand von der Pfeileraxe mit ξ bezeichnet werden soll. Die Kraftebene schneide den Querschnitt II

110.
Allgemeine
Untersuchung.

und alle Querschnitte des Pfeilers in Hauptaxen (gewöhnlich sind dieselben Symmetrie-Axen). R wird in eine Seitenkraft P , welche senkrecht zum Querschnitt II wirkt, und eine Seitenkraft Q zerlegt, welche in den Querschnitt fällt; letztere soll unbeachtet gelassen werden, da sie das Endresultat der Untersuchung nur wenig beeinflusst. Es wird nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte O des Querschnittes zwei Kräfte anbringt, welche je gleich und zu P parallel sind, aber entgegengesetzten Sinn haben, also einander aufheben. Dadurch ergibt sich als Wirkung der excentrischen Kraft P : eine im Schwerpunkte O angreifende Kraft P und zwei (in Fig. 103 durch einen Bogen verbundene) Kräfte P , welche zusammen ein Kräftepaar mit dem Momente $M = P\xi$ bilden; das Moment dreht im vorliegenden Falle nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers).

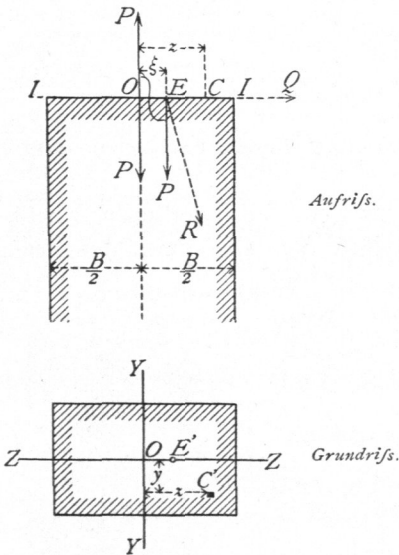
Durch die Kraft und das Kräftepaar werden im

Querschnitte die folgenden Beanspruchungen hervorgerufen. Die im Schwerpunkte angreifende Kraft vertheilt sich gleichmäßig über die Querschnittsfläche F ; sie erzeugt in allen Theilen desselben einen Druck für die Flächeneinheit $N_1 = \frac{P}{F}$. Das Moment

$P\xi$ würde, wenn es allein wirkte, nach den Gesetzen der Biegeelasticität (siehe Art. 86, S. 62) in den verschiedenen Abständen von der wagrechten, senkrecht zur Kraftebene durch O gelegten Axe YY (Fig. 103, Grundriss) verschiedene Spannungen erzeugen, welche sich für irgend einen Punkt C im Abstände z von der erwähnten Axe zu $N_2 = \frac{Mz}{\mathcal{I}}$ (Gleichung 42) ergeben. In letzterem Ausdruck ist \mathcal{I}

das Trägheitsmoment des Querschnittes II für die Axe YY . Da es sich bei den hier zu betrachtenden Constructionen hauptsächlich um Beanspruchungen auf Druck handelt, so sollen Druckbeanspruchungen als positive, Zugbeanspruchungen als negative Spannungen eingeführt werden.

Fig. 103.



Die gefammte Spannung im Punkte C ist demnach

$$N = N_1 + N_2 = \frac{P}{F} + \frac{Mz}{\mathcal{J}} = \frac{P}{F} + \frac{P\xi z}{\mathcal{J}},$$

oder

$$N = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi z}{\mathcal{J}} \right) \dots \dots \dots 69.$$

Für eine gegebene Kraft P mit gegebenem Angriffspunkt E kann die Spannung sämmtlicher Querschnittspunkte durch Gleichung 69 ermittelt werden. Man braucht nur für z alle Werthe von $z = -\frac{B}{2}$ bis $z = +\frac{B}{2}$ einzuführen und die zugehörigen Gröfsen von N zu berechnen. Von der Spannungsvertheilung erhält man ein klares Bild, wenn man in jedem Punkte des Querschnittes die Spannung als Ordinate aufträgt und die Endpunkte dieser Ordinaten verbindet. Da bei den gemachten Annahmen die Entfernung y des beliebig gewählten Punktes C von der Kraftebene gar nicht in der Gleichung vorkommt, so folgt, dafs die Spannung N unabhängig von y ist; alle in gleichem Abstände z von der Y - Y -Axe liegenden Punkte erleiden also gleiche Spannung. Demnach genügt es, die Spannungen aller Punkte aufzufuchen, welche auf einer zur Kraftebene parallelen Linie des Querschnittes liegen und diese nach beliebig gewähltem Mafstabe aufzutragen. Die z -Werthe sind die Absciffen, die Spannungen N sind die Ordinaten; die Vertheilung findet nach dem durch Gleichung 69 bestimmten Gesetze statt.

In dieser Gleichung sind N und z die einzigen Veränderlichen; beide kommen nur in der ersten Potenz vor. Daraus folgt, dafs die Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten N eine Gerade ist: die Gerade obiger Gleichung. Diese Linie ist bekannt, wenn zwei Punkte derselben bekannt sind. Demnach kann man sie leicht auffinden, indem man z. B. für die beiden Endwerthe $z = -\frac{B}{2}$ und $z = +\frac{B}{2}$ die Werthe von N ausrechnet

und aufträgt. Man erhält etwa die Darstellungen in Fig. 104.

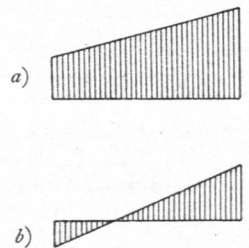
Die positiven Werthe von N sind nach oben, die negativen nach unten abgetragen; die ersteren bedeuten Druck, die letzteren Zug. Wenn alle Ordinaten auf einer Seite der Absciffe liegen, so findet nur Druck statt (Fig. 104a); sonst hat man im Querschnitt theils Druck, theils Zug. Die Grenze, an welcher der Wechsel von Druck zum Zug stattfindet, ist die Nulllinie, gewöhnlich neutrale Axe genannt (siehe auch Art. 87, S. 65, und Art. 96, S. 69). Die von der Absciffe und der Geraden der Gleichung 69 eingeschlossene (in Fig. 104 schraffierte) Fläche wird als Druckfigur bezeichnet.

Von besonderer Wichtigkeit sind nun die Punkte des Querschnittes, welche die Spannung Null erhalten, also in der neutralen Axe liegen. N wird für alle diejenigen Punkte gleich Null, für welche in Gleichung 69 der Klammerwerth gleich Null wird. Nennt man den besonderen Werth von z , für den dies eintritt, z_0 , so

wird $N = 0$, wenn $1 + \frac{F\xi z_0}{\mathcal{J}} = 0$ wird, d. h. für

$$z_0 = -\frac{\mathcal{J}}{F\xi} \dots \dots \dots 70.$$

Fig. 104.



111.
Neutrale Axe
oder
Nulllinie.

Für alle Punkte, deren Ordinaten den Werth der Gleichung 70 haben, ist $N = 0$; die Gleichung 70 ist also die Gleichung der neutralen Axe, doch nur unter der Voraussetzung, daß die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptaxe schneidet.

Aus der Gleichung 70 für die neutrale Axe ergeben sich wichtige Folgerungen:

α) Da \mathcal{F} und F stets positive Größen sind, so hat z_0 stets anderes Vorzeichen als ξ . Die sämtlichen Punkte, in denen die Spannung Null stattfindet, liegen also an derjenigen Stelle der Axe $Y Y$, an welcher der Schnittpunkt mit der Mittelkraft R nicht liegt.

β) Für eine bestimmte Lage der Kraft R sind alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung constant, ist also auch z_0 constant; es liegen also alle Punkte, in denen N gleich Null ist, in gleichem Abstände von der Y -Axe, d. h. alle diese Punkte liegen in einer Geraden, die parallel ist zu derjenigen Schwerpunktsaxe, welche zur Schnittlinie des Querschnittes mit der Kraftebene senkrecht steht.

γ) Der Werth für z_0 ist von der Kraftgröße ganz unabhängig; er ist nur von den Werthen \mathcal{F} und F , also von der Querschnittsform und -Größe, und von ξ , d. h. von der Lage des Schnittpunktes E abhängig.

δ) z_0 wird Null, d. h. die neutrale Axe fällt mit der zur Kraftebene senkrechten Schwerpunktsaxe zusammen, wenn $\xi = \infty$ wird, d. h. wenn die Kraft R den Querschnitt erst in unendlich weiter Ferne schneidet, wenn also R zum Querschnitt parallel gerichtet ist, wenn also gar keine Axialkraft vorhanden ist.

Die Gleichung 70 gibt ein bequemes Verfahren, die Lage der neutralen Axe graphisch zu ermitteln. Besonders einfach gestaltet sich die Aufgabe beim rechteckigen Querschnitt.

Hier ist nach Art. 48 (S. 33):

$$\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad F = b h.$$

Aus Gleichung 70 folgt, wenn man zunächst nur die absolute Größe von z_0 bestimmt,

$$z_0 = \frac{b h^3}{12 b h \xi} = \frac{h^2}{12 \xi} \quad \text{und} \quad z_0 \xi = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{6} \cdot \frac{h}{2}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Construction (Fig. 105).

Man trägt von O' aus $\overline{O'B'} = \frac{h}{6}$ nach einer Seite ab, schlägt über $B'A' = \frac{2}{3} h$ als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die in O' zur ZZ -Axe gezogene Lothrechte in D schneidet; dann ist

$\overline{O'D^2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{h^2}{12}$. Verbindet man nun D mit E' und zieht durch D eine Linie DK' senkrecht zu $E'D$, so ist $\overline{O'D^2} = E'O' \cdot \overline{O'K'} = \xi \cdot \overline{O'K'}$, d. h.

$$\overline{O'K'} = \frac{\overline{O'D^2}}{\xi} = \frac{h^2}{12 \xi};$$

mithin

$$\overline{O'K'} = z_0.$$

K' ist also ein Punkt der neutralen Linie, und die durch K' parallel zur Y -Axe gelegte Linie NN ist die neutrale Axe selbst.

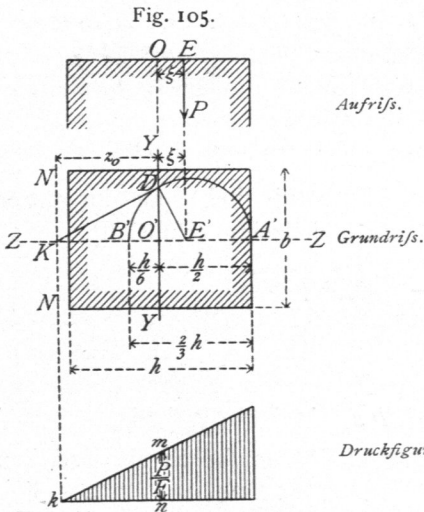
Eine etwas geänderte Construction ist bei weniger einfachen Querschnitten anwendbar. Nach Art. 64 (S. 43) ist der Trägheitsradius

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = F R^2.$$

Demnach ist nach Gleichung 70

$$z_0 = -\frac{\mathcal{F}}{F \xi} = -\frac{F R^2}{F \xi} = -\frac{R^2}{\xi},$$

woraus sich die folgende Construction (Fig. 106) ergibt.



In O' errichte man zur ZZ -Axe die Lothrechte $\overline{O'S} = R$, verbinde S mit E' und ziehe durch S die Senkrechte $\overline{S'K}$ zu $E'S$; dann ist $\overline{O'S}^2 = R^2 = \overline{E'O} \cdot \overline{O'K} = \xi \cdot \overline{O'K}$; mithin

$$\overline{O'K} = \frac{R^2}{\xi} \text{ (absolute Gröfse) } = z_0.$$

Der Punkt k in Fig. 105 u. 106 ist ein Punkt der Geraden, welche die Veränderung von N darstellt; wenn noch ein Punkt dieser Geraden bekannt ist, so kann sie gezeichnet werden. Für $z = 0$ ist nach Gleichung 69: $N_0 = \frac{P}{F}$, d. h. in den Querschnittspunkten, welche in der zur Kraftebene senkrechten Schwerpunktsaxe liegen, ist die Spannung genau so groß, als wenn nur die Kraft P in der Axe wirkte.

Man kann $\frac{P}{F}$ leicht ermitteln und nach beliebigem Maßstabe in dem entsprechenden Punkte n (Fig. 105) auftragen. Ist $\frac{mn}{m} = \frac{P}{F}$, so ergibt die Verbindung von m mit k die Gerade für N .

112.
Kernpunkte.

Die Beanspruchung der Querschnittstheile ist an den beiden Seiten der Nulllinie (neutralen Axe) verschiedenartig, an der einen Seite Druck, an der anderen Zug. Es ist nunmehr zu untersuchen, wie die Kraft P liegen muß, damit nur Druckspannungen im Querschnitte auftreten.

Offenbar sind im ganzen Querschnitte nur Druckspannungen, wenn die den äußersten Querschnittspunkten c und d (Fig. 107) entsprechenden Spannungen Druck bedeuten; denn dann fällt die Nulllinie außerhalb des Querschnittes (siehe Fig. 104). Nun ist die Spannung im Punkte d , weil für denselben $z = a_1$ ist, nach Gleichung 69

$$N_{max} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{F}} \right),$$

diejenige im Punkte c , weil für diesen $z = -a_2$ ist,

$$N_{min} = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{F}} \right).$$

Wenn sowohl N_{max} , wie N_{min} Druck bedeuten, also positiv sind, findet im ganzen Querschnitte nur Druck statt; dies ist der Fall, wenn gleichzeitig erfüllt ist

$$\left(1 + \frac{F \xi a_1}{\mathcal{F}} \right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(1 - \frac{F \xi a_2}{\mathcal{F}} \right) > 0,$$

d. h. wenn

$$\xi > -\frac{\mathcal{F}}{F a_1} \quad \text{und} \quad \xi < \frac{\mathcal{F}}{F a_2} \quad \dots \quad 71.$$

ist. Der Schnittpunkt E der Kraft P mit dem Querschnitte muß sich also zwischen zwei Punkten K_1 und K_2 (Fig. 107) befinden, welche in den Abständen $-\frac{\mathcal{F}}{F a_1}$,

bezw. $\frac{\mathcal{F}}{F a_2}$ von der Axe O liegen, wenn nur Druck im Querschnitt herrschen soll.

Wir bezeichnen abkürzungsweise

Fig. 106.

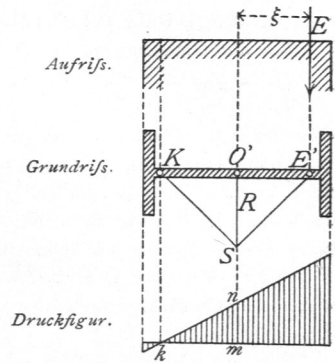
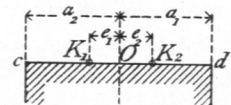


Fig. 107.



$$\frac{\mathcal{F}}{F a_1} = e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{F a_2} = e_2 \quad \dots \quad 72.$$

Man nennt die Punkte K_1 und K_2 die Kernpunkte.

Da auf die sämtlichen für e_1 und e_2 maßgebenden Größen \mathcal{F} , F , a_1 und a_2 nur die Querschnittsgealtung Einfluss hat, so ist die Lage der Kernpunkte blofs von der Form und Gröfse des Querschnittes abhängig.

Für das Rechteck ist $\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12}$, $F = b h$ und $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$; mithin $e_1 = e_2 = \frac{h}{6}$. Soll also nur Druck im Querschnitt stattfinden, so darf die Kraft den Querschnitt in keinem gröfseren Abstände von der Axe schneiden, als $\frac{h}{6}$; mit anderen Worten: sie mufs den Querschnitt im inneren Drittel schneiden.

Für den Kreisquerschnitt ist $e_1 = e_2 = \frac{d}{8}$, d. h. die Kraft darf das innere Viertel nicht verlassen, wenn nur Druck auftreten soll.

Für den Kreisringquerschnitt bei geringer Ringstärke ist $e_1 = e_2 = \frac{d}{4}$; die Kraft mufs also in der inneren Hälfte verbleiben.

2) Druckvertheilung in Querschnitten, welche nur Druck aufzunehmen vermögen, falls die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet.

Die für die Druckvertheilung unter 1 entwickelten Gefetze gelten auch für Constructions, welche nur Druck aufnehmen können, so lange die Kraft eine derartige Lage hat, dafs im ganzen Querschnitt wirklich nur Druckspannungen auftreten, so lange also die Kraft innerhalb der Kernpunkte liegt.

^{113.} Druckvertheilung in rechteckigen Querschnitten.

Wenn daher z. B. beim rechteckigen Querschnitte die Kraft im inneren Drittel liegt, so kann die Lage der Nulllinie, so wie die Druckvertheilung genau so ermittelt werden, wie in Fig. 105 gezeigt ist. Diese Construction findet häufige Anwendung nicht nur bei Freistützen mit rechteckigem Querschnitt, sondern auch bei Stützmauern (an deren Bodenflächen), in Gewölben etc.

Als Maß senkrecht zur Bildfläche wählt man zweckmäfsig die Einheit (gewöhnlich 1 m), so dafs die gedrückte Fläche — der Querschnitt — ein Rechteck von der Breite (senkrecht zur Bildfläche) gleich der Einheit ist. Die zweite Abmessung des Rechteckes ist bei den Gewölben (Fig. 108) die Gewölbstärke d an der betreffenden Stelle, bei den Stützmauern die Mauerstärke d (Fig. 109).

Fig. 108.

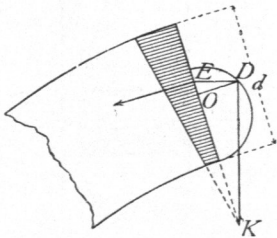
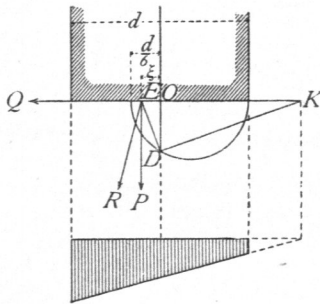


Fig. 109.



In den beiden neben stehenden Figuren schneidet die Mittelkraft die betreffende Fuge innerhalb der Kernpunkte, so dafs also nur Druck im Querschnitt entsteht und der ganze Querschnitt wirksam ist. Die angewandte Construction ist ohne weitere Erläuterung verständlich.

Es möge noch bemerkt werden, dafs dieselbe bei den Gewölben nur annäherungsweise richtig ist, weil die Voraussetzung der geraden Axe nicht zutrifft. Der Fehler ist aber bei einigermaßen grossem Halbmesser des Gewölbes unerheblich.

Wenn aber die Kraft den Querschnitt auferhalb der Kernpunkte schneidet, so fällt die Nulllinie in den Querschnitt, und es würden an der einen Seite derselben Zugspannungen entstehen, falls das Material dieselben aufnehmen könnte. Da dieses nach der Annahme hier nicht möglich ist, so wird auf diesem ganzen Querschnittstheile kein Uebertragen von Spannungen stattfinden können; die ganze Spannungsübertragung findet auf der Druckseite der Nulllinie statt. Man nennt diesen Theil des Querschnittes den wirkfamen Querschnitt. Es ist die Gröfse und Form des wirkfamen Querschnittes und die gröfste in demselben stattfindende Spannung zu ermitteln.

Der für die Spannung N gefundene Ausdruck (Gleichung 69) ist hier nicht ohne Weiteres anwendbar, weil bei Aufstellung desselben Spannungsvertheilung über die ganze Querschnittsfläche angenommen war. Hier aber ist nur ein Theil des Querschnittes als vorhanden anzusehen, indem der andere Theil an der Kraftübertragung gar nicht theilnimmt. Mit kleiner Aenderung kann aber die Gleichung 69 auch hier der Berechnung zu Grunde gelegt werden: man mufs nur unter F die Fläche des wirkfamen Querschnittstheiles, unter M das Moment von P , bezogen auf die im Schwerpunkt des wirkfamen Querschnittstheiles senkrecht zur Kraftebene liegende Axe YY und unter \mathcal{F} das Trägheitsmoment des wirkfamen Querschnittes für diese Axe verstehen. Dann ist, wenn zum Unterschiede die Bezeichnungen F' , M' , \mathcal{F}' eingeführt werden,

$$N = \frac{P}{F'} + \frac{M' z'}{\mathcal{F}'} \dots \dots \dots 73.$$

Die Spannung N in den verschiedenen Querschnittspunkten ändert sich wiederum nach dem Gesetze einer Geraden, weil die einzigen Veränderlichen der Gleichung 73, N und z' , nur in der ersten Potenz vorkommen. Diese Gerade (Fig. 110), deren Ordinaten in den verschiedenen Punkten die Druckgröfssen für die Flächeneinheit angeben, schneide die Abscissenaxe in K ; alsdann ist für irgend einen Punkt C im senkrecht gemessenen Abstand η von dem Nullpunkte K die Spannung $N = a \eta$, wo a eine noch zu bestimmende Constante ist. Das Gleichgewicht zwischen der äufseren Kraft P und den inneren Spannungen N verlangt, dafs die Summe der im Querschnitt wirkenden Druckspannungen gleich der Kraft P sei, so wie dafs das statische Moment von P , bezogen auf eine beliebige Axe, gleich der Summe der Momente der Spannungen N für dieselbe Axe sei.

Als Drehaxe werde die Nulllinie KK gewählt; alsdann ergeben sich die Bedingungsgleichungen (Fig. 110):

$$P = \Sigma N df = \Sigma (a \eta df)$$

und

$$Pr = \Sigma (N \eta df) = \Sigma (a \eta^2 df).$$

Die Summirung ist über die ganze wirkfame Querschnittsfläche auszudehnen. Bei derselben ist a constant; mithin erhält man

$$P = a \Sigma (\eta df) = a S_K$$

und

$$Pr = a \Sigma (\eta^2 df) = a \mathcal{F}_K \dots \dots 74.$$

S_K und \mathcal{F}_K bedeuten das statische und Trägheitsmoment des wirkfamen Querschnittstheiles, bezogen

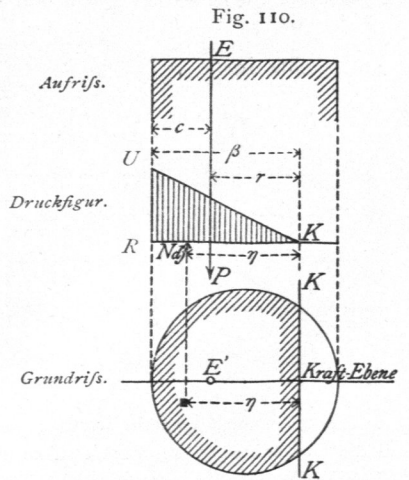


Fig. 110.

auf die Nulllinie KK . Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so ergibt sich

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} \dots \dots \dots 75.$$

Der Abstand des Schnittpunktes E von der nächsten Kante, d. h. c , ist bekannt; die ganze Breite β des wirkfamen Querschnittstheiles ist demnach

$$\beta = c + r = c + \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} \dots \dots \dots 76.$$

Die Ermittlung von r nach Gleichung 75 auf dem Wege der Rechnung führt bei einigermaßen unregelmäßigen Querschnittsformen zu sehr umständlichen Arbeiten; bei der am häufigsten vorkommenden Querschnittsform, dem Rechtecke, ergibt sich aber r sehr einfach.

Die zunächst noch unbekannte Abmessung des wirkfamen Rechteckes, welche in die Kraftebene fällt, sei h , d. h. es werde mit h bezeichnet, was oben β genannt war; die Breite des Rechteckes sei b ; alsdann ist (siehe Art. 48, S. 33)

$$\mathcal{F}_K = \frac{b h^3}{3} \quad \text{und} \quad S_K = \frac{b h \cdot h}{2} = \frac{b h^2}{2};$$

demnach

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K} = \frac{2 b h^3}{3 b h^2} = \frac{2}{3} h.$$

Ferner ist $h = \beta = c + r = c + \frac{2}{3} h$, mithin

$$c = \frac{h}{3} \quad \text{und} \quad h = 3 c \dots \dots \dots 77.$$

Die Druckvertheilung findet also auf eine Fläche statt, welche dreimal so breit ist, als der Abstand des Schnittpunktes E von der nächsten Kante.

Die Druckbeanspruchung an irgend einer Querschnittsstelle C ist nun $N = a \eta$, in welchem Ausdrücke a aus der Bedingungsgleichung $P = a S_K$ zu ermitteln ist,

d. h. $a = \frac{P}{S_K}$; daher

$$N = \frac{P \eta}{S_K} = \frac{2 P \eta}{b h^2}.$$

N_{max} findet in denjenigen Punkten statt, in denen η seinen größten Werth h hat, d. h. es ist

$$N_{max} = \frac{2 P}{b h} = \frac{2 P}{3 b c} \dots \dots \dots 78.$$

Wenn sich der Druck P gleichmäßig über die ganze gedrückte Fläche $F_1 = b h = 3 b c$ vertheilen würde, so wäre die Druckspannung für die Flächeneinheit gleich $\frac{P}{3 b c}$; der wirklich stattfindende Maximaldruck ist gleich $\frac{2 P}{3 b c}$, d. h. doppelt so groß, als wenn P sich gleichmäßig vertheilte. Die Druckfigur in diesem Falle wird also erhalten, indem man zunächst c dreimal von R aus abträgt, wodurch man den Nullpunkt K findet; alsdann trägt man in R nach beliebigem Maßstabe

$N_{max} = \frac{2 P}{3 b c} = \overline{RU}$ auf und verbindet U mit K . Die lothrecht schraffierte Fläche giebt die Druckfigur.

114.
Druckvertheilung
in unregel-
mäfsigen
Querschnitten.

Soll die Druckvertheilung in unregelmäßigen Querschnitten ermittelt werden, so ist das rechnerische Verfahren überaus umständlich. Man kann dasselbe dadurch vermeiden, dass man ein graphisches Verfahren anwendet. Es sei in dem durch Fig. 111 dargestellten Querschnitt KK die Nulllinie und der Querschnittstheil rechts von dieser Linie der wirkfame Querschnitt (derselbe ist an den Rändern schraffirt). Man zerlege diesen Querschnitt in eine Anzahl schmaler Streifen, deren Flächeninhalte $f_1, f_2, f_3 \dots$ seien, trage dieselben nach beliebigem Flächenmafsstabe auf, construire für den beliebig angenommenen Polabstand H das Seilpolygon $I, II \dots VI, VII \dots XII$ und verlängere die erste Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte L mit der Linie KK ; alsdann ist (nach Art. 44, S. 30) das statische Moment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK

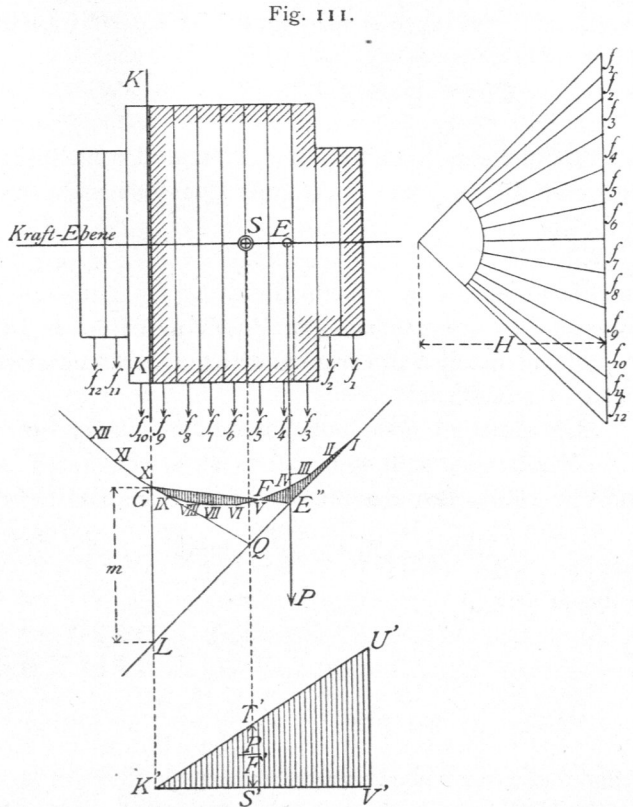


Fig. 111.

und verlängere die erste Seite des Seilpolygons bis zum Schnittpunkte L mit der Linie KK ; alsdann ist (nach Art. 44, S. 30) das statische Moment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK

$$S_K = H m .$$

Ferner ist, wenn der Inhalt der Fläche $I II \dots X L I$ mit φ bezeichnet wird, das Trägheitsmoment der wirkfamen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK (nach Art. 57, S. 38)

$$\mathcal{F}_K = 2 H \varphi ,$$

und da nach Gleichung 75: $r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K}$ ist, so wird $r = \frac{2 \varphi}{m}$; mithin

$$\varphi = \frac{m r}{2} \dots \dots \dots 79.$$

Die Nulllinie KK liegt also derart, dass φ inhaltsgleich ist einem Dreieck, dessen Höhe gleich r , dessen Grundlinie gleich dem Stücke m ist, welches auf der Nulllinie zwischen die verlängerte erste Seilpolygoneite und das Seilpolygon fällt. Verbindet man den Schnittpunkt E'' der Krafrichtung P und der verlängerten ersten Seilpolygoneite mit X , so erhält man ein Dreieck $X L E''$, dessen Flächeninhalt gleich $\frac{m r}{2}$ ist, welches also, wenn KK richtig angenommen ist, inhaltsgleich mit φ ist.

Dies findet statt, wenn die in Fig. 111 lothrecht schraffirten Flächen $I II III F E'' I$ und $F VI VII VIII IX G F$ gleichen Inhalt haben. Sind beide an Inhalt nicht gleich, so ist die Linie $E'' G$ um E'' zu drehen und damit auch KK nach rechts oder

links so lange zu verschieben, bis diese Bedingung erfüllt ist; die dann erhaltene Nulllinie ist die richtige. Demnach ist das Verfahren das folgende.

Man construirt für den ganzen Querschnitt das Seilpolygon $I II \dots XII$, verlängere die erste Seilpolygonseite, ermittle deren Schnittpunkt E'' mit der Kraftlinie und suche nun diejenige durch E'' gehende Linie, welche die beiden lothrecht schraffirten Flächen einander gleich macht; der Punkt X , in welchem diese Linie das Seilpolygon schneidet, bestimmt die Lage der Nulllinie KK .

Es macht jetzt keine Schwierigkeit, die Druckvertheilung und das Druckmaximum zu ermitteln. Im Schwerpunkte der wirkfamen Querschnittsfläche ist $z' = 0$, also nach Gleichung 73

$$N = \frac{P}{F'}$$

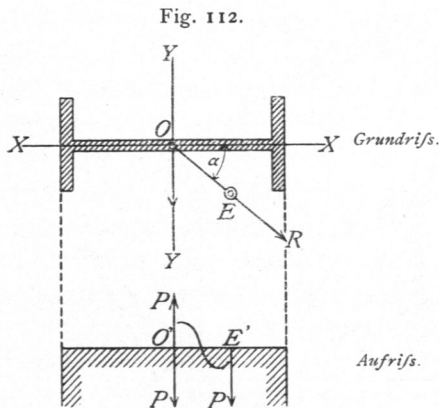
F' ist bekannt; es kann unmittelbar aus Fig. 111 entnommen werden, also auch $\frac{P}{F'}$.

Die Lage des Schwerpunktes S folgt mit Leichtigkeit aus dem Seilpolygon. Trägt man an der dem Schwerpunkte entsprechenden Stelle des Aufrisses der Fuge den Werth $\frac{P}{F'}$ in beliebigem Mafstabe als Ordinate auf ($= S' T'$), verbindet T' mit K' , so giebt die Linie $K' T'$ die Druckvertheilung an; der grösste Druck für die Flächeneinheit ist $V' U'$.

3) Druckvertheilung, falls die Kraftebene die Querschnitte nicht in Hauptaxen schneidet.

α) Die Querschnitte können Druck und Zug aufnehmen. Die Wirkung einer excentrisch auf den Querschnitt (Fig. 112) im Punkte E angreifenden Kraft P ist eine dreifache. Wenn XX und YY die Hauptaxen des Querschnittes sind, so wird zunächst nichts geändert, wenn man im Schwerpunkte zwei einander gleiche Kräfte P anbringt, welche der gegebenen Kraft P parallel, also lothrecht gerichtet sind. Zwei dieser Kräfte P bilden ein Kräftepaar in der durch OE gelegten lothrechten Ebene; die dritte Kraft P greift im Punkte O an. Das Moment m des Kräftepaares kann man durch zwei wagrechte Kräfte R erzeugt annehmen, deren eine im Querschnitt, deren andere in solcher Höhe h über dem Querschnitt wirkt, dafs $R h = M$ ist. Zerlegt man die Kräfte R in zwei Seitenkräfte $R \cos \alpha$ und $R \sin \alpha$, welche in die lothrecht durch XX , bezw. YY gelegten Ebenen fallen, so erhält man zwei Momente: in der lothrechten durch XX gelegten Ebene $M \cos \alpha = M_y$, und in der lothrechten durch YY gelegten Ebene $M \sin \alpha = M_x$. Demnach ist die lothrechte Spannung, welche in einem Punkte C des Querschnittes mit den Coordinaten x und y erzeugt wird,

115.
Querschnitt
nimmt
Zug und Druck
auf.



$$N = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{\mathcal{I}_X} + \frac{M_y x}{\mathcal{I}_Y} \dots \dots \dots 80.$$

In dieser Gleichung bedeutet F den Flächeninhalt des Querschnittes; \mathcal{I}_X und \mathcal{I}_Y sind die Trägheitsmomente der Querschnittsfläche, bezogen auf die XX - und YY -Axe.

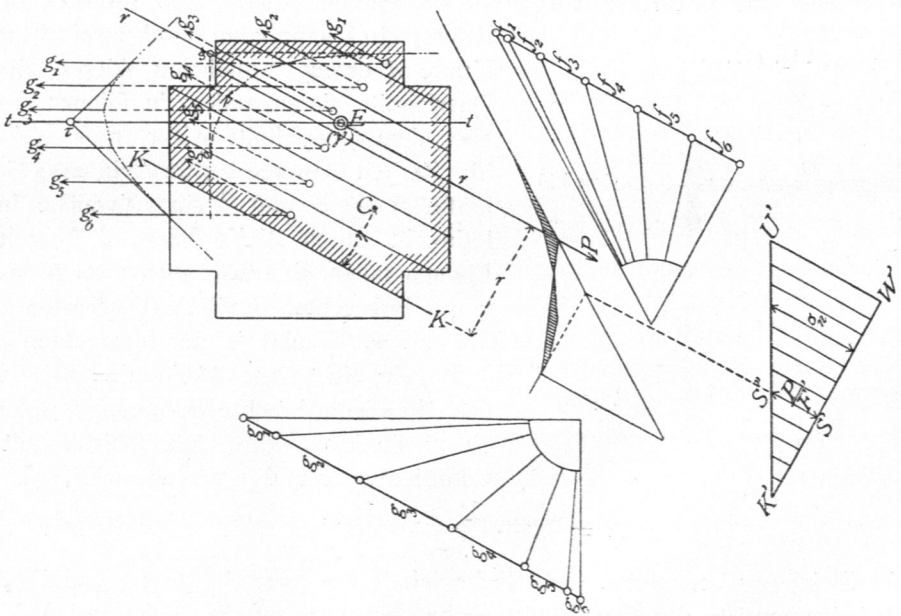
Bei gegebenem Querschnitt und gegebener Kraft enthält die Gleichung 80 nur drei Veränderliche: N , x und y ; alle drei kommen nur in der ersten Potenz vor. Ermittelt man demnach für alle Werthe von x und y , d. h. für alle Querschnittspunkte, die zugehörigen Werthe von N und trägt dieselben als Ordinaten auf, so liegen alle Endpunkte dieser Ordinaten auf einer Ebene, der Ebene der Gleichung 80. Man findet leicht die Nulllinie, indem man $N=0$ setzt und in der erhaltenen Gleichung für zwei Werthe von x die zugehörigen Werthe von y aufsucht.

116.
Querschnitt
nimmt
nur Druck
auf.

β) Die Querschnitte können nur Druck aufnehmen. Wenn die Querschnitte nur Druck übertragen können, wie dies beim Mauerwerk nahezu der Fall ist, behält, so lange die Nulllinie nicht den Querschnitt schneidet, die Gleichung 80 ihre Giltigkeit, weil alsdann nur Druckspannungen stattfinden. Sobald aber die Nulllinie in den Querschnitt fällt, wird die Aufgabe eine sehr schwierige. Denn es ist nicht nur die Größe der gedrückten Fläche, sondern auch die Richtung der Nulllinie unbekannt. Die Gleichung 80 bleibt auch für diesen Fall gültig, wenn unter F die wirkfame Querschnittsfläche, unter XX , bezw. YY die durch den Schwerpunkt derselben gelegten Haupttaxen dieses Theiles der Querschnittsfläche verstanden werden und die Coordinaten x und y , so wie \mathcal{F}_X und \mathcal{F}_Y auf diese Haupttaxen bezogen werden.

Die Endpunkte der in den einzelnen Querschnittspunkten aufgetragenen Werthe für N liegen wiederum auf einer Ebene, der Spannungsebene, welche den Querschnitt in der Nulllinie schneidet. Alle lothrechten Ebenen, welche parallel zur Nulllinie durch den wirkfamen Querschnittstheil gelegt werden, schneiden diesen und die Spannungsebene in zwei parallelen Linien, deren Abstand die Spannung der geschnittenen Querschnittspunkte angiebt. Daraus folgt, dass in allen Punkten, welche auf einer Parallelen zur Nulllinie KK liegen (Fig. 113), die Spannungen gleich groß sind. In einem Punkte C , dessen senkrechter Abstand von KK gleich η ist, wird die Spannung $N = a \eta$ sein, in welcher Gleichung a eine noch unbekannte Constante

Fig. 113.



ist. Die graphische Darstellung der Spannung in den einzelnen Punkten des Querschnittes bietet die Linie $U' K'$.

Wird zunächst die Richtung der Nulllinie KK als bekannt und gegeben angenommen, so ist die ganze Ableitung in Art. 114 (S. 92) auch hier gültig. Auch hier ist

$$N = a \eta, \quad P = \int a \eta \, df = a S_K \quad \text{und} \quad Pr = \int N \eta \, df = a \int \eta^2 \, df = a \mathcal{F}_K;$$

folglich

$$r = \frac{\mathcal{F}_K}{S_K}.$$

\mathcal{F}_K und S_K bedeuten das Trägheits- und statische Moment der wirklichen Querschnittsfläche, bezogen auf die Axe KK . Man zerlege dieselbe nunmehr in Streifen, welche parallel zu KK sind und ermittle die Lage von KK , wie oben (in Art. 114, S. 92) gezeigt (Fig. 113²⁰).

Es ist nun zu untersuchen, ob die angenommene Richtung der Nulllinie richtig ist. Die im Querschnitt wirkenden Druckspannungen müssen mit der Kraft P , welche den Querschnitt im Punkte E schneidet, im Gleichgewicht sein; demnach muß deren Mittelkraft ebenfalls durch den Punkt E gehen, wenn die Richtung der Nulllinie richtig gewählt ist. Alsdann ist auch die gefundene wirkliche Fläche (in Fig. 113 schraffirt) richtig; anderenfalls ist eine Verbesserung vorzunehmen. Alle Punkte des Querschnittes, welche auf Parallelen zur Nulllinie liegen, haben nach Obigem gleiche Spannung; man kann also die Querschnittsfläche in genügend schmale, der Nulllinie parallele Streifen zerlegen, in welchen je gleiche Spannung stattfindet. Der gesammte Druck in einem Streifen der Breite b_n , der Länge h_n und der Spannung σ_n für die Flächeneinheit ist offenbar

$$g_n = b_n h_n \sigma_n.$$

Man ermittle für alle Streifen die Werthe g , wobei die Werthe von σ_n durch die entsprechenden Ordinaten der Linie $U' K'$ dargestellt sind, und suche die Entfernung der Mittelkraft dieser Werthe $g_1, g_2, g_3 \dots$ von zwei Axen, welche beliebig angenommen werden können. Zweckmäßig wird als eine Axe die Nulllinie, als die andere Axe eine Längsseite des Querschnittes gewählt; es können auch die Längs- und Querseite genommen werden. Die Auffuchung der Mittelkraftslage erfolgt bequem mit Hilfe zweier Seilpolygone (Fig. 113). Der Abstand der Mittelkraft von den beiden Axen ergibt sich aus den Schnittpunkten ρ und τ der äußersten Seilpolygoneiten; der Schnittpunkt der Mittelkraft mit dem Querschnitt liegt sowohl auf der durch ρ gezogenen Linie rr , wie auf der durch τ gezogenen Linie tt , ist also der Punkt V . Linie rr ist parallel zu der Krafrichtung im ersten, tt parallel zur Krafrichtung im zweiten Seilpolygone.

Wenn V mit E zusammenfällt, wie in Fig. 113, so ist die Nulllinie und die ganze Construction richtig; die wirklichen Druckspannungen können dann, wie in Art. 114 (S. 92) gezeigt, ermittelt werden, indem man im Schwerpunkte der wirklichen Querschnittsfläche $\frac{P}{F_1}$ ($= S' S''$) aufträgt und den Endpunkt S'' mit K' verbindet. $K' U' W'$ ist die Druckfigur.

²⁰) In Fig. 113 sind die Kräfte $f_1, f_2, f_3 \dots$ nicht ausgezeichnet, um die Deutlichkeit nicht zu verringern.

Fällt aber V mit E nicht zusammen, so ist die Unterfuchung für eine andere Lage der Nulllinie zu wiederholen. Man kann ohne Schwierigkeit schätzen, nach welcher Richtung KK gedreht werden muss, und erreicht meist bereits bei der ersten Wiederholung der Construction ein genügend genaues Zusammenfallen der Punkte E und V^{21} .

Vorstehende Unterfuchung ist für die Ermittlung der Standficherheit von Gewölbepfeilern, durchbrochenen Mauern etc. von grosser Wichtigkeit.

b) Gedrückte Stäbe unter Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr.

1) Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

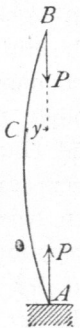
117.
Voraus-
setzungen.

Wenn auf einen Stab mit gerader Axe zwei Zugkräfte P wirken, deren Richtungslinien genau mit der Stabaxe zusammenfallen, so findet in den einzelnen Punkten des Stabes nur eine Zugbeanspruchung statt. Wirken auf einen eben solchen Stab zwei Druckkräfte P ebenfalls genau in der Richtung der Axe und einander entgegengesetzt, so müssten nach Früherem an den einzelnen Stellen gleichfalls nur Druckbeanspruchungen stattfinden, welche bei überall gleichem Stabquerschnitt in allen Punkten für die Flächeneinheit gleich wären. In Wirklichkeit kann man darauf nicht immer rechnen. Wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche gross ist, so wird unter dem Einflusse der drückenden Kräfte ein Ausbiegen stattfinden, und es wirkt alsdann auf jeden Querschnitt C (Fig. 114) ausser der Axialkraft P noch ein Moment P_y . In diesem Falle findet Beanspruchung des Stabes auf Zerknicken statt, und derselbe ist mit Rücksicht auf diese Beanspruchungsweise zu berechnen.

Es kann auffallen, dass hier scheinbar ein Widerspruch zwischen der Theorie und Praxis obwaltet; in Wirklichkeit ist derselbe aber nicht vorhanden. So lange die Druckkräfte ganz genau in der Stabaxe und in deren Richtung wirken, findet ein Ausbiegen nicht statt; sobald aber in Folge von unvermeidlichen Ausführungsfehlern die Kräfte ausserhalb der Axe angreifen, bezw. von der Richtung der Axe abweichen, entsteht für jeden Querschnitt des Stabes ein Biegemoment, welches unter Umständen ein Ausbiegen zur Folge hat. Man kann daher in diesem Falle von einem labilen Gleichgewichtszustande sprechen.

Ein Ausbiegen der Stabaxe kann nicht nur in der in Fig 114 gezeichneten Richtung stattfinden, sondern ist nach allen möglichen Richtungen denkbar; es ist demnach zu unterfuchen, nach welcher Richtung ein solches Ausbiegen am leichtesten stattfindet, und der Querschnitt des Stabes danach anzuordnen. Für die folgenden Unterfuchungen soll angenommen werden, dass 1) als äussere Kräfte nur die Axialkräfte P wirken, 2) die Axialkräfte in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen und 3) der Stab überall gleichen Querschnitt habe.

Fig. 114.



²¹) Vergl. über den in Art. 113 bis 116 behandelten Gegenstand:

KECK. Excentrische Druckbelastung eines cylindrischen Mauerkörpers ausserhalb des Kernes. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1882, S. 301.

KECK. Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Kernes bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnittes. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1882, S. 627.

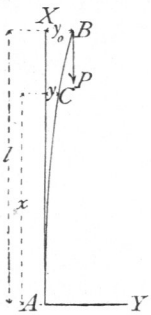
MOHR. Ueber die Vertheilung der excentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkskörpers. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1883, S. 163.

BARKHAUSEN. Druckvertheilung im rechteckigen Mauerfchnitte. Zeitfchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1883, S. 469.

SCHIEPP. Zur Ermittlung der Druckvertheilung in Mauerwerksquerschnitten. Centralbl. d. Bauverw 1884, S. 152.

HÜPPNER. Zur Ermittlung der Druckvertheilung in Mauerwerksquerschnitten. Civiling. 1885, S. 39

Fig. 115.



Unter Einwirkung der Kraft P möge der Stab (Fig. 115), dessen Axe ursprünglich mit AX zusammenfiel, in die Lage AB gekommen sein; die Bildebene XAY , in welcher AB liegt, schneide alle Querschnitte in Hauptaxen; der Axenpunkt B habe nach der Formänderung die Ordinate y_0 . Für irgend einen Punkt C mit der Abscisse x sei die Ordinate y ; das Moment für diesen Punkt ist $M = P(y_0 - y)$ und die elastische Linie demnach aus der Gleichung 67 zu ermitteln. Danach wird

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P(y_0 - y)}{E \mathcal{I}} \dots \dots \dots 81.$$

Hierin ist \mathcal{I} das Trägheitsmoment des Querschnittes bei C , bezogen auf diejenige Schwerpunktsaxe desselben, welche senkrecht zur Kräfteebene, also zur XY -Ebene, steht. Der Querschnitt ist nach obiger Voraussetzung constant, also auch \mathcal{I} für die Integration constant; da P und E gleichfalls constant sind, so hat bei der Integration $\frac{P}{E \mathcal{I}}$ einen constanten Werth. Abkürzungsweise werde

$$\frac{P}{E \mathcal{I}} = a^2 \dots \dots \dots 82.$$

gesetzt, so dass die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 (y_0 - y) \dots \dots \dots 83.$$

Die zweimalige Integration ergibt als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = y_0 + A \sin ax + B \cos ax \dots \dots \dots 84.$$

Die beiden Constanten A und B sind für die verschiedenen Arten der Stabunterstützung verschieden.

Bekanntlich ist

$\sin \alpha = \sin (2\pi + \alpha) = \sin (2n\pi + \alpha)$ und $\cos \alpha = \cos (2\pi + \alpha) = \cos (2n\pi + \alpha)$, worin n eine beliebige ganze Zahl oder Null bedeutet, also gleich 0, 1, 2, 3... gesetzt werden kann. Es ist also auch

$$\sin ax = \sin (ax + 2\pi) = \sin \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right]$$

und

$$\cos ax = \cos (ax + 2\pi) = \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right].$$

Die Gleichung 84 kann daher auch geschrieben werden:

$$y = y_0 + A \sin \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] + B \cos \left[a \left(x + \frac{2\pi}{a} \right) \right] \dots \dots 85.$$

Man erhält sonach gleich große Werthe für y , wenn man x und wenn man $x + \frac{2\pi}{a}$ einsetzt; die Ordinaten je zweier Punkte, deren Abscissen um $\frac{2\pi}{a}$ von einander verschieden sind, haben daher die gleichen Werthe. Die elastische Linie ist demnach eine Wellenlinie; die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}, \dots \dots \dots 86.$$

und, da nach Gleichung 82: $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{I}}}$ ist,

$$\lambda = 2 \pi \sqrt{\frac{E \mathcal{F}}{P}} \dots \dots \dots 87.$$

Aus dieser Gleichung kann man, falls E , \mathcal{F} und P gegeben ist, die Wellenlänge berechnen. Ist dagegen λ gegeben, so kann man aus Gleichung 87 diejenige Kraft P berechnen, welche die Durchbiegungen y erzeugen kann. Es folgt aus Gleichung 87

$$P = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}}{\lambda^2} \dots \dots \dots 88.$$

Es soll hier noch auf eine wichtige Eigenthümlichkeit der allgemeinen Gleichung 83 hingewiesen werden. Dieselbe bleibt gültig, wenn man beiderseits mit der beliebigen Zahl m multiplicirt; sie heisst alsdann:

$$m \frac{d^2 y}{d x^2} = m a^2 (y_0 - y) = a^2 (m y_0 - m y).$$

Es sei $m y_0 = \eta_0$ und $m y = \eta$; alsdann ist auch $m \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \eta}{d x^2}$, also

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = a^2 (\eta_0 - \eta) \dots \dots \dots 89.$$

Die Gleichung 83 gilt also für beliebig groſse Werthe von y . Ergeben sich demnach unter Einwirkung einer Kraft P die Durchbiegungen y als möglich, so können dieselben auch m -mal so groſs, d. h. beliebig groſs werden, also auch so groſs, daſs der Stab zerknickt wird.

Der Werth von P in Gleichung 88, welcher die Durchbiegungen y erzeugen kann, kann also auch den Stab zerknicken. P ist sonach der Grenzwert der Tragkraft.

Bei der vorstehenden Ableitung ist angenommen worden, daſs die Ausbiegung in der XY -Ebene erfolge; dieselbe kann aber auch in der senkrecht zu ersterer stehenden XZ -Ebene stattfinden, welche die zweiten Hauptaxen der Querschnitte enthält. Die Entwicklung für diesen Fall bleibt genau dieselbe, wie die obige, und man erhält für P denselben Ausdruck, wie dort; nur ist alsdann unter \mathcal{F} das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die zur XZ -Ebene senkrechte Schwerpunktsaxe, zu verstehen, welche Axe parallel zur Y -Axe ist. Nennen wir dasselbe \mathcal{F}_1 , die entsprechenden Werthe von P und λ aber P_1 und λ_1 , so ist

$$P_1 = \frac{4 \pi^2 E \mathcal{F}_1}{\lambda_1^2} \dots \dots \dots 90.$$

Ein Ausbiegen des Stabes kann nun sowohl in der XY -Ebene, wie in der XZ -Ebene stattfinden; die wirkliche dem Stabe zuzumuthende Belastung darf den Grenzwert nicht erreichen. Die Gleichungen 90 u. 88 geben zwei Grenzwerte, und es ist naturgemäſs der kleinere von beiden als maſsgebend einzuführen. Nimmt man in beiden Richtungen gleiche λ an, so unterscheiden sich beide Grenzwerte nur durch die Werthe der Trägheitsmomente. Es ist demnach in den Ausdruck für P von den beiden Hauptträgheitsmomenten das kleinere einzusetzen.

Wenn die Ausbiegung nach allen Richtungen möglich ist, so kann man mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daſs dieselbe senkrecht zu derjenigen Hauptaxe erfolgt, welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment entspricht; denn dieses ist nach Art. 59 (S. 39) das kleinste der für alle Schweraxen möglichen Trägheitsmomente. Von einer genauen Untersuchung, nach welcher Richtung die Ausbiegung erfolgen wird, kann hier füglich abgesehen werden.

Für die weiteren Betrachtungen sind die verschiedenen möglichen Fälle in das Auge zu fassen.

α) Einseitig eingespannter, an einem Ende in der Richtung der Axe belasteter Stab (Fig. 116). Aus der allgemeinen Gleichung 84 für die elastische Linie:

119.
Einseitig
eingespannter
Stab.

Fig. 116.

Linie:

$$y = y_0 + A \sin ax + B \cos ax$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = Aa \cos ax - Ba \sin ax \dots 91.$$

Die Constanten A und B werden aus den besonderen Bedingungen für diesen Fall bestimmt.

Für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, weil der Stab an dieser Stelle wegen der Einspannung stets die Richtung der X -Axe hat; demnach ist in Gleichung 91

$$Aa = 0,$$

oder, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Eben so ist für $x = 0$ auch $y = 0$, daher in Gleichung 84: $0 = y_0 + B$ oder $B = -y_0$. Sonach lautet die Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall:

$$y = y_0 - y_0 \cos ax = y_0 (1 - \cos ax) \dots 92.$$

Für $x = l$ wird $y = y_0$; demnach $y_0 = y_0 (1 - \cos al)$. Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\cos al = 0 \dots 93.$$

ist. Soll also der Stab unter Einwirkung der Kraft P sich so durchbiegen, wie Fig. 116 zeigt, also im Punkte C die Ordinate y , im Endpunkte die Ordinate y_0 haben können, so muß $\cos al = 0$ sein, es muß also

$$al = 90^\circ, \text{ bzw. } 270^\circ, \text{ bzw. } 450^\circ \text{ u. f. w.},$$

oder allgemein

$$al = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \dots 94.$$

sein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3... annehmen kann. Daraus folgt auch der Werth von P , welcher den Stab in der angegebenen Weise biegen, also nach den

Erklärungen in Art. 118 (S. 97) auch zerknicken kann. Es ist für

Fig. 117.

diesen Fall nach Gleichung 94: $a = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$, und,

da $a = \sqrt{\frac{P}{E \mathcal{I}}}$ ist, $\sqrt{\frac{P}{E \mathcal{I}}} = \frac{\pi}{2l} (2n + 1)$; also

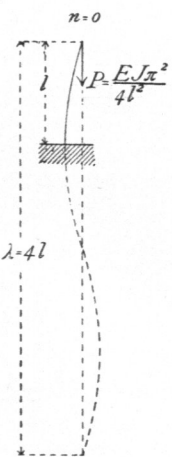
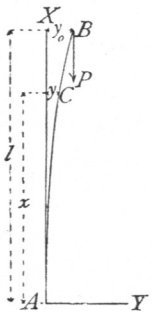
$$P = \frac{E \mathcal{I} \pi^2}{4 l^2} (2n + 1)^2 \dots 95.$$

Die zugehörige Wellenlänge λ folgt aus Gleichung 86. Es ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = \frac{4l}{2n + 1} \dots 96.$$

Die beiden Gleichungen geben Aufschluss über die Größe der Grenzwerte P , welche bei den verschiedenen Anordnungen des eingespannten Stabes einzuführen sind.

Bei dem in Fig. 117 vorgeführten Falle ist die ganze Wellenlänge λ viermal so groß, als die freie Länge l , d. h. es ist $\lambda = 4l$;



demnach folgt für diesen Fall aus der Gleichung 96: $n = 0$; und damit aus Gleichung 95

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} \dots \dots \dots 97.$$

Wird ein Punkt E im Abstände $\frac{l}{3}$ vom Einspannungspunkte fest gelegt, so muß die Formänderung so erfolgen, daß $l = \frac{3}{4} \lambda$ (Fig. 119) wird; dafür folgt aus Gleichung 96: $\lambda = \frac{3 \lambda}{2 n + 1}$ die Größe $n = 1$, ferner aus Gleichung 95 als zerknickende Kraft

$$P = \frac{9 E \mathcal{J} \pi^2}{4 l^2} \dots \dots \dots 98.$$

Werden endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{5}$ und $\frac{3}{5} l$ vom Einspannungspunkte fest gehalten (Fig. 118), so wird $\lambda = \frac{4}{5} l$ und aus Gleichung 96: $n = 2$; alsdann ist die zerknickende Kraft

$$P = \frac{25}{4} \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} \dots \dots 99.$$

Man sieht, wie wesentlich der Grenzwert P durch angemessene Construction erhöht werden kann.

β) Stab mit beiderseits frei drehbaren Enden (Fig. 120). Die symmetrische Belastung des Stabes wird zur Folge haben, daß beide Stabhälften, oberhalb und unterhalb der Stabmitte, sich genau gleich verhalten; man kann demnach diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, daß man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in die Stabmitte legt. Jede Hälfte verhält sich dann genau eben so, wie der Stab im vorigen Artikel; die zerknickende Kraft P , d. h. der Grenzwert von P , ist demnach aus der Gleichung 95 zu entnehmen, jedoch mit der Aenderung, daß statt des dortigen l hier $\frac{l}{2}$ einzusetzen ist, weil die dort mit l bezeichnete Länge hier nur $\frac{l}{2}$ beträgt.

120.
Stab
mit freien
Enden.

Fig. 118.

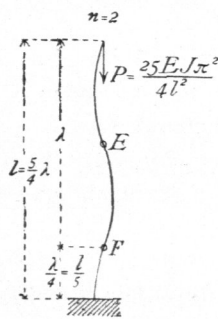


Fig. 119.

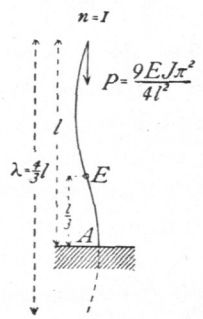


Fig. 120.

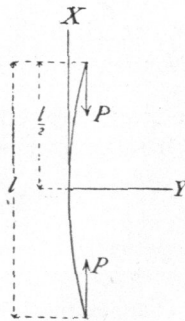
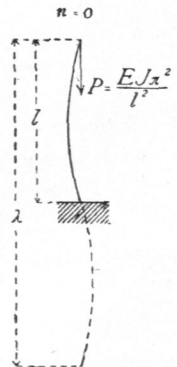


Fig. 121.



Für den vorliegenden Fall ist also

$$P = \frac{E \mathcal{J} \pi^2 (2 n + 1)^2}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} (2 n + 1)^2 \dots \dots \dots 100.$$

und

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{2n+1} = \frac{2l}{2n+1} \dots \dots \dots 101.$$

Bei dem in Fig. 121 dargestellten Falle ist $\lambda = 2l$, d. h. $n = 0$, mithin

$$P = \frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Wird ein Punkt E in der Mitte des Stabes fest gehalten, so findet die Durchbiegung nach Fig. 122 so statt, dass $l = \lambda$,

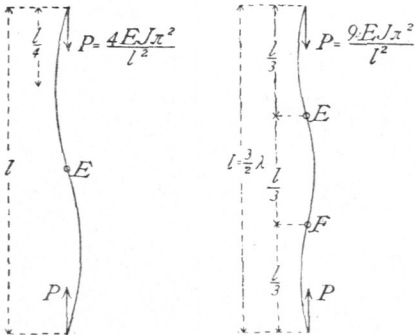
Fig. 123.

also $n = \frac{1}{2}$ wird; alsdann hat P den Werth:

$$P = \frac{4 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Fig. 122.

$n = 1$



Sind endlich zwei Punkte E und F in den Abständen $\frac{l}{3}$ von den Endpunkten fest gehalten, so dass die Formänderung nach Fig. 123 eintreten muss, so wird $l = \frac{3}{2} \lambda$, also $n = 1$

und

$$P = \frac{9 E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}.$$

Die Formänderung kann auch unter Beibehaltung der Punkte E , F und der Endpunkte so eintreten, dass die Bogenlinien auf diejenige Seite der ursprünglichen Axe fallen, welche der gezeichneten entgegengesetzt ist.

γ) Stab mit eingespannten Enden (Fig. 124). Beide Endpunkte des Stabes verbleiben in Folge der Einspannung in der Lothrechten der Axe XX ; die Tangente an die Axe in diesen Punkten, d. h. die Axenrichtung, kann sich nicht verändern. Es muss also an jedem Einspannungspunkte ein Kräftepaar wirken, dessen Moment stets genügend groß ist, um den Stab in der ursprünglichen Richtung zu erhalten; dieses Moment möge M_0 genannt werden. Für einen beliebigen Punkt C mit der Abscisse x ist das Biegemoment

124.
Stab mit
eingespannten
Enden.

$$M = M_0 - Py = \left(\frac{M_0}{P} - y\right)P.$$

Demnach lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie hier:

$$E \mathcal{F} \frac{d^2 y}{dx^2} = P \left(\frac{M_0}{P} - y\right) \text{ oder } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{F}} \left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

Es werde wieder abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$ gesetzt; alsdann ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 \left(\frac{M_0}{P} - y\right).$$

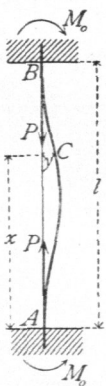
Als Gleichung der elastischen Linie ergibt sich

$$y = \frac{M_0}{P} + A \sin ax + B \cos ax; \dots \dots \dots 102.$$

ferner

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax - B a \sin ax \dots \dots \dots 103.$$

Fig. 124.



Die Constanten A und B ergeben sich in folgender Weise. Für $x = 0$ ist $y = 0$, demnach in Gleichung 102: $0 = \frac{M_0}{P} + B$ und $B = -\frac{M_0}{P}$. Für $x = 0$ wird

$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, folglich in Gleichung 103: $0 = A a$ und, da a nicht gleich Null ist, $A = 0$. Die Gleichung der elastischen Linie lautet sonach im vorliegenden Falle:

$$y = \frac{M_0}{P} - \frac{M_0}{P} \cos a x = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a x) \dots \dots \dots 104.$$

Für $x = l$ ist $y = 0$, demnach $0 = \frac{M_0}{P} (1 - \cos a l)$ oder

$$\cos a l = 1 \dots \dots \dots 105.$$

Damit diese Gleichung erfüllt werde, muß

$$a l = 2 n \pi \dots \dots \dots 106.$$

fein, worin n die Werthe 0, 1, 2, 3 ... haben kann.

Aus Gleichung 86 folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2 \pi l}{2 n \pi} = \frac{l}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{n} \dots \dots \dots 107.$$

Ferner wird nach Gleichung 86

$$a^2 = \frac{P}{E \mathcal{J}} = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad P = \frac{4 E \mathcal{J} \pi^2}{\lambda^2} \dots \dots \dots 108.$$

Die beiden Gleichungen 107 u. 108 geben über die GröÙe von P Aufschluß. Es ist

für $n = 1$:

$$\frac{\lambda}{l} = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = l;$$

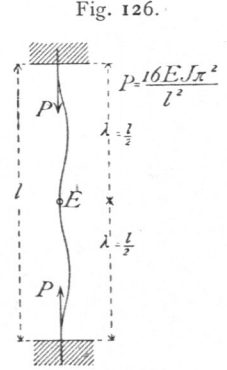
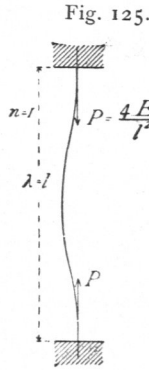
$$P = \frac{4 E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots 109.$$

für $n = 2$:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{l}{2};$$

$$P = \frac{16 E \mathcal{J} \pi^2}{l^2} \dots \dots \dots 110.$$

Der erstere Fall ist durch Fig. 125, der zweite durch Fig. 126 dargestellt; letzterer tritt ein, wenn der Punkt E in der Stabmitte fest gehalten wird.



122.
Stab mit einem
eingespannten
und einem
geführten Ende.

δ) Stab mit einem eingespannten und einem in der Lothrechten geführten Ende (Fig. 127). Wenn der Punkt B nicht in der lothrechten Linie geführt wäre, würde er etwa die punktirte Lage eingenommen haben; es muß also die Führung durch eine wagrechte Kraft H verursacht werden, welche stets genügend groß ist, um ein Ausweichen von B zu verhüten. Diese Kraft H ist ihrer GröÙe nach nicht bekannt.

Das Biegemoment für irgend einen Punkt C des Stabes mit der Abscisse x ist nun

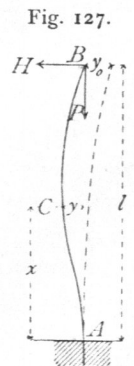
$$M = H (l - x) - P y = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right],$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie (siehe Gleichung 67)

$$E \mathcal{J} \frac{d^2 y}{dx^2} = P \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right]$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{J}} \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \dots \dots \dots III.$$



Man setzt, um diese Gleichung aufzulösen, $\frac{d^2 y}{dx^2} = z$; es sei wieder abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{F}} = a^2$; alsdann ist

$$z = a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = a^2 \left(-\frac{H}{P} - \frac{dy}{dx} \right);$$

ferner

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 z.$$

Die Auflöfung dieser Differentialgleichung ergibt wiederum genau, wie in Art 118 (S. 97)

$$z = A \sin ax + B \cos ax, \dots \dots \dots 112.$$

und wenn für z der Werth eingeführt wird,

$$a^2 \left[\frac{H}{P} (l - x) - y \right] = A \sin ax + B \cos ax \dots \dots \dots 113.$$

Die Differentiation nach x ergibt

$$-a^2 \left(\frac{H}{P} + \frac{dy}{dx} \right) = A a \cos ax - B a \sin ax \dots \dots \dots 114.$$

Aus den beiden Gleichungen 113 u. 114 ergeben sich die Werthe der Constanten A und B , wie folgt.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also nach Gleichung 113: $\frac{a^2 H}{P} l = B$; für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, also nach Gleichung 114: $-\frac{a^2 H}{P} = A a$ und $-\frac{a H}{P} = A$. Endlich ist für $x = l$ auch $y = 0$, weil der Endpunkt des Stabes in der Lothrechten geführt wird, also nach Gleichung 113

$$0 = A \sin (al) + B \cos (al), \text{ woraus } \operatorname{tg} al = -\frac{B}{A}$$

folgt, und wenn für B und A die soeben gefundenen Werthe eingesetzt werden,

$$\operatorname{tg} al = al \dots \dots \dots 115.$$

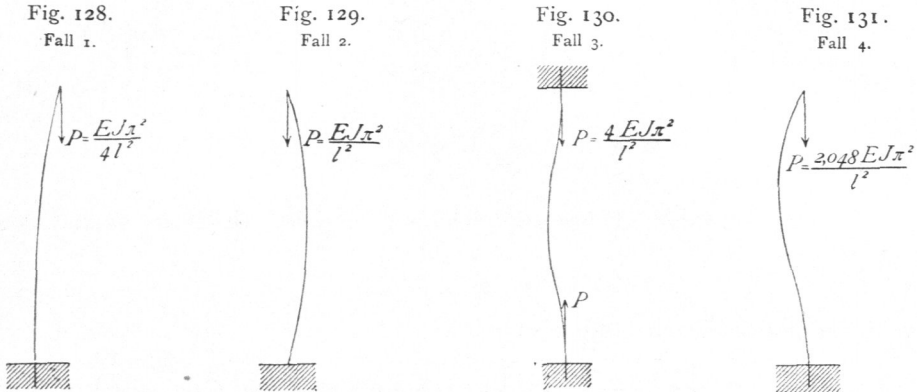
Diese Beziehung findet statt für $al = 0$, außerdem aber auch für den Winkel $257^\circ 27' 12''$; für diesen Winkel ist $\operatorname{tg} al = al = 4,4934$, also $a = \frac{4,4934}{l}$ und da $a^2 = \frac{P}{E \mathcal{F}}$ ist, so wird

$$P = \frac{E \mathcal{F} (4,4934)^2}{l^2} = 20,19 \frac{E \mathcal{F}}{l^2} \dots \dots \dots 116.$$

Dies ist der Werth von P , für welchen Gleichung 115 erfüllt ist und einen Sinn hat; der Werth $al = 0$ ist nicht zu verwerthen. Dieses P vermag sonach die in Fig. 127 gezeichnete Formänderung hervorzurufen, also nach Früherem auch den Stab zu zerknicken.

In Art. 119 bis 122 sind diejenigen Werthe der zerknickenden Kraft entwickelt worden, welche für die Praxis hauptsächlich von Bedeutung sind. Nachstehend sind dieselben in Fig. 128 bis 131 übersichtlich zusammengestellt, wobei überall der Stab auf seine ganze Länge frei angenommen ist; der Werth

von P im vierten Falle ist des bequemen Vergleiches wegen ebenfalls als Product mit dem Factor $\frac{E \mathcal{F} \pi^2}{l^2}$ dargestellt.



Die Tragfähigkeit der Stäbe verhält sich demnach
in den Fällen 1 2 4 3
wie $\frac{1}{4} : 1 : 2,048 : 4$.

Durch entsprechende Endanordnung würde man also die Tragfähigkeit des Stabes verfehzhenfachen können. Die angegebenen Kräfte sind thatfächlich im Stande, den Stab zu zerknicken, und es sind deshalb Sicherheits-Coefficienten einzuführen.

2) Querschnittsermittlung bei centrischer Druckbelastung.

124.
Zulässige
Beanspruchung.

Die unter 1 entwickelten Formeln geben die Gröfse derjenigen Kraft P an, welche im Stande ist, den Stab oder die Stütze zu zerknicken. Die dem Stabe wirklich zuzumuthende Last darf naturgemäfs diesen Werth niemals erreichen; sie darf nur einen Bruchtheil des ermittelten Knickwerthes betragen. Versteht man unter s den fog. Sicherheits-Coefficienten, unter C einen von der Endbefestigung des Stabes abhängigen Coefficienten, so ist die Kraft, welche mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr auf den Stab wirken darf,

$$P = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2} \dots \dots \dots 117.$$

Dieser Werth ist aber nicht ohne Weiteres für alle Fälle anwendbar. Wenn die Stablänge l , also auch die im Nenner vorkommende Gröfse l^2 , sehr klein ist, so ergeben sich für P sehr grofse Werthe, gröfsere Werthe, als die einfache Druckbeanspruchung des Stabes gestattet. Wird die zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes mit K , die Querschnittsfläche mit F bezeichnet, so darf höchstens sein

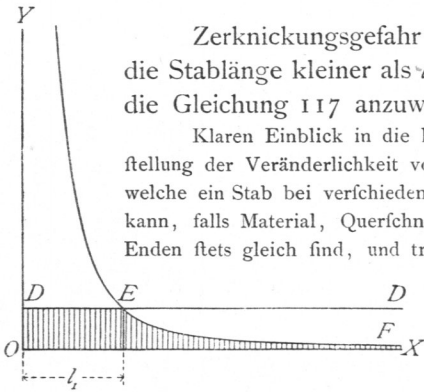
$$P = F K \dots \dots \dots 118.$$

Gröfser, als der Werth in Gleichung 118 ist, darf P mit Rücksicht auf die zulässige Druckbeanspruchung nicht werden; gröfser, als der Werth in Gleichung 117 ist, darf P der Zerknickungsgefahr halber nicht werden; es ist also stets der kleinere dieser beiden Werthe für diejenige Belastungsgröfse maßgebend, welche dem Stabe zugemuthet werden darf. Bei grofser Stablänge l er giebt die Gleichung 117, bei

geringer Stablänge l die Gleichung 118 kleinere Werthe für P . Der Grenzwert von l , etwa l_1 , wird derjenige sein, für welchen aus beiden Gleichungen derselbe Werth von P folgt. Dieser Grenzwert ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von P in den Ausdrücken 117 u. 118 zu

$$l_1 = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{Ks}} \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}} \dots \dots \dots 119.$$

Fig. 132.



Zerknickungsgefahr tritt erst auf, wenn $l > l_1$ ist; demnach ist, falls die Stablänge kleiner als l_1 ist, die Gleichung 118, falls sie größer als l_1 ist, die Gleichung 117 anzuwenden.

Klaren Einblick in die hier maßgebenden Verhältnisse verschafft die graphische Darstellung der Veränderlichkeit von P in Fig. 132. Ermittelt man diejenigen Werthe von P , welche ein Stab bei verschiedenen Längen mit Rücksicht auf die Zerknickungsgefahr ertragen kann, falls Material, Querschnittsform und Querschnittsgröße, so wie Befestigungsweise der Enden stets gleich sind, und trägt diese Werthe von P als Ordinaten auf, während die zugehörigen Längen als Abscissen gewählt werden, so erhält man eine Curve, offenbar die Curve der Gleichung 117.

Für $l = 0$ wird $P = \infty$; für $l = \infty$ wird $P = 0$; die Y - und X -Axe sind also Asymptoten an die Curve. Dagegen ist der Werth für P aus Gleichung 118 unabhängig von der Stablänge; werden demnach für alle möglichen Längen diese Werthe ermittelt und als Ordinaten in gleichem Maßstabe aufgetragen, wie die Werthe aus Gleichung 117, so ergibt sich eine zur X -Axe parallele Linie DD . Im Punkte E schneiden sich beide Linien; die zugehörige Abscisse ist offenbar die Länge l_1 , für welche beide Gleichungen denselben Werth von P ergeben. Links von E ist die Linie DE , rechts von E die Curve EF maßgebend. Die schraffierte Fläche deutet dies an.

Wenn, wie gewöhnlich, die Last P und die Länge l gegeben sind, so handelt es sich um die Form und Größe des Stabquerschnittes. Für diese Bestimmung stehen die beiden Gleichungen 117 u. 118 zur Verfügung. F und \mathcal{J} müssen wenigstens die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe

$$F = \frac{P}{K} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} = \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 120$$

haben, wobei noch zu bemerken ist, daß, wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, unter \mathcal{J} das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes zu verstehen ist. Ist Ausbiegen nur nach bestimmten Richtungen möglich, so ist \mathcal{J} das kleinste in Betracht kommende Trägheitsmoment.

Wenn beide Werthe genau die Größen haben, welche aus 120 folgen, so hat auch der Stab die Länge l_1 der Gleichung 119. Bei manchen Querschnitten ist es möglich, das Verhältniß von \mathcal{J} und F so zu gestalten, daß die Stablänge gleich l_1 ist.

Der Ausdruck 119 für l_1 enthält drei Wurzelzeichen; der Coefficient C unter dem ersten Wurzelzeichen ist von der Länge und dem Material des Stabes ganz unabhängig; derselbe hängt nach Obigem nur von der Art der Endbefestigung ab. Für die in Fig. 128 bis 131 dargestellten Fälle hat C folgende Werthe:

Fall 1:	Fall 2:	Fall 3:	Fall 4:
$C = \frac{\pi^2}{4}$	$= \pi^2$	$= 4 \pi^2$	$= 2 \pi^2$ (genügend genau)
$\sqrt{C} = 1,57$	$= 3,14$	$= 6,28$	$= 4,44.$

Die Coefficienten E , K und s , welche unter dem zweiten Wurzelzeichen der Gleichung 119 vereinigt sind, haben für alle Stäbe aus demselben Material gleiche Werthe; wird als Flächeneinheit das Quadrat-Centimeter, als Krafteinheit das Kilo-

125.
Querschnitts-
ermittelung.

gramm angenommen, und werden für K und E die Werthe aus der Tabelle auf S. 53 eingeführt, so ist

für Schmiedeeisen:	für Gufseisen:	für Holz:
$E = 2000000$	1000000	120000 kg für 1 qcm
$K = 700$	500	65 » »
$s = 5$	8	10
$\sqrt{\frac{E}{Ks}} = 23,9$	$15,8$	$13,6$.

Die beiden Gröfsen \mathcal{F} und F endlich, welche sich unter dem dritten Wurzelzeichen der Gleichung 119 befinden, sind von der Form und Gröfse der Querschnittsfläche abhängig. Die einfache Druckgleichung wird für die Querschnittsermittlung ausreichen, wenn $l \leq l_1$ ist. (Man vergleiche auch Fig. 132.)

Bezeichnet man eine, in der Regel die kleinste, Abmessung des Stabquerschnittes mit h , einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten mit c und setzt

$$\mathcal{F} = c F h^2, \dots \dots \dots 121.$$

so ist $\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}} = \sqrt{\frac{c F h^2}{F}} = h \sqrt{c}$, und Gleichung 119 übergeht in

$$\frac{l_1}{h} = \sqrt{C} \sqrt{\frac{E}{Ks}} \sqrt{c} \dots \dots \dots 122.$$

In dieser Gleichung ist, wenn die Querschnittsform bestimmt ist, Alles gegeben bis auf h . Es ist deshalb für diese Abmessung meistens derjenige Werth leicht zu ermitteln, bei welchem Gleichung 122 erfüllt ist, für welchen also die Querschnittsberechnung nach der einfachen Druckgleichung vorgenommen werden kann.

Die Werthe von $\frac{l_1}{h}$, welche sich nach Obigem für die verschiedenen Materialien und verschiedenen Befestigungsweisen ergeben, sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Constructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingepannt.	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere lothrecht geführt.
Schmiedeeisen	$\frac{l_1}{h} = 23,9 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 37,52 \sqrt{c}$	$= 75,04 \sqrt{c}$	$= 150,1 \sqrt{c}$	$= 106 \sqrt{c}$
Gufseisen	$\frac{l_1}{h} = 15,8 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 24,8 \sqrt{c}$	$= 49,6 \sqrt{c}$	$= 95,2 \sqrt{c}$	$= 70,15 \sqrt{c}$
Holz	$\frac{l_1}{h} = 13,6 \sqrt{C} \sqrt{c}$	$= 21,35 \sqrt{c}$	$= 42,7 \sqrt{c}$	$= 85,4 \sqrt{c}$	$= 60,38 \sqrt{c}$

Mittels dieser Tabelle sind für die verschiedenen Querschnitte der Praxis die Grenzwerte l_1 , bzw. h vielfach ohne Schwierigkeit zu ermitteln, und es soll das einzuschlagende Verfahren weiter unten für eine Reihe von Querschnitten gezeigt werden.

Bei sehr grossen Stablängen ergeben sich häufig aus der Gleichung 122 für h Werthe, welche praktisch nicht wohl ausführbar sind; in diesem Falle muss man den Querschnitt des Stabes nach der Zerknickungsformel (Gleichung 117) berechnen. Die auf den Stab entfallende Last P ist dann (nach Fig. 132) kleiner, als die wegen einfachen Druckes zulässige Kraft $K F$; es findet also eine geringere Beanspruchung

126.
Querschnitts-
ermittlung
für lange
Stäbe.

auf die Flächeneinheit statt, als ohne Zerknickungsgefahr möglich wäre. Der Querschnitt wird demnach nicht voll ausgenutzt: es ist ein Zuschlag an Material gemacht worden.

Mit einigen Abänderungen kann aber auch hier der im vorhergehenden Artikel gezeigte Rechnungsgang beibehalten werden. Es bezeichne zu diesem Zwecke k diejenige Spannung, welche auf die Flächeneinheit in dem mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken berechneten Querschnitt entfällt; alsdann ist, wenn die Querschnittsfläche wieder = F ist,

$$k = \frac{P}{F} \dots \dots \dots 123.$$

Nun ist aber nach Gleichung 117 die zulässige Tragkraft

$$P = \frac{C E \mathcal{F}}{s l^2},$$

also die zulässige Beanspruchung für die Flächeneinheit der Querschnittsfläche

$$k = \frac{C E \mathcal{F}}{s F l^2} \dots \dots \dots 124.$$

und, wenn wiederum $\mathcal{F} = c F h^2$ eingesetzt wird,

$$k = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 125.$$

Berechnet man nach dieser Formel die zulässige Beanspruchung für gegebene Verhältnisse von $\frac{h}{l}$ und setzt man den gefundenen Werth in Gleichung 123 ein, so ergibt sich die nöthige Querschnittsfläche aus derselben zu

$$F = \frac{P}{k}, \dots \dots \dots 126.$$

in welcher Gleichung P die wirkliche Belastung des Stabes ist.

Selbstverständlich darf k nie gröfser werden, als K . Es wird aber k zu K , wenn l zu l_1 wird. Es gelten also nur diejenigen Werthe für k , welche kleiner als K sind.

Es ist demnach

$$k = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l} \right)^2, \quad K = \frac{C E c}{s} \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{k}{K} = \frac{l_1^2}{l^2};$$

sonach

$$k = K \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 127.$$

Trägt man die Werthe von k , welche sich für die verschiedenen Gröfsen von l ergeben, als Ordinaten, die zugehörigen l als Abscissen auf und beachtet, dafs für $l < l_1$ stets $k = K$ sein mufs, so erhält man eine graphische Darstellung, welche die Veränderlichkeit der zulässigen Beanspruchung bei verschiedenen Stablängen darstellt.

Nach der Formel 125 lassen sich Tabellen für die verschiedenen Querschnittsformen berechnen, aus denen sodann für die möglichen Werthe von $\frac{h}{l}$ die Werthe von k leicht entnommen werden können.

Für die Haupt-Constructionsmaterialien und die Hauptfälle der Praxis sind die aus Gleichung 125 sich ergebenden Ausdrücke in der umstehenden Tabelle zusammenge stellt.

Constructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingepannt.	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere lothrecht geführt.
Schmiedeeisen	$k = 400\,000 c C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 986\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 3\,944\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 15\,776\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 7\,888\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Gufseisen . . .	$k = 125\,000 c C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 1\,230\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 4\,920\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 2\,460\,000 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$
Holz	$k = 12\,000 c C \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 29\,520 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 118\,080 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 472\,320 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 236\,160 c \left(\frac{h}{l}\right)^2$

127.
Ermittlung von l_1 und k für:

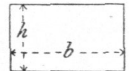
Es wird sich nunmehr darum handeln, für die wichtigeren in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen von auf Druck, bezw. Zerknicken beanspruchten Stäben die Werthe von l_1 und k zu ermitteln. Bei diesen Untersuchungen und Berechnungen wird der Fall 2, bei welchem beide Enden frei drehbar sind, zu Grunde gelegt werden, da derselbe der häufigste ist und die anderen Fälle durch einfache Multiplication leicht auf denselben zurückgeführt werden können.

128.
rechteckige Querschnitte.

α) Rechteckiger Querschnitt (Fig. 133). Die beiden Abmessungen desselben seien h und b , wobei $h < b$; alsdann ist

$$c = \frac{f}{F h^2} = \frac{b h^3}{12 b h^3} = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,289.$$

Fig. 133.



Nach Gleichung 122 wird für den zweiten Zerknickungsfall

für Schmiedeeisen:	Gufseisen:	Holz:	
$\frac{l_1}{h} = 21,68$	$= 14,33$	$= 12,34$ 128.

Soll also die einfache Druckgleichung anwendbar sein, so darf die Stablänge nicht mehr als rund das 21-fache, bezw. das 14- und 12-fache der kleineren Querschnittsabmessung betragen.

Da $h < b$ angenommen wurde, wird h bei gleicher Größe der Querschnittsfläche am größten, wenn $h = b$, d. i. wenn das Rechteck zum Quadrat wird. Für gedrückte Stäbe ist also der günstigste Rechteckquerschnitt der quadratische.

In den meisten Fällen ergibt die Ermittlung von k aus der Gleichung 128 so große Werthe, dass die Gleichung $F = \frac{P}{K}$ nicht mehr zutrifft; alsdann ist k nach Gleichung 125 zu bestimmen. Man erhält wiederum für den Fall 2 abgerundet

für Schmiedeeisen:	Gufseisen:	Holz:	
$k = 329\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 102\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 9800 \left(\frac{h}{l}\right)^2$ 129.

Für eine Anzahl häufig vorkommender Werthe von $\frac{h}{l}$ sind die zulässigen Beanspruchungen k berechnet und in der Tabelle auf S. 115 zusammengestellt.

129.
kreisförmige Querschnitte.

β) Kreisförmiger Querschnitt. Ist der Durchmesser d , so wird

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}, \quad f = \frac{d^4 \pi}{64}, \quad h = d, \quad c = \frac{f}{F h^2} = \frac{4 d^4 \pi}{64 d^2 \pi d^2} = \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,25.$$

Wiederum für den Fall 2 wird aus Gleichung 122

für Schmiedeeisen:	Gufseisen:	Holz:	
$\frac{l_1}{h} = 18,76$	$= 12,4$	$(= 10,7)$ 130.

Der Werth für Holz ist eingeklammert, weil diese Querschnittsform beim Holz nur ausnahmsweise vorkommt.

Aus Gleichung 125 ergibt sich für den Fall 2 und

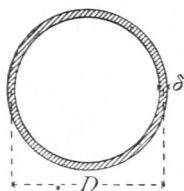
für Schmiedeeisen:	Gufseisen:	
$k = 246\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 76\,900 \left(\frac{h}{l}\right)^2$ 131.

woraus man die in der Tabelle auf S. 115 angegebenen Werthe von k erhält.

γ) Kreisringförmiger Querschnitt (Fig. 134). Ist die als gering angenommene Wandstärke gleich δ , der mittlere Durchmesser D , so ist annähernd

130.
kreisringförmige
Querschnitte.

Fig. 134.



$$F = D \pi \delta, \quad \mathcal{I} = \frac{D^3 \pi \delta}{8}, \quad h = D,$$

$$c = \frac{\mathcal{I}}{F h^2} = \frac{D^3 \pi \delta}{8 D \pi \delta D^2} = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,353.$$

Nach Gleichung 122 wird für Fall 2 und für Schmiedeeisen:

$$\frac{l_1}{h} = 26,49 \quad \text{Gufseisen:} \quad = 17,5 \dots \dots \dots 132.$$

Die Construction der Enden ist bei den gusseisernen Säulen meistens eine derartige, das man den Fall 4 der Rechnung zu Grunde legen, also annehmen kann, das untere Ende frei eingespannt, das obere lothrecht geführt. Alsdann ist (siehe die Tabelle auf S. 106)

$$\frac{l_1}{h} = 70,15 \cdot 0,353 = 24,76 = \frac{l_1}{D}, \quad D = 0,04 l,$$

$$\delta = \frac{P}{D \pi K} = \frac{25 P}{l \pi K} = 0,00016 \frac{P}{l} \text{ Centim. } (P \text{ in Kilogr. und } l \text{ in Met.)}$$

Nach Gleichung 125 ergibt sich

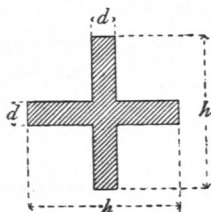
	für Schmiedeeisen:	Gufseisen:
für Fall 2:	$k = 490\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 153\,750 \left(\frac{h}{l}\right)^2$
für Fall 4:	$k = 980\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2$	$= 307\,500 \left(\frac{h}{l}\right)^2$

δ) Kreuzförmiger Querschnitt.

131.
kreuzförmige
Querschnitte.

a) Gufseisen. Wenn Ausbiegen nach allen Richtungen möglich ist, so wird man den Querschnitt am besten so anordnen, das die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen gleich sind, d. h. das die beiden Hauptträgheitsmomente gleich sind. Diese Gleichheit findet statt, wenn die beiden Kreuzarme gleiche Länge und gleiche Dicke haben (Fig. 135). Alsdann ist

Fig. 135.



$$\mathcal{I} = \frac{1}{12} [d h^3 + h d^3 - d^4] = \frac{d h^3}{12} \left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 - \left(\frac{d}{h}\right)^3 \right].$$

In den meisten Fällen ist $\frac{d}{h}$ ein kleiner Bruch, so das ohne merklichen Fehler $\left(\frac{d}{h}\right)^2$ und $\left(\frac{d}{h}\right)^3$ vernachlässigt werden können, jedenfalls

dann, wenn der vorläufigen Querschnittsbestimmung eine nachträgliche genauere Berechnung folgt. Man erhält alsdann

$$\mathcal{I} = \frac{d h^3}{12}, \quad F = 2 h d - d^2 = 2 h d \left(1 - \frac{d}{2 h} \right) \quad \text{oder angenähert } F = 2 h d;$$

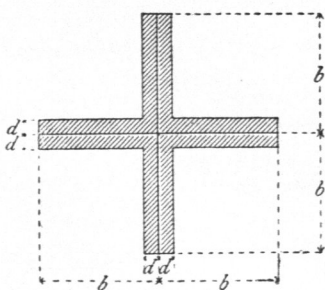
$$c = \frac{\mathcal{I}}{F h^2} = \frac{d h^3}{12 \cdot 2 h^3 d} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Auf Grundlage der Gleichungen 122 u. 125 wird für den Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 10,12 \quad \text{und} \quad k = 51\,250 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 133.$$

Hiernach sind die betreffenden Werthe in der Tabelle auf S. 115 berechnet.

Fig. 136.



b) Schmiedeeisen. Bei diesem Material werde zunächst nach Fig. 136 der aus vier gleichschenkeligen Winkeleisen zusammengesetzte Querschnitt betrachtet. Es ist

$$F = 4 (2 b d - d^2) = 8 b d - 4 d^2 \quad \text{oder angenähert } F = 8 b d;$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{12} [2 d (2 b)^3 + 2 b (2 d)^3 - 2 d (2 d)^3],$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{16}{12} b^3 d \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] \quad \text{oder angenähert } \mathcal{I}_1 = \frac{16}{12} b^3 d;$$

$$h = 2 b, \quad c = \frac{16 b^3 d}{12 \cdot 8 b d \cdot 4 b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Demnach ist

$$\frac{l_1}{h} = \frac{l_1}{2 b} = 15,31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 134.$$

In den meisten Fällen befinden sich zwischen den vier Winkeleifen des Querschnittes Zwischenräume von der Breite e (Fig. 137). Alsdann ist zunächst wieder $F = 8 b d$; das Trägheitsmoment \mathcal{J} ergibt sich, wie folgt. Es sei das Trägheitsmoment eines Winkeleifens bezogen auf die zu einer äußeren Kante parallele Schweraxe i_s , bezogen auf die zur Kante parallele Schweraxe $A A$ des Gesamtschnittes i und der Abstand des Winkeleifen-Schwerpunktes S von der äußeren Kante gleich a ; alsdann ist nach Art. 47 (S. 33)

$$i = i_s + f \left(a + \frac{e}{2} \right)^2 = i_s + f a^2 + f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right),$$

und das Trägheitsmoment des Gesamtschnittes für die Axe $A A$

$$\mathcal{J} = 4 i_s + 4 f a^2 + 4 f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right).$$

Der oben für den Querschnitt ohne Zwischenraum gefundene Werth des Trägheitsmomentes ist offenbar

$$\mathcal{J}_1 = 4 i_s + 4 f a^2, \text{ also } \mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + 4 f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right).$$

Nun war $\mathcal{J}_1 = \frac{16}{12} b^3 d$; mithin wird $\mathcal{J} = \frac{16}{12} b^3 d + 4 f \left(e a + \frac{e^2}{4} \right)$, und, da $4 f = 8 b d$,

$$\frac{\mathcal{J}}{F} = \frac{\frac{16}{12} b^3 d + 8 b d \left(e a + \frac{e^2}{4} \right)}{8 b d} = \frac{b^2}{6} + a e + \frac{e^2}{4}.$$

Ferner ist $h = 2 b + e$, $c = \frac{\mathcal{J}}{F h^2} = \frac{\frac{b^2}{6} + a e + \frac{e^2}{4}}{(2 b + e)^2} = \frac{1}{12} \frac{2 b^2 + 12 a e + 3 e^2}{4 b^2 + 4 b e + e^2}$.

Bei den »Deutschen Normal-Profilen« ist nahezu $a = 0,33 b$; daher wird

$$c = \frac{1}{12} \frac{2 + 3,6 \left(\frac{e}{b} \right) + 3 \left(\frac{e}{b} \right)^2}{4 + 4 \left(\frac{e}{b} \right) + \left(\frac{e}{b} \right)^2}.$$

$\frac{e}{b}$ ist meistens ein kleiner Bruch; in Folge dessen ist genau genug

$$c = \frac{1}{12} \frac{2 + 3,6 \frac{e}{b}}{4 + 4 \frac{e}{b}}.$$

Man erhält

für $\frac{e}{b} =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	im Mittel
$c =$	0,0472	0,0465	0,0457	0,0453	0,0450	0,0447	0,046
$\sqrt{c} =$	0,2173	0,2156	0,2138	0,2128	0,2121	0,2114	0,215.

Legt man die Mittelwerthe von c und \sqrt{c} zu Grunde, so ergibt sich (immer wieder für den Fall 2)

$$\frac{l_1}{h} = 16,13 \text{ und } k = 180\,000 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 135.$$

Der häufig für Druckstäbe verwendete I-förmige, aus vier Winkeleifen bestehende Querschnitt (Fig. 138) hat ein kleinstes Trägheitsmoment, welches genau mit dem des zuletzt betrachteten Querschnittes übereinstimmt. Es ist also für diesen Querschnitt $\frac{l_1}{h}$, so wie k nach Gleichung 135 zu ermitteln, wobei für h die kleinere Abmessung des Querschnittes einzuführen ist.

Fig. 137.

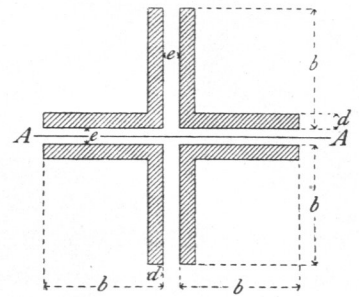


Fig. 138.

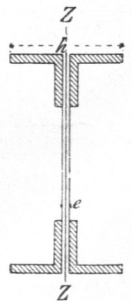
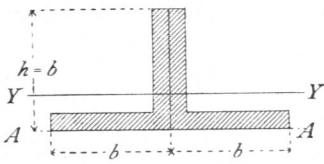


Fig. 139.



ε) Querschnitte aus zwei Winkelleifen.

α) Die beiden Winkelleifen bilden ein **T** und sind gleichschenkelig (Fig. 139). J_{min} findet für die Axe $Y Y$ statt. Für ein Winkelleifen ist

132.
Querschnitte aus 2 Winkelleifen.

$$i_A = \frac{1}{3} [d b^3 + b d^3 - d^4] = \frac{b^3 d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right]$$

und

$$f = 2 b d - d^2 = b d \left[2 - \frac{d}{b} \right].$$

Ferner ist

$$i_Y = i_A - f a^2 = \frac{b^3 d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - b d \left(2 - \frac{d}{b} \right) a^2.$$

Im Mittel ist

$$a = \frac{b}{3,3}, \text{ also } a^2 = \frac{b^2}{10,89},$$

sonach

$$i_Y = \frac{b^3 d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 - \frac{2}{3,6} + \left(\frac{1}{3,6}\right) \frac{d}{b} \right] = \frac{b^3 d}{3} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 - 0,56 + 0,28 \frac{d}{b} \right]$$

und genügend genau für kleine Werthe von $\frac{d}{b}$

$$i_Y = \frac{b^3 d}{3} \left(0,44 + 0,28 \frac{d}{b} \right).$$

Für den ganzen Querschnitt ist demnach

$$J_Y = \frac{b^3 d}{3} \left(0,88 + 0,56 \frac{d}{b} \right)$$

und, da $h = b$ ist,

$$c = \frac{J_Y}{F h^2} = \frac{\frac{b^3 d}{3} \left(0,88 + 0,56 \frac{d}{b} \right)}{2 b d \left(2 - \frac{d}{b} \right) b^2} = \frac{\left(0,88 + 0,56 \frac{d}{b} \right)}{6 \left(2 - \frac{d}{b} \right)}.$$

Im Mittel wird

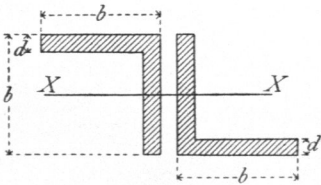
$$c = 0,085 \text{ und } \sqrt{c} = 0,291.$$

Unter Benutzung der Mittelwerthe erhält man für den Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 21,8 \text{ und } k = 335\,000 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 136.$$

Da nur das Trägheitsmoment für die Axe $Y Y$ in Frage kommt, dieses aber von der Größe des Zwischenraumes der beiden Winkelleifen ganz unabhängig ist, so gelten die gefundenen Werthe auch, falls zwischen beiden Winkelleifen ein Raum von der beliebigen Breite e ist.

Fig. 140.



β) Die beiden Winkelleifen bilden ein **Z** und sind gleichschenkelig (Fig. 140).

Für alle praktischen Verhältnisse von d zu b ist das Trägheitsmoment für die Axe $X X$ das kleinste, also hier in Betracht zu ziehen. In ähnlicher Weise, wie oben, erhält man

$$J_X = \frac{d b^3}{3} \left[2 - \frac{9}{2} \left(\frac{d}{b}\right) + 5 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 2 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right],$$

und genügend genau

$$J_X = \frac{d b^3}{3} \left[2 - \frac{9}{2} \left(\frac{d}{b}\right) + 5 \left(\frac{d}{b}\right)^2 \right].$$

Nun ist $F = 4 d b$ und $h = b$, mithin

$$c = \frac{J_X}{F h^2} = \frac{1}{12} \left[2 - \frac{9}{2} \left(\frac{d}{b}\right) + 5 \left(\frac{d}{b}\right)^2 \right] = 0,167 - 0,375 \left(\frac{d}{b}\right) + 0,417 \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Im Mittel ist $c = 0,12$, sonach $\sqrt{c} = 0,346$ und für Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 25,96 \text{ und } k = 473\,300 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 137.$$

c) Die beiden Winkeleifen sind über Ecke gestellt (Fig. 141).

\mathcal{F}_{min} findet für die Axe VV , \mathcal{F}_{max} für die zu ersterer senkrechte Symmetrie-Axe WW statt. Als Coordinatenachsen sollen die Y - und Z -Axe gewählt werden. \mathcal{F}_{min} wird wie folgt ermittelt. Bei dem vollen, aus vier Winkeleifen gebildeten Querschnitte ist das Trägheitsmoment für alle Schwerpunktsachsen gleich und hat den in Art. 131 (S. 109) gefundenen Werth. Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Fig. 141 in Bezug auf die Y - und Z -Axe ist offenbar halb so groß, als dasjenige des vollen Querschnittes für diese Axen, d. h. es ist

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Z = \frac{8}{12} b^3 d + 2f \left(a e + \frac{e^2}{4} \right).$$

Wie in Art. 58 (S. 38) nachgewiesen wurde, ist

$\mathcal{F}_V = \mathcal{F}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{F}_Z \sin^2 \alpha - H \sin 2\alpha$, in welcher Gleichung $H = \int yz \, d f$ ist. Im vorliegenden Falle ist $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Z$ und $\alpha = 45$ Grad, also

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V = \mathcal{F}_Y - H \quad \text{und} \quad H &= 4 b d \left(\frac{e+d}{2} \right) \left(\frac{e+b}{2} \right) - 2 d^2 \left(\frac{e+d}{2} \right)^2, \\ H &= b d (e+d) (e+b) - \frac{d^2 (e+d)^2}{2}. \end{aligned}$$

Sonach

$$\mathcal{F}_V = \frac{8}{12} b^3 d + 2 \cdot 2 b d \left(a e + \frac{e^2}{4} \right) - b d (e+d) (e+b) + \frac{d^2 (e+d)^2}{2}.$$

Wird wiederum $a = 0,33 b$ eingeführt, so ergibt sich nach einigen Umformungen und bei Vernachlässigung der sehr kleinen Glieder mit $\left(\frac{d}{b}\right)^2$ und $\left(\frac{d}{b}\right)^3$,

$$\mathcal{F}_V = \mathcal{F} = b^3 \left[\frac{2}{3} d + \frac{d}{b} (0,2 e - d) \right] \dots \dots \dots 138.$$

Ferner ist angenähert $F = 4 b d$ und $h = 2 b + e$, so dass

$$c = \frac{\mathcal{F}}{F h^2} = \frac{\frac{b^3 d}{3} \left[2 + \frac{1}{b} (0,6 e - 3 d) \right]}{4 b d (2 b + e)^2} = \frac{1}{12} \left[2 + \frac{0,6 e - 3 d}{b} \right].$$

In den meisten Fällen ist $e = d$ oder sehr wenig von d verschieden. Setzt man für solche Fälle $e = d$, so wird, wiederum unter Fortlassung von $\left(\frac{d}{b}\right)^2$,

$$c = \frac{2 - 2,4 \frac{d}{b}}{12 \left(4 + 4 \frac{d}{b} \right)} = \frac{1 - 1,2 \frac{d}{b}}{24 \left(1 + \frac{d}{b} \right)},$$

und genügend genau für die meisten Fälle der Praxis

$$c = \frac{1}{12} \left[0,5 - 1,1 \frac{d}{b} \right].$$

Man erhält als Mittelwerthe $c = 0,03$, daher $\sqrt{c} = 0,173$ und für Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 12,98 = \infty 13 \quad \text{und} \quad k = 118320 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \dots \dots \dots 139.$$

133.
L-förmige
Querschnitte.

§) Das einfache gleichschenkelige Winkeleifen (Fig. 143). Das Trägheitsmoment des neben stehenden Kreuzquerschnittes (Fig. 142) ist bei geringer Schenkelfstärke für alle Schweraxen (siehe Art. 131, S. 109)

$$\mathcal{F} = \frac{d h^3}{12}, \quad \text{und da } h = 2 b, \text{ auch } \mathcal{F} = \frac{2 d b^3}{3}.$$

Zu diesem Trägheitsmomente trägt der Theil an der einen Seite der Axe VV genau eben so viel

Fig. 141.

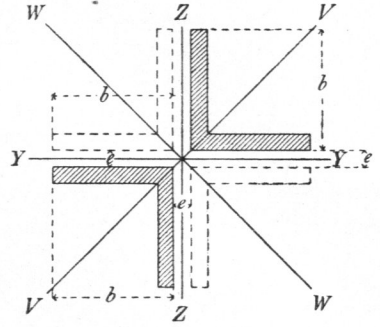


Fig. 142.

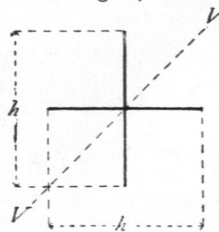
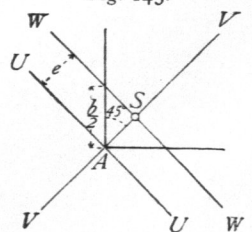


Fig. 143.



bei, wie der Theil an der anderen Seite. Wir können also auch angenähert annehmen, dafs für jede beliebige durch A gelegte Axe das Trägheitsmoment des Winkeleisens halb so grofs ist, als der obige Ausdruck, d. h. dafs für jede durch A gelegte Axe, also auch für die Symmetrieaxe VV (Fig. 143) stattfindet:

$$i_V = i_U = \frac{d b^3}{3}.$$

Wir suchen das Trägheitsmoment für diejenige Schwerpunktsaxe, in Bezug auf welche es ein Minimum wird; ein Minimum wird das Trägheitsmoment für die zur Symmetrieaxe VV im Schwerpunkt S senkrechte Hauptaxe WW . Demnach ist i_W zu ermitteln. Es ist nach Gleichung 18

$$i_U = i_W + F e^2 \quad \text{und} \quad i_W = i_U - F e^2 = \frac{d b^3}{3} - 2 b d e^2.$$

Der Schwerpunkt S ist aber der Schnittpunkt der Symmetrieaxe VV mit der Verbindungslinie der beiden Schenkelschwerpunkte (wenigstens für den vorliegenden Zweck genau genug), also

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e}{b} = \frac{2e}{b} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{b^2}{4 \cdot 2} = \frac{b^2}{8};$$

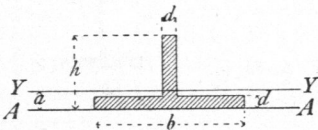
mithin

$$i_W = \frac{d b^3}{3} - \frac{2 b^3 d}{8} = \frac{d b^3}{12}, \quad c = \frac{i_W}{F h^2} = \frac{d b^3}{12 \cdot 2 b d b^2} = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,204.$$

Man erhält nunmehr

$$\frac{l_1}{b} = \frac{l_1}{h} = 15,31 \quad \text{und} \quad k = 164\,000 \left(\frac{b}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 140.$$

Fig. 144.



γ) Der T-förmige Querschnitt.

a) Breitfüßiges T-Eisen der »Deutschen Normal-Profile« (Fig. 144). Bei diesem ist $h = \frac{b}{2}$, und das kleinste Trägheitsmoment findet für die Axe YY statt. Das selbe ist

134.
T-förmige
Querschnitte.

$$J_Y = J_A - F a^2 = \frac{d h^3}{3} + \frac{b d^3}{3} - \frac{d^4}{3} - F a^2 = \frac{d b^3}{24} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - F a^2.$$

Es ist $F = b d + h d - d^2 = d(1,5 b - d)$ oder angenähert $F = \frac{3 b d}{2}$, fonach

$$c = \frac{J}{F h^2} = \frac{\frac{d b^3}{24} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - F a^2}{\frac{3 b d}{2} \cdot \frac{b^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{9} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - 4 \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Im Mittel ist bei den »Deutschen Normal-Profilen« $a = \frac{h}{4,3} = \frac{b}{8,3}$, also

$$c = \frac{1}{9} \left[1 + 8 \left(\frac{d}{b}\right)^2 - 8 \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right] - \frac{1}{18,5},$$

und mit einer für vorliegenden Fall hinreichenden Annäherung

$$c = 0,057 + 0,89 \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Als Mittelwerth kann man $c = 0,063$ und $\sqrt{c} = 0,25$ setzen. Hieraus folgt für Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 18,76 \quad \text{und} \quad k = 248\,000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 141.$$

b) Hochstegiges T-Eisen der »Deutschen Normal-Profile« (Fig. 145). Das kleinste Trägheitsmoment ist J_Z , und zwar ist $h = b$, mithin

$$J_Z = \frac{1}{12} [b d^3 + d b^3 - d^4] = \frac{d b^3}{12} \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right].$$

Da ferner $F = 2 b d - d^2 = b d \left(2 - \frac{d}{b}\right)$ ist, so wird

$$c = \frac{\mathcal{F}}{F h^3} = \frac{\mathcal{F}}{F b^3} = \frac{d b^3 \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3 \right]}{12 b^3 d \left(2 - \frac{d}{b} \right)} = \frac{1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right)^3}{12 \left(2 - \frac{d}{b} \right)}$$

und genügend genau

$$c = \frac{0,0833 \left[1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2 \right]}{2 - \frac{d}{b}}$$

Man erhält als Mittelwerth $c = 0,045$ und $\sqrt{c} = 0,212$ und für diese Mittelwerthe und Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 15,9 \quad \text{und} \quad k = 177400 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 142.$$

c) Zwei Winkeleisen (Fig. 139). Siehe das unter ε , α (S. 111) Gefagte.

⊕ Der I-förmige Walzbalken-Querschnitt (Fig. 146). \mathcal{F}_{min} findet in Bezug auf die Z-Axe statt. Es ist

$$\mathcal{F}_Z = \mathcal{F} = \frac{1}{12} \left[2 t b^3 + d^3 (h - 2 t) \right] = \frac{t b^3}{12} \left[2 + \left(\frac{d}{b}\right)^3 \left(\frac{h}{t} - 2\right) \right].$$

Unbedenklich kann man angenähert setzen

$$F = 2 b t + d h \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \frac{t b^3}{6}.$$

Die früher im Ausdrucke für c mit h bezeichnete Größe ist hier gleich b ,
föfnach

$$c = \frac{t b^3}{6 (2 b t + d h) b^2} = \frac{1}{6 \left(2 + \frac{d h}{b t} \right)}$$

Für die »Deutschen Normal-Profile« Nr. 8 bis 24, welche hier vorzugsweise in Betracht kommen, liegt c zwischen den Grenzen 0,0511 und 0,0476, und es ist im Mittel

$$c = 0,049 \quad \text{und} \quad \sqrt{c} = 0,22.$$

Man erhält aus diesen Mittelwerthen für den Fall 2

$$\frac{l_1}{h} = 16,51 \quad \text{und} \quad k = 193000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 143.$$

Wegen des I-förmigen aus vier Winkeleisen bestehenden Querschnittes (Fig. 138) wird auf die Bemerkung auf S. 110 (unter δ am Schluffe) hingewiesen; für denselben ist im Mittel (Fall 2)

$$\frac{l_1}{h} = 16,13 \quad \text{und} \quad k = 180000 \left(\frac{h}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 144.$$

Aus den im Vorstehenden gefundenen Ergebnissen sind für eine Reihe von Werthen des $\frac{h}{l}$ und für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen die zulässigen Beanspruchungen ausgerechnet und in neben stehender Tabelle zusammengestellt.

Wenn der auf Druck beanspruchte Stab keine drehbaren Enden hat, also Fall 2 nicht zu Grunde gelegt werden kann, so ist die neben stehende Tabelle mit kleiner Abänderung verwendbar. Die zulässigen Beanspruchungen für die Fälle 1, 3 und 4 ergeben sich durch Multiplication der Tabellenwerthe mit $\frac{1}{4}$, 4, bzw. 2. Diese Werthe sind natürlich nur verwendbar, wenn sie kleiner als K sind; anderenfalls ist K als zulässige Beanspruchung der Berechnung zu Grunde zu legen.

Der Gebrauch der in den Art. 124 bis 126 (S. 104 bis 108) vorgeführten allgemeinen Regeln, so wie der für verschiedene Querschnittsformen entwickelten Ableitungen in den Art. 128 bis 135 (S. 108 bis 114) mag an einigen Beispielen erläutert werden.

α) In einem aus Gusseisen mit kreisförmigem Querschnitte herzustellenden Stabe herrsche ein größter Druck $P = 3300$ kg. Die Länge l des Stabes betrage 100 cm; der Kreisdurchmesser d soll bestimmt werden unter Zugrundelegung des Falles 2.

Fig. 145.

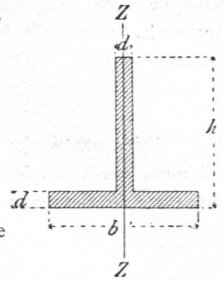
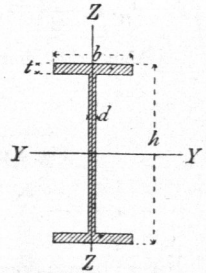


Fig. 146.



135.
I-förmige
Querschnitte.

136.
Beispiele.

Tabelle

der zulässigen Beanspruchungen k (in Kilogramm für 1 cm Querschnittsfläche) für lange gedrückte Stäbe.
Fall 2: Drehbare Enden (Fig. 129, S. 104).

$\frac{l}{h}$	Rechteck- querschnitt			Kreis- querschnitt		Kreising- querschnitt		Kreuzförmiger Querschnitt		Zwei Winkel- eisen bilden ein			Winkel- eisen		T-Eisen		I-Quer- schnitt
	Schmiede- eisen	Gußeisen	Holz	Schmiede- eisen	Gußeisen	Schmiede- eisen	Gußeisen	Gußeisen	Schmiede- eisen: 4 L-Eisen (Fig. 137)	T	Z	Kreuz	gleich- schenkelig	breitfüßig	hochfüßig	Schmiede- eisen	
11	—	—	—	—	—	—	—	423	—	—	—	—	—	—	—	—	
12	—	—	—	—	—	—	—	356	—	—	—	—	—	—	—	—	
13	—	—	58	—	473	—	—	303	—	—	—	700	—	—	—	—	
14	—	—	50	—	392	—	—	261	—	—	—	603	—	—	—	—	
15	—	455	43,5	—	340	—	—	228	—	—	—	525	—	—	—	—	
16	—	400	38	—	300	—	—	200	—	—	—	462	—	—	693	—	
17	—	355	34	—	266	—	—	177	623	—	—	409	623	—	613	667	
18	—	313	30	—	237	—	474	158	555	—	—	365	555	—	547	596	
19	—	284	27	683	213	—	426	142	498	—	—	327	498	687	491	535	
20	—	256	24,5	616	192	—	384	128	450	—	—	295	450	620	443	482	
22	680	212	20	509	159	—	317	106	372	692	—	244	372	512	366	400	
24	571	178	17	428	133	—	267	89	312	581	—	205	312	430	308	335	
25	526	164	15,7	394	123	—	246	82	288	536	—	189	288	396	283	308	
26	487	151	14	364	113	—	227	—	266	495	700	175	266	366	262	285	
27	451	140	13	338	105	672	210	—	247	459	649	162	247	340	243	265	
28	420	131	12,5	314	98	625	196	—	230	427	603	150	229	316	226	246	
29	391	122	11,6	293	91,4	582	183	—	214	398	562	140	214	294	210	229	
30	365	114	11,0	274	85	544	171	—	200	372	526	131	200	275	197	214	
32	321	100	9,5	240	75	478	150	—	175	327	462	115	176	242	173	188	
35	268	83	8	201	63	400	125	—	147	273	386	96	140	202	144	166	
40	205	64	6	154	48	306	96	—	112	209	296	74	112	155	110	120	

Soll man nach der einfachen Druckgleichung rechnen dürfen, so muß nach Gleichung 130: $\frac{l}{d} = 12,4$

sein. Es würde $f = \frac{3300}{500} = 6,6$ qcm und $d = \sqrt{\frac{4f}{\pi}} = 2,9$ cm, woraus sich $\frac{l}{d} = \frac{100}{2,9} = 34,4$ ergibt. Bei diesem Verhältniß ist die einfache Druckgleichung also nicht mehr anwendbar. Wählt man den Durchmesser vorläufig etwas stärker als 2,9, etwa $d = 5$ cm, so wird $\frac{l}{h} = 20$ und nach obiger Tabelle $k = 192$.

Alsdann ist $f = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3300}{192} = 17$ qcm und $d = 4,7$ cm. Der zu 5 cm angenommene Durchmesser würde also als angemessen zu bezeichnen sein.

β) Für denselben Stab soll der Querschnitt als Kreuzquerschnitt bestimmt werden. Wenn die einfache Druckgleichung angewendet wird, ergibt sich $f = \frac{3300}{500} = 6,6$ qcm. Wählt man etwa vorläufig $d = 1$ cm und $h = 6$ cm, demnach die Querschnittsfläche $= 6 + 5 = 11$ qcm, so ergibt sich $\frac{l}{h} = \frac{100}{6} = 16,67$ und nach obiger Tabelle (durch Interpolation) $k = 184$ kg. Mithin beträgt die erforderliche Querschnittsfläche $f = \frac{3300}{184} = 18$ qcm, und es ist deshalb noch eine Vergrößerung des Querschnittes vorzunehmen.

Wird $h = 7$ cm gewählt, so ist $\frac{l}{h} = \frac{100}{7} = 14$ und nach obiger Tabelle $k = 261$ kg. Sonach wird nunmehr $f = \frac{3300}{261} = 12,6$ qcm, während der gewählte Querschnitt 13 qcm mißt, also fast genau mit dem für f gefundenen Werthe übereinstimmt.

γ) In einem aus Schmiedeeisen zu konstruierenden Stabe herrsche der größte Druck $P = 3300$ kg. Es sei $l = 100$ cm; der Stab werde aus einem einfachen Winkeleisen konstruiert, dessen Abmessungen zu bestimmen sind. Es ist der Zerknickungsfall 4 zu Grunde zu legen.

Bei allen Querschnittsbestimmungen für schmiedeeiserne Stäbe soll, sobald Zerknicken in Frage kommt, von der Verchwächung durch Nietlöcher abgesehen werden, weil auf dieselbe auch in der Herleitung der Formeln für k und l_1 keine Rücksicht genommen ist. Wenn sich die volle Beanspruchung K als zulässig ergibt, so ist die Verchwächung durch Niete zu berücksichtigen.

Würde man für einfachen Druck konstruieren, so würde sich der Querschnitt $f = \frac{3300}{700} = 4,7$ qcm ergeben.

Es möge ein Winkeleisen mit den Abmessungen $5,5 \times 5,5 \times 0,8$ cm gewählt werden; alsdann ist $\frac{l}{h} = \frac{100}{5,5} = 18$; für den Fall 2 ist nach der Tabelle auf S. 115: $k = 555$ kg, für den Fall 4 also größer, als 700 kg. Es braucht daher hier auf Zerknicken keine Rücksicht genommen zu werden. Der Brutto-Querschnitt des erwähnten Winkeleisens beträgt 8,16 qcm (siehe die »Deutschen Normalprofile« für gleichschenkelige Winkeleisen), der Netto-Querschnitt nach Abzug eines Nietloches von 1,6 cm Durchmesser $8,16 - 1,28 = 6,88$ qcm. Es könnte also noch ein kleineres Winkeleisen-Caliber gewählt werden.

δ) Es sei $P = 9500$ kg und $l = 300$ cm; der Stab sei aus Eichenholz mit quadratischem Querschnitt herzustellen, und es soll der Fall 4 zu Grunde gelegt werden.

Für einfachen Druck wäre $f = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wählt man die Seite des Quadrates 14 cm, so wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14} = \infty 22$ und nach der Tabelle auf S. 115: $k = 2 \cdot 20 = 40$ kg. Mithin muß $f = \frac{9500}{40} = 237$ qcm sein. Bei den gewählten Abmessungen ist $f = 14^2 = 196$ qcm, also zu klein.

Wählt man die Seite des Quadrates gleich 14,5 cm, so wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{14,5} = 20,7$ und nach Gleichung 129

$$k = \frac{2 \cdot 9800}{(20,7)^2} = \infty 46 \text{ kg.}$$

Hieraus findet man

$$f = \frac{9500}{46} = 213 \text{ qcm.}$$

Der gewählte Querschnitt hat eine Fläche von $14,5 \cdot 14,5 = 210,25$ qcm, ist also als genügend zu betrachten.

Weitere Beispiele für weniger einfache Querschnitte folgen im nächsten Artikel.

137.
Querschnitts-
ermittelung
bei complicirten
Querschnitts-
formen.

Wenn die Form des Querschnittes einigermaßen complicirt ist, so stößt die Aufstellung einfacher und genauer Formeln für c und k auf Schwierigkeiten. Alsdann empfiehlt es sich, aus der Gleichung 117 diejenige Größe des Trägheitsmomentes zu berechnen, welche der Querschnitt bei gegebener Länge des Stabes und gegebenem Werthe von P zum mindesten haben muß. Es ergibt sich aus Gleichung 117 für das Trägheitsmoment der Werth

$$\mathcal{J} = \frac{P s l^2}{C E} \dots \dots \dots 145.$$

Der Querschnitt ist nun so zu entwerfen, daß dessen kleinstes Trägheitsmoment wenigstens so groß ist, wie der aus Gleichung 145 für \mathcal{J} ermittelte Werth; gleichzeitig muß aber die Querschnittsfläche F mindestens so groß sein, um der Gleichung 118 zu genügen.

Man erhält für \mathcal{J} sehr einfache Ausdrücke, wenn man P und E in Tonnen, l in Metern einführt und π^2 gleich 10 setzt, was mit hinreichender Genauigkeit geschehen kann; dann muß \mathcal{J} für Fall 2 nachstehende Werthe haben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schmiedeeisen} \dots \dots \mathcal{J} = 2,5 P l^2 \\ \text{» Gufseisen} \dots \dots \mathcal{J} = 8 P l^2 \\ \text{» Holz} \dots \dots \mathcal{J} = 83 P l^2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 146.$$

Die Zusammenstellung für alle vier Fälle ergibt nachstehende Tabelle:

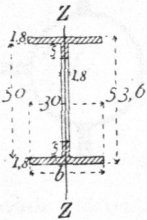
Constructionsmaterial	Fall 1 (Fig. 128)	Fall 2 (Fig. 129)	Fall 3 (Fig. 130)	Fall 4 (Fig. 131)
Schmiedeeisen	10	2,5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
Gufseisen	32	8	2	4
Holz	332	83	20	41

P Tonnen $\times l$ (Meter)²

Je mehr sich der Flächeninhalt des Querschnittes, welcher dem notwendigen Trägheitsmomente entspricht, dem Quotienten $\frac{P}{K}$ nähert, desto zweckmäßiger ist nach Früherem die Constraction. Man nimmt gewöhnlich zunächst einen Querschnitt an, für welchen $F = \frac{P}{K}$ stattfindet und ermittelt das Trägheitsmoment deselben. Genügt dasselbe nicht, so ist die Querschnittsfläche entsprechend zu vergrößern, bis das verlangte \mathcal{F} vorhanden ist. Dieses Verfahren soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Beispiele. $\alpha)$ In einer gusseisernen Stütze sei der Maximaldruck $P = 50\,000$ kg = 50 Tonnen; die Länge der Stütze sei $l = 4,5$ m; die Enden sollen als bewegliche vorausgesetzt werden; die Querschnittsform sei die neben stehende (Fig. 147); die Querschnittsmaße sind zu ermitteln.

Fig. 147.



Für einfachen Druck muß $F = \frac{50\,000}{500} = 100$ qcm und nach Gleichung 146 $\mathcal{F} = 8 \cdot 50 \cdot 4,5^2 = 8100$ fein.

Die Höhe des Querschnittes sei durch constructive Rücksichten zu 53,6 cm vorgeschrieben, die Stärke des Steges und der Gurte sei 1,8 cm; alsdann findet, wenigstens bei nicht aufsergewöhnlich großer Breite der Gurtungen, das Minimal-Trägheitsmoment für die Axe Z Z statt, und es ist

$$\mathcal{F} = \frac{2 \cdot 1,8 \cdot b^3}{12} + \frac{50 \cdot 1,8^3}{12} = 0,3 b^3 + 24,3 = 8100,$$

woraus sich für $b = \approx 30$ cm ergibt.

Die Querschnittsfläche wird $F = 2 \cdot 1,8 \cdot 30 + 50 \cdot 1,8 = 198$ qcm, während nur 100 qcm Querschnittsfläche nöthig sind. Daraus folgt, daß unbedenklich ein Theil des Steges auf einzelne Theile der Höhe fortfallen kann; alsdann bleibt als Querschnittsfläche der schraffierte Theil übrig, und zwar in diesem Falle $F = 2 \cdot 30 \cdot 1,8 + 2 \cdot 5 \cdot 1,8 = 126$ qcm, und diese Querschnittsgröße genügt. Auch das Trägheitsmoment wird durch Fortfall des Steges nur unwesentlich beeinflusst.

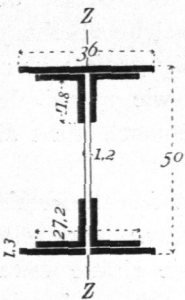
$\beta)$ In einem schmiedeeisernen Stabe herrscht ein Druck $P = 130\,000$ kg = 130 Tonnen; die Stablänge betrage 6,0 m, der Stab sei beiderseits eingespannt.

Nach obiger Tabelle muß

$$\mathcal{F} = \frac{5}{8} \cdot 130 \cdot 6^2 = 2925;$$

ferner $F = \frac{130\,000}{700} = 186$ qcm fein.

Fig. 148.



Der Querschnitt (Fig. 148) wurde vorläufig, wie folgt, zusammengesetzt:

4 Winkleisen zu $13 \times 13 \times 1,2$ cm	= 29,8 qcm	= 119,2 qcm
1 obere Deckplatte $36 \times 1,3$ cm		= 46,8 »
1 untere Deckplatte $34,8 \times 1,3$ cm		= 45,2 »
Summe des Brutto-Querschnittes		211,2 qcm
ab für 4 Nietlöcher $4 \times 2,5 \times 2,3$ cm		= 23,0 »
bleibt Netto-Querschnitt		188,2 qcm.

Für diesen Querschnitt findet \mathcal{J}_{min} für die ZZ-Axe statt, und es ist

$$\mathcal{J}_Z = \frac{1}{12} \left[2 \cdot 1,3 \cdot 36^3 + 2 \cdot 1,2 \cdot 27,2^3 + 2 \cdot 11,8 \cdot 3,6^3 - (2 \cdot 13 + 1,3) 1,2^3 \right] - 4 \cdot 2,5 \cdot 2,8 \cdot 7^2 = 13094.$$

Das Trägheitsmoment ist also bei ausreichender Querschnittsfläche wesentlich größer, als es zu fein braucht, der Querschnitt sonach genügend.

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man den Querschnitt aus den »Deutschen Normal-Profilen für Walzeisen« bildet, für welche die Minimal-Trägheitsmomente im vorhergehenden Halbband dieses »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Baustoffe) angegeben sind. Man berechnet das notwendige Trägheitsmoment und die nöthige Querschnittsfläche aus den beiden Gleichungen 146, bzw. 118, und sucht aus den Tabellen ein Profileisen, bzw. einen aus Profileisen zusammengesetzten Querschnitt, dessen Minimal-Trägheitsmoment und Querschnittsfläche den verlangten zum mindesten gleich sind.

Beispiel. In einem schmiedeeisernen Stabe herrsche ein Druck $P = 18000 \text{ kg} = 18 \text{ Tonnen}$; die Stablänge sei $l = 5,0 \text{ m}$; die Stabenden seien drehbar, mithin Fall 2 zu Grunde zu legen.

Es muß nach Gleichung 146: $\mathcal{J} = 2,5 \cdot 18 \cdot 5^2 = 1125$ und nach Gleichung 118: $F = \frac{18000}{700} = 26 \text{ qcm}$ fein.

Soll der Stab aus einem I-förmigen Walzbalken gebildet werden, so ist das Caliber Nr. 38 (siehe die angezogenen Tabellen) zu wählen; bei demselben ist $\mathcal{J}_{min} = 1138$, F (nach Abzug für Niete) $= 107,5 - 4 \cdot 2 \cdot 2,05 = 91,1 \text{ qcm}$ und das Gewicht für 1 m $83,9 \text{ kg}$.

Wollte man statt dessen einen aus 4 kreuzförmig gestellten Winkeleisen gebildeten Querschnitt verwenden, so könnte man 4 Winkeleisen Nr. 9 (siehe die angezogenen Tabellen) zu $9 \times 9 \times 1,3 \text{ cm}$ verwenden, deren $\mathcal{J} = 1284$ ist, also genügt; dabei ist der Netto-Querschnitt $F = 4 \cdot 21,7 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1,3$ (für Niete) $= 76,4 \text{ qcm}$ und das Gewicht $4 \cdot 16,9 \text{ kg} = 67,6 \text{ kg}$. Zweckmäßiger ist die Verwendung von 4 Winkeleisen Nr. 10 zu $10 \times 10 \times 1 \text{ cm}$ mit $\mathcal{J} = 1346$, $F = 4 \cdot 19 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 68 \text{ qcm}$ und einem Gewicht für 1 m von $4 \cdot 14,8 \text{ kg} = 59,2 \text{ kg}$.

Würde endlich der Querschnitt aus 4 Quadranteisen (nach Fig. 149) konstruiert, so wird bei neben stehendem Querschnitt (siehe die angezogenen Tabellen) $\mathcal{J} = 2046$, $F = 54,9 - 4 \cdot 2 \cdot 0,8$ (für Niete) $= 48,59 \text{ qcm}$, und das Gewicht für das laufende Meter $42,9 \text{ kg}$.

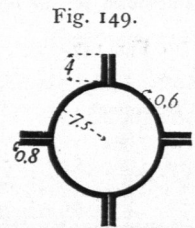
Am ungünstigsten ist demnach im vorliegenden Falle das I-Profil mit $83,9 \text{ kg}$ Gewicht, alsdann folgt das kreuzförmige Profil mit $59,2 \text{ kg}$, und am günstigsten ist das aus Quadranteisen zusammengesetzte, röhrenförmige Profil mit $42,9 \text{ kg}$ Gewicht.

3) Querschnittsermittlung bei excentrischer Druckbelastung.

138.
Zulässige
Beanspruchung.

Man ist neuerdings vielfach befreht gewesen, Größe und Form des Querschnittes auf Knicken axial beanspruchter Stäbe aus der Bedingung zu bestimmen, daß die größte, wirklich auftretende Beanspruchung σ an keiner Stelle die für das Material als zulässig erachtete Beanspruchung überschreite. Die Spannung σ ist, sobald die Kraft für den Querschnitt ein Moment hat, in hohem Maße von der Größe der Ausbiegung y abhängig; da aber diejenige axial wirkende Kraft, welche überhaupt eine Ausbiegung y hervorrufen kann, auch nach Obigem ein beliebig großes y und damit auch ein beliebig großes σ erzeugen kann, so ist σ , eben so wie y , bei der oben betrachteten Aufgabe eine unbestimmte Größe, eignet sich demnach nicht als Grundlage für die Querschnittsbestimmung.

Man darf weiter nicht erwarten, daß die Versuchsergebnisse mit den theoretisch entwickelten Werthen der zerknickenden Kraft genau übereinstimmen; auch eine kleinere Kraft kann bereits Zerknicken herbeiführen, wenn etwa die Kräfte etwas excentrisch wirken oder nicht genau in die Richtung der Stabaxe fallen oder das



Material des Stabes nicht ganz gleichmäfsig ist. Allen diesen Möglichkeiten, welche theoretisch nicht gut verfolgt werden können, wird am besten dadurch Rechnung getragen, dafs man einen Sicherheits-Coefficienten n einführt, also nur den n -ten Theil derjenigen Kraft auf den Stab wirken läßt, welche denselben nach der Formel zerknicken könnte. Es ist gut, dafs man die Stelle ganz genau kennt, an welcher alle Unsicherheiten zusammentreffen und diese ganz klar bezeichnet.

Wenn man das Mafs der Excentricität der wirkenden Kräfte kennt, so wäre auch eine genaue Berechnung möglich; denn dann hat der Pfeil einen ganz bestimmten Werth, und damit ergeben sich auch für σ gewisse, von der Gröfse der Kraft P abhängige Werthe. Da unter Umständen die Gröfse der Excentricität bekannt ist, bezw. angenommen werden kann, so soll die Berechnung hier vorgeführt werden.

139.
Querschnitts-
ermittlung.

Für irgend einen Punkt C des Stabes AB (Fig. 150), welcher ursprünglich mit der Axe AX zusammenfiel, ist

Fig. 150. $M = P(\rho + y_0 - y) = E \mathcal{J} \frac{d^2 y}{dx^2}$ oder $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E \mathcal{J}} (\rho + y_0 - y)$,

und wenn wieder, wie oben, abkürzungsweise $\frac{P}{E \mathcal{J}} = a^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 (\rho + y_0 - y).$$

Die zweimalige Integration dieser Gleichung ergibt

$$y = (\rho + y_0) + A \sin ax + B \cos ax \quad \dots \quad 147.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax - B a \sin ax \quad \dots \quad 148.$$

Die Constanten A und B ergeben sich folgendermaßen.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also $0 = \rho + y_0 + B$ und $B = -(\rho + y_0)$;

für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, also $0 = A a$ und $A = 0$; demnach heifst die Gleichung der elastischen Linie:

$$y = (\rho + y_0) (1 - \cos ax) \quad \dots \quad 149.$$

Für $x = l$ ist $y = y_0$, d. h. $y_0 = (\rho + y_0) (1 - \cos al)$ oder

$$y_0 = \rho \frac{1 - \cos al}{\cos al} \quad \dots \quad 150.$$

y_0 ist also eine ganz bestimmte Gröfse. Das größte Moment findet am Einspannungspunkte A statt, wo es den Werth

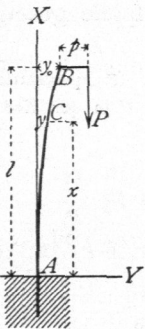
$$P(\rho + y_0) = P\rho \left(1 + \frac{1 - \cos al}{\cos al}\right) = \frac{P\rho}{\cos al}$$

hat. Es wird in diesem Querschnitte der größte Druck den Werth haben

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{P\rho r}{\mathcal{J} \cos al} \quad \dots \quad 151.$$

In dieser Gleichung ist r der Abstand des meist gespannten Querschnittspunktes von der Axe, \mathcal{J} das in Betracht kommende Trägheitsmoment. Stellt man die Bedingung, dafs σ_{max} höchstens gleich K sein solle, so ergibt sich

$$K = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\rho r}{\mathcal{J} \cos al}\right), \quad \dots \quad 152.$$



und die zulässige Belastung der Stütze vom Querschnitt F und dem Trägheitsmomente \mathcal{J}

$$P = \frac{FK}{1 + \frac{Fpr}{\mathcal{J} \cos al}} \dots \dots \dots 153.$$

Da $a = \sqrt{\frac{P}{E\mathcal{J}}}$ eine Größe ist, welche sowohl vom Drucke P , wie von der Querschnittsgealtung, also von Werthen abhängt, welche meistens von vornherein nicht gleichzeitig gegeben sind, so kann der Ausdruck für P aus Gleichung 153 nicht in geschlossener Form entwickelt werden; denn a kommt auch auf der rechten Seite vor. Man wird deshalb zunächst eine angenäherte Rechnung vornehmen, auf welche die genauere zu folgen hat. Aehnlich ist es, wenn P und das Maß der Excentricität gegeben ist und der Querschnitt gesucht wird. Dann ist aus Gleichung 153, wenn mit R der Trägheitsradius bezeichnet wird, also $\mathcal{J} = FR^2$ gesetzt wird,

$$F = \frac{P}{K} \left(1 + \frac{pr}{R^2 \cos al} \right) \dots \dots \dots 154.$$

140.
Beispiel.

Die Anwendung dieses Ausdruckes soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

Die Stütze sei eine Holzstütze von der Länge $l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$; der Querschnitt sei quadratisch und habe die Seitenlänge d ; die Excentricität soll so weit gehen können, daß die Kraft P in der Kante angreift. Dann ist

$$p = \frac{d}{2}, \quad F = d^2, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \mathcal{J} = FR^2 = \frac{d^4}{12} = d^2 R^2,$$

$$R^2 = \frac{d^2}{12}, \quad E = 120000 \text{ kg}, \quad K = 65 \text{ kg}, \quad pr = \frac{d^2}{4}.$$

Ferner solle eine Kraft $P = 16000 \text{ kg}$ ertragen werden. Es ist also

$$a = \sqrt{\frac{P}{E\mathcal{J}}} = \sqrt{\frac{16000 \cdot 12}{120000 d^4}} = \frac{1,265}{d^2}, \quad \text{ferner } al = \frac{632,5}{d^2}, \quad \text{fonach}$$

$$F = \frac{16000}{65} \left(1 + \frac{d^2 \cdot 12}{4 d^2 \cos al} \right) = 246 \left(1 + \frac{3}{\cos \frac{632,5}{d^2}} \right).$$

Es werde zunächst $d = 25 \text{ cm}$ angenommen; dann wird $F = 246 (1 + 5,66) = 1638 \text{ qcm}$; demnach müßte $d = \text{ca. } 40 \text{ cm}$ sein. Wählt man $d = 35 \text{ cm}$, so wird

$$F = 246 (1 + 3,45) = 1095 \text{ qcm}.$$

Dieser Werth würde einer Seitenlänge $d = 33 \text{ cm}$ entsprechen; 35 cm ist also ein angemessener Werth.

4) Empirische Formeln.

141.
Allgemeine
Formel.

Der Umstand, daß man je nach der größeren oder geringeren Länge des Stabes mit verschiedenen Formeln rechnen muß, ist ein Uebelstand, dem man durch Einführung empirischer Formeln abzuhelpen gestrebt hat. Eine solche Formel muß für P bei kleinen Werthen von l nahezu oder genau die für einfachen Druck entwickelte Gleichung 118, dagegen bei großen Werthen von l die mit Rücksicht auf Zerknicken gefundene Gleichung 117 ergeben. Diesen Anforderungen entspricht folgende Formel ²²⁾:

$$P = \frac{KF\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{KsFl^2}{CE}}, \dots \dots \dots 155.$$

in welcher alle Buchstaben die früheren Bedeutungen haben.

²²⁾ Siehe: SCHÄFFER. Bestimmung der zulässigen Spannung und der Querschnitte für Eisenconstruktionen. Deutsche Bauz. 1877, S. 498.

Für $l=0$ wird entsprechend der für kurze Stäbe aufgestellten Gleichung 118 auch hier $P=KF$; für den Werth $l=\infty$ mag obiger Formel die Gestalt

$$P = \frac{KF}{1 + \frac{KsFl^2}{CE\mathcal{J}}} \dots \dots \dots 156.$$

gegeben werden. Ist l sehr groß, bezw. $=\infty$, so ist das erste Glied im Nenner verschwindend klein gegen das zweite; die Formel lautet alsdann:

$$P = \frac{KF}{\frac{KsFl^2}{CE\mathcal{J}}} = \frac{CE\mathcal{J}}{sl^2},$$

demnach übereinstimmend mit der Formel 117 für lange Stäbe. Die Gleichung 155 kann also als empirische Formel angewendet werden und giebt auch ziemlich gut mit den Versuchen übereinstimmende Werthe. Aus derselben folgt

$$\frac{P}{K} = \frac{F\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \frac{Ks}{CE}Fl^2},$$

und wenn der nur vom Material des Stabes und der Endbefestigung abhängige Factor $\frac{Ks}{CE} = \alpha$ gesetzt wird,

$$\frac{P}{K} = \frac{F\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha Fl^2} \dots \dots \dots 157.$$

$\frac{P}{K}$ ist diejenige Querschnittsfläche, welche der Stab haben müsste, wenn er einfachen Druck zu erleiden hätte. Wir bezeichnen dieselbe mit f , alsdann ist

$$f = \frac{F\mathcal{J}}{\mathcal{J} + \alpha Fl^2} \dots \dots \dots 158.$$

Die Gleichung 158 kann benutzt werden, um die wirklich nöthige Querschnittsfläche zu berechnen. Denn es ist nach derselben

$$F = \frac{f\mathcal{J}}{\mathcal{J} - \alpha fl^2} \dots \dots \dots 159.$$

Das zur Ermittlung der nothwendigen Querschnittsform und -Größe einzuschlagende Verfahren ist nun folgendes. Der Maximaldruck P , welcher auf den Stab wirken kann, ist bekannt, durch Rechnung oder Zeichnung gefunden; alsdann ist $f = \frac{P}{K}$ ebenfalls leicht zu ermitteln. Man construirt nun einen dieser Querschnittsfläche entsprechenden Querschnitt und ermittle das kleinste Trägheitsmoment desselben für eine Schweraxe, also \mathcal{J} . Bekannt sind jetzt die Größen f , \mathcal{J} , α und l , und die Gleichung 159 ergibt nun die dem Querschnitt wirklich zugegebene Flächengröße F . Fällt dieselbe größer aus, als die angenommene Querschnittsfläche, so ist letztere entsprechend zu vergrößern, das neue Trägheitsmoment einzusetzen, F aus Gleichung 159 aufs Neue zu berechnen und dieses Verfahren so lange zu wiederholen, bis eine genügende Uebereinstimmung der wirklichen Querschnittsfläche mit der nöthigen stattfindet. Dabei hat man sich jedoch vor dem Fehler zu hüten, bei den späteren Berechnungen den neuen Werth der Querschnittsfläche für f einzuführen, da ja f nicht die wirkliche Querschnittsfläche, sondern den für einen bestimmten Stab unveränderlichen Werth $\frac{P}{K}$ angiebt. Bei einiger Uebung

ist es leicht, bereits bei der zweiten Rechnung eine entsprechende Querschnittsfläche zu finden.

142.
Vereinfachung.

Die mehrmalige Berechnung des Trägheitsmomentes ist unbequem und kann auf die nachstehend angegebene Weise vermieden werden.

Nach Gleichung 121 ist $\mathcal{F} = c F h^2$, worin c ein von der besonderen Querschnittsform abhängiger Coefficient, h eine Abmessung des Querschnittes ist. Wird dieser Werth in Gleichung 159 eingeführt, so wird

$$F = \frac{f c F h^2}{c F h^2 - \alpha f l^2} \text{ oder } F c h^2 = f (c h^2 + \alpha l^2),$$

und

$$\frac{F}{f} = 1 + \frac{\alpha}{c} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \dots \dots \dots 160.$$

Für eine Reihe von einfachen Querschnittsformen: Quadrat, Kreis, Kreuz-, Winkel-, I-Eisen etc. ist, wie in den Art. 128 bis 135 (S. 108 bis 114) gezeigt wurde, c ohne besondere Schwierigkeiten zu bestimmen; für α giebt die nachstehende Tabelle die betreffenden Werthe an. Sonach ist mittels Gleichung 160 F leicht zu ermitteln.

Tabelle für die Werthe von $\alpha = \frac{K s}{C E}$.

Constructions-material.	Allgemeine Formel.	Fall 1: Ein Ende eingepannt, das andere frei drehbar.	Fall 2: Beide Enden frei drehbar.	Fall 3: Beide Enden eingepannt.	Fall 4: Ein Ende eingepannt, das andere lothrecht geführt.
Schmiedeeisen	$\frac{0,00175}{C}$	0,00072	0,00018	0,000045	0,00009
Gusseisen	$\frac{0,004}{C}$	0,0016	0,0004	0,0001	0,0002
Holz	$\frac{0,0054}{C}$	0,0022	0,00054	0,00013	0,00026

143.
Anwendung auf verschiedene Querschnitte.

Die Gleichung 160 ergibt für die verschiedenen, in Art. 128 bis 135 (S. 108 bis 114) behandelten Querschnittsformen, wenn die dort ermittelten Werthe für c zu Grunde gelegt werden, folgende besondere Gleichungen:

- a) Rechteck und Quadrat: $\dots \dots \dots \frac{F}{f} = 1 + 12 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- β) Kreis: $\dots \dots \dots \frac{F}{f} = 1 + 16 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- γ) Kreisring: $\dots \dots \dots \frac{F}{f} = 1 + 8 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- δ) Kreuzquerchnitt (voller Querschnitt, bezw. 4 Winkeleifen): $\frac{F}{f} = 1 + 24 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ε) Zwei Winkeleifen bilden: ein **T** $\dots \dots \dots \frac{F}{f} = 1 + 12 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ein **Z** $\dots \dots \dots \frac{F}{f} = 1 + 8,5 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ein Kreuz $\dots \dots \dots \frac{F}{f} = 1 + 33 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
- ζ) Einfaches gleichschenkeliges Winkeleifen: $\dots \dots \dots \frac{F}{f} = 1 + 24 \alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2$.

η) T-förmiger Querschnitt:

$$\text{Breitfüßiges T-Eisen (Deutsche Normal-Profile) . . . } \frac{F}{f} = 1 + 16 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

$$\text{Hochfestiges T-Eisen (Deutsche Normal-Profile) . . . } \frac{F}{f} = 1 + 22 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

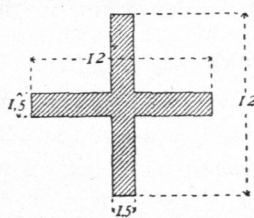
$$\delta) \text{ I-förmiger Walzbalken-Querschnitt: } \frac{F}{f} = 1 + 20,4 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

Diese aus der empirischen Formel 155 abgeleiteten, eben angegebenen Formeln ergeben naturgemäß Resultate, welche mit den auf frühere Weise gefundenen nicht genau übereinstimmen; denn die Formel 155 ist, wie oben gezeigt, nur für die Grenzwerte von l , d. h. für $l = 0$ und $l = \infty$, richtig, stimmt aber für die Mittelwerte nicht genau. Es dürfte sich deshalb empfehlen, die hier angegebenen Formeln nur für eine vorläufige Querschnittsbestimmung zu benutzen und nachher auf Grund der genaueren Formeln eine Verbesserung vorzunehmen.

Die Anwendung obiger Formeln soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

α) Es sei für einen gußeisernen Stab mit beweglichen Enden und kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 151) $P = 4800$ kg, $l = 200$ cm. Alsdann ist $f = \frac{4800}{500} = 9,6$ qcm und bei vorläufig,

Fig. 151.



wie in Fig. 151, angenommenem Querschnitt $\frac{l}{h} = \frac{200}{12} = 16,7$. Hier-

nach wird $\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0,0004 \cdot 16,7^2 = 3,68$ und $F = 9,6 \cdot 3,68 = 35,33$ qcm. Der gewählte Querschnitt hat $1,5 \cdot 2 \cdot 12 - 1,5 \cdot 1,5 = 33,75$ qcm, womit man sich wohl begnügen kann.

β) Es sei $P = 3300$ kg, $l = 100$ cm; der Stab werde durch ein einfaches gleichschenkeliges Winkeleisen gebildet; der Fall 4 kann angenommen werden. Zunächst ist $f = \frac{3300}{700} = \infty 4,7$ qcm. Gewählt werde

ein Winkeleisen von $5,5 \times 5,5 \times 0,8$ cm; alsdann ist $\frac{l}{h} = \frac{100}{5,5} = 18$,

ferner

$$\frac{F}{f} = 1 + 24 \cdot 0,00009 \cdot 18^2 = 1,7 \quad \text{und} \quad F = 1,7 \cdot 4,7 = 7,99 \text{ qcm.}$$

Das gewählte Winkeleisen hat eine Querschnittsfläche von $8,16$ qcm, ist also genügend.

γ) In einem Holzstabe mit quadratischem Querschnitt und nicht beweglichen Enden, bei welchem Fall 4 vorausgesetzt werden kann, herrscht ein Druck $P = 9500$ kg; wenn ferner $l = 300$ cm angenommen wird, ist $f = \frac{9500}{65} = 146$ qcm. Wird vorläufig die Querschnittsseite mit 18 cm gewählt, so ist

$\frac{l}{h} = \frac{300}{18} = 16,7$; es wird ferner $\frac{F}{f} = 1 + 12 \alpha \left(\frac{l}{h} \right)^2 = 1 + 12 \cdot 0,00028 \cdot 279 = 1,87$ und $F = 1,87 \cdot 146 = 273$ qcm. Der angenommene Querschnitt mißt $18 \cdot 18 = 326$ qcm, ist also zu groß.

Wird $h = 17$ cm gewählt, so wird $\frac{l}{h} = \frac{300}{17} = 18$, weiters $\frac{F}{f} = 1 + 12 \cdot 0,00026 \cdot 324 = 2,01$ und $F = 2,01 \cdot 146 = 293$ qcm. Der nunmehr gewählte Querschnitt hat eine Fläche von $17 \cdot 17 = 289$ qcm, stimmt also gut überein.

Nach der genaueren Berechnung auf S. 116 (unter δ) ergab sich ein quadratischer Querschnitt von nur $14,5$ qcm Seitenlänge als genügend.

Die üblen Erfahrungen, welche man neuerdings bei verschiedenen großen Bränden mit eisernen Stützen gemacht hat, führten zur Unterfuchung der Frage, in welcher Weise die Tragfähigkeit solcher Stützen bei erhöhter Temperatur verändert werde, und zur Aufstellung von Formeln für diese Tragfähigkeit. Die nachstehend aufgeführten Formeln sind von Möller²³⁾ auf Grund von Versuchen unter folgenden Annahmen aufgestellt. Die dem Feuer zugewendete Seite der Stütze zeigt schwache

^{145.}
Tragfähigkeit
der Stützen bei
erhöhter
Temperatur.

²³⁾ Siehe: MÖLLER, M. u. R. LÜHMANN. Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionsteile bei erhöhter Temperatur. Berlin 1888.

Rothgluth, die andere Seite hat eine bis zu 600 Grad C. geringere Temperatur, welche durch Anspritzen der Säule mit kaltem Wasser herbeigeführt ist; die Beanspruchung der Stützen erfolgt um 1 cm excentrisch, zwischen Gelenken (Fall 2). Die Stütze soll die Last P noch mit einiger Sicherheit tragen. Die allgemeine Formel, in welcher alle Buchstaben die frühere Bedeutung haben, lautet (vergl. Art. 141, S. 121)

$$P = K F \frac{1}{1 + \alpha \frac{F l^2}{\mathcal{F}}}$$

Die Zahlenwerthe K und α sind so bestimmt, dass sich ergibt

$$\text{für Schmiedeeisen: } P = 1000 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{F l^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 161.$$

$$\text{für Gufseisen: } P = 1200 F \frac{1}{1 + 0,0004 \frac{F l^2}{\mathcal{F}}} \dots \dots \dots 162.$$

In diesen Ausdrücken ist l die freie Länge zwischen den Gelenken; wenn die Stützung als zwischen parallelen Enden erfolgend angenommen werden kann, so ist statt l nur $\frac{2}{3}$ der wirklich vorhandenen freien Länge einzuführen.

2. Kapitel.

Träger.

146.
Allgemeines.

Wie bereits im Eingange zum vorliegenden Abschnitte gesagt wurde, versteht man unter Trägern solche Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschliesslich oder vorwiegend senkrecht zur Richtung der Längsaxe wirken. Die Längsaxe kann sowohl eine gerade, wie eine gebrochene, bezw. krumme Linie sein. Demnach rechnen wir zu den Trägern im weiteren Sinne auch die Dachstühle, die Sprengwerke u. A., bei denen allerdings die Längsaxe nicht so deutlich vor die Augen tritt, wie etwa bei den gewöhnlichen Balken, ferner auch die Gewölbe, bei denen die Längsaxe eine krumme Linie ist.

Um die obige Erklärung der Träger auch für diese Constructions unbedingt richtig zu stellen, könnte man statt der Längsaxe die Verbindungslinie der Auflagerpunkte einführen und demnach die Träger folgendermassen erklären: Träger sind Bauconstructions, bei denen die Belastungen ausschliesslich oder vorwiegend senkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, d. h. der Stützpunkte der Construction, wirken. Im vorliegenden Kapitel sollen jedoch nur die Träger im engeren Sinne, welche man gewöhnlich als Balken bezeichnet, behandelt werden, während die Dachstühle und die Gewölbe in den beiden nächsten Abschnitten besprochen werden. Von den Sprengwerken wird bei den Dachstühlen eine besondere Form vorgeführt werden.

147.
Äußere
Kräfte.

Die auf die Bauconstructions wirkenden äußeren Kräfte sind nach Art. 2 (S. 5): 1) die Belastungen, d. h. die Eigengewichte und die Nutzlasten, und 2) die Auflager- oder Stützendrücke (auch Reactionen der Auflager genannt), d. h.

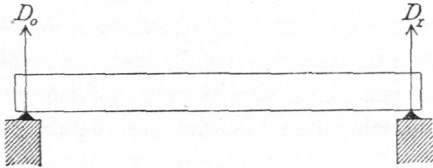
diejenigen Kräfte, welche in den Auflagerpunkten auf die Constructions übertragen werden.

Die Träger haben stets zwei oder mehrere Stützpunkte, die fog. Auflagerpunkte; selbst bei den Trägern, welche scheinbar nur einen Stützpunkt haben, bei den fog. Krag- oder Console-Trägern, ist Gleichgewicht ohne einen zweiten Stützpunkt nicht möglich, und in der That ist noch ein solcher vorhanden.

Die Träger werden nach verschiedenen Gesichtspunkten eingetheilt. Nach der Art der Unterstützung unterscheidet man:

148.
Eintheilung.

Fig. 152.



1) Balkenträger, d. h. Träger, auf welche bei lothrechten Belastungen nur lothrechte Stützendrücke wirken. Fig. 152 zeigt einen Balkenträger; D_0 und D_1 sind die Auflagerdrücke.

2) Sprengwerks- und Hängewerksträger, d. h. Träger, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Stützendrücke erleiden; diese schiefen Auflagerdrücke setzen sich aus einer wagrechten und einer lothrechten Seitenkraft zusammen.

Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Druck, so hat man den Sprengwerksträger (Fig. 153); falls die Trägeraxe eine krumme Linie ist, den Bogenträger. Wirkt die wagrechte Seitenkraft auf den Träger als Zug, so hat man den Hängewerksträger (Fig. 154).

Fig. 153.

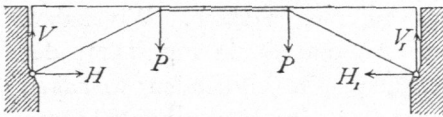
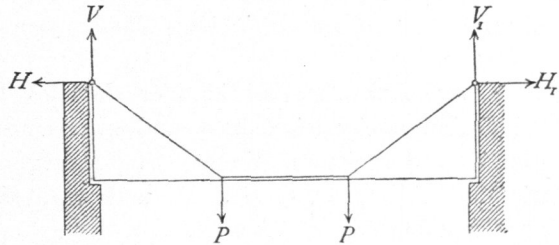


Fig. 154.



Für den Hochbau sind die Balkenträger die weitaus wichtigsten; die Sprengwerks- und Hängewerksträger werden im Hochbau nicht gern angewendet, weil die Mauern, welche die Stützpunkte der Träger bilden, bei diesen Trägerarten wagrechte Kräfte zu erleiden haben, wodurch eine große Mauerstärke bedingt wird.

Der zwischen zwei Körpern auftretende Druck ist nur dann stets lothrecht, wenn die Berührungsfläche beider wagrecht ist und reibungslose Bewegung des einen gegen den anderen möglich ist. Ist die erwähnte Bedingung bei einem der beiden Auflager eines Trägers erfüllt, also der Auflagerdruck desselben lothrecht, so muß auch der Stützendruck des anderen Auflagers für lothrechte Belastung lothrecht sein; denn die etwaige wagrechte Seitenkraft desselben würde die einzige wagrechte Kraft sein, welche auf den Träger wirkt, und dieselbe muß des Gleichgewichtes wegen gleich Null sein. Wenn also ein Auflager fest ist und das andere wagrechte reibungslose Verschiebung des betreffenden Trägerendes gestattet, so ist der Träger ein Balkenträger. Auch wenn ein Auflager fest, eine Anzahl anderer aber wagrechte und reibungslose Verschiebung gestatten, hat man Balkenträger.

Meistens ist die Längsaxe bei den Balkenträgern eine Gerade oder weicht von der Geraden nicht sehr ab; man nennt deshalb die Balkenträger auch wohl gerade Träger.

Man unterscheidet ferner statisch bestimmte Träger und statisch unbestimmte Träger.

Unter statisch bestimmten Trägern versteht man solche, bei denen zur Ermittlung der Stützendrücke die Gesetze der Statik fester Körper hinreichen; bei den statisch unbestimmten Trägern genügen zur Ermittlung der Auflagerdrücke diese Gesetze nicht.

Zur Ermittlung der Stützendrücke bietet die Statik fester Körper, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirkend angenommen werden können, drei Gleichungen (vergl. Art. 6, S. 7); falls also in den Stützendrücken nur drei Unbekannte enthalten sind, so genügen diese drei Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten, d. h. die Construction ist statisch bestimmt. Enthalten dagegen die Auflagerdrücke mehr als drei Unbekannte, so genügen die drei Gleichungen zu deren Ermittlung nicht mehr; der Träger ist alsdann statisch unbestimmt. Die fehlenden Gleichungen liefert die Elasticitätslehre.

Hierbei können zwei Hauptfälle vorkommen:

1) Alle drei Gleichgewichtsbedingungen sind anwendbar, d. h. die Stützendrücke enthalten sowohl wagrechte, wie lothrechte Seitenkräfte. Dieser Fall tritt bei den Sprengwerksträgern, Bogenträgern etc. ein.

2) Nur zwei Gleichgewichtsbedingungen sind anwendbar. Dieser Fall tritt ein, wenn die äußeren Kräfte gar keine wagrechten Seitenkräfte haben. Alsdann bleiben von den in Art. 6 (S. 7) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen nur die folgenden verwendbar:

α) die algebraische Summe der lothrechten Kräfte muß gleich Null sein;

β) die algebraische Summe der statischen Momente aller äußeren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Drehpunkt, muß gleich Null sein.

Der einfachste Fall ist hier der des Balkens auf zwei Stützen. Wir haben bei diesem zwei Gleichungen und zwei Unbekannte (D_0 und D_1 in Fig. 152); der Fall ist also statisch bestimmt. Sind dagegen drei Stützpunkte vorhanden, so haben wir drei Unbekannte (D_0 , D_1 und D_2), aber nur zwei Gleichungen, also einen statisch unbestimmten Fall.

Man nennt die Träger, welche mehr als zwei Stützpunkte haben, *continuirliche Träger*. Dieselben sind demnach statisch unbestimmte Träger.

Man hat von den statisch bestimmten, bzw. statisch unbestimmten Trägern wohl zu unterscheiden die statisch bestimmten, bzw. unbestimmten Systeme. Während es sich bei den ersteren um die Ermittlung der äußeren Kräfte handelt, ist bei den statisch bestimmten, bzw. unbestimmten Systemen die Frage, ob zur Ermittlung der Stabspannungen die Gesetze der Statik fester Körper ausreichen oder nicht.

a) Äußere Kräfte der Balkenträger.

Die Querschnitte der Balken sind so zu bestimmen, daß die zulässigen Beanspruchungen auch unter ungünstigsten Bedingungen in keinem Theile der Querschnittsflächen je überschritten werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, sind aber für die in den einzelnen Querschnittsstellen entstehenden Beanspruchungen oder Spannungen die äußeren Kräfte maßgebend, insbesondere zwei von den äußeren Kräften abhängige Größen: die Biegemomente, auch kurz Momente genannt, und die Quer- oder Transversalkräfte. Für jeden Querschnitt ergibt sich bei einer gegebenen Belastung ein ganz bestimmtes Moment und eine

ganz bestimmte Querkraft. Wir haben bei den lothrecht belasteten Balkenträgern nur mit lothrechten Kräften zu thun und werden demnach zunächst und, falls das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, stets solche voraussetzen.

Die Querkräfte werden als positiv eingeführt, wenn sie auf den Trägertheil links von dem betrachteten Querschnitt nach oben, bzw. auf den Trägertheil rechts von dem betrachteten Querschnitt nach unten wirken; als negativ, wenn sie auf den Theil links nach unten, bzw. auf den Theil rechts nach oben wirken. Die Momente sind (siehe Art. 85, S. 59) positiv, wenn sie auf den Theil links vom Querschnitt nach rechts drehend (also in der Richtung des Uhrzeigers), bzw. auf den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehend wirken, d. h. den Balken so zu drehen streben, daß er seine convexe Seite nach unten kehrt.

Die Belastungen sind entweder nach einem bestimmten Gesetze fortlaufend über den Träger vertheilt — im Hochbau meistens gleichmäßig über die wagrechte Projection der Trägeraxe, oder sie greifen in einzelnen Punkten als Einzellaften an. Zu den gleichmäßig über die wagrechte Projection vertheilten Belastungen rechnet man die Eigengewichte der Träger, welche Annahme genügend genau ist.

Die Größe des Eigengewichtes von Decken-Constructionen kann nach den Angaben in Art. 21 u. 22 (S. 17) angenommen werden; bezüglich der Annahmen für die Nutzlast sei auf Art. 24 (S. 19) verwiesen. Da die Belastungen bekannt sind, handelt es sich zunächst um die Ermittlung der durch dieselben erzeugten Stützendrücke, Momente und Querkräfte, ferner um die diesen entsprechenden Querschnittsabmessungen. Für jeden Querschnitt ist die ungünstigste mögliche Belastung einzuführen.

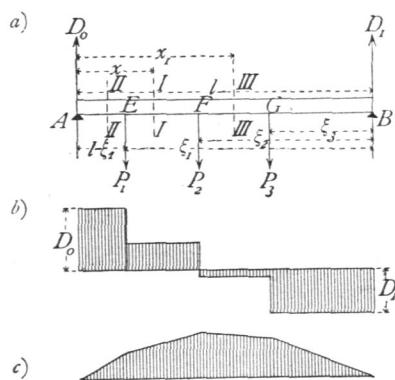
In den folgenden Artikeln soll für die wichtigsten Balkenträger und für verschiedene Belastungsarten die Ermittlung der Auflagerdrücke, der Querkräfte und Momente auf dem Wege der Rechnung, bzw. auf dem der Construction gezeigt werden.

1) Balkenträger auf zwei Stützen.

Die Stützweite des Trägers, von Auflagermitte zu Auflagermitte gerechnet, sei l .

Erster Belastungsfall: Der Träger wird durch beliebige Einzellaften belastet.

Fig. 155.



Die Laften sind P_1, P_2, P_3 , wie aus neben stehender Fig. 155 ersichtlich; es sollen die Querkräfte und Momente für alle Querschnitte des Balkens ermittelt werden.

a) Berechnung. Zunächst sind die nicht gegebenen äußeren Kräfte, die Auflagerdrücke D_0 und D_1 , zu bestimmen. Da Gleichgewicht stattfindet, so ist die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null. Um D_0 zu ermitteln, wählt man zweckmäßig einen Punkt auf der Richtungslinie von D_1 als Drehpunkt, damit die zweite Unbekannte D_1 das statische Moment

Null habe, also nur eine Unbekannte in der Gleichung vorkomme. Alsdann ist, wenn B als Drehpunkt für die Gleichung der statischen Momente gewählt wird,

150.
Belastungen

151.
Belastung
durch
Einzellaften.

$$0 = D_0 l - P_1 \xi_1 - P_2 \xi_2 - P_3 \xi_3,$$

$$D_0 = \frac{P_1 \xi_1}{l} + \frac{P_2 \xi_2}{l} + \frac{P_3 \xi_3}{l} = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) \dots \dots \dots 163.$$

Wählt man in gleicher Weise ein zweites Mal *A* als Drehpunkt, so ergibt sich

$$D_1 = \frac{P_1 (l - \xi_1)}{l} + \frac{P_2 (l - \xi_2)}{l} + \frac{P_3 (l - \xi_3)}{l} = \sum_0^l \left[\frac{P (l - \xi)}{l} \right] \dots \dots 164.$$

Der Beitrag, welchen jede Einzellast zum Gesamtauflegerdruck leistet, ist, wie man aus den Gleichungen 163 u. 164 erfieht, ganz unabhängig von der Gröfse und Art der übrigen Belastungen; die Auflagerdrücke sind die Summen der durch die einzelnen Lasten erzeugten Einzeldrücke.

Nummehr lassen sich die Querkräfte ermitteln.

Für einen beliebigen Querschnitt *II*, im Abstände *x* vom linken Auflager *A*, ist die Querkraft, als Mittelkraft aller an der einen Seite wirkenden äufseren Kräfte,

$$Q_x = D_0 - P_1 \dots \dots \dots 165.$$

In diesem Ausdrücke kommt die Absciffe *x* des Querschnittes gar nicht vor; die Querkraft ist also, so lange der angegebene Ausdruck überhaupt gilt, ganz unabhängig von *x*, d. h. constant. Der Ausdruck gilt aber nur für die Querschnitte zwischen *E* und *F*; denn für einen Querschnitt links von *E*, etwa für *II II*, ist

$$Q_{II} = D_0;$$

für einen solchen rechts von *F*, etwa für *III III*, ist

$$Q_{III} = D_0 - P_1 - P_2 = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - (P_1 + P_2) = \sum_0^l \left(\frac{P \xi}{l} \right) - \sum_0^{x_1} (P).$$

Es folgt daraus: Falls eine Belastung nur durch Einzellasten stattfindet, ist die Querkraft für alle Querschnitte zwischen je zwei Lastpunkten, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt constant; eine Aenderung der Querkraft findet nur in den Lastpunkten statt.

Die Querkraft hat, absolut genommen, denselben Werth, möge der Trägertheil rechts oder derjenige links von dem betreffenden Querschnitt betrachtet werden; denn die Querkraft für einen Querschnitt ist die Mittelkraft aller an der einen Seite desselben wirkenden äufseren Kräfte. Ermittelt man nun zunächst die Mittelkraft aller links, dann diejenige aller rechts wirkenden äufseren Kräfte und nennt dieselben bezw. *Q_{links}* und *Q_{rechts}*, so mufs, da diese beiden alle auf den Körper wirkenden äufseren Kräfte in sich schliesen, des Gleichgewichtes halber stattfinden

$$Q_{links} + Q_{rechts} = 0 \quad \text{und} \quad Q_{rechts} = - Q_{links}.$$

Wirkt also die Querkraft auf den Theil links vom Querschnitte nach oben, so mufs sie auf den Theil rechts vom Querschnitte nach unten wirken und umgekehrt.

Das Gesetz der Aenderung der Querkräfte wird sehr anschaulich, wenn man in jedem Querschnitte die dafelbst stattfindende Querkraft als Ordinate nach beliebigem, aber für alle Querschnitte gleichem Mafsstabe aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Es ergibt sich die in Fig. 157 *b* gezeichnete Linie, in welcher die positiven Werthe von der Absciffe aus nach oben, die negativen Werthe nach unten getragen sind.

Was endlich die Bestimmung der Momente anbelangt, so ist für den Querschnitt *II*

$$M_I = D_0 x - P_1 (x - l + \xi_1) \dots \dots \dots 166.$$

Für den Querschnitt *III III* ist

$$M_{III} = D_0 x_1 - P_1 (x_1 - l + \xi_1) - P_2 (x_1 - l + \xi_2) \dots \dots \dots 167.$$

Innerhalb je zweier Lastpunkte, so wie zwischen einem Auflagerpunkt und einem Lastpunkt ändert sich demnach das Moment nach dem Gesetze einer geraden Linie; denn für verschiedene Werthe von x , bzw. x_1 bleiben alle in den Gleichungen 166 u. 167 vorkommenden Ausdrücke mit Ausnahme von x und x_1 constant; diese einzigen Veränderlichen kommen aber nur in der ersten Potenz vor. Trägt man also auch hier in den verschiedenen Querschnitten die Werthe von M als Ordinaten auf, so erhält man als Verbindungslinien der Endpunkte gerade Linien; in jedem Lastpunkt ändert sich der Ausdruck für M , also auch die Gerade. In Fig. 155c ist die Aenderung der Momente graphisch dargestellt.

Da eine Gerade ihre größte Ordinate nur am Anfangspunkte oder Endpunkte haben kann, diese aber hier mit den Lastpunkten zusammenfallen, so folgt, dass die größten Momentenwerthe an den Lastpunkten stattfinden. Dieses Ergebniss ist von großer Bedeutung. Wenn nur eine Einzellaft P vorhanden ist, so ist demnach das größte Moment stets am Lastpunkte. Liegt alsdann P in den Abständen ξ , bzw. $l - \xi$ von den beiden Auflagern, so ist das Moment am Lastpunkte, also das größte Moment, welches für die Querschnittsbildung maßgebend ist,

$$M_{max} = \frac{P(l - \xi) \xi}{l}.$$

Liegt P in der Mitte des Balkens, so ist $\xi = (l - \xi) = \frac{l}{2}$, also

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}.$$

Sind zwei Einzellaften auf dem Balken, so braucht man nur die beiden Momente an den Lastpunkten zu ermitteln; das größere von beiden ist zugleich das größte. Wenn beide Lasten gleich groß, und zwar je gleich P sind und im gleichen Abstände $\frac{a}{2}$ von der Balkenmitte liegen, so ist das Moment an jedem Lastpunkte

$$M = \frac{P(l - a)}{2}.$$

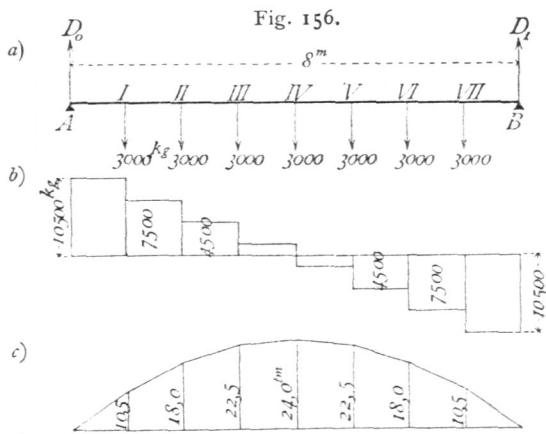
Wenn endlich mehrere Lasten vorhanden sind, braucht man nur die Momente an den Lastpunkten aufzusuchen. Falls der Balken constanten Querschnitt erhält

(wie dies z. B. beim Walzbalken der Fall ist), so ist dieser nach dem größten überhaupt stattfindenden Momente zu bestimmen.

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Unterzug (Fig. 156) von 8 m Stützweite trägt 7 Balken, deren Abstand von Mitte zu Mitte je 1 m betrage. Jeder Balken belaste den Unterzug mit einem Gewicht von 3000 kg. Es sind die Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente zu ermitteln. Nach Gleichung 163 ist

$$D_0 = \frac{3000}{8} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 10500 \text{ kg};$$

eben so nach Gleichung 164



$$D_1 = \frac{3000}{8} \cdot 28 = 10\,500 \text{ kg.}$$

In Fällen, wie der vorliegende, wo die Belastungen symmetrisch zur Mitte des Balkens liegen und die Abstände derselben gleich sind, faßt man bequemer alle Lasten zu einer Mittelkraft, hier ihrer Summe, zusammen, die in der Balkenmitte angreift. Es ist alsdann $R = 7 \cdot 3000 = 21\,000 \text{ kg}$ und $D_0 = \frac{21\,000}{l} \cdot \frac{l}{2} = 10\,500 \text{ kg} = D_1$.

Die Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind:

von A bis $I = 10\,500 \text{ kg}$, von IV bis $V = 10\,500 - 4 \cdot 3000 = -1500 \text{ kg}$,
 » I » $II = 10\,500 - 3000 = 7500 \text{ kg}$, » V » $VI = 10\,500 - 5 \cdot 3000 = -4500 \text{ kg}$,
 » II » $III = 10\,500 - 2 \cdot 3000 = 4500 \text{ kg}$, » VI » $VII = 10\,500 - 6 \cdot 3000 = -7500 \text{ kg}$,
 » III » $IV = 10\,500 - 3 \cdot 3000 = 1500 \text{ kg}$, » VII » $B = 10\,500 - 7 \cdot 3000 = -10\,500 \text{ kg}$.

Im Lastpunkte IV (in der Trägermitte) geht die Querkraft von den positiven zu den negativen Werten über.

Die Momente in den Lastpunkten sind:

$$\begin{aligned} M_I &= 10\,500 \cdot 1 = 10\,500 \text{ kgm} = 1\,050\,000 \text{ kgcm}, \\ M_{II} &= 10\,500 \cdot 2 - 3000 \cdot 1 = 18\,000 \text{ kgm} = 1\,800\,000 \text{ kgcm}, \\ M_{III} &= 10\,500 \cdot 3 - 3000 \cdot 1 - 3000 \cdot 2 = 22\,500 \text{ kgm} = 2\,250\,000 \text{ kgcm}, \\ M_{IV} &= 10\,500 \cdot 4 - 3000(1 + 2 + 3) = 24\,000 \text{ kgm} = 2\,400\,000 \text{ kgcm}, \\ M_V &= 10\,500 \cdot 5 - 3000(1 + 2 + 3 + 4) = 22\,500 \text{ kgm} = 2\,250\,000 \text{ kgcm} = M_{III}, \\ M_{VI} &= M_{II}, \quad M_{VII} = M_I, \quad M_A = M_B = 0. \end{aligned}$$

Hiernach sind die Momente und Querkräfte in Fig. 156 *c* u. 156 *b* aufgetragen.

β) Graphische Ermittlung. Um die Auflagerdrücke zu ermitteln, construirt man für die gegebenen Kräfte und den beliebigen Pol O (Fig. 157) das Kraft- und Seilpolygon, ziehe die Schlußlinie ab und parallel zu dieser eine Linie $O\varepsilon$ durch den Pol O ; dieselbe theilt die Kraftlinie in zwei Theile, von denen $\overline{\delta\varepsilon} = D_1$ und $\overline{\varepsilon\alpha} = D_0$ ist (vergl. Art. 19, S. 14). Nun lassen sich die Querkräfte graphisch leicht ermitteln.

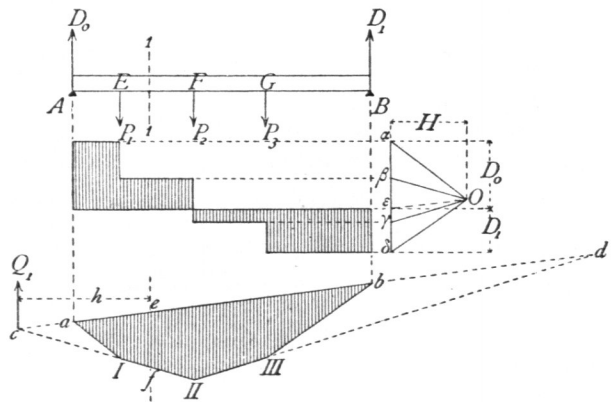
Für alle Querschnitte von A bis E ist die Querkraft gleich D_0 , d. h. gleich $\varepsilon\alpha$ (Fig. 157). Zieht man also durch ε und α je eine Wagrechte, so giebt deren Abstand die Größe der Querkraft zwischen A und E an. Zwischen E und F ist die Querkraft gleich $D_0 - P_1 = \varepsilon\alpha - \alpha\beta = \varepsilon\beta$; man ziehe also durch β eine wagrechte Linie; alsdann giebt deren Abstand von der durch ε gezogenen Geraden an jeder Stelle zwischen E und F die Größe der Querkraft. Eben so ist zwischen F und G die Strecke $\varepsilon\gamma$, zwischen G und B die Strecke $\varepsilon\delta$ die Querkraft.

Die Querkraft als Mittelkraft aller an der einen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte geht nach Art. 18 (S. 13) durch den Schnittpunkt derjenigen Seilpolygonseiten, welche bezw. der ersten und letzten dieser Kräfte vorangehen und folgen. Für einen Querschnitt zwischen E und F sind D_0 und P_1 die Kräfte, ab und II die betreffenden Seilpolygonseiten; die Querkraft geht also durch deren Schnittpunkt c . Für jeden Querschnitt zwischen II und III geht die Querkraft durch d etc.

Die graphische Bestimmung der Momente geschieht in nachstehender Weise.

Für einen beliebigen Querschnitt rt (Fig. 157) ist das Moment gleich dem Moment der Mittelkraft, d. h. hier der Querkraft. Es ist demnach $M_1 = Q_1 h$. Nun ist $\Delta cef \sim \Delta O\varepsilon\beta$, mithin $\frac{ef}{h} = \frac{\varepsilon\beta}{H}$, und, da $\overline{\varepsilon\beta} = Q_1$ ist, $\overline{ef} = \frac{Q_1 h}{H} = \frac{M_1}{H}$, also $M_1 = H \cdot \overline{ef}$.

Fig. 157.



In vorstehendem Ausdruck für M ist H , der wagrechte Abstand des Poles von der Kraftlinie oder der Polabstand, für alle Querschnitte constant; die GröÙe des Momentes ist also mit \overline{ef} , d. h. der lothrechten Höhe des Seilpolygons veränderlich. Daraus folgt:

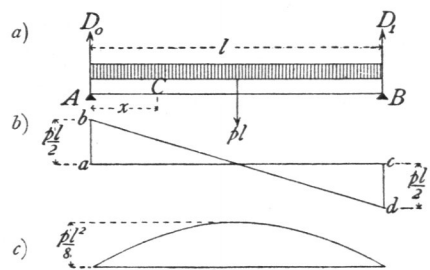
Das Moment in jedem Querschnitte ist gleich dem Producte aus dem lothrechten Abstände der Seilpolygoneiten bei diesem Querschnitte und dem Polabstand. Die vom Seilpolygon gebildete Fläche heißt die Momentenfläche.

Die Momente sind Producte aus Kräften und Längen; H ist eine Kraft, wie alle Strahlen und Linien im Kraftpolygon, und kann nach Obigem beliebig angenommen werden, etwa mit 10^t , 20^t etc. Da das Moment in irgend einem Querschnitt einen ganz bestimmten Werth hat, der natürlich von einem beliebig gewählten H unabhängig ist, so wird die Höhe des Seilpolygons desto größer, je kleiner H ist, und umgekehrt.

Zweiter Belastungsfall: Der Träger ist über seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last belastet.

152.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Fig. 158.



Die Belastung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 158) sei p ; alsdann ist die Mittelkraft gleich der Gesamtlast, also gleich $p l$ und greift in der Trägermitte an. Die Gleichung der statischen Momente für B als Drehpunkt heißt demnach:

$$D_0 l - p l \frac{l}{2} = 0,$$

und es wird

$$D_0 = \frac{p l}{2}; \text{ eben so } D_1 = \frac{p l}{2}. \quad 168.$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt C im Abstände x von A ist

$$Q_x = D_0 - p x = \frac{p l}{2} - p x = \frac{p}{2} (l - 2 x). \quad \dots \quad 169.$$

Die graphische Darstellung der Veränderung der Querkraft ergibt die Linie der Gleichung 169, d. h. eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p l}{2}$; für $x = l$ ist $Q_l = -\frac{p l}{2}$. Q_x wird Null für $l - 2 x = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$. Die Ordinaten der Linie bd (Fig. 158 *b*) sind also die Querkräfte an den verschiedenen Stellen des Balkens.

Das Moment für den Querschnitt C ist

$$M_x = D_0 x - p x \frac{x}{2} = \frac{p l}{2} x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l x - x^2) \quad \dots \quad 170.$$

Trägt man die Momente in den verschiedenen Querschnitten als Ordinaten auf, so erhält man die Curve der Gleichung 170, d. h. eine Parabel. Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = l$ ist $M_l = 0$. M_x wird ein Maximum für $\frac{d M_x}{d x} = \frac{p}{2} (l - 2 x) = 0$, d. h. für $x = \frac{l}{2}$; demnach

$$M_{max} = \frac{p}{2} \left[l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l^2}{8} \quad \dots \quad 171.$$

Hiernach kann die Parabel leicht construirt werden (Fig. 158 *c*). Man trage $\frac{p l^2}{8}$ nach beliebig angenommenem Momenten-Maßstabe auf und verzeichne in be-

kannter Weise die Parabel; alsdann sind alle Ordinaten auf diesem Maßstabe zu messen.

Nennt man die gesammte auf den Träger entfallende Last $p l = P$, so kann man auch setzen

$$M_{max} = \frac{P l}{8} \dots \dots \dots 172.$$

Dieser Ausdruck ist oft bequemer, als Gleichung 171. Wirkt eine Last P als Einzelast in der Mitte, so erzeugt sie nach Art. 151 (S. 129) ein Maximalmoment

$M_{max} = \frac{P l}{4}$, d. h. ein doppelt so großes Moment, als die gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Last P .

Beispiele. 1) Ein Flurgang von 4 m Lichtweite ist mit einer Decke aus Kappengewölben zwischen eisernen I-Trägern zu überdecken; die Spannweite der Kappen sei 2,2 m; die Träger sollen berechnet werden.

Die Stützweite der Träger, d. h. die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte, kann zu 4,3 m, d. i. zu 430 cm angenommen werden; alsdann ist $l = 430$ cm. Auf das laufende Meter des Trägers kommt eine zu tragende Grundfläche von 2,2 m Breite und 1 m Länge; mithin ist die Last für das laufende Meter Träger, bei einer Maximalbelastung von 750 kg für 1 qm Grundfläche, gleich $2,2 \cdot 750 = 1650$ kg und für das laufende Centimeter Träger $p = 16,5$ kg. Die Auflagerdrücke sind also nach Gleichung 168

$$D_0 = D_1 = \frac{16,5 \cdot 430}{2} = 3547 \text{ kg},$$

und das Moment nach Gleichung 171

$$M_{max} = M_{mitte} = \frac{16,5 \cdot 430^2}{8} = 381\,356 \text{ kgcm}.$$

Nun ist der Querschnitt nach Art. 88 (S. 65) so zu bestimmen, daß $\frac{f}{a} = \frac{M}{K} = \frac{381\,356}{700} = 544,8$ ist. Falls ein I-Querschnitt gewählt wird, ist Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile« zu wählen, da bei demselben $\frac{f}{a} = 547$ ist²⁴⁾.

2) Es sollen die Abmessungen bestimmt werden, welche einem Deckenbalken aus Kiefernholz bei einer Lichtweite von 6 m zu geben sind, wenn die Balkenentfernung von Mitte zu Mitte 0,9 m und die Gesammtbelastung der betreffenden Decke (Eigengewicht und Nutzlast) 500 kg für 1 qm beträgt.

Das laufende Meter Balken hat eine Grundfläche von 0,9 m Breite zu tragen, d. h. eine Last von $0,9 \cdot 500 = 450$ kg; mithin beträgt die Belastung für das laufende Centimeter des Balkens $p = 4,5$ kg. Die von Auflagermitte zu Auflagermitte zu rechnende Stützweite l nehmen wir zu $6,3$ m = 630 cm an. Das größte Moment, welches hier, da der Balkenquerschnitt constant ist, der Berechnung des ganzen Balkens zu Grunde gelegt werden muß, findet in der Balkenmitte statt und ist nach Gleichung 171

$$M_{max} = \frac{4,5 \cdot 630^2}{8} = 223\,256 \text{ kgcm};$$

mithin nach Art. 93 (S. 67)

$$\frac{f}{a} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{223\,256}{60} = 3721.$$

Da nun nach Gleichung 19: $f = \frac{b h^3}{12}$, ferner $a = \frac{h}{2}$ ist, wird $\frac{b h^2}{6} = 3721$, und wenn $b = 25$ cm angenommen wird,

²⁴⁾ Man muß beim Einsetzen der Zahlenwerthe für p und l vorsichtig sein. Es ist eigentlich selbstverständlich, daß, wenn man l in Metern einführt, p die Belastung für das laufende Meter Träger bedeutet, und wenn l in Centimetern eingeführt wird, p die Belastung für das laufende Centimeter Träger bedeutet. Giebt man ferner K , die zulässige Beanspruchung, in Kilogramm für 1 qm und das Moment M in Kilogramm-Centimetern an, so sind in der Gleichung $\frac{f}{a} = \frac{M}{K}$ die Werthe für f und a auf Centimeter bezogen einzusetzen. Dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, hier besonders darauf aufmerksam zu machen, da von Anfängern und Ungeübten oft in dieser Hinsicht Fehler gemacht werden. Es empfiehlt sich, stets Alles auf Centimeter und Kilogramm bezogen einzuführen.

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 3721}{25}} = 29,9 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm}.$$

Es genügt fonach ein Querschnitt von $25 \times 30 \text{ cm}$.

Dritter Belastungsfall: Der Träger ist auf einen Theil seiner Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last beladet.

153.
Theilweise
gleichförmig
vertheilte
Belastung.

Eine Last P im Abstände x vom linken Auflager A (Fig. 159) erzeugt die Auflagerdrücke

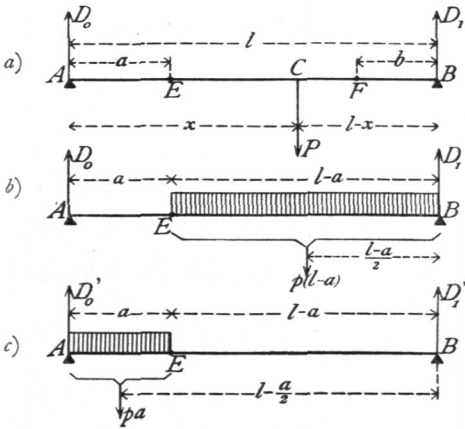
$$D_0 = \frac{P(l-x)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{Px}{l}.$$

Die Querkraft ist für jeden Querschnitt E links vom Lastpunkte C : $Q = D_0 = \frac{P(l-x)}{l}$, d. h. positiv; für jeden Querschnitt F rechts vom Lastpunkt C :

$$Q_1 = D_0 - P = \frac{P(l-x)}{l} - P = -\frac{Px}{l}, \text{ d. h. negativ. Daraus folgt der Satz:}$$

Jede Belastung erzeugt in allen links von ihr gelegenen Querschnitten positive, in allen rechts gelegenen Querschnitten negative Querkräfte. Demnach wird in irgend einem Querschnitte, etwa E , die größte Querkraft (Q_{max}) stattfinden, wenn die ganze Trägerabtheilung rechts von E beladet, der übrige Trägertheil (AE) unbelastet ist (Fig. 159b). Die kleinste Querkraft (Q_{min}) wird in E eintreten, wenn die Abtheilung AE links von E beladet, die Abtheilung EB rechts von E unbelastet ist (Fig. 159c).

Fig. 159.



Man erhält die Werthe von Q_{max} , bezw. Q_{min} für den Querschnitt E , welcher um a vom linken Auflager entfernt liegt, und für die Belastung p auf das laufende Meter, wie

folgt. Für die Belastung nach Fig. 159b ist

$$D_0 = Q_{max} = \frac{p(l-a)^2}{2l}; \dots \dots \dots 173.$$

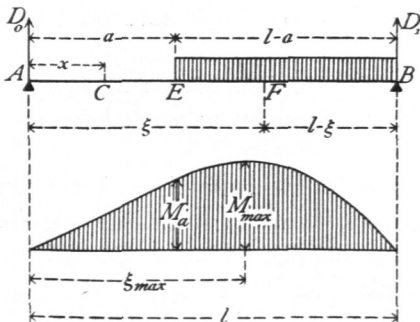
für die Belastung nach Fig. 159c ist

$$D_0' = \frac{p a}{l} \left(l - \frac{a}{2} \right) = p a - \frac{p a^2}{2l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = D_0' - p a;$$

Fig. 160.

fonach

$$Q_{min} = -\frac{p a^2}{2l} \dots \dots 174.$$



Die Belastung nach Fig. 159 kommt im Hochbau sehr häufig vor, z. B. bei Trägern unter Mauern, in welchen sich Fenster- oder Thüröffnungen befinden. Für die Querschnittsbemessung ist das größte Moment maßgebend, welches demnach aufgesucht werden soll.

Für irgend einen Punkt C der Strecke AE (Fig. 160) ist das Moment

$M_x = D_0 x = \frac{p(l-a)^2}{2l} x$; die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für einen Punkt F der Strecke CB ist dasselbe bequem durch Betrachtung des rechts von F gelegenen Trägertheiles zu finden. Es ist

$$M_\xi = D_1 (l - \xi) - \frac{p(l - \xi)^2}{2}, \text{ woraus } M_\xi = \frac{p}{2l} (l - \xi) (l\xi - a^2).$$

Auf dieser Strecke ergibt also die graphische Darstellung des Momentes eine Parabel. Dieselbe hat ihr Maximum für

$$\xi_{max} = \frac{l}{2} + \frac{a^2}{2l}.$$

Aus der Formel ergibt sich, daß das Maximum des Momentes stets in einem Punkte der belasteten Strecke EB stattfindet. M_{max} wird gefunden, wenn man in den Ausdruck für M_ξ statt ξ den für ξ_{max} gefundenen Werth einführt, also

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} \left[1 - \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]^2 \dots \dots \dots 175.$$

Nachstehende kleine Tabelle ergibt für eine Anzahl Werthe von a die Größe von M_{max} und von ξ_{max} :

Für	$a = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	l
	$\xi_{max} = 0,5$	0,505	0,52	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,9	1,0	l
	$M_{max} = 1$	0,98	0,92	0,83	0,71	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0	$\frac{pl^2}{8}$

Eine Last P im Abstände x vom linken Auflager erzeugt im Punkte E links vom Lastpunkte (Fig. 159a) ein Moment $M_a = \frac{P(l-x)}{l} a$ und im Punkte F rechts vom Lastpunkte das Moment $M_b = \frac{Px}{l} b$. Beide Momentenwerthe sind

positiv; also erzeugt eine jede Einzellast in allen Trägerquerschnitten positive Momente. Die größten Momente in den einzelnen Trägerquerschnitten werden demnach stattfinden, wenn alle Trägerpunkte belastet sind, d. h. bei voller Belastung des Trägers. Ist also volle Belastung eines Trägers mit gleichmäÙig vertheilter Last p möglich, so ruft diese die größten Momente hervor. Bei dieser Belastung ist nach Gleichung 170 für einen Querschnitt mit der Abcisse x

$$M_x = \frac{p}{2} (lx - x^2) \dots \dots \dots 176.$$

Vierter Belastungsfall: Der Träger wird auf seine ganze Länge durch eine gleichförmig vertheilte Last und außerdem durch Einzellasten oder auf einen Theil seiner Länge durch eine weitere gleichförmig vertheilte Last belastet.

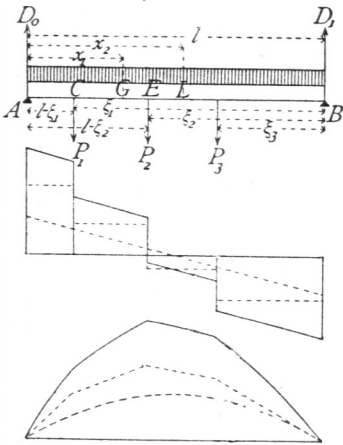
Da jeder Träger außer der Nutzlast noch das Eigengewicht tragen muß, dieses aber als gleichförmig über die ganze Länge vertheilt angenommen werden kann, so ist dieser Fall der am häufigsten vorkommende.

In Art. 151 ist nachgewiesen, daß jede Last einen von den sonst noch auf dem Balken befindlichen Lasten unabhängigen Stützendruck erzeugt, und daß der Gesamst-Stützendruck gleich der algebraischen Summe der Einzeldrücke ist. Daraus folgt, daß auch die Querkräfte und Momente für alle Querschnitte gleich den algebraischen Summen der bez. Theil-Querkräfte und Momente sind.

154.
Größte Momente durch gleichförmig vertheilte Lasten.

155.
Gleichförmig vertheilte Last und Einzellasten, bzw. theilweise Belastung.

Fig. 161.



Es brauchen also im vorliegenden Falle nur die Stützendrücke, Querkräfte und Momente, welche bei den einzelnen bereits betrachteten Belastungen, derjenigen durch Einzellasten und derjenigen durch gleichförmig vertheilte Last u. f. w. sich ergeben haben, algebraisch addirt zu werden, was sowohl auf dem Wege der Rechnung, wie graphisch geschehen kann.

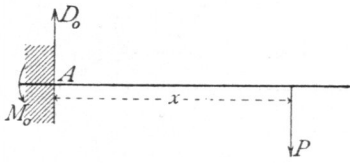
Fig. 161 stellt die Querkräfte und Momente dar, welche in den verschiedenen Querschnitten durch gleichförmig vertheilte Last und Einzellasten hervorgerufen werden. Die punktirten Linien geben die Werthe von Q und M nur für Einzellasten, bezw. für gleichförmig vertheilte Last an; die voll ausgezogenen Linien bedeuten die Summen.

2) Console-, Krag- oder Freiträger.

Console-, Krag- oder Freiträger sind am einen Ende unterstützte, am anderen Ende frei schwebende Träger. Als äußere Kräfte wirken auf dieselben die Belastungen und die Auflagerdrücke der Unterstützungsstelle. Letztere lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Damit der Träger im Gleichgewicht sei, muß zunächst die algebraische Summe der lothrechten Kräfte gleich Null sein, d. h. wenn die lothrechte Seitenkraft des Auflagerdrucks bei A (Fig. 162) gleich D_0 ist, wird $0 = D_0 - P$ oder

156.
Erklärung.

Fig. 162.



$0 = D_0 - P$ oder

$$D_0 = P \dots \dots \dots 177.$$

Eine äußere wagrechte Belastung sei nicht vorhanden; es wird also der Auflagerdruck keine wagrechte Seitenkraft haben. Es muß aber auch die algebraische Summe der statischen Momente für einen beliebigen Punkt der Ebene, also etwa für A , gleich Null sein; mithin muß, da das Moment der gegebenen Kräfte für A nicht gleich Null ist, D_0 aber für den Drehpunkt A kein statisches Moment hat, an der Unterstützungsstelle noch eine Anzahl von Kräften wirken, deren resultirendes Moment mit demjenigen der Belastungen zusammen die Summe Null ergibt. Bei A wirkt also ein Moment M_0 , dessen Größe sich ergibt zu

$$M_0 = - P x \dots \dots \dots 178.$$

Dieses Moment, dessen Drehrichtung, wie das Vorzeichen angiebt, derjenigen von P entgegengesetzt ist, kann auf verschiedene Weise erzeugt werden, am einfachsten durch Einmauerung, bezw. Einspannung des Balkens.

Soll für jede Belastungsart Gleichgewicht vorhanden sein, so muß der Balken derart eingemauert werden, daß das von der Mauer geleistete Moment auch die größten Werthe des Momentes der Belastungen aufheben kann. Das Moment der Mauer wird durch das über dem eingemauerten Balkentheil liegende Mauergericht geleistet, wonach dieses zu bestimmen ist.

Auch in anderer Weise kann ein Moment in A erzeugt werden, z. B. dadurch, daß der Balken über den Punkt A hinaus, bis zu einer zweiten Stütze B ,

$$M_g = P(\xi + 25) + g l \left(\frac{l}{2} + 25 \right) = 800 \cdot 205 + 1000 \cdot 125 = 289\,000 \text{ kgcm},$$

$$M_p = p \cdot 170 \left(\frac{170}{2} + 25 \right) = 8 \cdot 170 \cdot 110 = 149\,600 \text{ kgcm}.$$

Der Querschnitt an der Stelle A ist so zu bestimmen, dass, wenn als zulässige Beanspruchung $K = 800 \text{ kg}$ gewählt wird, stattfindet

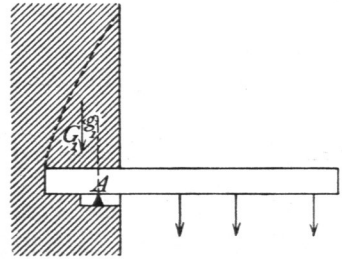
$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{289\,000 + 149\,600}{800} = 548.$$

Profil Nr. 28 der »Deutschen Normal-Profile für I-Eisen« hat ein Widerstandsmoment $\frac{\mathcal{F}}{a} = 547$, dürfte also für den vorliegenden Fall genügen.

Es möge hier noch besonders darauf hingewiesen werden, dass die Console-Träger hauptsächlich dann gefährdet sind, wenn das am Einspannungspunkte von der Mauer geleistete Moment nicht die genügende Grösse hat. Damit Gleichgewicht bestehe, muss dieses Moment wenigstens so groß sein, wie das grösstmögliche Moment der äusseren Kräfte für A . Auch hier ist aber ein Sicherheits-Coefficient n nötig, und wenn beispielsweise dieses Einspannungsmoment durch das Gewicht des auf dem hinteren Balkentheile ruhenden Mauerwerkes geleistet wird (Fig. 167), so muss $G_1 g_1 = n M_0$ sein. Es dürfte sich empfehlen, n nicht kleiner als 4 zu nehmen.

Dabei ist aber auch zu beachten, dass die Art der Construction dafür Gewähr bieten muss, dass das Gewicht G_1 wirklich zur Wirksamkeit kommt — etwa durch angemessene Unterlagsplatten, Verband, Cementmörtel u. dergl. Unter Umständen kann man auch das Gewicht des unterhalb gelegenen Mauerwerkes durch Anker und Ankerplatten am Balkenende aufhängen und dadurch für die Stabilität des Console-Trägers nutzbar machen. Zu beachten ist auch, ob nicht ein Ausreißen nach der punktierten Linie in Fig. 167 möglich ist.

Fig. 167.

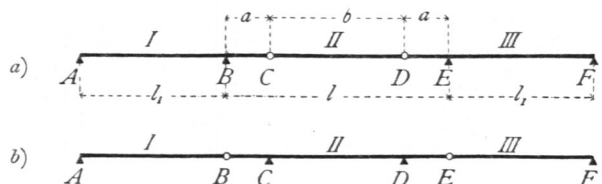


3) Continuirliche Gelenkträger.

Die Querschnittsgrösse der Träger und damit die zu denselben gebrauchte Materialmenge ist wesentlich von der Grösse der in den einzelnen Querschnitten stattfindenden grössten Momente abhängig. Eine Verminderung der Momente hat auch eine Querschnittsverringerung zur Folge. Eine solche Verringerung der Momente wird gegenüber den gewöhnlichen Trägern auf zwei Stützen durch die fog. continurlichen Gelenkträger erreicht, bei denen die Stützpunkte eines Theiles der Träger durch die übergekragten Enden der Nachbarträger gebildet werden. Man erhält dadurch für die verschiedenen Oeffnungen verschiedene Trägerarten, und zwar wechselt immer ein Träger mit einem, bezw. zwei Kragstücken an den Enden und ein solcher ohne Kragstücke ab.

Für drei neben einander liegende Oeffnungen I, II, III sind die hauptsächlich vorkommenden Anordnungen in Fig. 168 a u. b dargestellt. Entweder hat, wie in Fig. 168 a gezeichnet, jeder Seitenträger I und III eine über das Auflager B , bezw. E vorragende Console BC , bezw. DE , auf deren Enden der Mittelträger CD frei aufruhet, oder der Mittelträger CD hat, wie

Fig. 168.



in Fig. 168 *b*, jederseits ein Kragstück *BC*, bzw. *DE*, und die Seitenträger *AB* und *EF* ruhen einerseits auf den Endstützpunkten *A*, bzw. *F*, andererseits auf den Enden *B* und *E* der erwähnten Kragstücke.

Die Pfetten der größeren eisernen Dächer werden neuerdings meistens als solche Träger nach Fig. 169 hergestellt, wobei immer ein Träger mit zwei Confolen an den Enden und ein auf diesen Confolen freiaufgelagerter Träger abwechseln. Die Beanspruchung in diesem Falle stimmt genau mit derjenigen der in

Fig. 169.

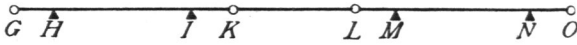


Fig. 168 *b* angegebenen Anordnung überein; jeder Träger mit zwei Confolen an den Enden wird wie Träger *BCDE* in Fig. 168 *b* beansprucht; jeder andere Träger wie *AB*, bzw. *EF* dieser Figur. Es genügt deshalb, die beiden Anordnungen in Fig. 168 *a* u. *b* in das Auge zu fassen.

Weiter soll in Folgendem nur die für den Hochbau wichtigste Belastungsart durch gleichmäßig vertheilte Belastung des ganzen Trägers behandelt werden.

Erste Anordnung: Die Kragstücke befinden sich an den Seitenträgern (Fig. 168 *a*).

α) Seitenträger mit einseitigem Kragstück. Es sei $AB = l_1$, $BE = l$, $BC = DE = a$ und $CD = b$, also $l = 2a + b$; es sei ferner die Belastung für die Längeneinheit des Trägers p . Alsdann wirkt außer dieser Belastung auf den Seitenträger in *C* eine Kraft nach unten, welche dem im Punkte *C* auf den Balken *CD* nach oben wirkenden Auflagerdruck (nach dem Gesetze der Wechselwirkung, vergl. Art. 9, S. 9) genau gleich ist, d. h. eine Kraft $\frac{pb}{2}$. Der Stützendruck im

161.
Erste
Anordnung.

Auflagerpunkte *A* (Fig. 170 *a*) ergibt sich durch Aufstellung der Gleichung der statischen Momente für Punkt *B* zu

$$D_0 = \frac{pl_1}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{ab + a^2}{l_1}.$$

Setzt man die nur von den Längen abhängige Constante $\frac{ab + a^2}{l_1} = c_1$, so ist

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) \dots \dots \dots 186.$$

Weiters ist der Stützendruck im Auflagerpunkte *B*

$$D_1 = \frac{pl_1}{2} + \frac{pb}{2} \cdot \frac{l_1 + a}{l_1} + pa \frac{l_1 + \frac{a}{2}}{l_1} = \frac{p}{2} (l_1 + c_1 + 2a + b) \dots \dots 187.$$

In der Strecke *AB* beträgt die Querkraft für einen Punkt *L* mit der Abscisse *x*, von *A* aus gerechnet,

$$Q_x = D_0 - px = \frac{p}{2} (l_1 - c_1 - 2x), \dots \dots \dots 188.$$

d. h. die graphische Darstellung ergibt eine Gerade. Für $x = 0$ ist $Q_0 = \frac{p}{2} (l_1 - c_1)$;

für $x = l_1$ ist $Q_1 = -\frac{p}{2} (l_1 + c_1)$; die Querkraft wird Null für $x_0 = \frac{l_1 - c_1}{2}$.

In der Strecke *BC* ist die Querkraft für einen Punkt *L*₁ mit der Abscisse *x*₁, von *C* aus gerechnet,

$$Q_{x_1} = \frac{p}{2} (b + 2 x_1), \dots \dots \dots 189.$$

d. h. die graphische Darstellung derselben ergibt eine Gerade. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{p b}{2}$; für $x_1 = a$ ist $Q_a = \frac{p}{2} (b + 2 a)$. Die Querkräfte sind in Fig. 170 b graphisch dargestellt.

In der Strecke AB ist das Moment für den Punkt L

$$M_x = D_0 x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 - c_1) x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2) - \frac{p c_1 x}{2} \dots \dots 190.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist das Moment, welches in einem frei aufliegenden Balken AB von der Länge l_1 entstehen würde; in Folge der Console und ihrer Belastung erhält man demnach hier an jeder Stelle ein um

$\frac{p c_1 x}{2}$ kleineres Moment. Die graphische Darstellung ergibt eine Parabel $\alpha \beta \gamma \delta$ (Fig. 170 c); die Linie $\alpha \delta$ ist die Linie der Gleichung: $y = -\frac{p c_1 x}{2}$. Trägt man also von dieser aus die Ordinaten $z = \frac{p}{2} (l_1 x - x^2)$

auf, so ergeben die von $\alpha \epsilon$ aus gemessenen Ordinaten die Momente an den einzelnen Stellen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$;

für $x = l_1$ ist $M_{l_1} = -\frac{p c_1 l_1}{2} = \epsilon \delta$. M_x wird Null für jenen Werth von x , für welchen stattfindet: $0 = \frac{p}{2} (l_1 - x) - \frac{p c_1}{2}$, d. h. für $x_0 = l_1 - c_1$; $\alpha \gamma$ ist also gleich $l_1 - c_1$. M_x hat sein Maximum für $\frac{d M_x}{d x} = 0$, d. h. für $x_{max} = \frac{l_1 - c_1}{2}$, und es ist

$$M_{max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} \cdot \frac{l_1 + c_1}{2} - \frac{p c_1}{2} \cdot \frac{l_1 - c_1}{2} = \frac{p (l_1 - c_1)^2}{8}.$$

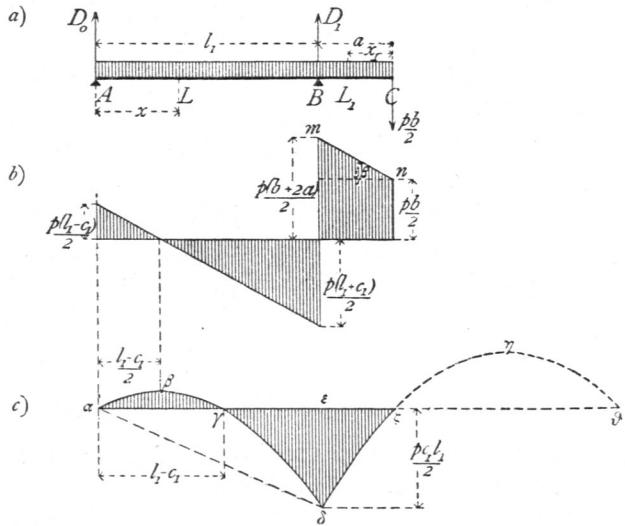
In der Strecke BC ist das Moment für den Punkt L_1

$$M_{x_1} = -\frac{p b}{2} x_1 - \frac{p x_1^2}{2} = -\frac{p}{2} (b x_1 + x_1^2), \dots \dots \dots 191.$$

d. h. die graphische Darstellung liefert eine Parabel. M_{x_1} wird Null für $x_1 = 0$ und für $b x_1 + x_1^2 = 0$, d. h. für $x_1 = -b$, also für Punkt C , und wenn die Curve über den Nullpunkt C nach rechts auf die negative Seite der Abscissenaxe fortgesetzt wird, für den Punkt D (Fig. 168 a). Ferner wird M_{x_1} ein Maximum für $0 = b + 2 x_1$,

d. h. es wird $x_{1max} = -\frac{b}{2}$. Für $x_1 = a$, d. h. für den Auflagerpunkt B , wird

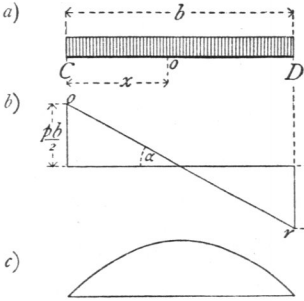
Fig. 170.



$M_{x_1} = -\frac{p}{2}(a b + a^2) = -\frac{p}{2} c_1 l_1$, wie bereits oben gefunden. Hiernach ist die Parabel $\delta \zeta \eta \vartheta$ in Fig. 170c construiert.

β) Balkenträger auf den beiden Kragstücken. Für diesen Träger CD (Fig. 171) gilt das unter 1 für den Träger auf zwei Stützen Gefundene. Es ist also für einen Punkt o mit der Abscisse x

Fig. 171.

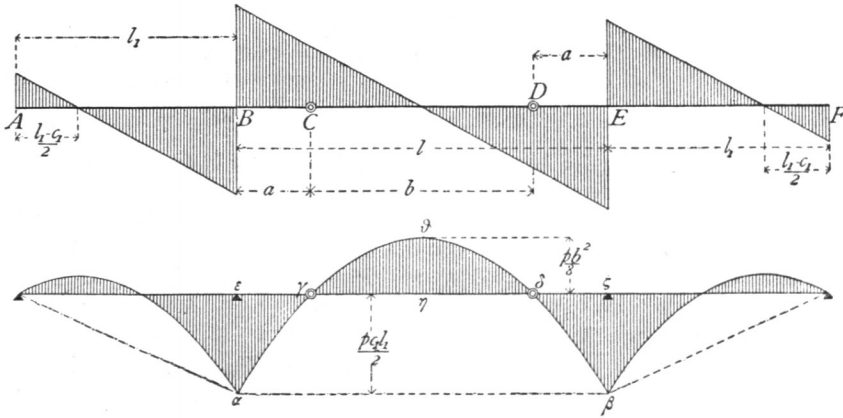


$$Q_x = \frac{p}{2}(b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2}(bx - x^2) \quad 192.$$

Die graphischen Darstellungen der Querkräfte und Momente giebt Fig. 171.

γ) Ganzer Träger. Betrachtet man nun den ganzen Träger (Fig. 172), so sieht man zunächst, daß die Querkräfte und Momente in C gleiche Größe haben, ob man vom Träger ABC oder vom Träger CD ausgeht. Auch die Neigung der Linie or , welche die Querkraft auf CD darstellt (Fig. 171), stimmt mit derjenigen von mn (Fig. 170), welche die Querkraft der Strecke BC darstellt, überein; denn es ist (Fig. 171)

Fig. 172.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{p b}{2}}{\frac{2}{2}} = p \quad \text{und} \quad (\text{Fig. 170b}) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p a}{a} = p, \quad \text{d. h.} \quad \beta = \alpha;$$

demnach bilden die beiden Linien or und mn eine einzige Linie. Auch die Momenten-Curven beider Theile stimmen überein; denn für die Abtheilung BC ist nach Gleichung 191: $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(b x_1 + x_1^2)$ und für negative x_1 , d. h. für Punkte,

welche rechts von C liegen, ist $M_{x_1} = -\frac{p}{2}(-b x_1 + x_1^2) = +\frac{p}{2}(b x_1 - x_1^2)$.

Dies ist aber nach Gleichung 192 der Werth, welcher sich für das Moment auf der Strecke CD ergibt. Die in Fig. 170c gezeichnete Curve $\delta \zeta \eta \vartheta$ ist also die richtige Momenten-Curve.

In Fig. 172 sind die Momente und Querkräfte für den ganzen Träger angegeben.

δ) Vergleich mit dem Träger auf zwei Stützen. Für den mittleren Theil $B C D E$ (Fig. 172) sind die Querkräfte genau, wie bei einem frei aufliegenden Träger von der Spannweite $l = 2a + b$; für die Seitenträger sind die Querkräfte an jeder Stelle um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, als beim einfachen, auf den Stützen A und B aufruhenden Balkenträger. Die absoluten Werthe der Querkräfte sind also auf der positiven Seite um $\frac{p c_1}{2}$ kleiner, auf der negativen Seite um $\frac{p c_1}{2}$ größer, als dort.

Was die Momente anbelangt, so ist für die Seitenträger oben bereits nachgewiesen, daß das Moment an jeder Stelle um $\frac{p c_1 x}{2}$ kleiner ist, als beim frei aufliegenden Balkenträger von der Spannweite l_1 . Falls der Mittelträger in B und E frei aufläge, würde an einer beliebigen Stelle mit der Abscisse ξ , von B aus gemessen, das Moment $M_\xi = \frac{p}{2} (l \xi - \xi^2) = \frac{p}{2} [(b + 2a) \xi - \xi^2] = p a \xi + \frac{p}{2} b \xi - \frac{p \xi^2}{2}$ sein, oder, wenn man des bequemeren Vergleiches halber die Abscissen vom Punkt C aus rechnet und mit x bezeichnet (nach rechts positiv), so wird $\xi = a \pm x$ und nach einigen Umformungen

$$M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2) + \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Für den Mittelträger $B C D E$ mit den Gelenken in C und D ist, wie oben gezeigt, das Moment $M_x = \frac{p}{2} (b x - x^2)$, also um $\frac{p}{2} c_1 l_1$ kleiner, als wenn die Auflagerung in gewöhnlicher Weise in B und E erfolgte. Nun ist aber diese Differenz $\frac{p}{2} c_1 l_1$ gerade das negative Moment an den Stützen B und E ; die von der Wagrechten $\alpha \beta$ in Fig. 172 aus gemessenen Ordinaten ergeben daher die Momente des in B und E frei aufliegenden Trägers. Construirt man demnach die Parabel der Gleichung $\frac{p}{2} (l \xi - \xi^2)$ in gewöhnlicher Weise und zieht durch die Punkte γ und δ , in welchen die Lothrechten der Confolenenden die Parabel schneiden, eine Wagrechte $\varepsilon \zeta$, so sind die von dieser Linie aus gemessenen Ordinaten die Momente.

Es empfiehlt sich, die Confolenlänge so zu bestimmen, daß das negative Moment über den Stützen absolut genommen genau so groß ist, wie das positive Moment in der Mitte. Man theile zu diesem Zwecke einfach die Pfeilhöhe der Parabel $\alpha \beta$ in zwei gleiche Theile und ziehe durch den Theilpunkt eine Wagrechte; alsdann geben die Längen $\varepsilon \gamma$, bezw. $\delta \zeta$ die Längen der Confolen.

Bei den im Hochbau verwendeten continuirlichen Gelenkträgern ist meistens der Querschnitt für jeden der drei Einzelbalken constant gebildet; derselbe muß demnach unter Zugrundelegung des betreffenden größten Momentes (absolut genommen) bestimmt werden. Für den Seitenträger ist dann entweder der Maximalwerth $\frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2$ oder (häufiger) derjenige im Querschnitt über der Stütze B maßgebend; d. h. es ist $M_{max} = \frac{p c_1 l_1}{2}$ zu setzen, so daß

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{p c_1 l_1}{2 K}.$$

Für das Mittelstück ergibt sich in gleicher Weise als Bedingung für die Querschnittsbildung

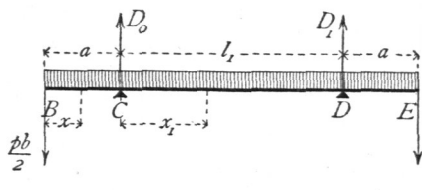
$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{p b^2}{8 K}.$$

Zweite Anordnung: Die Kragstücke befinden sich am Mittelträger.

α) Mittelträger mit beiderseitigen Kragfüßen. Die Länge des Mittelfeldes (Fig. 173) sei l_1 , diejenige des Kragfußes sei a und die Länge jedes Seitenträgers b ; alsdann ist bei voller Belastung der Auflagerdruck

$$D_0 = \frac{p}{2} (l_1 + 2a + b) = D_1 \dots \dots \dots 193.$$

Fig. 173.



In der Strecke BC ist die Querkraft

$$Q_x = -\frac{pb}{2} - px \dots \dots \dots 194.$$

Für $x = 0$ ist $Q_0 = -\frac{pb}{2}$; für $x = a$ ist

$$Q_a = -\frac{pb}{2} - pa = -\frac{p}{2}(b + 2a).$$

In der Strecke CD ist die Querkraft

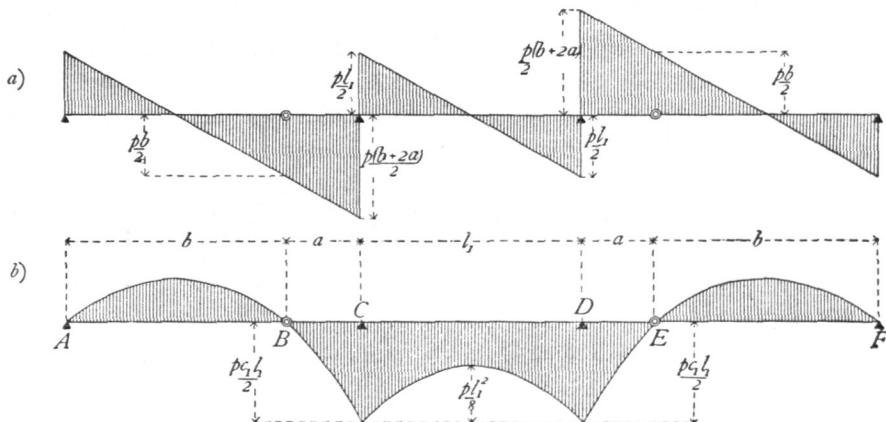
$$Q_{x_1} = D_0 - \frac{pb}{2} - pa - px_1 = \frac{p}{2}(l_1 - 2x_1), \dots \dots \dots 195.$$

d. h. genau so groß, wie ohne Kragfüße. Für $x_1 = 0$ ist $Q_0 = \frac{pl_1}{2}$; für $x_1 = l_1$

ist $Q_{l_1} = -\frac{pl_1}{2}$.

In der Strecke DE ist die Querkraft eben so groß, wie in BC; nur ist hier positiv, was dort negativ ist. Die graphische Darstellung der Querkräfte ergibt Fig. 174a.

Fig. 174.



In den Strecken BC und DE haben die Momente die gleichen Werthe, wie bei den in Art. 161 (S. 139) behandelten Consolen. Es ist demnach, vom Punkte B aus gerechnet,

$$M_x = -\frac{pb}{2}x - \frac{px^2}{2} = -\frac{p}{2}(bx + x^2) \dots \dots \dots 196.$$

Für $x = 0$ ist $M_0 = 0$; für $x = a$ ist $M_a = -\frac{p}{2}(ab + a^2) = -\frac{p}{2}c_1l_1$.

In der Strecke CD ist das Moment

$$M_{x_1} = D_0x_1 - \frac{px_1^2}{2} - pa\left(\frac{a}{2} + x_1\right) - \frac{pb}{2}(a + x_1) = \frac{p}{2}(l_1x_1 - x_1^2) - \frac{p}{2}c_1l_1 \dots \dots \dots 197.$$

Der erste Theil des Momentes ist das Moment für einen frei aufliegenden Balken von der Stützweite l_1 ; der zweite Theil ist das Moment über der Stütze C , bezw. D .

Also auch hier gilt dasselbe, was im vorhergehenden Artikel über den dortigen Mittelträger gesagt wurde. Die graphische Darstellung der Momente ist in Fig. 174 b gegeben.

β) Seitenträger. Die Seitenträger sind frei auf zwei Stützpunkten gelagerte Träger, für welche Alles gilt, was in Art. 152 (S. 131) entwickelt wurde. Demnach ist, wenn der linke Auflagerpunkt hier als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt wird,

$$Q_x = \frac{p}{2} (b - 2x) \quad \text{und} \quad M_x = \frac{p}{2} (bx - x^2), \quad 198.$$

und es ergibt sich leicht, wie in Art. 161, daß die Curven für die Momente und die Querkräfte dieselben sind, wie die für die Console BC gefundenen.

Die Momente und Querkräfte für die verschiedenen Querschnitte sind in Fig. 174 graphisch aufgetragen.

163.
Günstigstes
Verhältniß
von a und b .

Zum Schluffe erübrigt noch eine Untersuchung über das günstigste Verhältniß der Größen a und b , d. h. über das Verhältniß, welches den geringsten Materialaufwand bedingt.

Im Hochbau wird man meistens Träger mit constantem oder nahezu constantem Querschnitt verwenden; derselbe muß alsdann so groß sein, wie das größte überhaupt im Träger vorkommende Moment es verlangt. Die Anordnung ist demnach so zu treffen, daß die an den verschiedenen Stellen stattfindenden Maximalmomente einander (absolut genommen) gleich sind.

Beim Träger mit beiderseitigen Kragstücken (siehe Art. 162, S. 142 u. Fig. 168 b) finden die größten Momente über den Stützen C , bezw. D und in der Mitte der Oeffnung statt. Die Bedingung, daß dieselben einander (absolut genommen) gleich sein sollen, giebt eine Gleichung für die günstigste Länge von a . Es ist

$$M_c = \frac{p}{2} c_1 l_1 \quad \text{und} \quad M_{\text{mitte}} = \frac{p l_1^2}{8} - \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Es muß demnach $\frac{p}{2} c_1 l_1 = \frac{p l_1^2}{8} - \frac{p}{2} c_1 l_1$ sein, woraus $\frac{l_1}{8} = c_1$. Da nun $c_1 = \frac{a^2 + ab}{l_1}$ ist, wird $a^2 + ab = \frac{l_1^2}{8}$; da ferner $b = l - a$, wird

$$a^2 + al - a^2 = \frac{l_1^2}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{8} \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 \quad 199.$$

Für $l_1 = l$ würde $a = \frac{l}{8}$; für $l_1 = \frac{4}{3} l$ würde $a = \frac{2}{9} l$ etc.

Beim Träger mit einseitigem Kragstück (siehe Art. 161, S. 139 u. Fig. 168 a) würde sich dieses Verhältniß in folgender Weise ergeben. Das Moment über dem Auflager ist $\frac{p}{2} c_1 l_1$; das Maximalmoment in der Oeffnung ist $M_{\text{max}} = \frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2$; mithin ist die Bedingungsgleichung

$$\frac{p}{8} (l_1 - c_1)^2 = \frac{p}{2} c_1 l_1.$$

Die Auflöfung dieser Gleichung ergibt $c_1 = l_1 (3 - \sqrt{8}) = 0,172 l_1$ und, da $c_1 = \frac{a^2 + a b}{l_1}$, ferner $b = l - 2 a$, fo wird nach einfachen Umformungen

$$\frac{a}{l} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0,688 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2}}{2} \dots \dots \dots 200.$$

Für die verschiedenen Werthe von $\frac{l_1}{l}$ ergeben sich aus den Gleichungen 199 u. 200 die nachfolgenden Werthe für $\frac{a}{l}$:

Träger	$\frac{l_1}{l} =$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
mit beiderseitigem Kragstück:	$\frac{a}{l} =$	0,06	0,08	0,11	0,125	0,15	0,18	0,21
mit einseitigem Kragstück:	$\frac{a}{l} =$	0,093	0,125	0,168	0,22	0,30	—	—

Es kann oft zweckmäfsig sein, die Werthe von a fo zu bestimmen, dafs das Maximalmoment im frei aufliegenden Trägertheile demjenigen über der Stütze gleich ift, weil man vielfach allen Trägertheilen, fowohl dem frei aufliegenden Träger, wie demjenigen mit den Kragstücken, gleichen Querschnitt giebt.

Für die zweite Anordnung (Träger mit beiderseitigem Kragstück) ift dann die Bedingungsgleichung

$$\frac{p b^2}{8} = \frac{p c_1 l_1}{2},$$

und wenn man $c_1 l_1 = a^2 + a b$ und $b = l - a$ einführt, ergibt sich

$$a = 0,172 l. \dots \dots \dots 201.$$

Bei der ersten Anordnung (Träger mit einseitigem Kragstück) lautet die Bedingungsgleichung ebenfalls

$$\frac{p b^2}{8} = \frac{p c_1 l_1}{2},$$

und man erhält nach Einsetzung von $c_1 l_1 = a^2 + a b$ und $b = l - 2 a$ als denjenigen Werth von a , bei welchem die bez. Momente einander (abfolut genommen) gleich find,

$$a = 0,146 l. \dots \dots \dots 202.$$

4) Continuirliche Träger.

Die continuirlichen Träger oder Träger auf mehr als zwei Stützpunkten find nach Art. 148 (S. 126) statifch unbestimmt. Die Stützendrücke werden mit Hilfe der Elasticitätslehre ermittelt. Bei der verhältnifsmäfsig geringen Verwendung dieser Träger im Hochbau und weil der Raum für die eingehende Besprechung im vorliegenden »Handbuch« nicht ausreicht, soll nur für eine Reihe von gewöhnlichen Belastungsfällen die Gröfse der Stützendrücke, der Momente und Querkräfte an-

164.
Princip.

gegeben werden. Wegen des eingehenden Studiums wird auf die unten ²⁵⁾ ftehenden Werke verwiefen.

Im Folgenden bezeichnen: $D_0, D_1, D_2 \dots$ die Auflagerdrücke in den verschiedenen Stützpunkten $0, 1, 2 \dots$; $M_0, M_1, M_2 \dots$ die Momente an diesen Stützpunkten; $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \dots$ die Maximalmomente in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$; l die Stützweite jeder Oeffnung, falls alle Stützweiten gleich grofs find; $l_1, l_2, l_3 \dots$ die Stützweiten der Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$, falls nicht alle Stützweiten gleich grofs find; $p_1, p_2, p_3 \dots$ die gleichförmig vertheilten Belastungen für die Längeneinheit in den Oeffnungen $1, 2, 3 \dots$ des Trägers.

α) Sämmtliche Oeffnungen haben die gleiche Stützweite l und die gleiche volle Belastung p für die Längeneinheit zu tragen. Die mafsgebenden Werthe von M, D und \mathfrak{M} find in folgender Tabelle zusammengestellt:

Anzahl der Oeffnungen:													
	2	3	4		2	3	4		2	3	4		
$M_0 =$	0	0	0	}	$D_0 =$	0,375	0,400	0,3929	}	$\mathfrak{M}_1 =$	0,07081	0,08	0,0771
$M_1 =$	0,125	0,10	0,10714		$D_1 =$	1,250	1,100	1,1428		$\mathfrak{M}_2 =$	0,07081	0,025	0,0363
$M_2 =$	0	0,10	0,0714		$D_2 =$	0,375	1,100	0,9186		$\mathfrak{M}_3 =$	—	0,03	0,0363
$M_3 =$	—	0	0,10714		$D_3 =$	—	0,400	1,1428		$\mathfrak{M}_4 =$	—	—	0,0771
$M_4 =$	—	—	0		$D_4 =$	—	—	0,3929					

β) Die Stützweiten find ungleich; jede Oeffnung ift voll mit $p_1, p_2, p_3 \dots$ auf die Längeneinheit belastet.

Nimmt man zunächst zwei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1 und l_2 an, fo ift

$$M_0 = M_2 = 0, \quad M_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}, \quad \dots \quad 203.$$

$$D_0 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 (l_1 + l_2)}, \quad D_1 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_1 l_2} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}, \quad \left\{ \dots \quad 204.$$

$$D_2 = \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8 l_2 (l_1 + l_2)}.$$

Bei drei Oeffnungen mit den Stützweiten l_1, l_2 und l_3 ergeben sich folgende Werthe:

²⁵⁾ Für das Studium der «Theorie der continuirlichen Träger» feien folgende Schriften empfohlen:
 CLAPEYRON. *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés. Comptes rendus*, Bd. 45, S. 1076.
 MOHR. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eifen-Constructionen. *Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover* 1860, S. 323; 1868, S. 19.
 CULMANN, K. *Die graphische Statik*. Zürich 1866. S. 273.
 WINKLER, E. *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc.* I. Theil. Prag 1867. S. 112.
 RITTER, W. *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken*. 2. Aufl. Zürich 1883.
 LIPPICH, F. *Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes*. *Allg. Bauz.* 1871, S. 104 u. 175. (Auch als Sonderabdruck erschienen: Wien 1871.)
 WEYRAUCH, J. J. *Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger*. Leipzig 1873.
 WINKLER, E. *Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken*. I. Heft. Aeusere Kräfte gerader Träger. 3. Aufl. Wien 1886.
 LAISSE, F. u. A. SCHÜBLER. *Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eifen-Constructionen*. I. Theil. 4. Aufl. Stuttgart 1876. S. 161.
 GRASHOF, F. *Theorie der Elasticität und Festigkeit etc.* 2. Aufl. Berlin 1878. S. 100.
 CANOVETTI. *Théorie des poutres continues etc.* Paris 1882.
 STELZEL, K. *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf die continuirlichen Träger*. Graz 1882.
 OTT, K. v. *Grundzüge der graphischen Statik*. 4. Aufl. Prag 1885.
 CASTIGLIANO, A. *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*. Turin. — Deutsch von E. HAUFF. Wien 1886.

$$M_0 = M_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(3l_2 + 2l_1)}, \quad \dots \quad 205.$$

$$D_0 = D_3 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)}, \quad D_1 = D_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4l_1(3l_2 + 2l_1)} + \frac{p_1 l_1}{2} + \frac{p_2 l_2}{2}. \quad 206.$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen kann man in besonderen Fällen die betreffenden Werthe leicht finden. Wenn z. B. eine ganze Oeffnung unbelastet ist, so ist einfach in den obigen Ausdrücken das entsprechende p gleich Null zu setzen.

b) Innere Kräfte der Gitterträger.

Die Balkenträger sind entweder vollwandige Träger oder gegliederte Träger, letztere gewöhnlich Gitterträger genannt. Bei den ersteren bildet der ganze Querschnitt eine zusammenhängende Fläche; bei den letzteren besteht derselbe aus zwei getrennten Theilen, den sog. Gurtungsquerschnitten; beide Gurtungen sind durch Stäbe mit einander verbunden.

165.
Allgemeines

Die Ermittlung der Spannungen, welche in den vollwandigen Trägern, wozu die hölzernen und gusseisernen Balken, die Walzbalken und Blechträger gehören, durch die äußeren Kräfte erzeugt werden, ist bereits im 4. Kapitel des 2. Abschnittes vorgeführt worden; daselbst ist auch die Querschnittsbestimmung für diese Balken gezeigt. Im vorliegenden Kapitel sollen deshalb nur die in den Gitterträgern entstehenden inneren Kräfte entwickelt werden.

Gitterträger sind aus einzelnen Stäben zusammengesetzte Träger. Die Kreuzungspunkte der einzelnen Stäbe heißen Knotenpunkte. Jeder Gitterträger hat eine obere Gurtung und eine untere Gurtung. Zur Verbindung beider dient das zwischen ihnen angeordnete Gitterwerk.

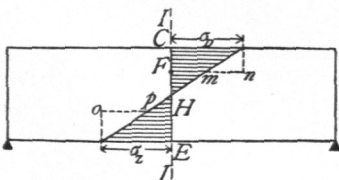
Man nennt jedes aus Stäben, welche in den Schnittpunkten ihrer Axen mit einander verbunden sind, bestehende Stabwerk ein Fachwerk; die Gitterträger bilden demnach Fachwerke.

Die Vortheile der Gitterträger gegenüber den vollwandigen Trägern ergeben sich leicht durch die folgende Ueberlegung. Die auf Biegung beanspruchten Träger erleiden in allen Punkten eines jeden Querschnittes verschiedene Beanspruchungen. Wenn die äußeren Kräfte nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtet sind, so ist im einfachsten und häufigsten Falle die Spannung eines in der Höhe z über, bezw. unter der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punktes nach Gleichung 42: $N = \frac{M}{f} z$.

Die graphische Darstellung der an den verschiedenen Stellen des Querschnittes auftretenden Spannungen N ist die durch Fig. 175 veranschaulichte, da $\frac{M}{f}$ für irgend einen Querschnitt constant ist. Im Punkte C des Querschnittes II ist die Spannung σ_D (Druck), in E ist sie σ_Z (Zug); in allen anderen Punkten des Querschnittes hat sie geringere Werthe. Da aber die Beanspruchungen σ_D und σ_Z die zulässigen

Grenzen K'' für Druck und K' für Zug nicht überschreiten dürfen, so ist $\sigma_D = K''$ und $\sigma_Z = K'$ zu setzen und danach die Querschnittsfläche zu bestimmen. Die zulässige Beanspruchung findet also nur in wenigen Querschnittspunkten statt, nämlich in denjenigen, welche am weitesten nach oben, bezw. unten von der wagrechten Schwerpunktsaxe

Fig. 175.



abliegen. In allen anderen Querschnittspunkten ist die wirklich höchstens vorhandene Spannung viel kleiner, als zulässig wäre, so z. B. im Punkte F um \overline{mn} und im Punkte H um \overline{op} . Demnach wird bei einem vollwandigen, auf Biegung beanspruchten Träger das Material durchaus nicht ausgenutzt. Eine Ausnutzung des Materials bis zur zulässigen Grenze kann nur stattfinden, wenn die Stäbe in der Richtung ihrer Axe, also auf Zug oder Druck beansprucht werden, weil nur dann die Annahme einer gleichmäßigen Vertheilung der Kraft über den ganzen Querschnitt annähernd erfüllt ist. Bei den richtig construirten Gitterträgern werden aber alle Stäbe nur auf Zug oder Druck in der Richtung ihrer Axe beansprucht, so dass man das Material voll ausnutzen und folglich mit geringerem Materialaufwande als bei vollwandigen Trägern auskommen kann. Hierzu möge noch bemerkt werden, dass diese Vortheile nur bei größeren Weiten voll in die Erscheinung treten; bei kleineren Weiten ergeben sich die Stabquerschnitte für die praktische Ausführung zu klein, so dass für solche Aufgaben vollwandige Träger vorzuziehen sind.

Nach der Form der Gurtung unterscheidet man:

1) Parallelträger, d. h. Träger, deren beide Gurtungen parallel (gewöhnlich auch wagrecht) sind.

2) Träger mit einer krummen und einer geraden Gurtung oder mit zwei krummen Gurtungen. Die ersteren nennt man, wenn die Endhöhe des Trägers gleich Null ist und die obere Gurtung krumm, die untere Gurtung gerade ist, Bogenförmige Träger; wenn die untere Gurtung gekrümmt, die obere Gurtung gerade ist, Fischbauchträger. Je nach der Curve der Krümmung unterscheidet man Parabelträger, Hyperbel- (Schwedler-) Träger, Ellipfenträger etc.

3) Dreieck- und Trapezträger, d. h. Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Paralleltapez bilden.

Eintheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem sich jeder Gitterstab nur in den Gurtungen mit den anderen Gitterstäben kreuzt; mehrtheiliges Gitterwerk ist solches, bei welchem jeder Gitterstab sich außer in den Gurtungen noch ein oder mehrere Male mit anderen Gitterstäben kreuzt.

Für die Zwecke des Hochbaues ist wohl immer das eintheilige Gitterwerk, welches eine genaue und einfache Berechnung zulässt, ausreichend, so dass hier nur Träger mit eintheiligem Gitterwerk besprochen werden sollen.

Die Gitterstäbe sind entweder geneigt oder lothrecht; sie werden in der Folge bezw. als Diagonalen und Verticalen oder Pfosten bezeichnet werden.

Gitterwerk mit zwei Lagen Diagonalen nennt man Netzwerk; Gitterwerk mit einer Lage Diagonalen und einer Lage Verticalen bezeichnet man wohl besonders mit dem Namen Fachwerk.

Die Dachbinder sind in den allermeisten Fällen Gitterträger, so dass die hier zunächst zu entwickelnden allgemeinen Regeln und Gesetze auch für die im nächsten Kapitel zu behandelnden Dachbinder giltig sind.

Bei den nachstehenden Untersuchungen werden folgende Annahmen gemacht:

- 1) die Belastungen finden nur in den Knotenpunkten statt, und
- 2) die Stäbe sind in den Knotenpunkten so mit einander verbunden, dass sie sich um dieselben frei drehen können.

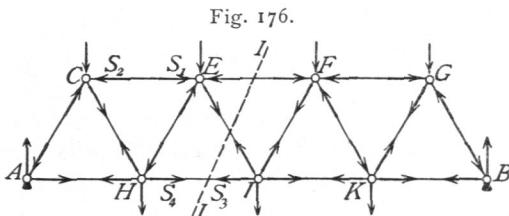
166.
Eintheilung
der
Gitterträger.

167.
Voraus-
setzungen.

1) Verfahren für die Bestimmung der Stabspannungen.

Die Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes erfolgt nach dem allgemeinen Verfahren, welches in Art. 4 (S. 6) angegeben worden ist. Man unterfucht den Gleichgewichtszustand irgend eines Theiles des Fachwerkes unter der Einwirkung aller an demselben thätigen Kräfte. In jeder Stabaxe wirken zwei Kräfte, welche einander an Gröfse gleich sind, aber entgegengesetzten Sinn haben, die Stabspannungen. Im

168.
Erläuterungen.



Stabe CE (Fig. 176) wird von C eine Kraft S_1 auf E übertragen, und eine gleich große Kraft S_2 von E auf C ; beide sind Druck. In HI wird von H auf I ein Zug S_3 , von I auf H ein gleich großer Zug S_4 ausgeübt. In Fig. 176 sind alle auf die Knotenpunkte wirkenden Stabspannungen angegeben.

Betrachtet man nur einen Theil des Trägers, etwa den links vom Schnitte II gelegenen, so wirken auf denselben ausser den äußeren Kräften die Stabspannungen. Alle Stäbe, von denen zwei Knotenpunkte dem betreffenden Theile angehören, enthalten zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, also für die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht in Betracht kommen. In anderer Lage sind diejenigen Stäbe, welche vom Schnitte II getroffen werden, von denen also nur ein Knotenpunkt links vom Schnitte liegt. Nur diejenigen Spannungen dieser Stäbe, welche auf die dem betreffenden Trägertheile angehörenden Knotenpunkte wirken, sind als auf das Bruchstück wirkende Kräfte einzufetzen; so viele Stäbe also durch den Schnitt getroffen werden, so viele Stabspannungen sind in den Gleichgewichtsgleichungen vorhanden, welche für den Trägertheil aufzustellen sind. Diese Spannungen sind die unbekannt Kräfte, für deren Ermittlung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu Gebote stehen. Da für Kräfte in der Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind, so ist die Aufgabe auf dem angegebenen, rein statischen Wege nur dann lösbar, wenn sich bei jedem Schnitte nur drei unbekannte Stabspannungen ergeben.

Ein solches Fachwerk, bei welchem sämtliche Stabspannungen durch die Gesetze des Gleichgewichtes starrer Körper bestimmbar sind, nennt man statisch bestimmt; reichen diese Gesetze dazu nicht aus, so ist das Fachwerk statisch unbestimmt. In letzterem Falle sind die Stabspannungen auch noch von den elastischen Formänderungen abhängig. Es ist aus verschiedenen Gründen empfehlenswerth, im Hochbau nur statisch bestimmte Fachwerke zu verwenden.

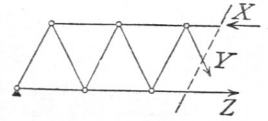
Unter Berücksichtigung des Vorstehenden ist nun folgendermaßen zu verfahren. Das Fachwerk wird an derjenigen Stelle durchschnitten gedacht, an welcher man die inneren Kräfte, hier die Stabspannungen, kennen lernen will; an den Schnittstellen werden die inneren Kräfte angebracht und auf das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet. Da hier die Stäbe, wie angenommen wurde, um die Knotenpunkte frei drehbar sind, so muß jede Stabspannung mit der Richtung des betreffenden Stabes zusammenfallen. Es ergibt sich sonach die folgende Regel.

169.
Verfahren
im
Allgemeinen.

Man denke sich den Träger so durchschnitten, daß die Stäbe, deren Spannung man sucht, durch den Schnitt getroffen werden, bringe die mit den Stabrichtungen zusammenfallenden Stabspannungen als vorläufig unbekannte Kräfte an (Fig. 177) und stelle für das Bruchstück die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

Die Stäbe werden gezogen oder gedrückt; im ersten Falle wirkt die Spannung vom Knotenpunkte ab (Y und Z in Fig. 177); im zweiten Falle wirkt sie nach dem Knotenpunkt hin (X in Fig. 177). Da man beim Beginne der Berechnung vielfach noch nicht den Sinn der Beanspruchung kennt, so werden wir zunächst stets alle Spannungen als Zugspannungen, d. h. vom Knotenpunkte ab gerichtet, einführen; die Rechnung ergibt entweder einen positiven oder negativen Werth. Das erstere Ergebnis bedeutet, daß die angenommene Pfeilrichtung die richtige war, d. h. daß im Stabe Zug herrscht; das zweite Ergebnis bedeutet, daß die wirkliche Spannung der angenommenen gerade entgegengesetzt (mit $\cos 180^\circ$ zu multipliciren) ist, d. h. daß im Stabe Druck herrscht.

Fig. 177.



170.
Verfahren
durch
Rechnung.

a) Analytische Bestimmung der Stabspannungen. Dieselbe kann in zweifacher Weise geschehen: entweder durch Aufstellung aller Gleichgewichtsbedingungen oder nach der sog. Momenten-Methode.

171.
Gleichgewichts-
bedingungen.

a) Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das Bruchstück (Fig. 178), welches, wie im vorigen Artikel angegeben, behandelt ist, ergibt drei Gleichungen, welche nach Art. 6 (S. 7) lauten:

$$\left. \begin{aligned} X \cos \sigma + Y \sin \tau + Z = 0; \quad D_0 - P_1 - P_2 + X \sin \sigma - Y \cos \tau = 0 \\ D_0 \cdot 2a - P_1 a - Z z = 0 \end{aligned} \right\} \dots 207.$$

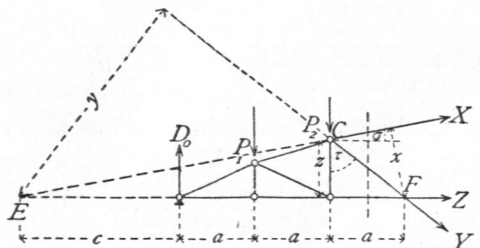
Als Drehpunkt für die dritte Gleichung ist der Punkt C gewählt; alsdann haben X , Y und P_2 kein statisches Moment, weil sie für diesen Drehpunkt keinen Hebelsarm haben.

Der angegebene Weg führt stets, wenn nur 3 Unbekannte, also 3 geschnittene Stäbe vorhanden sind, zum Ziele; er hat den Nachtheil, daß meistens 3 Gleichungen gelöst werden müssen, selbst wenn man nur eine Spannung kennen lernen will.

172.
Ritter'sche
Methode.

b) Das Charakteristische der von Ritter angegebenen Momenten-Methode ist, daß man für jede Spannung nur eine Gleichung erhält; das Mittel dazu bietet die dritte Gleichgewichtsbedingung des vorhergehenden Artikels. Wird der Momentenpunkt so gewählt, daß zwei von den drei Unbekannten das Moment Null haben, so bleibt in der Gleichung nur eine Unbekannte. Das statische Moment jeder der beiden Kräfte ist aber gleich Null für den Schnittpunkt beider Krafrichtungen, weil für diesen Punkt jede der beiden Kräfte den Hebelsarm Null hat. Das Verfahren ist demnach das folgende.

Fig. 178.



Man lege durch den Träger einen Schnitt, so daß nur 3 Stäbe mit unbekanntem Spannungen geschnitten werden, bringe diese Spannungen und alle am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte an, setze die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null und

wähle dabei als Momentenpunkt für die Ermittlung der Spannung eines Stabes stets den Schnittpunkt der beiden mittdurchschnittenen Stäbe.

Um in Fig. 178 die Spannung X zu finden, wählt man F als Momentenpunkt; die Gleichung der statischen Momente heisst dann

$$X x + D_0 \cdot 3 a - P_1 \cdot 2 a - P_2 a = 0,$$

woraus sich die einzige Unbekannte X leicht finden läßt. Für C als Momentenpunkt ergibt sich

$$D_0 \cdot 2 a - P_1 a - Z z = 0,$$

woraus Z zu berechnen ist, und für E als Momentenpunkt

$$Y y - D_0 c + P_1 (c + a) + P_2 (c + 2 a) = 0,$$

woraus Y zu ermitteln ist.

Die Länge der Hebelsarme ergibt sich meistens genügend genau aus der Zeichnung, kann aber auch leicht rechnerisch ermittelt werden.

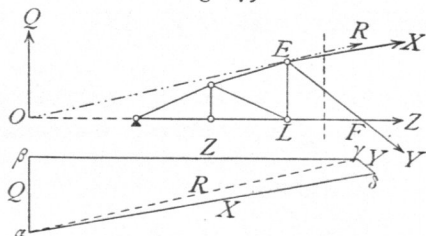
Wir werden den für einen Stab nach dieser Methode sich ergebenden Momentenpunkt den diesem Stabe conjugirten Punkt nennen.

β) Graphische Bestimmung der Stabspannungen. Auch das graphische Verfahren kann nach verschiedenen Arten durchgeführt werden, entweder nach der Schnittmethode oder nach der Vieleckmethode oder nach einer aus Zeichnung und Rechnung zusammengesetzten Weise.

a) Die Schnittmethode wurde von *Culmann* angegeben.

Werden die sämtlichen am Bruchstück wirkenden äusseren Kräfte zu einer Mittelkraft Q (Fig. 179) zusammengefasst, so wirken auf dasselbe 4 Kräfte, nämlich

Fig. 179.



Q und die 3 unbekanntenen Spannungen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe. Für diese 4 Kräfte ergibt sich ein geschlossenes Kraftpolygon. Von einer dieser Kräfte, nämlich von Q , ist Grösse, Richtung und Lage bekannt; von den drei anderen wohl die Richtung und Lage, nicht aber die Grösse. Ersetzt man 2 der unbekanntenen Kräfte, etwa X und Y , durch ihre Mittelkraft R , so bleiben

nur noch die 3 Kräfte Q , Z und R , welche sich nach Art. 8 (S. 8) in einem Punkte schneiden müssen. R muss also durch den Schnittpunkt O von Q und Z gehen. Da R ausserdem durch den Schnittpunkt E von X und Y geht, so sind 2 Punkte der Richtungslinie von R , es ist also auch diese Richtung selbst bekannt. R hat demnach die Richtung $O E$. Im Punkte O halten sich nun die drei Kräfte Q , R und Z das Gleichgewicht; das für dieselben construirte Kraftpolygon ist eine geschlossene Figur, hier ein Dreieck. Ist $Q = \alpha \beta$, so ziehe man durch β eine Parallele zur Richtung von Z , durch α eine solche zur Richtung von R ; der Schnittpunkt γ beider Linien ergibt die beiden Kräfte $R = \gamma \alpha$ und $Z = \beta \gamma$.

In derselben Weise kann nun R in seine beiden Seitenkräfte X und Y zerlegt werden, indem man durch die beiden Endpunkte von R Parallelen zu den Richtungen von bezw. X und Y zieht. Es ergibt sich $\gamma \delta = Y$ und $\delta \alpha = X$.

Es ist für das Endergebnis gleichgiltig, welche zwei von den unbekanntenen Spannungen man zu einer Mittelkraft vereinigt. Man kann auch Y und Z (Fig. 180) durch ihre Mittelkraft R' ersetzen, welche dann durch F und den Schnittpunkt O' der Kraft X mit Q geht. Als Kraftpolygon erhält man $\alpha \beta \epsilon \zeta$.

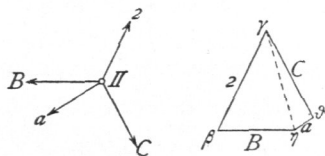
173.
Graphisches
Verfahren.

174.
Culmann'sche
Methode.

Da ferner jeder Stab zu zwei Knotenpunkten gehört, so kommt jede Stabspannung in zwei Kraftpolygone zweiter Ordnung vor. Es wird nun durch zweckmäßige Anordnung möglich, die kleinen Kraftpolygone so in das große einzufachtern, daß nicht nur jede äußere Kraft, sondern auch jede Stabspannung nur einmal im Kräftezuge vorkommt; d. h. auch die kleinen Kraftpolygone hängen dann so zusammen, daß die zwei gemeinsame Stabspannung durch dieselbe Gerade dargestellt wird.

Für die Construction der kleinen Kraftpolygone ist nun Folgendes zu beachten. Wenn, wie hier die Richtung sämtlicher Kräfte bekannt ist und das Kraftpolygon wegen des Gleichgewichtes der Kräfte sich schließt, so ist die Construction desselben stets möglich, wenn am Knotenpunkte nur zwei unbekannt Kräfte vorhanden sind. Denn seien etwa in Fig. 182 B und z bekannt, a und C unbekannt, so erfordert

Fig. 182.



das Gleichgewicht, daß die Mittelkraft von a und C der bekannten Mittelkraft von z und B der Größe nach genau gleich ist. Die bekannte Mittelkraft von z und B ist aber die Verbindungslinie $\gamma\phi$ im Kraftpolygon, und es ist dieselbe im entgegengesetzten Sinne genommen ohne Schwierigkeit in die beiden Seitenkräfte C und a zu zerlegen, indem durch den einen Endpunkt, etwa γ , eine Parallele zu C , durch den anderen Endpunkt, etwa ϕ , eine Parallele zu a gezogen wird. Der Schnittpunkt β ergibt $\gamma\beta = C$ und $\beta\phi = a$. Alsdann ist $\beta\gamma\phi$ das kleine Kraftpolygon für Punkt II. Man

muß es demnach bei der Construction der kleinen Kraftpolygone so einrichten, daß stets nur 2 Unbekannte da sind. Zu diesem Zwecke beginnt man mit demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, hier also etwa mit I (Fig. 181). Die äußere Kraft ist bekannt; unbekannt sind demnach nur A und B und nach Obigem leicht zu ermitteln. Man geht nun zu einem Knotenpunkt über, von welchem man wiederum alle Kräfte mit Ausnahme von zweien kennt, hier zu II. Bekannt sind hier z und B , unbekannt C und a , demnach leicht ermittelt. So schreitet man weiter. Ein Knotenpunkt, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, ist bei den in der Praxis üblichen Gitterträgern stets vorhanden.

Damit nun jede äußere Kraft und jede Stabspannung nur einmal in dem entstehenden Kräftezuge — dem Kräfteplan — vorkomme, ist folgende Regel zu befolgen. Man vereinige sämtliche äußere Kräfte zu einem geschlossenen Kraftpolygon, indem man sie in der Folge der Knotenpunkte oder, wie man sagt, in cyclischer Reihenfolge an einander legt, und ziehe nun durch die Eckpunkte dieses Kraftpolygons Parallelen zu den Randstäben derart, daß die Parallele zu einem Randstabe, etwa zu A , durch denjenigen Eckpunkt des großen Kraftpolygons geht, welcher zwischen den beiden äußeren Kräften liegt, zwischen denen der betreffende Randstab im Fachwerk sich befindet. Der Randstab A liegt im Fachwerk zwischen den äußeren Kräften r und s ; die Parallele zu A wird also durch den Punkt α zwischen r und s gezogen; eben so die Parallele zum Randstab B durch β zwischen r und z etc. Unter Benutzung der hier gezogenen Parallelen construirt man nun, wie oben angegeben, die kleinen Kraftpolygone; alsdann erhält man einen Linienzug zwischen den Randstäben, in welchem jede einzelne Linie eine Zwischenstabspannung darstellt und in welchem jede Zwischenstabspannung nur einmal vorkommt. Die auf den Parallelen zu den Randstäben abgeschnittenen Längen geben die Spannungen der Randstäbe an.

Der Sinn der Stabspannungen wird hier genau in derselben Weise aus dem Kraftpolygon für einen Knotenpunkt ermittelt, wie im vorhergehenden Artikel angegeben ist.

c) Verfahren von Zimmermann für Fachwerke, welche durch parallele äußere Kräfte beansprucht werden.

Die Mittelkraft aller links vom Schnitte II auf den Träger wirkenden äußeren Kräfte sei Q (Fig. 183); alsdann ist das Moment derselben

für den Punkt C als Drehpunkt: für den Punkt D als Drehpunkt:

$$M_C = Q \xi; \quad M_D = Q (\xi + a).$$

Demnach wird

$$Q a = M_D - M_C \quad \text{und} \quad Q = \frac{M_D}{a} - \frac{M_C}{a}.$$

Man trage nun nach einem beliebigen Mafsstabe $\frac{M_C}{a}$ von C' nach oben ab, eben so $\frac{M_D}{a}$ nach demselben Mafsstabe von D aus, so dafs

$$DD'' = \frac{M_D}{a} \quad \text{und} \quad C'C'' = \frac{M_C}{a}$$

ist, ziehe durch C'' und D'' je eine Parallele zu demjenigen Gurtungsstabe, welcher an derselben Seite der Diagonale liegt, wie der betreffende Punkt, also durch C'' eine Parallele zu FD , durch D'' eine solche zu CE . Dann wird $\mathcal{F}D'' = \frac{M_D}{a} - \frac{M_C}{a} = Q$;

in dem so erhaltenen, schraffirten Vierecke $\mathcal{F}D''GH$ ist alsdann:

$D''G$ die Spannung im Gurtungsstabe CE ,

GH die Spannung in der Diagonalen CD ,

$H\mathcal{F}$ die Spannung im Gurtungsstabe FD ,

und zwar in demselben Mafsstabe, nach welchem $\frac{M_D}{a}$, bzw. $\frac{M_C}{a}$ aufgetragen sind.

Nach dem Vorstehenden ist nämlich, da die auf das Trägerstück links von II wirkenden äufseren Kräfte mit X, Y, Z zusammen Gleichgewicht herstellen müssen, die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte für einen beliebigen Drehpunkt, also auch für D , gleich Null; mithin

$$0 = Q(a + \xi) + Xh, \quad \text{woraus} \quad X = -\frac{Q(a + \xi)}{h} = -\frac{M_D}{h}.$$

Das Vorzeichen soll zunächst unberücksichtigt gelassen und nur die absolute Gröfse von X in das Auge gefaßt werden. Es ist alsdann

$$X = \frac{M_D}{h} = \frac{M_D}{a} \cdot \frac{a}{h} = \frac{M_D}{a} \cdot \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma}.$$

Nun ist $\frac{a}{\cos \sigma} = \overline{CE}$ und $\frac{h}{\cos \sigma} = \overline{DE}$, demnach

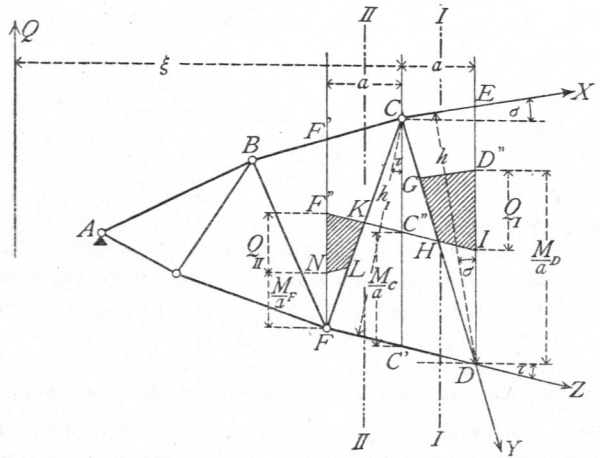
$$X = \frac{M_D}{a} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \overline{DD''} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}.$$

Es ist aber auch nach Fig. 183

$$\frac{\overline{D''G}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DD''}}{\overline{DE}}, \quad \text{daher} \quad \overline{D''G} = \overline{DD''} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}},$$

woraus folgt, dafs $X = \overline{D''G}$ ist. Auf den Trägertheil links vom Schnitte II wirken nun vier Kräfte: die Mittelkraft Q aller äufseren Kräfte und die Spannungen der vom Schnitte II getroffenen Stäbe, also X, Y, Z . Da diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so muß sich aus ihnen ein geschlossenes Kraftpolygon herstellen lassen. Zwei von den vier Kräften sind bekannt, nämlich Q und X , und bereits an einander gereiht ($\mathcal{F}D''G$); das gefuchte Kraftpolygon ist also nach bekannten Regeln leicht dadurch zu vervollständigen, dafs man durch den einen Endpunkt G des Linienzuges die Parallele zu Y (dieselbe fällt mit der Diagonalen zusammen) und durch den anderen Endpunkt \mathcal{F} des Linienzuges die Parallele zu Z zieht; das erhaltene Viereck $\mathcal{F}D''GH$ ist das gefuchte Kraftpolygon, womit die obige Behauptung

Fig. 183.



erwiesen ist. Die Art der Beanspruchung ergibt sich, wie stets, aus dem Umfahrungsfinne im Kraftpolygon.

Legt man in gleicher Weise den Schnitt $IIII$ durch den Träger, trägt von F aus $FN = \frac{M_F}{a}$ nach oben ab, zieht durch N eine Parallele zum Gurtungsstabe BC , durch C'' eine Parallele zum Gurtungsstabe FD , so erhält man, wie oben, ein Viereck $NF''KL$, dessen Seitenlängen entsprechende Stabspannungen darstellen. Es ist nämlich

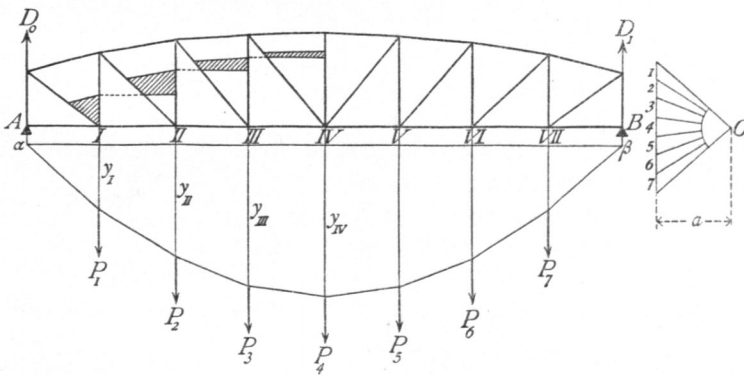
$$\overline{NF''} = \frac{M_C}{a} - \frac{M_F}{a} = Q_{II},$$

$$Z = \frac{M_C}{h_1} = \frac{M_C}{a} \cdot \frac{a}{h_1} = \frac{M_C}{a} \cdot \frac{\frac{a}{\cos \tau}}{h_1} = \overline{FF''} \cdot \frac{\overline{FC'}}{\overline{CC'}} = \overline{F''K}.$$

Die weitere Vervollständigung des den vier Kräften, welche bei Schnitt $IIII$ in Betracht kommen, entsprechenden Kraftpolygons ist, wie oben, vorzunehmen. Es ist $\overline{F''K}$ die Spannung im Gurtungsstabe FD , \overline{KL} die Spannung in der Diagonalen FC und \overline{LN} die Spannung im Gurtungsstabe BC .

* Meistens hat die Feldweite a im ganzen Träger die gleiche Größe; es ändert sich aber in der Grundlage nichts, wenn einzelne Felder des Trägers andere Knotenpunktabstände als a aufweisen. Die Werthe $\frac{M}{a}$ können durch Rechnung oder durch Construction ermittelt werden.

Fig. 184.



Sollen die Ausdrücke $\frac{M}{a}$ für die einzelnen Knotenpunkte rechnerisch bestimmt werden, so führt man zweckmäßig die Feldweite a als Einheit ein. Sind in Fig. 184 alle Knotenpunktlasten gleich P , so wird

$$D_0 = D_1 = \frac{7P}{2} \quad \text{und} \quad \frac{M_I}{a} = \frac{7P}{2} = \frac{M_{VII}}{a},$$

$$\frac{M_{II}}{a} = \frac{7P}{2} \cdot 2 - P \cdot 1 = 6P = \frac{M_{VI}}{a},$$

$$\frac{M_{III}}{a} = \frac{7P}{2} \cdot 3 - P \cdot 1 - P \cdot 2 = 7,5P = \frac{M_V}{a},$$

$$\frac{M_{IV}}{a} = \frac{7P}{2} \cdot 4 - P(1 + 2 + 3) = 8P.$$

Construirt man für die gegebenen Lasten und den Polabstand a ein Seilpolygon, so geben die den einzelnen Knotenpunkten entsprechenden lothrechten Höhen des Seilpolygons (von der Schlußlinie $\alpha\beta$ aus gemessen) die Werthe von $\frac{M}{a}$. In

Fig. 184 ist $y_I = \frac{M_I}{a}$, $y_{II} = \frac{M_{II}}{a}$ etc.

Um nicht weit über die Zeichnung fallende Kraftpolygone zu erhalten, ist in Fig. 184 bei Construction der schraffirten Kraftpolygone überall $\frac{M_D}{2a}$ aufgetragen; der für den Kräftezug gewählte Maßstab ist $1\text{ mm} = 1\text{ Tonne}$; es müssen demnach die Spannungen, welche sich in den schraffirten Kraftpolygonen ergeben, auf einem doppelt so großen Maßstabe abgegriffen werden, auf welchem also $1\text{ mm} = 2\text{ Tonnen}$ bedeutet.

2) Parallelträger mit Netzwerk oder zwei Scharen von Diagonalen.

176.
Berechnung
der Gurtungs-
spannungen.

a) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Um diese Spannungen für eine beliebige Belastung zu ermitteln, nennen wir die Mittelkraft aller auf das Bruchstück links vom Schnitte II (Fig. 185) wirkenden Kräfte Q . Für irgend einen Stab CE der oberen Gurtung ist F der Momenten- oder conjugirte Punkt, und es ist das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf diesen Punkt $M = Q \cdot \eta$. Daraus folgt als Bedingungsgleichung:

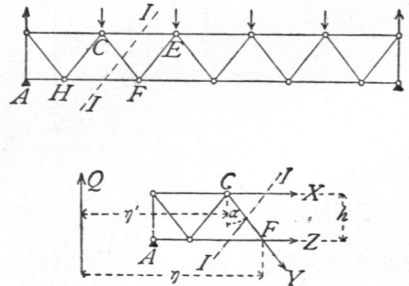
$$0 = M + Xh, \text{ woraus } X = -\frac{M}{h} \dots \dots \dots 208.$$

In gleicher Weise ergibt sich für C als Momentenpunkt, wenn M_1 das Moment von Q in Bezug auf C ist,

$$0 = M_1 - Zh, \text{ woraus } Z = \frac{M_1}{h} \dots \dots \dots 209.$$

Da bei einem Träger auf zwei Stützen M stets die angegebene Drehrichtung hat (stets positiv ist, vgl. Art. 85, S. 59), so folgt aus den Gleichungen 208 u. 209: Bei Trägern auf zwei Stützen werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen. Ferner: X_{max} und Z_{max} wird bei derselben Belastung wie M_{max} stattfinden, d. h. in jedem Gurtungsstabe findet größte Beanspruchung bei derjenigen Belastung statt, bei welcher das Moment für den dem Stabe conjugirten Punkt sein Maximum erreicht. Wird gleichmäßig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so findet für jeden Querschnitt das größte Moment bei voller Belastung statt; sämmtliche Gurtungsstäbe werden demnach bei voller Belastung am meisten beansprucht.

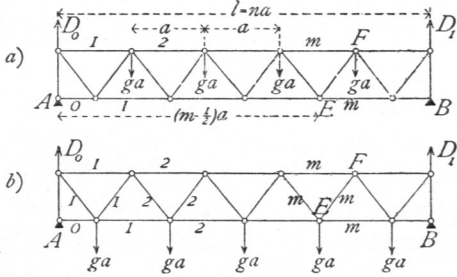
Fig. 185.



a) Das Eigengewicht der Construction kann als eine gleichmäßig über die Länge des Trägers vertheilte Belastung angesehen werden. Wir bezeichnen es mit g für die Längeneinheit und machen die vereinfachende Annahme, daß alle Belastungen

durch Eigengewicht nur in der einen Gurtung angreifen, welche Annahme für den Hochbau stets ausreicht. Die Entfernung der Knotenpunkte sei a (Fig. 186), die

Fig. 186.



Felderzahl des Trägers n , mithin $l = n a$. Jeder Mittenknotenpunkt ist mit $g a$ belastet; die Belastungen der Knotenpunkte über den Auflagern berücksichtigen wir nicht, weil diese unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden.

Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 186a), so ist bei der angenommenen Diagonalenanordnung der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten Stab der oberen Gurtung ist E der Momentenpunkt und

$$M = D_0 \left(m - \frac{1}{2} \right) a - (m - 1) g a \left(\frac{m - 2}{2} a + \frac{a}{2} \right);$$

$$M = \frac{g a^2}{2} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right];$$

$$X_m^g = - \frac{g a^2}{2 h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \dots \dots \dots 210.$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung ist F der Momentenpunkt und

$$M_1 = D_0 m a - (m - 1) g a \frac{m a}{2} = \frac{g a^2}{2} m (n - m);$$

$$Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m) \dots \dots \dots 211.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 186b), so ist

$$D_0 = D_1 = \frac{n g a}{2}.$$

Genau wie oben erhält man

$$X_m^g = - \frac{g a^2}{2 h} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \text{ und } Z_m^g = \frac{g a^2}{2 h} m (n - m) \dots 212.$$

Wenn die Diagonalen eine andere Richtung haben, so daß die erste vom Auflagerpunkt nach der Mitte ansteigt, so ergeben sich etwas andere Formeln, die auf gleiche Weise, wie eben gezeigt, zu ermitteln sind.

b) Die größten Gurtungsspannungen in Folge gleichmäßig vertheilter Nutzlast finden statt, wenn der ganze Träger belastet ist. Nennt man die gleichmäßig vertheilte Nutzlast für die Längeneinheit p , so ergeben sich offenbar für diese Belastung, die für den Knotenpunkt gleich $p a$ ist, genau dieselben Formeln, wie für das Eigengewicht, wobei nur g durch p zu ersetzen ist. Man erhält also für an der oberen Gurtung angreifende Lasten (Fig. 186a)

$$X_m^p = - \frac{p a^2}{2 h} \left[(n + 1) \left(m - \frac{1}{2} \right) - m^2 \right] \text{ und } Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m), \dots 213.$$

für an der unteren Gurtung angreifende Lasten (Fig. 186b)

$$X_m^p = - \frac{p a^2}{2 h} \left[m (n - m + 1) - \frac{n}{2} \right] \text{ und } Z_m^p = \frac{p a^2}{2 h} m (n - m) \dots 214.$$

c) Für eine Belastung des Trägers durch Einzellaften P_1, P_2 (Fig. 187) sind in die allgemeinen Gleichungen 208 u. 209 die den einzelnen Stäben entsprechenden Momentenwerthe einzusetzen.

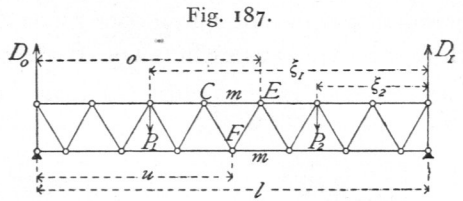


Fig. 187.

177.
Berechnung
d. Gitterstabs-
spannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für eine beliebige Belastung sei Q die Mittelkraft aller links vom Schnitte II (Fig. 188) wirkenden äußeren Kräfte. Nennt man die Spannung der vom Schnitte getroffenen nach rechts fallenden Diagonale Y , so muß, weil die algebraische Summe der auf das Bruchstück wirkenden lothrechten Kräfte gleich Null ist, stattfinden:

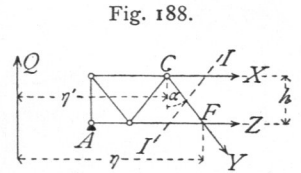


Fig. 188.

$$0 = Q - Y \cos \alpha, \text{ woraus } Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 215.$$

für eine nach rechts steigende Diagonale (Fig. 189) ist

$$0 = Q' + Y' \cos \beta, \text{ woraus } Y' = - \frac{Q'}{\cos \beta} \dots \dots \dots 216.$$

a) Das Eigengewicht erzeugt, wenn die Lasten an der oberen Gurtung angreifen, den Auflagerdruck (Fig. 186a)

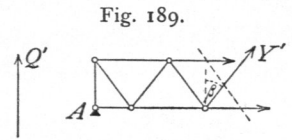


Fig. 189.

$$D_0 = D_1 = (n - 1) \frac{g a}{2}.$$

Für den m -ten nach rechts fallenden Stab ist

$$Q_m = (n - 1) \frac{g a}{2} - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1),$$

sonach

$$Y_m^g = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2 m + 1); \dots \dots \dots 217.$$

für den m -ten nach rechts steigenden Stab ist

$$Q'_m = \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1), \text{ daher } Y'_m^g = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2 m + 1) \dots \dots \dots 218.$$

Aus den Gleichungen 217 u. 218 für Y_m^g und Y'_m^g folgt leicht: Bei gleichmäßig über den Träger vertheilter Belastung g (oder p) auf die Längeneinheit werden die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt.

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 186 b), so ist für die m -te rechts fallende Diagonale

$$Y = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2 m + 2), \dots \dots \dots 219.$$

für die m -te rechts steigende Diagonale

$$Y' = - \frac{g a}{2 \cos \beta} (n - 2 m) \dots \dots \dots 220.$$

Das Gesetz, das bei dieser Belastungsart die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen gedrückt werden, ist auch hier gültig.

b) Um die ungünstigsten Gitterstabspannungen, welche in Folge der Nutzlast entstehen, zu ermitteln, erwäge man, dafs bei beliebiger Belaftung für rechts fallende Diagonalen nach Gleichung 215: $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$ und für rechts steigende Diagonalen

nach Gleichung 216: $Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta}$ ist. Der grösste Werth von Y findet demnach bei derjenigen Belaftung statt, bei welcher die Querkraft Q ihren grössten Werth hat. Nach Art. 153 (S. 133) hat aber die Querkraft für einen Querschnitt ihren grössten positiven Werth, wenn der Trägertheil rechts vom betrachteten Querschnitte belaftet, der Trägertheil links davon unbelaftet ist, ihren grössten negativen Werth bei der umgekehrten Belaftung. Daraus folgt: Jede nach rechts fallende Diagonale erleidet den grössten Zug durch Nutzlast, wenn die rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaftet, die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte unbelaftet sind; dagegen den grössten Druck, wenn die links vom Schnitte gelegenen Knotenpunkte belaftet, die übrigen unbelaftet sind. Da $Y' = -\frac{Q'}{\cos \beta}$, so findet in den nach rechts steigenden Diagonalen der grösste Druck statt, wenn Q' seinen grössten positiven Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte rechts vom Schnitte belaftet sind, der grösste Zug dagegen, wenn Q' seinen grössten negativen Werth hat, wenn also nur die Knotenpunkte links vom Schnitte belaftet sind.

Allgemeiner kann die Regel wie folgt ausgesprochen werden: Jede Diagonale erleidet den grössten Zug, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Fusspunkte und demjenigen Auflager, nach welchem dieser Fusspunkt zeigt, belaftet sind; jede Diagonale erleidet den grössten Druck, wenn nur die Knotenpunkte zwischen ihrem Kopfpunkte und demjenigen Auflager belaftet sind, nach welchem dieser Kopfpunkt hinweist. Dieser Satz gilt allgemein, ob die Lastpunkte an der oberen oder unteren Gurtung liegen. Daraus folgt, dafs für die Diagonalen nicht die volle, sondern die theilweise Belaftung die ungünstigste ist und dafs man demnach auch im Hochbau, falls einseitige Belaftung möglich ist (in Versammlungsräumen, Schulen etc.) bei der Berechnung der Träger auf dieselbe Rücksicht nehmen mufs. Für jede Diagonale ist eine andere ungünstigste Belaftung einzuführen.

Nachdem nunmehr die ungünstigsten Belaftungsarten für die einzelnen Stäbe ermittelt sind, handelt es sich um die Auffuchung der durch dieselben erzeugten positiven, bezw. negativen Maxima von Y und Y' . Greifen die Lasten an der oberen Gurtung an (Fig. 190), so ist Q genau eben so gros, als wenn beim vollwandigen Träger die Einzellasten $p a$ je auf die Längen a gleichmäfsig vertheilt wären, d. h. als wenn die Last p für die Längeneinheit von der Mitte des äufsersten Feldes am rechten, bezw. linken Auflager bis zur Mitte desjenigen Feldes der oberen Gurtung vorgerückt ist, dem die Diagonale angehört. Denn im ersten Falle ist, wenn r belastete Knotenpunkte vorhanden sind,

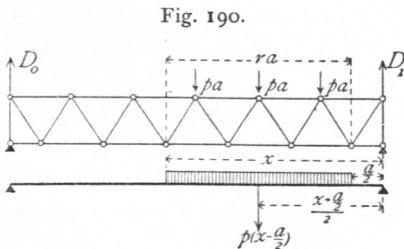


Fig. 190.

$$D_0 = \frac{r a p}{l} \left(\frac{r a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{r p a^2}{2 l} (r + 1),$$

und da $x = r a + \frac{a}{2} = a \left(r + \frac{1}{2} \right)$, also $x + \frac{a}{2} = a (r + 1)$ ist, so wird

$$D_0 = \left(x + \frac{a}{2}\right) \frac{r p a}{2 l} = \frac{p}{2 l} \left(x + \frac{a}{2}\right) \left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{p}{2 l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Derfelbe Werth ergibt sich für den vollwandigen Träger in Fig. 190, nämlich

$$D_0 = \frac{p}{2 l} \left(x - \frac{a}{2}\right) \left(x + \frac{a}{2}\right).$$

Es gilt dies allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit der Nutzlast belasteten Gurtung um eine ganze Feldweite von den Auflagern abliegen.

Nun ist für diejenigen Diagonalen, für welche die gezeichnete Belastung den größten Zug, bezw. größten Druck erzeugt, $Q_{max} = D_0$, daher nach Gleichung 215

$$Y_{max} = \frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 221.$$

In gleicher Weise ergibt sich nach Fig. 191

$$D_0 = \frac{p \left(l - x - \frac{a}{2}\right)}{l} \left(x + \frac{l - x - \frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{p}{2 l} \left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right];$$

$$Q_{x min} = \frac{p}{2 l} \left[\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] - p \left(l - \frac{a}{2} - x\right) = -\frac{p}{2 l} \left[\left(l - x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right],$$

und

$$Y_{min} = -\frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[\left(l - x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 222.$$

Dem entsprechend wird

$$Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta} = -\frac{p}{2 l \cos \beta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right], \quad 223.$$

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} = \frac{p}{2 l \cos \beta} \left[\left(l - x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]. \quad 224.$$

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an (Fig. 192), so ist (wenn mit ganz geringem Fehler die Belastung der beiden den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte gleichfalls mit $p a$ eingeführt wird) Q_{max} , bezw. Q_{min} eben so groß, wie bei einem vollwandigen Träger, bei welchem die Last p für die Längeneinheit vom rechten, bezw. linken Auflager aus bis zur Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vorgerückt ist, welchem die Diagonale angehört. Der Beweis ist in gleicher Weise, wie oben, zu führen und gilt allgemein, falls die den Auflagern zunächst liegenden Knotenpunkte der mit Nutzlast belasteten Gurtung um eine halbe Feldweite von den Auflagern entfernt sind. Demnach ist

$$Q_{max} = \frac{p x^2}{2 l} \quad \text{und} \quad Q_{min} = -\frac{p (l - x)^2}{2 l}.$$

x bedeutet in diesen Gleichungen den Abstand der Mitte desjenigen Feldes der unteren Gurtung vom rechten Auflager, zu welchem die Diagonale gehört.

Fig. 191.

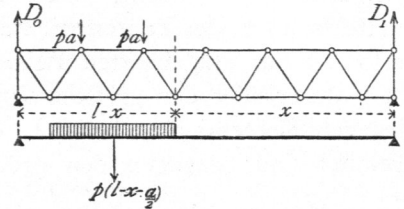
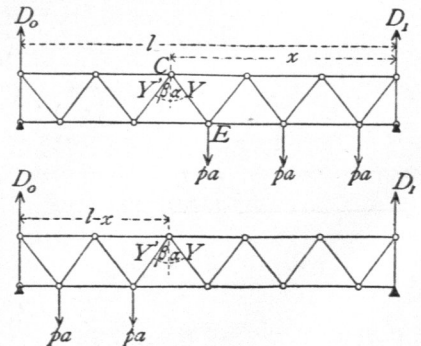


Fig. 192.



Man erhält

$$Y_{max} = \frac{p x^2}{2 l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p (l-x)^2}{2 l \cos \alpha}, \quad \dots \quad 225.$$

$$Y'_{min} = -\frac{p x^2}{2 l \cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{max} = \frac{p (l-x)^2}{2 l \cos \beta} \quad \dots \quad 226.$$

Die zusammengehörigen Werthe von Y und Y' beziehen sich auf zwei Diagonalen, welche demselben Felde der unteren Gurtung angehören.

c) Erfährt der Träger eine volle Belaftung p für die Längeneinheit, so sind die unter α für Eigengewichtsbelaftung gefundenen Werthe auch für diesen Fall gültig, wenn statt des dortigen g die Größe p eingeführt wird.

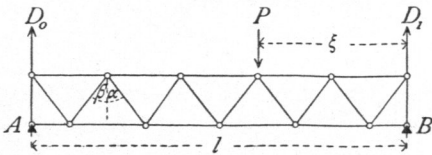
b) Wird endlich der Träger durch Einzellasten beansprucht (Fig. 193), so erzeugt die Last P im Abstände ξ von B den Stützendruck $D_0 = \frac{P \xi}{l}$. In sämtlichen

rechts fallenden Diagonalen links vom Lastpunkt wird dann $Y = \frac{D_0}{\cos \alpha} = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}$;

in sämtlichen rechts steigenden Diagonalen links vom Lastpunkte ist $Y' = -\frac{P \xi}{l \cos \beta}$.

Eben so ist für alle Querschnitte rechts vom Lastpunkte $Q = D_0 - P = -\frac{P(l-\xi)}{l}$,

Fig. 193.



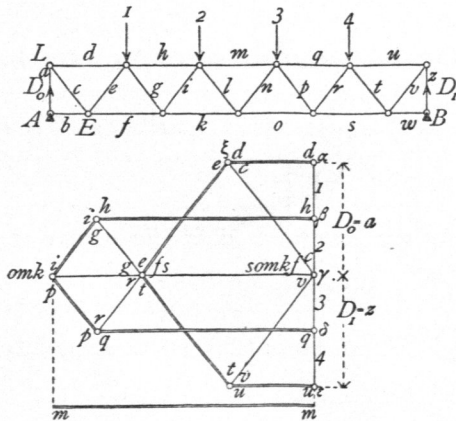
mithin für die nach rechts fallenden Diagonalen dieser Strecke $Y_1 = -\frac{P(l-\xi)}{l \cos \alpha}$,

für die nach rechts steigenden Diagonalen dieser Strecke $Y'_1 = \frac{P(l-\xi)}{l \cos \beta}$. Daraus folgt die

Regel: Die nach dem Lastpunkte zu fallenden Diagonalen werden gezogen, die nach demselben steigenden Diagonalen werden gedrückt.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Setzt man zunächst eine gleichmäßig vertheilte Belaftung (Eigengewicht, bezw. volle Nutzlast) voraus, so macht es für das Verfahren keinen Unterschied, ob die Lasten an der oberen oder an der unteren Gurtung angreifen. Wenn in jedem Knotenpunkte, z. B. der oberen Gurtung (Fig. 194)

Fig. 194.



die Belaftung $g a$, bezw. $p a$ wirkt, so empfiehlt sich für die Ermittlung der Spannungen die Vieleckmethode, weil dieselbe sämtliche Stabspannungen in einem Linienzuge giebt.

Nachdem D_0 und D_1 auf bekannte Art gefunden sind, trägt man alle äußeren Kräfte $1, 2, 3, 4, D_1$ und D_0 in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander. Es sei $\alpha \beta = 1, \beta \gamma = 2, \gamma \delta = 3, \delta \varepsilon = 4$; nun trägt man an ε (den Endpunkt von 4) $D_1 = \varepsilon \gamma$ und $D_0 = \gamma \alpha$. Damit schließt sich das Kraftpolygon der äußeren Kräfte. Wir gehen nun von demjenigen Knotenpunkte, in welchem sich nur 2 Stäbe schneiden, d. h. von A aus. In A wirken D_0, a und b ; die Zerlegung von D_0 in die beiden Componenten a und b ergibt $a = D_0$ und $b = 0$. Im Knotenpunkte L wirken jetzt a, c und d . Bei der Zerlegung von $a (= \gamma \alpha)$ ist zu beachten, daß die Parallele zum Randstabe d durch den

178.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

Punkt im Kraftpolygon gehen muß, der zwischen D_0 und r liegt, d. h. durch α . Man erhält $\alpha \xi = d$ und $\xi \gamma = c$. (Nach Art. 174, S. 151 ist d Druck und c Zug.) Geht man nun zum Knotenpunkte E über, so wirken da selbst ($b = 0$) c , e und f ; bekannt ist $c = \gamma \xi$. Demnach sind e und f durch Zerlegung zu ermitteln, wobei die Parallele zum Randstab f durch den Punkt γ im Kraftpolygon gehen muß, welcher zwischen D_1 und D_0 liegt, da der Randstab f im System sich zwischen den Kräften D_0 und D_1 befindet. Man erhält leicht e und f . (Da c , wie oben gefunden, Zug ist, erhält e Druck, f Zug.) Geht man so weiter, so ergibt sich der in Fig. 194 gezeichnete Kräfteplan. In demselben sind die Druckspannungen durch doppelte, die Zugspannungen durch einfache Linien bezeichnet; m ist Druck, fällt aber mit einer Anzahl von Zugspannungen zusammen und ist deshalb besonders herausgezeichnet. Die Endpunkte der Stabspannungen sind stets durch diejenigen Buchstaben bezeichnet, welche die bezüglichen Stäbe im System führen. Die Spannungen b , l , n , w werden gleich Null.

Um die größten in den Gitterstäben durch die Nutzlasten erzeugten Zug-, bezw. Druckspannungen zu bestimmen, beachte man, daß $Y_{max} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$, $Y_{min} = \frac{Q_{min}}{\cos \alpha}$,

$$Y'_{max} = -\frac{Q_{min}}{\cos \beta} \quad \text{und} \quad Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta} \text{ ist.}$$

Wenn die Lasten $p a$ an der oberen Gurtung angreifen oder allgemein, wenn die den Auflagern zunächst gelegenen Knotenpunkte der belasteten Gurtung von diesen um eine ganze Feldweite a abliegen, so ist

$$Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Die graphische Darstellung von Q_{max} ergibt eine Parabel (Fig. 195 a).

Für $x = 0$ wird $Q_{max} = -\frac{p a^2}{8l}$; für $x = l$

wird $Q_{max} = \frac{p}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{p l}{2} - \frac{p a^2}{8l}$. Q_{max}

wird Null für $x = \frac{a}{2}$; die Curve hat ein Minimum für $0 = 2x$, d. h. für $x = 0$. Danach ist die Curve in Fig. 195 a construiert.

Hier sind diejenigen Ordinaten der Curve als Werthe von Q_{max} einzuführen, welche den Fußpunkten der betreffenden Diagonalen entsprechen. Für die Diagonale CE ergibt sich mn als Werth von Q_{max} . Die durch n parallel zur Diagonale CE gezogene Linie no giebt den Werth von $Y = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}$; denn es ist

$$\frac{no}{\cos \alpha} = \frac{mn}{\cos \alpha} = \frac{Q_{max}}{\cos \alpha}.$$

Nach Gleichung 223 ist $Y'_{min} = -\frac{Q_{max}}{\cos \beta}$, also nr der größte Druck in der rechts steigenden Diagonale EF .

Es ist ferner

$$Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right].$$

Wird die Differenz $l-x = \xi$ gesetzt, so ergibt sich, daß die Curve für $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$ derjenigen für Q_{max} congruent ist.

Für $\xi = 0$ ist $Q_{min} = +\frac{p a^2}{8l}$; für $\xi = l$ ist $Q_{min} = -\frac{p}{2l} \left[l^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = -\frac{p l}{2} + \frac{p a^2}{8l}$.

Man erhält die in Fig. 195 a gezeichnete Curve, in welcher für die rechts fallende Diagonale CE das Minimum nt , für die rechts steigende Diagonale das Maximum nu eingezeichnet ist.

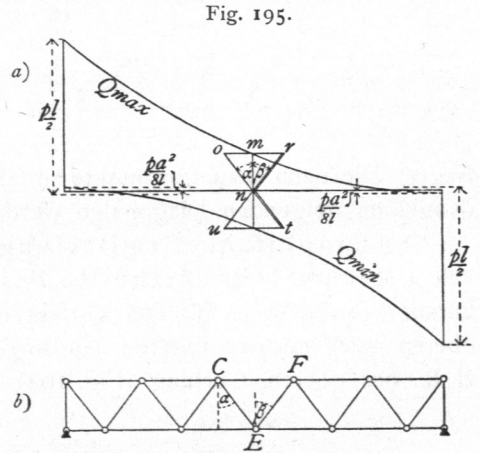


Fig. 195.

Greifen die Laften an der unteren Gurtung an oder allgemein, find die an der mobil belasteten Gurtung gelegenen Knotenpunkte zunächft den Auflagern von diesen um je eine halbe Feldweite entfernt, fo ergibt die Verzeichnung der Curven für Q_{max} und Q_{min} entsprechend den Gleichungen in Art. 177 (S. 160) unten stehende Parabeln (Fig. 196 a).

Man erhält genau wie oben: der Maximalzug in CE ist cd ; der Maximaldruck in CF ist cf ; der Maximaldruck in CE ist cv ; der Maximalzug in CF ist cw .

Fig. 196.

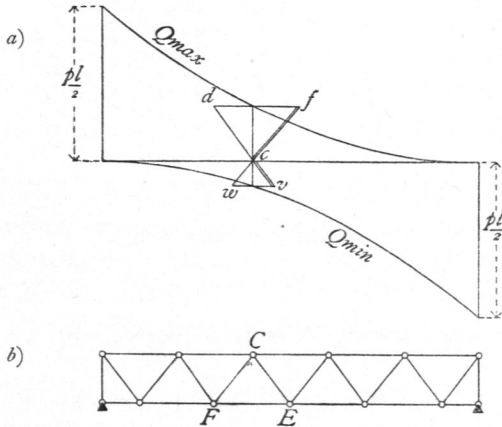
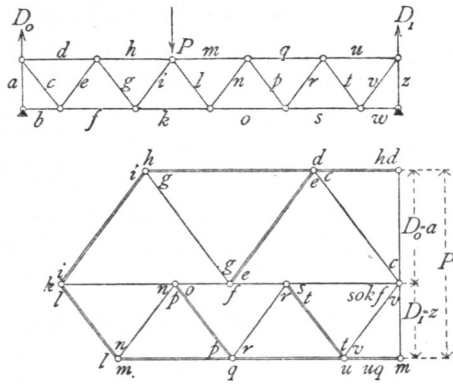


Fig. 197.



Für eine Einzellaft wird die Ermittlung der Spannungen bequem mittels des *Cremona'schen* Kräfteplans vorgenommen, wie in Fig. 197 gefchehen ist; dieselbe ist ohne Weiteres verständlich.

δ) Art der Beanspruchung der Stäbe bei einem Träger auf zwei Stützen. Nach Art. 176 (S. 156) werden die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren stets gezogen. Die Diagonalen erhalten verschiedene Beanspruchungen. Durch das Eigengewicht erhalten die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Zug, die nach der Mitte zu steigenden Diagonalen Druck; durch die ungünstigste Nutzlast erhalten im Allgemeinen alle Diagonalen sowohl Zug, wie Druck. Wenn der größte Druck, der in einer Diagonalen durch Nutzlast entsteht, kleiner ist, als der Zug durch Eigengewicht, so erleidet die Diagonale nur Zug, umgekehrt nur Druck. Für die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen nahe dem Auflager ist der Zug in Folge des Eigengewichtes meistens viel größer, als der größte Druck durch Nutzlast, und es werden daher diese Diagonalen meistens nur gezogen. Eben so ergibt sich, das die nahe dem Auflager befindlichen, nach der Mitte zu ansteigenden Diagonalen nur Druck erhalten. Die Diagonalen im mittleren Theile des Trägers werden dagegen sowohl gezogen, wie gedrückt.

179.
Art
der Stab-
beanspruchung.

3) Parallelträger mit Diagonalen und Verticalen.

α) Berechnung der Spannungen in den Gurtungen. Für eine beliebige Belastung wird genau so, wie in Art. 176 (S. 156), wenn M das Biegemoment für den zu einem oberen Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt, M' das Biegemoment für den zu einem unteren Gurtungsstabe gehörigen Momentenpunkt bezeichnet,

180.
Berechnung
d. Gurtungs-
spannungen.

$$X = -\frac{M}{h} \quad \text{und} \quad Z = \frac{M'}{h}$$

Auch hier findet also die grösste Beanspruchung der Gurtungsstäbe bei voller Be-
lastung des Trägers statt.

Für die Belastung durch Eigengewicht, bezw. volle gleichmässig ver-
theilte Nutzlast (Fig. 198) ist die Span-
nung in den Gurtungsstäben davon unab-
hängig, ob die Lasten an der oberen oder
an der unteren Gurtung angreifen.

Für den m -ten Stab der oberen, bezw.
der unteren Gurtung erhält man die durch
das Eigengewicht g für die Längeneinheit
erzeugten Spannungen

$$X_g = -\frac{g a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_g = \frac{g a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \quad . \quad 227.$$

und die durch volle Nutzlast p für die Längeneinheit erzeugten Spannungen

$$X_p = -\frac{p a^2 m (n - m)}{2 h} \quad \text{und} \quad Z_p = \frac{p a^2}{2 h} (m - 1) (n - m + 1) \quad . \quad 228.$$

X_p und Z_p sind zugleich die grössten Spannungen, die durch Nutzlast hervorgebracht
werden.

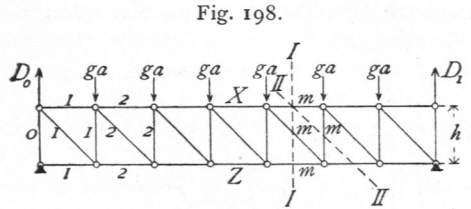


Fig. 198.

81.
Berechnung
d. Gitterstabs-
spannungen.

β) Berechnung der Spannungen in den Gitterstäben. Für das Bruch-
stück in Fig. 199 sei bei beliebiger Belastung die Querkraft Q ; alsdann ist für
die Spannung in der Diagonalen

$$Y \cos \alpha = Q, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad 229.$$

Ist in Fig. 200 die Querkraft für das Bruchstück Q' , so ist die Spannung in
der Verticalen

$$V = -Q' \quad . \quad . \quad . \quad 230.$$

Für die Diagonalen ist es, da der Schnitt
lothrecht gelegt werden kann, gleichgültig, ob die
Last in der oberen oder unteren Gurtung liegt; für
die Verticalen dagegen ergibt sich, da der Schnitt
bei diesen schräg gelegt wird, ein anderes Q' , wenn
die Last oben, als wenn sie unten liegt.

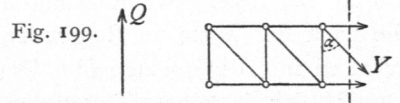


Fig. 199.

a) Das Eigengewicht erzeugt (Fig. 198) in der m -ten Diagonale (Schnitt II) die Querkraft

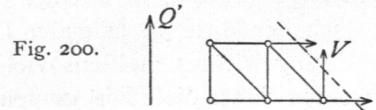


Fig. 200.

$$Q_m = D_0 - (m - 1) g a = \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1) \quad \text{und}$$

$$Y_m^g = \frac{Q_m}{\cos \alpha} = \frac{g a}{2 \cos \alpha} (n - 2 m + 1) \quad . \quad . \quad . \quad 231.$$

Den selben Ausdruck fanden wir in Art. 177 (S. 158), Gleichung 217, für die
beim Netzwerk rechts fallenden Diagonalen. Die in Bezug auf Zug und Druck dort
gefundenen Ergebnisse gelten demnach auch hier: Die nach der Mitte fallenden
Diagonalen erhalten durch das Eigengewicht Zug; die nach der Mitte steigenden
Diagonalen erhalten Druck.

Für die Ermittlung der Spannungen in den Verticalen ist zu unterscheiden,
ob sich die Lastpunkte oben oder unten befinden. Im ersteren Falle (Fig. 198) ist

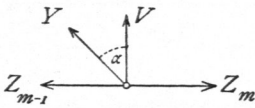
$$V_m = - Q_m = - \frac{g a}{2} (n - 2 m + 1), \dots \dots \dots 232.$$

im zweiten Falle

$$V'_m = - Q'_m = - \frac{g a}{2} (n - 1 - 2 m) \dots \dots \dots 233.$$

Die Art der Beanspruchung ergibt sich durch Betrachtung eines beliebigen nicht belasteten Knotenpunktes (Fig. 201). An einem Knotenpunkte der unteren Gurtung wirken, wenn die Laften an der oberen Gurtung angenommen werden, nur die Spannungen der Stäbe, welche sich an ihm treffen. Die algebraische Summe aller lothrechten Seitenkräfte muß Null sein, d. h. es muß $0 = Y \cos \alpha + V$, also $V = - Y \cos \alpha$ sein. Hieraus folgt der Satz: Die beiden Gitterstabsspannungen am Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung haben entgegengesetzte Beanspruchung; die Belastung, welche in einer Diagonalen Zug erzeugt, erzeugt in derjenigen Verticalen, welche mit ihr an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft, Druck und umgekehrt.

Fig. 201.



b) Für die ungünstigste Beanspruchung der Gitterstäbe, welche durch die Nutzlast hervorgebracht wird, ergibt sich bezüglich der Diagonalen durch dieselbe Beweisführung, wie in Art. 177 (S. 158), die gleiche Regel wie dort. Für die Verticalen ergibt sich zugleich aus dem Schlusssatze unter a: Jede Verticale erhält ihren größten Druck (bezw. Zug) bei derjenigen Belastung, bei welcher die mit ihr an

einem unbelasteten Knotenpunkte zusammentreffende Diagonale ihren größten Zug (bezw. Druck) erhält.

Wirken die Laften an der oberen Gurtung, so ergeben sich die Werthe für die Spannungen, wenn wir wiederum zur Ermittlung von Q die Knotenpunktsbelastungen durch gleichförmig vertheilte Laften ersetzt denken, wie folgt. Für das Maximum von Y_m und das Minimum von

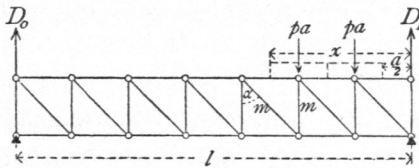


Fig. 202.

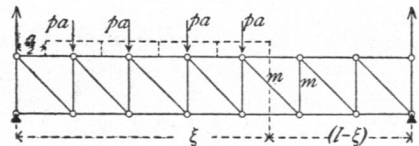


Fig. 203

V_m ergibt sich nach Fig. 202 der Auflagerdruck

$$D_0 = \frac{p \left(x - \frac{a}{2} \right)}{2 l} \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2 l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = Q_m.$$

Sonach

$$Y_{m \max} = \frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m \min} = - \frac{p}{2 l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots \dots 234.$$

Für $Y_{m \min}$ und $V_{m \max}$ findet man nach Fig. 203

$$Q = - \frac{p}{2 l} \left[\xi^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right];$$

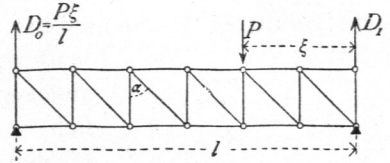
$$Y_{m \min} = - \frac{p}{2 l \cos \alpha} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad V_{m \max} = + \frac{p}{2 l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] 235.$$

x bedeutet den Abstand der Mitte desjenigen Feldes, zu dem die Diagonale gehört, vom rechten Auflager; bei den Verticalen die Mitte des Feldes, zu welchem

diejenige Diagonale gehört, die mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung zusammentrifft (hier also der unteren Gurtung).

Greifen die Lasten an der unteren Gurtung an, so stimmen die Formeln für die Diagonalen genau mit den eben entwickelten; auch diejenigen für die Verticalen, wenn man beachtet, daß x den soeben erwähnten Werth hat, daß sich also x hier auf die Mitte des Feldes bezieht, zu dem die Diagonale gehört, welche sich mit der Verticalen an einem Knotenpunkte der oberen Gurtung schneidet; statt V_m ist also dann V_{m-1} zu setzen.

Fig. 204.



c) Wenn der Träger durch eine Einzellaft belastet wird (Fig. 204), so erhält jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem linken Auflager, nach welchem hier die Diagonalen steigen, einen Zug

$$Y = \frac{P \xi}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 236.$$

jede Verticale auf dieser Seite der Last einen Druck

$$V = - \frac{P \xi}{l} \dots \dots \dots 237.$$

Jede Diagonale zwischen dem Lastpunkt und dem rechten Auflager, nach dem die Diagonalen hier fallen, erhält einen Druck

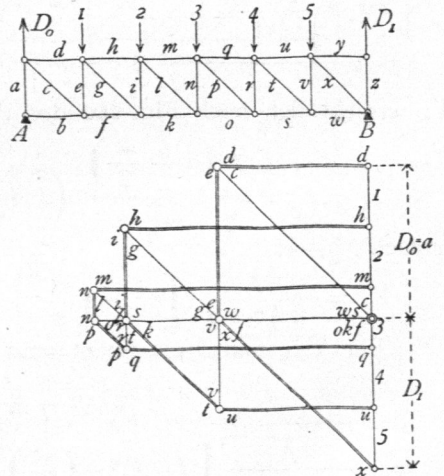
$$Y = - \frac{P(l - \xi)}{l \cos \alpha}, \dots \dots \dots 238.$$

jede Verticale auf dieser Seite einen Zug

$$V = \frac{P(l - \xi)}{l} \dots \dots \dots 239.$$

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Der Träger sei durch eine gleichmäßig vertheilte Last (Eigengewicht, bzw. volle Nutzlast) belastet; in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung wirke die Last $g a$, bzw. $p a$. Hiernach ist in Fig. 205 der Kräfteplan nach der Cremona'schen Methode gezeichnet, worüber weitere Bemerkungen unnöthig sind.

Fig. 205.



Wenn die Zeichnung für eine Belastung g auf die Längeneinheit construirt ist, so geben die Längen der einzelnen Linien auch zugleich die Beanspruchungen für die Belastung p auf die Längeneinheit, falls dieselben nur auf einem Maßstabe abgegriffen werden, auf welchem diejenige Länge $p a$ bedeutet, welche vorher $g a$ bedeutet hatte.

Sind die Maximalspannungen in den Gitterstäben, welche durch Verkehrs- last erzeugt werden, zu bestimmen, so ergibt die Vergleichung der in Art. 180 (S. 164) für Y_{\min}^{\max} und V_{\min}^{\max} gefundenen Werthe mit den in Art. 177 (S. 158) für den Parallel- träger mit Netzwerk gefundenen Werthen für Y und Q die genaue Uebereinstimmung beider, falls x den in Art. 180 (S. 165) angegebenen Werth hat.

182.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

Fig. 206.

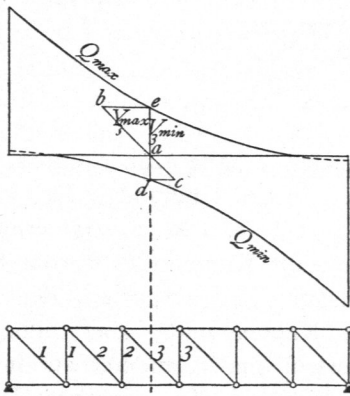
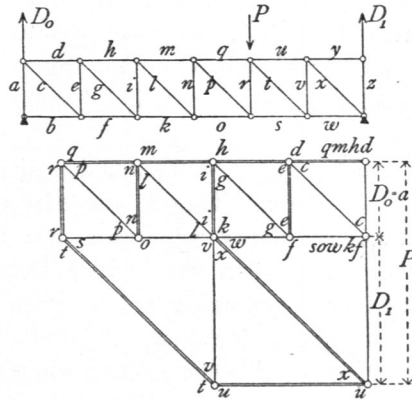


Fig. 207.



Die oben stehende Curve (Fig. 206) ergibt demnach die Werthe für Q_{max} , so wie Q_{min} und damit, wie gezeichnet, leicht die Werthe für Y und V . Der für $V_{3 min}$ angegebene Werth entspricht einer Belastung der oberen Gurtung.

Sämmtliche durch eine Einzellaft erzeugten Spannungen können leicht mittels eines *Cremona'schen* Kräfteplanes (Fig. 207) ermittelt werden.

4) Parallelträger mit nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen.

Im vorhergehenden Kapitel ist gezeigt worden, daß die gedrückten Stäbe mit Rücksicht auf Widerstand gegen Zerknicken unter Umständen wesentlich stärker construirt werden müssen, als die einfache Druckbeanspruchung erfordert. Bei der Bestimmung der Querschnittsgröße sind vielfach Zuschläge zu machen, welche bei den gezogenen Stäben nicht nöthig sind. Man wird deshalb bei gewissen Materialien, besonders bei Schmiedeeisen, die Verwendung gedrückter Stäbe möglichst beschränken und statt deren, wenn möglich, gezogene anordnen. Wo aber gedrückte Stäbe nicht entbehrt werden können, empfiehlt es sich, die kürzeren Stäbe als gedrückte, die längeren als gezogene anzuordnen. Bei manchen Materialien hingegen, insbesondere beim Holz, macht die Anordnung der Verbindungen eine möglichst geringe Verwendung von Zugstäben und eine möglichst ausgedehnte Verwendung von Druckstäben wünschenswerth.

183.
Grundsatz.

Bei den Trägern mit Fachwerk ist die Anordnung von nur gezogenen, bezw. nur gedrückten Diagonalen möglich.

Wir betrachten zunächst die Träger mit nur gezogenen Diagonalen.

Wie in Art. 180 (S. 164) nachgewiesen ist, erzeugt das Eigengewicht, so wie auch eine gleichmäßige Belastung aller Knotenpunkte in den nach der Mitte fallenden Diagonalen Zug, in den nach der Mitte steigenden Diagonalen Druck. Soll also durch die angegebene Belastung, welche für den Hochbau weitaus die wichtigste

184.
Träger
mit nur
gezogenen
Diagonalen.

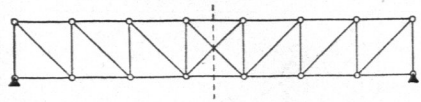
Fig. 208.



ist, in den Diagonalen nur Zug entstehen, so ordnet man nur nach der Mitte fallende Diagonalen an, construirt also den Träger genau symmetrisch zur Mitte (Fig. 208). Ist die Felderzahl ungerade, so erhalten die Diagonalen im Mittelfelde bei dieser Be-

laftung den Zug und Druck Null (Fig. 209). Bei dieser Trägerform erhalten je zwei symmetrisch zur Mitte liegende Stäbe gleiche Spannungen; dieselben wurden früher für die eine Hälfte gefunden und sind demnach leicht zu übertragen.

Fig. 209.



Die in Fig. 208 u. 209 gezeichneten Diagonalen erhalten aber durch nicht über den ganzen Träger ausgedehnte Belastungen unter Umständen Druckbeanspruchungen, und zwar findet, wie in Art. 177 (S. 158) u. 180 (S. 164) ermittelt, in einer Diagonalen der größte Druck statt, wenn die Knotenpunkte vom Kopfpunkte der Diagonalen bis zu demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, belastet, die übrigen Knotenpunkte aber unbelastet sind. Durch das stets noch vorhandene Eigengewicht findet andererseits in den Diagonalen eine beständige Zugspannung statt, welche die erwähnte Druckbeanspruchung vermindert. Diejenigen Diagonalen nun, bei denen (beides absolut genommen) die Zugspannung durch das Eigengewicht größer ist, als die größtmögliche Druckspannung in Folge der Verkehrslast, werden stets gezogen, nie gedrückt. Bei denjenigen Diagonalen dagegen, welche durch das Eigengewicht einen geringeren Zug erhalten, als ungünstigstenfalls der Druck durch Nutzlast beträgt (wiederum beides absolut genommen), wird eine Druckbeanspruchung eintreten, die zu vermeiden ist. Man bringt deshalb in dem betreffenden Felde eine zweite Diagonale mit einer solchen Richtung an, daß die Belastung, welche in der bereits im Felde vorhandenen Diagonalen Druck erzeugen würde, in der zweiten Diagonalen Zug hervorruft. Die Diagonale muß demnach so gerichtet sein, daß die erwähnte Nutzlast die Knotenpunkte vom Fußpunkte dieser Diagonalen an bis zu demjenigen Auflager belastet, nach welchem dieser Fußpunkt hinweist; mit anderen Worten, man bringt eine Diagonale an, welche die bereits vorhandene Diagonale kreuzt, eine sog. Gegendiagonale (in Fig. 210 die punktierte Diagonale $E'F'$).

Damit dieselbe aber auch wirksam sei, erhält die Hauptdiagonale EF einen derartigen Querschnitt, daß sie bei Druckspannungen ausbiegt, daß sie also in diesem Falle als nicht vorhanden angesehen werden kann.

Solche Gegendiagonalen sind in denjenigen Feldern anzuordnen, in welchen die Hauptdiagonalen unter Umständen Druckspannungen erhalten. In den Feldern nahe am Auflager ist die Zugspannung durch das Eigengewicht meistens groß, die Druckspannung durch Nutzlast meistens klein, so daß in diesen Feldern keine Gegendiagonalen nöthig sind; in den mittleren dagegen sind sie anzuordnen. Die Spannungen in den Gegendiagonalen sind dann genau so zu ermitteln, als wären die Hauptdiagonalen nicht vorhanden; jede Gegendiagonale, z. B. $E'F'$, befindet sich genau in derselben Lage, wie die symmetrisch zur Trägermitte liegende Hauptdiagonale im Träger mit nur nach einer Seite fallenden Diagonalen, also hier wie RS (Fig. 210). Die oben gefundenen Spannungen sind daher hier sofort zu verwerthen. Der Träger würde demnach

Fig. 210.

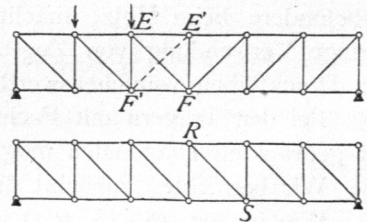
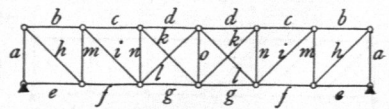


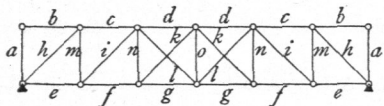
Fig. 211.



die in Fig. 211 dargestellte Form erhalten, in welcher je zwei Stäbe mit gleichen Bezeichnungen gleiche Spannungen erleiden.

Bei der Construction eines Trägers mit nur gedrückten Diagonalen ist nach gleichem Grundsatze zu verfahren. Zunächst sind beiderseits nur nach der Mitte ansteigende Diagonalen zu verwenden; damit man für Belaftung durch Eigengewicht, bezw. Gefammtlast nur Druck erhalte. In denjenigen Feldern alsdann, in welchen die Diagonalen unter Umständen Zugspannung erhalten würden, sind wie oben Gegendiagonalen anzuordnen (Fig. 212). Die Verbindung in den Knotenpunkten ist so anzuordnen, daß die Hauptdiagonalen keinen Zug übertragen können.

Fig. 212.



Die Beanspruchung der Verticalen ergibt sich nach Art. 180 (S. 164) stets der Beanspruchung derjenigen Diagonalen entgegengesetzt, welche an einem unbelasteten Knotenpunkte mit der Verticalen zusammentrifft. Werden demnach alle Diagonalen nur gezogen, so werden alle Verticalen nur gedückt (Fig. 211); werden alle Diagonalen nur gedückt, so werden alle Verticalen nur gezogen (Fig. 212). Im zweiten Falle werden dieselben meistens aus Schmiedeeisen hergestellt, während die Diagonalen aus Holz bestehen.

Beispiel. Ein als Parallelträger mit Diagonalen und Verticalen (nach Art der Fig. 208) hergestellter Unterzug hat folgende Abmessungen und Belastungen: Stützweite $l = 12$ m; Höhe zwischen den Gurtungs-Schwerpunkten $h = 1,5$ m; Anzahl der Felder $n = 8$; Feldweite $a = 1,5$ m. Die Diagonalen fallen jederseits nach der Trägermitte zu; Gegendiagonalen sind nicht vorhanden. Die Belaftung durch das Eigengewicht für das laufende Meter ist $g = 1800$ kg, diejenige durch Nutzlast $p = 2400$ kg; mithin sind die Knotenpunktslasten bezw. $ga = 2700$ kg und $pa = 3600$ kg. Die Lastpunkte liegen in der oberen Gurtung. Es sind die durch diese Belastungen entstehenden Spannungen zu berechnen.

α) Spannungen in den Gurtungen. Nach Gleichung 227 u. 228 sind für den m -ten Stab der oberen Gurtung

$$X_g = -\frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = -1350 m (8 - m)$$

und

$$X_p = -\frac{2400 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} m (8 - m) = -1800 m (8 - m).$$

Für den m -ten Stab der unteren Gurtung sind nach Gleichung 227 u. 228

$$Z_g = \frac{1800 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 1,5} (m - 1) (9 - m) = 1350 (m - 1) (9 - m) \quad \text{und} \quad Z_p = 1800 (m - 1) (9 - m).$$

Man erhält aus vorstehenden Ausdrücken, indem man der Reihe nach für m die Werthe 1, 2, 3, 4 einführt, die Gurtungsspannungen der Stäbe links der Mitte. Die Spannungen in den symmetrisch zur Mitte liegenden Stäben sind den gefundenen genau gleich. Die Addition der Werthe X_g und X_p ergibt die Maximalspannungen in der oberen, die Addition der Werthe Z_g und Z_p die Maximalspannungen in der unteren Gurtung. Die Ergebnisse sind in umstehender Tabelle angegeben.

β) Spannungen in den Diagonalen. α) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 231 ist für die m -te Diagonale die Spannung durch das Eigengewicht, da hier $\cos \alpha = \cos 45^\circ = 0,707$ ist,

$$Y_g = \frac{1800 \cdot 1,5}{2 \cdot 0,707} (9 - 2m) = 1910 (9 - 2m).$$

Durch Einsetzung der Zahlenwerthe $m = 1, 2, 3, 4$ erhält man die Spannungen Y_g .

β) Durch die Nutzlast. Die größten Zug- und Druckspannungen, welche in den Diagonalen hervorgerufen werden, sind nach Gleichung 234 u. 235

$$Y_p^{max} = \frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} (x^2 - 0,75^2) = 141,4 (x^2 - 0,56)$$

und

$$Y_p^{min} = -\frac{2400}{2 \cdot 12 \cdot 0,707} [(l - x)^2 - 0,75^2] = -141,4 [(l - x)^2 - 0,56].$$

185.
Träger
mit nur
gedrückten
Diagonalen.

186.
Beispiel.

Man erhält für $m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$
 $x = 11,25 \quad 9,75 \quad 8,25 \quad 6,75 \text{ m}$
 $(l - x) = 0,75 \quad 2,25 \quad 3,75 \quad 5,25 \text{ m}$

und für $Y_{p \max}$, bezw. $Y_{p \min}$ die Werthe, welche in der unten stehenden Tabelle folgen.

γ) Spannungen in den Verticalen. a) Durch das Eigengewicht. Nach Gleichung 232 ist, da die Lastpunkte oben liegen,

$$V_g = - \frac{1800 \cdot 1,5}{2} (9 - 2 m) = - 1350 (9 - 2 m).$$

b) Durch die Nutzlast. Die größten Druck-, bezw. Zugspannungen ergeben sich aus den Gleichungen 234 u. 235 zu

$$V_{p \min} = - \frac{2400}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,75^2) = - 100 (x^2 - 0,56) \quad \text{und} \quad V_{p \max} = 100 [(l - x)^2 - 0,56].$$

Für x sind dieselben Werthe, wie bei den Diagonalen einzuführen. Man erhält die Werthe der unten stehenden Tabelle.

In der Endverticalen ist die Druckspannung stets gleich dem Auflagerdruck, also hier, da die Belastung des Endknotenpunktes mit $\frac{g a}{2}$, bezw. $\frac{p a}{2}$ hinzukommt,

$$V_g = - (3,5 + 0,5) g a = - 4 g a = - 4 \cdot 1800 \cdot 1,5 = - 10800 \text{ kg},$$

$$V_{p \min} = - 4 p a = - 4 \cdot 2400 \cdot 1,5 = - 14400 \text{ kg}.$$

Zug kann in dieser Verticalen nicht entstehen.

Auf die Mittelverticale sind die obigen Gleichungen nicht anwendbar, weil an ihrem unteren Endpunkte sich die zwei Diagonalen der anstossenden Felder treffen, also der schiefe Schnitt andere Stäbe trifft, als bei der Entwicklung der Formeln vorgesehen war. Da am oberen Endpunkt der Verticalen keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur solche lothrechte Kräfte aufnehmen, welche im oberen Knotenpunkte unmittelbar angreifen. Wir erhalten also die Spannungen in derselben genau so groß, wie die Knotenpunktelastungen. Diese Werthe sind in die Tabelle eingesetzt worden.

Tabelle der Stabspannungen.

Theil der Con- struction	$m =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Obere Gurtung	X_g		- 9450	- 16200	- 20250	- 21600	- 21600	- 20250	- 16200	- 9450
	X_p		- 12600	- 21600	- 27000	- 28800	- 28800	- 27000	- 21600	- 12600
Untere Gurtung	Z_g		0	9450	16200	20250	20250	16200	9450	0
	Z_p		0	12600	21600	27000	27000	21600	12600	0
Diagonalen	Y_g		13370	9550	5730	1910	1910	5730	9550	13370
	$Y_{p \max}$		17820	13362	9545	6363	6363	9545	13362	17820
	$Y_{p \min}$		0	- 636	- 1910	- 3818	- 3818	- 1910	- 636	0
Verticalen	V_g	- 10800	- 9450	- 6750	- 4050	- 2700	- 4050	- 6750	- 9450	- 10800
	$V_{p \min}$	- 14400	- 12600	- 9450	- 6750	- 3600	- 6750	- 9450	- 12600	- 14400
	$V_{p \max}$	0	0	4500	1350	0	1350	450	0	0

K i l o g r a m m

Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 36 u. 37 (siehe Art. 77, S. 51) dient die Zusammenstellung der nachstehenden Tabelle.

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen: Ueberwiegender Zug			Verticalen: Ueberwiegender Druck				
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 8	- 9450	- 12600	1 u. 8	0	0	1 u. 8	13370	17820	0	0 u. 8	- 10800	- 14400	0
2 u. 7	- 16200	- 21600	2 u. 7	9450	12600	2 u. 7	9550	13362	- 636	1 u. 7	- 9450	- 12600	0
3 u. 6	- 20250	- 27000	3 u. 6	16200	21600	3 u. 6	5730	9545	- 1910	2 u. 6	- 6750	- 9450	450
4 u. 5	- 21600	- 28800	4 u. 5	20250	27000	4 u. 5	1910	6363	- 3818	3 u. 5	- 4050	- 6750	1350
										4	- 2700	- 3600	0
Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm			Kilogramm				

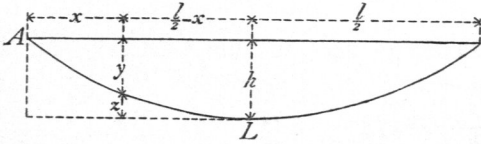
5) Parabelträger.

Parabelträger sind Träger, bei denen die Knotenpunkte einer oder beider Gurtungen auf Parabeln liegen. Es sollen hier nur solche Parabelträger behandelt werden, bei welchen die obere Gurtung eine gerade Linie, die untere Gurtung ein

187.
Berechnung
der
Spannungen:

der Parabel eingeschriebenes Vieleck ist (Fig. 213). Bezeichnet man die Pfeilhöhe der Parabel mit h , die Trägerstützweite mit l , und legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in das linke Auflager (nach A), so ist, wenn L der Scheitel der Parabel ist,

Fig. 213.



$$\frac{z}{h} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}, \text{ woraus } z = h \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2, \text{ ferner } y = (h - z), \text{ ferner}$$

$$y = \frac{4h}{l^2} (lx - x^2) \dots \dots \dots 240.$$

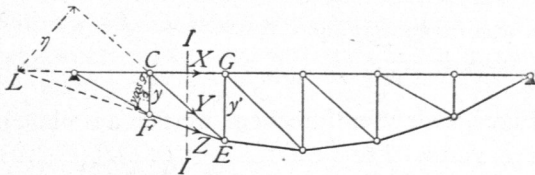
Die Spannungen in den sämtlichen Stäben können nun mittels der in Art. 168 bis 175 (S. 149 bis 156) vorgeführten Verfahren leicht ermittelt werden. Dabei macht es keine Schwierigkeit, die Berechnung auch für den Fall durchzuführen, daß die obere Gurtung gekrümmt, die untere eine gerade Linie ist.

a) Spannungen in den Gurtungen. Für einen Stab FE der unteren Gurtung (Fig. 214) ist C der conjugirte Punkt; wird mit M das Moment der an der einen Seite des Schnittes II wirkenden äußeren Kräfte bezeichnet, so ergibt sich

188.
in den
Gurtungen;

$$0 = M - Zy \cos \sigma, \text{ woraus } Z = \frac{M}{y \cos \sigma} \dots \dots \dots 241.$$

Fig. 214.



Für einen Stab CG der oberen Gurtung ist E der conjugirte Punkt, und wenn das Moment der äußeren Kräfte für diesen Punkt mit M' bezeichnet wird,

$$0 = M' + Xy', \text{ woraus } X = -\frac{M'}{y'} \dots \dots \dots 242.$$

Wie beim Parallelträger in Art. 176 (S. 156) ergibt sich auch hier, daß die oberen Gurtungsstäbe stets gedrückt, die unteren Gurtungsstäbe stets gezogen werden, so wie daß alle Gurtungsstäbe bei voller Belastung am meisten beansprucht werden.

Nunmehr können die durch Eigengewicht, bzw. durch gleichmäßig über den ganzen Träger vertheilte Nutzlast erzeugten Gurtungsspannungen ermittelt werden. Das erstere sei g , die letztere p für die Längeneinheit; beide Belastungsarten sind einander genau gleich; es genügt also eine, etwa die letztere, zu betrachten. Es wird wieder angenommen, daß die Lasten nur in den Knotenpunkten wirken; bei einer Feldweite a (Fig. 215) ist die Knotenpunktslast gleich pa (bzw. ga). Die

Auflagerdrücke sind $D_0 = D_1 = \frac{pa(n-1)}{2}$ und, da $a(n-1) = (l-a)$ ist,

$$D_0 = D_1 = \frac{p(l-a)}{2} \dots \dots \dots 243.$$

Für einen beliebigen Knotenpunkt E mit der Abciffe x ist nun das Moment

$$M_x = \frac{p(l-a)}{2} x - p(x-a) \left(\frac{x-a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{p}{2} (lx - x^2).$$

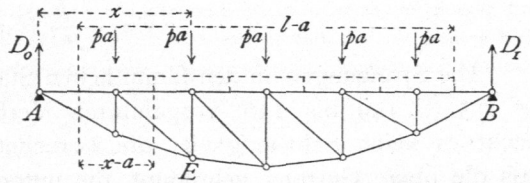
Dies ist aber nach Art. 152 (S. 131) auch der Ausdruck für das Moment im Punkte E bei einem vollwandigen, gleichmäsig mit p für die Längeneinheit belasteten Träger.

Werden die Werthe von M und y (Gleichung 240) in die Ausdrücke für Z und X eingeführt, so ergibt sich allgemein

$$\left. \begin{aligned} Z \cos \sigma &= \frac{M}{y} = \frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4 \cdot h (lx - x^2)} = \frac{p l^2}{8 h} \\ X &= - \frac{p}{2} \cdot \frac{(lx - x^2) l^2}{4 h (lx - x^2)} = - \frac{p l^2}{8 h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 244.$$

$Z \cos \sigma$ ist die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung. Die rechte Seite obiger Ausdrücke enthält nur constante Größen, so dass sich ergibt: Beim Parabelträger ist für gleichmäßige Belastung des ganzen Trägers die Spannung in der geraden Gurtung (X) und die wagrechte Seitenkraft der Spannung in der gekrümmten Gurtung constant.

Fig. 215.



Da $\cos \sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (y' - y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}}$ ist, erhält man aus

Gleichung 244

$$Z = \frac{p l^2}{8 h} \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \dots \dots \dots 245.$$

Die Spannungen Z und X , welche dem Eigengewicht entsprechen, werden aus obigen Gleichungen erhalten, indem man p mit g vertauscht.

189.
in den
Gitterstäben.

β) Spannungen in den Gitterstäben. Für die Diagonale CE (Fig. 214) ist L der conjugirte Punkt, η der Hebelsarm von Y , und wenn mit M_1 das Moment der äußeren Kräfte am Bruchstück links vom Schnitt II , bezogen auf L als Drehpunkt, bezeichnet wird, ist

$$0 = Y \eta - M_1, \text{ woraus } Y = + \frac{M_1}{\eta} \dots \dots \dots 246.$$

Liegt die Diagonale rechts der Mitte, so fällt der conjugirte Punkt rechts vom rechten Auflager. Die Aufstellung der Momentengleichung für diesen Punkt ergibt genau wie in Gleichung 246 die Diagonalspannung als Quotienten aus dem Moment der am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte, dividirt durch den Hebelsarm der Diagonalspannung.

Häufig ist ein anderer Ausdruck der Diagonalfpannung bequemer, als Gleichung 246. Die am Knotenpunkt C der geraden Gurtung (Fig. 216) angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht; die algebraische Summe aller wagrechten Seitenkräfte ist demnach gleich Null; mithin

Fig. 216.

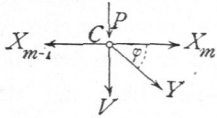
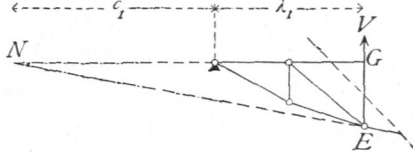


Fig. 217.



$$0 = Y \cos \varphi + X_m - X_{m-1}, \text{ woraus } Y = - \frac{X_m - X_{m-1}}{\cos \varphi} \dots 247.$$

Für die Bestimmung der Spannungen in den Verticalen ist der Schnitt schief zu legen (Fig. 217). Der conjugirte Punkt für die Verticale EG ist N . Bezeichnet $-M_2$ das Moment der am Bruchstück wirkenden äußeren Kräfte für N als Drehpunkt, so wird

$$0 = -V(\lambda_1 + c_1) - M_2, \text{ woraus } V = - \frac{M_2}{\lambda_1 + c_1} \dots 248.$$

Falls der conjugirte Punkt nach rechts vom rechten Auflager fällt, ergibt sich eine geringe Abänderung der Gleichung 248.

Ein für manche Fälle bequemerer Ausdruck wird wiederum durch Betrachtung des Knotenpunktes an der geraden Gurtung erhalten. Es ergibt sich, da die Kräfte an demselben im Gleichgewicht sind,

$$0 = Y \sin \varphi + V + P, \text{ woraus } V = -(Y \sin \varphi + P) \dots 249.$$

a) Das Eigengewicht, bezw. eine gleichmäßig über den ganzen Parabelträger verteilte Last p für die Längeneinheit erzeugt in allen Diagonalen die Spannung Null. Denn bei dieser Belastung ist nach Art. 187 (S. 171) die Gurtungsspannung X constant, also $X_m = X_{m-1}$, mithin nach Gleichung 247: $Y = 0$.

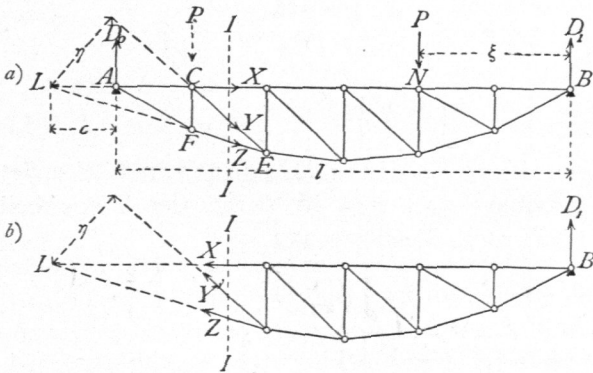
Die Spannung in den Verticalen ergibt sich nach Gleichung 249, da $Y = 0$ und $P = p a$ (bezw. $g a$) ist, zu

$$V_p = -p a, \text{ bezw. } V_g = -g a \dots 250.$$

Die Spannung in den Verticalen ist sonach beim Parabelträger und der angegebenen Belastung gleich der im Knotenpunkte der geraden Gurtung wirkenden Last, und zwar Druck, wenn, wie hier angenommen ist, die obere gerade Gurtung belastet ist.

b) Ungünstigste Belastungen und größte Stabspannungen der

Fig. 218.



Gitterstäbe. Die ungünstigste Belastung für eine Diagonale CE (Fig. 218) wird folgendermaßen erhalten. Eine rechts von dem durch die Diagonale verlaufenden Schnitte II gelegene Last P erzeugt in A den Auflagedruck $D_0 = \frac{P \xi}{l}$ und in CE eine Diagonalfpannung Y , welche aus der Momentengleichung für Punkt L und das links vom Schnitte liegende Bruchstück folgt:

$$0 = Y \eta - D_0 c, \text{ woraus } Y = \frac{D_0 c}{\eta} = \frac{P \xi c}{l \eta} \dots 251.$$

So lange sich die Last rechts vom Schnitt II befindet, gilt der hier für Y gefundene Ausdruck. Jede Last rechts vom Schnitt erzeugt also in CE einen Zug.

Befindet sich die Last P links vom Schnitt II , so betrachte man das Bruchstück an der rechten Seite des Schnittes (Fig. 218b). Auf dasselbe wirken der Auflagerdruck D_1 in B und die 3 Spannungen X , Y' und Z ; die Gleichung der statischen Momente für L als Drehpunkt heißt dann:

$$0 = Y' \eta + D_1 (l + c), \text{ woraus } Y' = - \frac{D_1 (l + c)}{\eta} \dots 252.$$

Die Last P links von II erzeugt also in der Diagonale Druck und in gleicher Weise jede links vom Schnitt liegende Last.

Für die rechts von der Mitte liegenden Diagonalen, bei welchen der Momentenpunkt rechts von B liegt, ergibt sich die gleiche Gesetzmäßigkeit.

Es folgt, daß auch hier das für die Parallelträger (Art. 177, S. 158) gefundene Gesetz gilt: Jede Belastung zwischen dem durch die Diagonalenmitte gelegten lothrechttem Schnitt und demjenigen Auflager, nach welchem der Fußpunkt der Diagonalen hinweist, erzeugt in derselben Zug; jede Belastung zwischen dem erwähnten Schnitt und demjenigen Auflager, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist, erzeugt in derselben Druck.

Größter Zug findet demnach in einer Diagonalen dann statt, wenn alle Knotenpunkte zwischen dem Schnitt und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Fuß der Diagonale hinweist; größter Druck, wenn die Knotenpunkte zwischen dem Schnitt und demjenigen Auflager belastet sind, nach welchem der Kopf der Diagonalen hinweist.

Die größte Zugbeanspruchung in einer Diagonalen CE findet daher bei der in Fig. 219 gezeichneten Belastung statt; sie ist

$$Y_{max} = \frac{D_0 c}{\eta}.$$

Genau, wie in Art. 177 (S. 159), erhält man für den Auflagerdruck:

$$D_0 = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

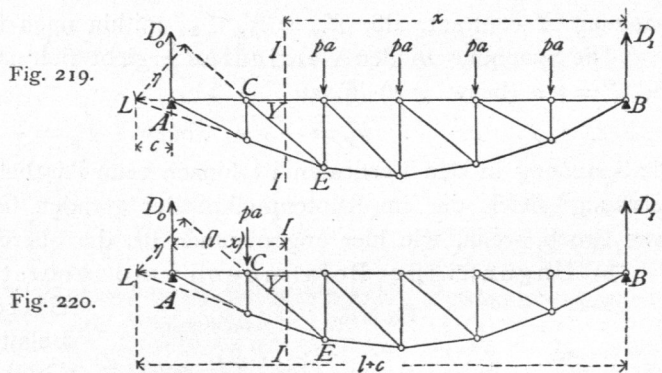
also

$$Y_{max} = \frac{p c}{2 l \eta} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \dots 253.$$

Die größte Druckbeanspruchung in einer Diagonalen CE findet bei der in Fig. 220 gezeichneten Belastung statt und ist (wenn der Trägertheil rechts vom Schnitt II betrachtet wird) nach Gleichung 252

$$Y_{min} = - D_1 \left(\frac{l+c}{\eta} \right) \text{ und, da } D_1 = \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right],$$

$$Y_{min} = - \frac{p}{2l} \left[(l-x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{l+c}{\eta} \right) \dots 254.$$

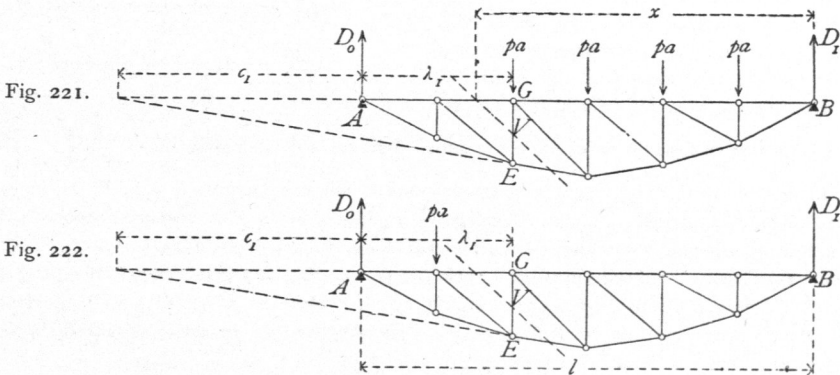


Die Gleichungen 253 u. 254 gelten, wenn die Diagonalen, wie hier, nach rechts fallen, nur für diejenigen links der Mitte; für die Diagonalen rechts der Mitte, bei denen der Momentenpunkt rechts von B fällt, ergeben sich folgende Werthe, in denen η_1 den Hebelsarm von Y , c_2 den Abstand des Momentenpunktes von B bedeutet:

$$Y_{max} = \frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l + c_2}{\eta_1} \quad \text{und} \quad Y_{min} = -\frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c_2}{\eta_1} \quad 255.$$

Bei der angenommenen Belastungsart genügt es, Y_{max} oder Y_{min} auszurechnen; denn für die Belastung aller Knotenpunkte mit je pa ist die Diagonalspannung (siehe oben) gleich Null. Sind nur die Knotenpunkte der Druckabtheilung belastet, so ist die Spannung in der Diagonalen gleich Y_{min} ; sind nur die Knotenpunkte der Zugabtheilung belastet, so ist die Spannung gleich Y_{max} . Bei totaler Belastung ist die Spannung $Y_{summa} = Y_{max} + Y_{min}$ und zwar ist $Y_{summa} = 0$, d. h. $0 = Y_{max} + Y_{min}$ und $Y_{min} = -Y_{max}$.

Um die ungünstigste Belastung der Verticalen zu ermitteln, verfährt man eben so, wie bei den Diagonalen gezeigt ist. Man findet, daß Diagonale und Verticale, welche an einem Knotenpunkte der unbelasteten Gurtung zusammentreffen, dieselbe ungünstigste Belastungsart haben; nur findet in der Verticalen größter Druck statt bei derjenigen Belastung, welche in der entsprechenden Diagonalen größten Zug



erzeugt und umgekehrt. Es wird also größter Druck in GE bei der in Fig. 221 gezeichneten Belastung, größter Zug bei der in Fig. 222 gezeichneten Belastung stattfinden.

Die größten Spannungen in den Verticalen ergeben sich mit

$$\left. \begin{aligned} V_{min} &= -\frac{D_0 c_1}{\lambda_1 + c_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c_1}{\lambda_1 + c_1} \\ V_{max} &= \frac{D_1 (l + c_1)}{\lambda_1 + c_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l + c_1}{\lambda_1 + c_1} \end{aligned} \right\} \quad 256.$$

Falls der Momentenpunkt um c'_1 nach rechts von B fällt, was hier bei allen Verticalen rechts der Mitte, einschl. der Mittelverticalen, stattfindet, so ergeben sich für V_{min} und V_{max} die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} V'_{min} &= -\frac{D_0 (l + c'_1)}{c'_1 + l - \lambda_1} = -\frac{p}{2l} \left[x^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{l + c'_1}{c'_1 + l - \lambda_1} \\ V'_{max} &= \frac{D_1 c'_1}{c'_1 + l - \lambda_1} = \frac{p}{2l} \left[(l - x)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \frac{c'_1}{c'_1 + l - \lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad 257.$$

c) Bei entgegengesetzter Richtung der Diagonalen ergeben sich nur geringe Aenderungen, welche leicht aus Vorstehendem folgen.

Die Spannungen durch eine oder mehrere Einzellasten sind gleichfalls nach einem der in Art. 171 u. 172 (S. 150) angegebenen Verfahren leicht zu finden.

γ) Graphische Ermittlung der Spannungen. Wird eine gleichmäßig verteilte Belastung (Eigengewicht, bzw. volle zufällige Belastung) vorausgesetzt, so ergibt der in Fig. 223 gezeichnete Cremona'sche Kräfteplan sofort die Spannungen.

Was die durch zufällige Belastung erzeugten Maximalspannungen betrifft, so ergeben sich die größten Gurtungsspannungen aus dem eben erwähnten Kräfteplan (Fig. 223), falls eine Belastung des ganzen Trägers mit der Last p für die Längeneinheit zu Grunde gelegt wird.

Zur Bestimmung der größten Diagonalspannungen, welche bei den oben angegebenen Belastungen stattfinden, empfiehlt sich die Schnittmethode.

Auf das Trägerstück links vom Schnitte II wirken bei der in Fig. 224a gezeichneten Maximalzugbelastung für die Diagonale CE die Kräfte D_0, X, Y, Z . Die Werthe von D_0 , welche für die verschiedenen Diagonalen zu Grunde zu legen sind, ergeben sich aus der Gleichung $D_0 = \frac{p}{2l} [x^2 - (\frac{a}{2})^2]$;

dieselben sind in der Curve (Fig. 224b) aufgetragen. — Für die Diagonale CE z. B. ist $D_0 = mn$; diese Kraft ist nach den Richtungen AE und X zerlegt in no und om ; no ist alsdann noch nach den Richtungen Z und Y in np und po zerlegt; po ist gleich Y_{max} ($Y_{min} = -Y_{max}$).

In der Verticalen CF findet größter Druck bei der in Fig. 225 gezeichneten Belastung statt. D_0 ist hier gleich derjenigen Ordinate der Curve in Fig. 224b, welche zu x' gehört, d. h. gleich rs . Nun wird genau wie oben zerlegt. Es wird $V_{min} = ut$. Entsprechend so ist der Maximalzug in CF zu ermitteln.

Fig. 224.

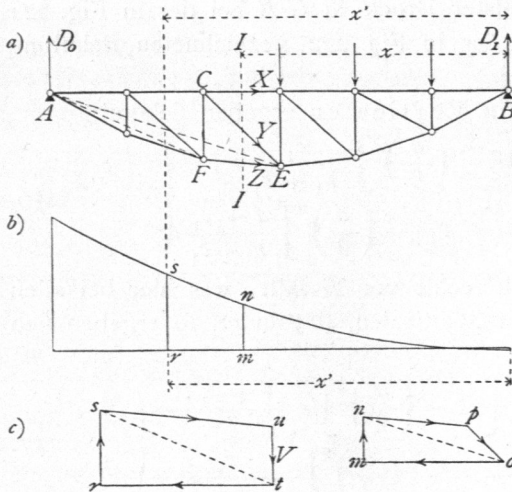


Fig. 223.

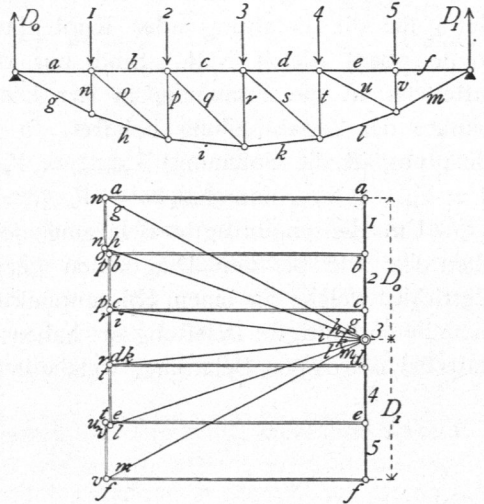


Fig. 225.

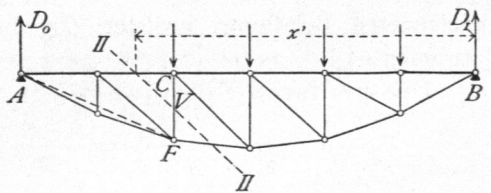
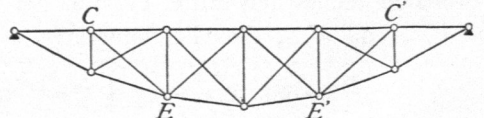


Fig. 226.



190.
Graphische
Ermittlung
der
Spannungen.

δ) Träger mit Gegendiagonalen. Durch die Verkehrslast erhält jede Diagonale sowohl Zug wie Druck, durch das Eigengewicht gar keine Spannung. Die ungünstigsten Zug-, bzw. Druckspannungen sind also genau so groß, wie diejenigen durch die ungünstigsten Verkehrslasten. Sollen nur gezogene Diagonalen vorkommen, so wird nach Art. 184 (S. 167) in jedem Felde eine Gegendiagonale angeordnet werden müssen. Man erhält die in Fig. 226 gezeichnete Trägerform. Die Gegendiagonale $C'E'$ wird genau eben so beansprucht, wie die symmetrisch zur Mitte liegende Hauptdiagonale CE des Trägers mit einseitig fallenden Diagonalen. Dasselbe gilt von allen Gegendiagonalen; es wird also die Berechnung eines Trägers mit nach einer Richtung fallenden Diagonalen genügen.

191.
Gegen-
diagonalen.

Beispiel. Ein als Unterzug dienender Parabelträger mit gerader oberer und gekrümmter unterer Gurtung hat die nachfolgenden Hauptabmessungen und Belastungen: Stützweite $l = 12,0$ m; Pfeilhöhe $h = 1,20$ m; Feldweite $a = 1,0$ m; Eigengewicht für das laufende Meter des Trägers $g = 320$ kg, also $g a = 320$ kg; Verkehrslast für das laufende Meter des Trägers $p = 1280$ kg, also $p a = 1280$ kg. Der Träger hat ein aus Verticalen und Diagonalen bestehendes Gitterwerk; die Diagonalen fallen beiderseits nach der Mitte zu; der Träger ist also zur Mitte symmetrisch angeordnet. Es sind die in den einzelnen Stäben entstehenden Spannungen zu ermitteln. Wegen der Symmetrie des Trägers braucht man nur die Spannungen in den Stäben links der Mitte zu bestimmen; die symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe erhalten gleiche Beanspruchungen.

192.
Beispiel.

a) Form der unteren Gurtung. Die Parabel-Ordinaten ergeben sich nach Gleichung 240 aus der Beziehung $y = \frac{4 \cdot 1,2}{144} x(12 - x) = 0,033 x(12 - x)$. Man erhält:

für $x =$	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m
$y =$	0,36 m	0,86 m	0,99 m	1,06 m	1,16 m	1,2 m	1,16 m	1,06 m	0,89 m	0,66 m	0,36 m.

b) Spannungen in der oberen Gurtung. Durch das Eigengewicht, bzw. volle zufällige Belastung entsteht in sämtlichen Stäben der oberen Gurtung eine Spannung nach Gleichung 244

$$X_g = -\frac{320 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -4800 \text{ kg} \quad \text{und} \quad X_p = -\frac{1280 \cdot 12^2}{8 \cdot 1,2} = -19200 \text{ kg.}$$

X_p ist zugleich die größte durch zufällige Belastung entstehende Spannung.

c) Spannungen in der unteren Gurtung. Nach Gleichung 245 sind

$$Z_g = 4800 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad Z_p = 19200 \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y}{a}\right)^2}.$$

Hiernach erhält man die in der linksseitigen Hälfte der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Ergebnisse. Die Werthe Z_p sind zugleich die größten durch die zufällige Last entstehenden Spannungen.

b) Spannungen in den Diagonalen. Die Spannungen durch das Eigengewicht sind gleich Null (siehe Art. 189, S. 172). Die durch Verkehrslast erzeugten größten Zug- und Druckspannungen sind für die Diagonalen links der Mitte nach Gleichung 253 u. 254

$$Y_{max} = \frac{1280}{2 \cdot 12} (x^2 - 0,25) \frac{c}{\eta} = 53,33 \frac{c}{\eta} (x^2 - 0,25) \quad \text{und} \quad Y_{min} = -53,33 \left[(l - x)^2 - 0,25 \right] \frac{l + c}{\eta}.$$

Die Größen c und η können berechnet oder construirt werden; die Werthe für c werden besser berechnet, weil die Zeichnung wegen der spitzen Schnittwinkel der Gurtungsabrichtungen nicht genaue Werthe ergibt. Man erhält mit Hilfe ähnlicher Dreiecke leicht

$$\frac{c_2 + a}{y_1} = \frac{a}{y_2 - y_1}; \quad \frac{c_3 + 2a}{y_2} = \frac{a}{y_3 - y_2}; \quad \frac{c_4 + 3a}{y_3} = \frac{a}{y_4 - y_3} \text{ u. f. w.}$$

Die Werthe für η können in ähnlicher Weise leicht berechnet werden; doch kann man, besonders wenn c berechnet und der Schnittpunkt entsprechend den Rechnungsergebnissen aufgetragen wird, die η mit hinreichender Genauigkeit construieren. Die Werthe für c , η , x , Y_{max} und Y_{min} sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Stab Nr.	y'	y	Z_g	Z_p	Diagonale Feld-Nr.	c	η	x	Y_{max}	Y_{min}
1	0,36	0,0	5102	20 410	2	0,2	0,66	10,5	+ 1777	- 1971
2	0,66	0,36	5011	20 045	3	0,87	1,91	9,5	+ 2186	- 2156
3	0,89	0,66	4925	19 699	4	2,23	3,8	8,5	+ 2304	- 2396
4	1,06	0,89	4867	19 469	5	6,6	8,03	7,5	+ 2449	- 2460
5	1,16	1,06	4824	19 296	6	24	22,3	6,5	+ 2410	- 2582
6	1,20	1,16	4804	19 216						
	Meter		Kilogramm			Meter			Kilogramm	

Nach Art. 189 (S. 172) müssen die absoluten Werthe von Y_{max} und Y_{min} einander gleich fein; dies ist hier nicht der Fall, und es hat dies seinen Grund darin, dass nicht die genauen Parabel-Ordinaten der Berechnung zu Grunde gelegt sind, sondern eine Abrundung auf zwei Decimalen stattgefunden hat. Aus demselben Grunde würden sich auch die durch das Eigengewicht erzeugten Spannungen nicht genau gleich Null ergeben, wenn man sie nach Gleichung 246 berechnete. Immerhin ergeben sich diese Unterschiede so gering, dass sie vernachlässigt werden können.

e) Spannungen in den Verticalen. Durch das Eigengewicht entsteht in jeder Verticalen nach Art. 189 (S. 172) der Druck $V = - 320$ kg. Die durch Verkehrslast in den Verticalen links der Mitte erzeugten Maximalspannungen sind nach Gleichung 256

$$V_{min} = - 53,33 (x^2 - 0,25) \frac{c_1}{\lambda + c_1} \quad \text{und} \quad V_{max} = + 53,33 \left[(l-x)^2 - 0,25 \right] \frac{12 + c_1}{\lambda_1 + c_1}.$$

Man erhält die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe von c_1 , λ_1 , x , $(l-x)$, V_{min} und V_{max} . Die 6. (die Mittel-)Verticale, an deren Fußpunkt sich die beiden Diagonalen der anschließenden Felder schneiden, kann nicht nach den obigen Gleichungen berechnet werden, da die dort für den Schnitt gemachten Voraussetzungen hier nicht zutreffen. Da aber im oberen Knotenpunkte derselben keine Diagonale ansetzt, so kann dieselbe nur die Kräfte aufnehmen, welche unmittelbar in derselben wirken, d. h. der größte Druck ist gleich der Knotenpunktsbelastung dafelbst.

Verticale Nr.	c_1	λ_1	x	$l-x$	V_{min}	V_{max}
1	0,2	1,0	11,5	0,5	- 1173	0
2	0,87	2,0	10,5	1,5	- 1778	+ 478
3	2,23	3,0	9,5	2,5	- 2047	+ 870
4	6,60	4,0	8,5	3,5	- 2391	+ 1123
5	24	5,0	7,5	4,5	- 2469	+ 1324
6	—	—	—	—	- 1280	0
	Meter				Kilogramm	

f) Zur Bestimmung der Querschnitte nach den Gleichungen 36 u. 37 (siehe Art. 77, S. 51) dient die Zusammenstellung in der folgenden Tabelle:

Obere Gurtung: Druck			Untere Gurtung: Zug			Diagonalen:				Verticalen: Druck überwiegt			
Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2	Stab Nr.	P_0	P_1	P_2
1 u. 12	- 4800	- 19 200	1 u. 12	5102	20 410					1 u. 11	- 320	- 1173	0
2 u. 11	- 4800	- 19 200	2 u. 11	5011	20 045	2 u. 11	0	1777	- 1971	2 u. 10	- 320	- 1778	478
3 u. 10	- 4800	- 19 200	3 u. 10	4925	19 699	3 u. 10	0	2186	- 2156	3 u. 9	- 320	- 2047	870
4 u. 9	- 4800	- 19 200	4 u. 9	4867	19 469	4 u. 9	0	2304	- 2396	4 u. 8	- 320	- 2391	1123
5 u. 8	- 4800	- 19 200	5 u. 8	4824	19 296	5 u. 8	0	2449	- 2460	5 u. 7	- 320	- 2469	1324
6 u. 7	- 4800	- 19 200	6 u. 7	4804	19 216	6 u. 7	0	2410	- 2582	6	- 320	- 1280	0
	Kilogr.		Kilogr.			Kilogramm.				Kilogramm.			

In die Gleichungen 36 u. 37 sind die absoluten Zahlenwerthe für P_0 , P_1 und P_2 einzufetzen.

6) Dreiecksträger.

Dreieck- und Trapezträger find, wie bereits in Art. 166 (S. 148) gefagt wurde, Träger, deren Gurtungen ein Dreieck, bezw. ein Parallelogramm bilden. Die eine

^{193.} Trägerformen.

Fig. 227.

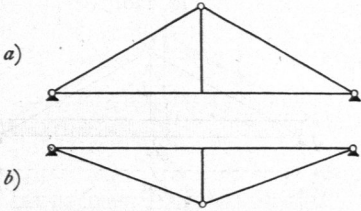
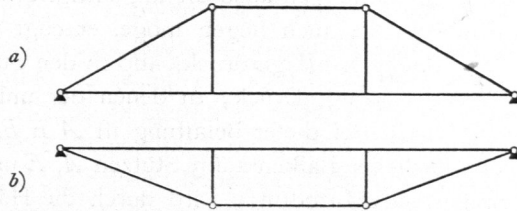


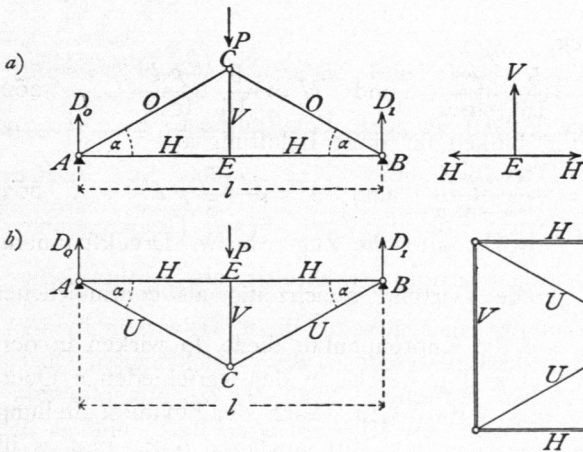
Fig. 228.



Gurtung zeigt eine gerade, die andere eine gebrochene Linie. Ist die untere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des einfachen, bezw. doppelten Hängebockes bekannte Trägerform (Fig. 227a, bezw. 228a) — nicht zu verwechseln mit den Hängewerkträgern, welche nach Art. 148 (S. 125) von der hier betrachteten wesentlich verschieden sind. Ist die obere Gurtung gerade, so erhält man die unter dem Namen des armirten Balkens bekannte Trägeranordnung (Fig. 227b u. 228b).

a) Belastung durch Einzellaft (Fig. 229). Wenn in dem Knoten-

Fig. 229.



^{194.} Belastung durch Einzellaft.

punkte C oder E des Hängebockes (Fig. 229a) die Laft P wirkt, so wird der Auflagerdruck

$$D_0 = D_1 = \frac{P}{2}.$$

Die in den Punkten A wirkenden 3 Kräfte D_0 , O und H halten einander das Gleichgewicht, und es sind demnach die algebraischen Summen der in diesem Knotenpunkte wirkenden wagerechten, bezw. lothrechten Seitenkräfte je gleich Null, d. h. es ist

$$0 = D_0 + O \sin \alpha, \text{ woraus } O = -\frac{P}{2 \sin \alpha} \dots \dots \dots 258.$$

$$0 = O \cos \alpha + H, \text{ woraus } H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \dots \dots \dots 259.$$

Die Spannungen der symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe sind gleich.

Falls die Laft P im Punkte C angreift, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung für den Punkt E die Beziehung $0 = V$; falls P in E angreift, so heißt die Gleichgewichtsbedingung $0 = V - P$, woraus

$$V = P \dots \dots \dots 260.$$

Eben so ergibt sich für den armirten Träger (Fig. 229b)

$$U = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad H = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad V = -P \dots \dots \dots 261.$$

Die Construction der Spannungen ergibt den Kräfteplan in Fig. 229, welcher ohne weitere Erläuterung verständlich ist.

195.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

β) Gleichförmig vertheilte volle Belastung. Wird der Berechnung eine gleichförmig vertheilte Belastung zu Grunde gelegt, so ist die volle Belastung für die Stabspannungen auch die ungünstigste; denn jede Last, wo sie auch liegen möge, erzeugt in A und B (Fig. 230) Auflagerdruck, also in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denen der unteren Gurtung Zug. Bei dieser Belastung ist AEB wie ein continuirlicher Balken auf 3 Stützen A , E und B aufzufassen; die Mittelftütze wird durch die Hängeseile CE gebildet. In derselben entsteht demnach ein Zug, welcher genau so groß ist, wie der Auflagerdruck bei der Mittelftütze E des continuirlichen Trägers AEB . Nach der Zusammenstellung in Art. 164 (S. 146) ist dieselbe hier $d_1 = 1,25 p \frac{l}{2} = \frac{5}{8} p l$, während $d_0 = d_2 = 0,375 p \frac{l}{2} = \frac{3}{16} p l$ ist; die letzteren Drücke werden vom Auflager aufgenommen und belasten den Träger nicht. Die Stabspannungen werden demnach die unter α gefundenen Werthe haben, wenn statt P die Größe $\frac{5}{8} p l$ eingesetzt wird. Es wird also beim Hängebock

$$V = P = \frac{5}{8} p l, \quad O = -\frac{5}{16} \frac{p l}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{5}{16} \frac{p l}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \dots \quad 262.$$

Eben so ergibt sich im armirten Balken für diese Belastungsart

$$H = -\frac{5}{16} \frac{p l}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad U = \frac{5}{16} \frac{p l}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad V = -\frac{5}{8} p l. \quad \dots \quad 263.$$

In der geraden Gurtung AEB wirkt also die Zug-, bzw. Druckspannung $H = \pm \frac{5}{16} \frac{p l}{\operatorname{tg} \alpha}$; da aber diese gerade Gurtung gleichzeitig als continuirlicher Träger zum Uebertragen der Lasten auf die Knotenpunkte dient, so wirken in derselben auch noch die Momente und Querkräfte, welche in den verschiedenen Querschnitten des continuirlichen Trägers AEB entstehen. Nach der Zusammenstellung in Art. 164 (S. 146) findet das größte Moment am Mittelauger statt, und es ist dasselbe

$$M_1 = 0,125 p \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{p l^2}{32}.$$

196.
Querschnitts-
bestimmung.

γ) Querschnittsbestimmung. Die Querschnitte der nur gezogenen, bzw. nur gedrückten Stäbe ergeben sich leicht, wie in Art. 77 (S. 51 ff.) und im vorhergehenden Kapitel angegeben ist. Der Querschnitt der geraden Gurtung AEB ist für die gemeinsame Beanspruchung durch Zug, bzw. Druck und die Momente zu construiren. Wird der ganze Querschnitt (für Holz) als constant angenommen, so ist das größte im Balken wirkende Moment der Berechnung zu Grunde zu legen. An Stelle des größten Momentes M_{max} ist die größte in den äußersten Querschnittspunkten stattfindende Axialspannung für die Flächeneinheit nach Art. 107 (S. 80)

$$N_{max} = \pm \left(\frac{H}{F} + \frac{M_{max} a}{\mathcal{F}} \right).$$

Beim Rechteckquerschnitt ist $F = b h$, $\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{b h^2}{6}$, und wenn noch statt N_{max} die größte zulässige Spannung K eingeführt wird, so ergibt sich als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$K = \pm \left(\frac{H}{b h} + \frac{6 M_{max}}{b h^2} \right) \dots \dots \dots 264.$$

In dieser Gleichung sind b und h unbekannt. Man nimmt zunächst für b einen Werth probeweise an und bestimmt h aus Gleichung 264; ergibt sich für h eine unzuweckmäßige Gröfse, so nehme man für b einen anderen Werth an und bestimme wiederum h nach Gleichung 264. Es werden sich meistens bei der zweiten Rechnung entsprechende Werthe für b und h ergeben.

7) Trapezträger.

a) Einzellaften. Für die Belastungen in Fig. 231 a sind die Auflagerdrücke beim Hängebock

197.
Einzellaften.

$$D_0 = \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l}.$$

Die Stabspannungen ergeben sich dann durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte, wie folgt:

$$0 = D_0 + O_1 \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad O_1 = - \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l \sin \alpha} \dots \dots \dots 265.$$

$$0 = O_1 \cos \alpha + U_1, \quad \text{woraus} \quad U_1 = \frac{P_2 a + P_1 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_2 a + P_1 (a + b)] \frac{a}{l h} \quad 266.$$

$$0 = U_1 - U_2, \quad \text{woraus} \quad U_2 = U_1 = [P_2 a + P_1 (a + b)] \frac{a}{l h} \dots \dots \dots 267.$$

$$0 = D_1 + O_3 \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad O_3 = - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \sin \alpha} \dots \dots \dots 268.$$

$$0 = U_3 + O_3 \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad U_3 = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = [P_1 a + P_2 (a + b)] \frac{a}{l h} \quad 269.$$

$$0 = O_2 - O_3 \cos \alpha, \quad \text{woraus} \quad O_2 = - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \operatorname{tg} \alpha} = - [P_1 a + P_2 (a + b)] \frac{a}{l h} \quad 270.$$

$$0 = V_1 \text{ (falls die Last } P_1 \text{ in } C \text{ wirkt, so ist } V_1' = P_1) \dots \dots \dots 271.$$

$$0 = P_2 + V_2 + O_3 \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad V_2 = (P_1 - P_2) \frac{a}{l} \dots \dots \dots 272.$$

Falls die Last P_2 in E wirkt, so wird

$$0 = V_2' + O_3 \sin \alpha, \quad \text{woraus} \quad V_2' = \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l} \dots \dots \dots 273.$$

$$0 = U_2 + Y \cos \beta - U_3, \quad \text{woraus} \quad Y = - \frac{U_2 - U_3}{\cos \beta} = - \frac{a b}{l h \cos \beta} (P_1 - P_2),$$

$$Y = + (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta} \dots \dots \dots 274.$$

Falls die Lasten in der unteren Gurtung, in C und E , angreifen, so wird

$$Y' \sin \beta + V_2' - P_2 = 0, \quad \text{woraus} \quad Y' = \frac{P_2 - V_2'}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \beta} - \frac{P_1 a + P_2 (a + b)}{l \sin \beta},$$

$$Y' = (P_2 - P_1) \frac{a}{l \sin \beta}, \dots \dots \dots 275.$$

d. h. eben so grofs, wie in Gleichung 274.

Wenn, wie meistens, $P_1 = P_2 = P$ ist, wird

$$\left. \begin{aligned} O_1 = - \frac{P}{\sin \alpha}; \quad U_1 = \frac{P a}{h} = U_2; \quad O_2 = - \frac{P a}{h}; \quad O_3 = - \frac{P}{\sin \alpha}; \\ U_3 = \frac{P a}{h}; \quad V_1 = 0; \quad V_2 = 0; \quad Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad 276.$$

Die Construction ergibt den neben stehenden, ohne Erklärung verständlichen Kräfteplan (Fig. 231 b).

Was den armirten Balken (Fig. 228 b) anbelangt, so sind bei diesem die Spannungen sowohl in der oberen, wie in der unteren Gurtung den soeben für die gerade, bzw. gebrochene Gurtung des doppelten Hängebockes gefundenen Spannungen der absoluten Gröfse nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt. Die Werthe derselben können demnach aus den Gleichungen 265 bis 270 durch Umkehrung der Vorzeichen genommen werden. Die Spannungen in der Diagonalen und in den Verticalen ergeben sich leicht durch Betrachtung des Gleichgewichtes der einzelnen Knotenpunkte, wie beim doppelten Hängebock gezeigt ist.

198.
Gleichförmig
vertheilte
Belastung.

β) Gleichförmig über den ganzen Träger vertheilte Belastung (Fig. 232). Jede Belastung erzeugt in den Stäben der unteren Gurtung Zug, in denjenigen der oberen Gurtung Druck, wie sich aus den Gleichungen 265 bis 270 ergibt. Maximalzug, bzw. -Druck findet also in den Gurtungen bei Belastung des ganzen Trägers statt.

Die untere Gurtung wirkt, wenn keine Gelenke in den Knotenpunkten derselben angenommen werden, wie ein continuirlicher Balken auf 4 Stützen. Die Endstützen sind A und B; die Mittelfützen werden durch die Verticalen FC und GE gebildet. Wird $a = b$ gesetzt, so ergibt sich bei Belastung des ganzen Trägers mit der Last p für die Längeneinheit als Auflagerdruck der Mittelfützen nach der Zusammenstellung in Art. 164

(S. 146) $d_1 = d_2 = 1,1 \frac{p l}{3} = 0,37 p l$. Eben so groß ist die Last, welche in den Knotenpunkten C und E des Systemes nach unten wirkt. Werden diese Werthe für P_1 und P_2 in die obigen Gleichungen eingeführt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= -\frac{0,37 p l}{\sin \alpha}; & U_1 &= 0,37 p l \frac{a}{h}; & O_2 &= -0,37 p l \frac{a}{h}; & O_3 &= -\frac{0,37 p l}{\sin \alpha}; \\ U_2 &= 0,37 p l \frac{a}{h}; & U_3 &= 0,37 p l \frac{a}{h}; & V_1 &= 0,37 p l; & V_2 &= 0,37 p l; & Y &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot 277.$$

Die hier gefundenen Spannungen O und U sind die größten Stabspannungen, welche durch gleichförmig vertheilte Nutzlast entstehen. Wird statt p das Eigen-

Fig. 231.

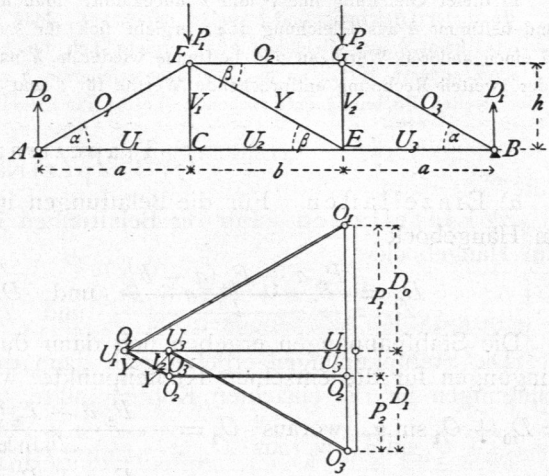
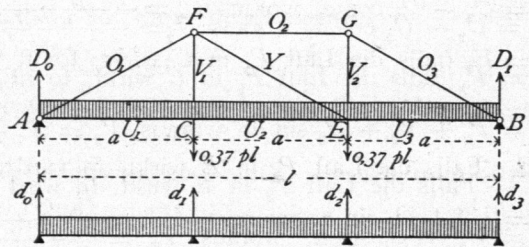


Fig. 232.



gewicht g für die Längeneinheit eingeführt, so ergeben sich die durch das Eigengewicht entstehenden Stabspannungen.

γ) Ungünstigste Beanspruchung der Diagonale und der Verticalen. Den allgemeinen Ausdruck für die Diagonalspannung giebt die Gleichung 274. Y wird seinen größten positiven Werth (Zug) haben, wenn P_2 möglichst groß, P_1 möglichst klein ist; Y wird seinen größten negativen Werth (Druck) erreichen, wenn P_2 möglichst klein, P_1 möglichst groß ist. Wird als Nutzlast eine gleichmäßig vertheilte Last eingeführt, so kann man, wenn $a = b$ ist, mit für die Zwecke des Hochbaues hinreichender Sicherheit annehmen, daß die Diagonale den größten Zug erleidet, wenn der Punkt E am Fußpunkte derselben mit $p a + 0,37 g l$ belastet ist, der Punkt C (in der Verticalen des Kopfes der Diagonalen) nur das Eigengewicht $0,37 g l$ trägt. Bei der umgekehrten Belastung dagegen erleidet die Diagonale ihren größten Druck. Demnach wird

$$V_{\min}^{max} = \pm \frac{p a^2}{l \sin \beta} \dots \dots \dots 278.$$

Ferner ist hier, wo die Lasten unten wirken, $V_1 = P_1$, d. h.

$$V_{1max} = 0,37 (g + p) l \quad \text{und} \quad V_{1min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 279.$$

Auch V_2 erleidet den größten Zug bei voller Belastung; da bei dieser Belastung $Y = 0$ ist, so wird auch

$$V_{2max} = 0,37 (g + p) l \quad \text{und} \quad V_{2min} = 0,37 g l \dots \dots \dots 280.$$

δ) Die Querschnittsbestimmung ist in genau gleicher Weise vorzunehmen, wie dies in Art. 195, (S. 180) beim Dreiecksträger gezeigt ist. Die Maximalmomente in der geraden Gurtung finden bei C und E statt und sind genau genug für $a = b$ nach der Zusammenstellung in Art. 164 (S. 146)

$M = p \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{p l^2}{90}$. Die Abmessungen b und h des rechteckigen Querschnittes (für Holz) find demnach aus der Gleichung zu bestimmen:

$$N_{max} = K = \pm \left(\frac{U}{b h} + \frac{6 M_{max}}{b h^2} \right).$$

Die Dreieck- und Trapezträger mit einer größeren Anzahl von Lastpunkten werden durch Einfügen von Dreiecken in die oben (Fig. 227 u. 228) dargestellten Trägerformen hergestellt. Die Berechnung entspricht der vorstehenden, kann aber auch bequem nach der Momentenmethode vorgenommen werden.

Literatur.

Bücher über »Statik der Stützen und Träger«.

- KLOSE, H. A. Theorie der eisernen Träger mit Doppelflanschen. Hannover 1862.
 ASSMANN, G. Hilfstafeln zur Berechnung eiserner Träger und Stützen. Berlin 1865.
 FRANCIS, J. B. On the strength of cast-iron pillars. New-York 1866.
 KLERITJ, Lj. J. Abhandlung über genauere Berechnung und Construction einiger Träger von gleichem Widerstande. Freiberg 1869.
 LIPPICH, F. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Elementare Darstellung der von CLAPEYRON und MOHR begründeten analytischen und graphischen Methoden und ihres Zusammenhanges. Wien 1871.
 RITTER, W. Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken etc. Zürich 1871. — 2. Aufl. 1883.
 KECK, W. Ueber die Ermittlung der Spannungen in Fachwerkträgern, mit Hilfe der graphischen Statik. Hannover 1872.

199.
Ungünstigste
Beanspruchung
der
Gitterstäbe.

200.
Querschnitts-
bestimmung.

- WEYRAUCH, J. Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig 1873.
- TETMAJER, L. Die äußern und innern Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.
- PINZGER, L. Neue Methode zur Berechnung von Trägern mit unfymmetrischen Querschnittsformen. München 1879.
- CLERC, A. *Mémoire sur une nouvelle théorie de la résistance des poutres*. Paris 1880.
- ZIMMERMANN, H. Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte genieteter Blechträger. Berlin 1881.
- CANOVETTI. *Théories des poutres continues etc.* Paris 1882.
- HULEWICZ. *Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées*. Paris 1882.
- MÜLLER-BRESLAU, H. F. B. Die wichtigsten Resultate für die Berechnung eiserner Träger und Stützen etc. Berlin 1883.
- STONE, B. B. *The theory of stresses in girders and similar structures*. London 1886.
- WEYRAUCH, J. J. Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1887.
- WEYRAUCH, J. J. Beispiele und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.