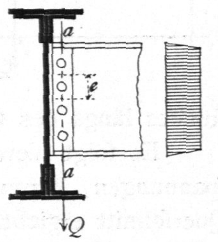
Die in Art. 102 bis 104 für verſchiedene Querſchnittsformen ermittelten Werthe und graphiſchen Darſtellungen für H gelten alſo auch für V.

Das Geſetz, nach welchem ſich die lothrechten Schubſpannungen im Querſchnitt vertheilen, iſt von beſonderer Wichtigkeit, wenn es ſich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben ſtehender Verbindung (Fig. 101) entfallenden Beanſpruchungen zu ermitteln. Der **I**-förmige Walzträger wird durch Winkeleiſen mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querſchnitt $a\,a$ des **I**-Trägers entſtehende Querkraft Q iſt durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete ſind nun ſo zu vertheilen, daſs deren Entfernung der Gröſse der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubſpannung entſpricht. Iſt an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten e und die lothrechte Schubſpannung für die Längeneinheit im Mittel in dieſer Höhe gleich V, ſo kommt auf einen Niet die Schubkraft $V\,e$.

Fig. 101.



Der Niet wird in zwei Querſchnitten abgeſchert; mithin iſt der Abſcherungswiderſtand des Nietes $\frac{2\,d^2\pi}{4}\,T$; es ergiebt ſich alſo für e die Gleichung:

$$V\,e = \frac{2\,d^2\pi}{4}\,T, \quad \text{woraus} \quad e = \frac{\pi\,d^2\,T}{2\,V}.$$

Da V von der neutralen Axe nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, ſo ſind die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu ſetzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen **I**-förmigen Walzbalken kann man die oben ſtehende Fig. 101 als graphiſche Darſtellung der Veränderlichkeit der lothrechten Schubſpannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung V als gleich groſs über die ganze Trägerſteghöhe annehmen, worin nach Gleichung 59: $V = \frac{Q}{\mathfrak{h}}$.

106. Spannungen f. ein beliebiges Flächen-element.

In den bisherigen Betrachtungen ſind nur die Normalſpannungen, welche in den lothrechten Balkenquerſchnitten, und die Schubſpannungen, welche in den wagrechten und lothrechten Balkenquerſchnitten entſtehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanſpruchungen eingehend zu löſen, wären noch die Normal- und Schubſpannungen in einem Querſchnitte aufzuſuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Wagrechten macht. Auf dieſe Unterſuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meiſten Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Leſer, welche ſich über dieſen Gegenſtand unterrichten wollen, werden auf die S. 49 genannten Werke von *Graſhof* und *Winkler* verwieſen.

d) Elaſtiſche Linie.

107. Axiale Biegungsſpannung.

Wenn ein Balken dem Einfluſſe biegender Kräfte unterworfen iſt, ſo wird eine Formänderung deſſelben eintreten. Die Axe des urſprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 102), und zwar iſt dieſe krumme Linie eine ebene Curve, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, welche ſämmtliche Querſchnitte in Hauptaxen — meiſt Symmetrieaxen — ſchneidet. Alsdann liegen alle Punkte der gebogenen Axe in der Kraftebene. Man nennt die Axe des gebogenen Balkens die elaſtiſche Linie.

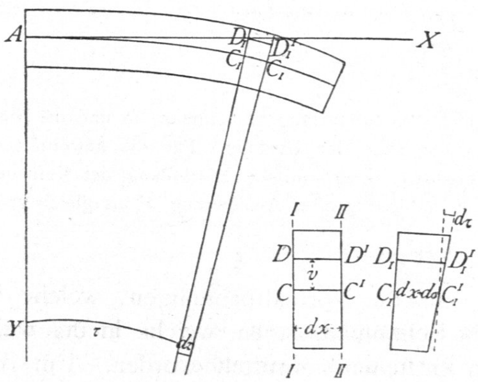
Die Gleichung der elaſtiſchen Linie wird für eine groſse Zahl von Aufgaben gebraucht; bei vielen derſelben wirken nicht nur Kräfte ſenkrecht zur urſprünglichen Balkenaxe, ſondern auch ſolche, welche in die Axe fallen, ſog. Axialkräfte. Es ſoll deſshalb dieſer allgemeinere Fall für die Entwickelung der Gleichung zu Grunde gelegt, im Uebrigen aber angenommen werden, daſs die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneide.

Es iſt zunächſt der Ausdruck für die alsdann an beliebiger Stelle irgend eines

Querſchnittes auftretende axiale Biegungsſpannung N zu entwickeln; die Axialkraft für den betreffenden Querſchnitt ſei P, das Biegungsmoment ſei M.

Wirkte nur die Kraft P in der Richtung der Axe, ſo würde dieſelbe in allen Punkten des Querſchnittes die gleiche axiale Spannung $N_1 = \frac{P}{F}$ erzeugen, wenn F den Flächeninhalt des Querſchnittes bedeutet. Das Moment M allein würde nach den Entwickelungen in Art. 86 (S. 62) in verſchiedenen Punkten des Querſchnittes eine verſchiedene axiale Spannung hervorrufen, welche ſich für einen Punkt im Abſtande v von der wagrechten Schwerpunktsaxe zu $N_2 = \frac{M v}{\mathcal{J}}$ ergiebt. Da beide Wirkungen gleichzeitig vorhanden ſein ſollen, ſo wird die wirkliche axiale Spannung in irgend einem Punkte gleich der algebraiſchen Summe von N_1 und N_2 ſein, d. h. es wird ſein

Fig. 102.



vor nach der Formänderung.

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M v}{\mathcal{J}} \quad . \quad . \quad . \quad 62.$$

108. Gleichung der elaſtiſchen Linie.

Mit Hilfe dieſes wichtigen Ausdruckes kann die Gleichung der elaſtiſchen Linie folgendermaſsen entwickelt werden.

Man lege durch einen Punkt A der Balkenaxe drei Coordinatenaxen, von denen die X-Axe mit der urſprünglichen Balkenaxe zuſammenfalle, die Y-Axe ſenkrecht zu derſelben in der Kraftebene, die Z-Axe ſenkrecht zur Kraftebene ſteht, und betrachte ein Balkenſtück zwiſchen den Ebenen $I\,I$ und $II\,II$, deſſen Länge vor der Formänderung $d\,x$ war. Die Ebenen $I\,I$ und $II\,II$ waren vor der Formänderung parallel und ſenkrecht zur Balkenaxe und hatten die Abſciſſen x und $x + d\,x$; die Länge einer Faſer $D\,D'$ in der Höhe v über der Axe war $d\,x$.

Wir beſtimmen nunmehr die Formänderung dieſer Faſer $D\,D'$. Durch die beiden Punkte der gebogenen Axe C_1 und C_1' legen wir Ebenen ſenkrecht zu der gebogenen Axe; der Winkel beider ſei $d\,\tau$, der Winkel der durch C_1 gelegten Ebene mit der Y-Axe ſei τ. Die einzelnen Punkte der Querſchnitte $I\,I$ und $II\,II$ werden nach der Biegung allgemein nicht mehr in Ebenen liegen; man kann aber annehmen, daſs der Abſtand zweier Punkte in der Höhe v über der Axe alsdann eben ſo groſs ſei, wie der Abſtand der Normalebenen in der Höhe v über der Axe, d. h. daſs ſtattfindet

$$D_1\,D_1' = C_1\,C_1' + v\,d\,\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes $C\,C'$ bei der Formänderung $d\,\sigma$, ſo iſt

$$C_1\,C_1' = d\,x + d\,\sigma \quad \text{und} \quad D_1\,D_1' = d\,x + d\,\sigma + v\,d\,\tau.$$

Dies iſt die Länge der gebogenen Faſer. Die urſprüngliche Länge derſelben war $D\,D' = d\,x$; folglich iſt die Verlängerung

$$D_1\,D_1' - D\,D' = d\,x + d\,\sigma + v\,d\,\tau - d\,x = d\,\sigma + v\,d\,\tau$$

und das Verlängerungsverhältniſs $\frac{d\,\sigma + v\,d\,\tau}{d\,x}$.

Iſt N die axiale Faſerſpannung in dieſer Faſer, ſo iſt

$$\frac{N}{E}=\frac{d\sigma+v\,d\tau}{d\,x}=\frac{d\sigma}{d\,x}+\frac{v\,d\tau}{d\,x},$$

$$N=E\,\frac{d\sigma}{d\,x}+\frac{E\,d\tau}{d\,x}\,v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 63.$$

Nach Gleichung 62 ist aber auch

$$N=\frac{P}{F}+\frac{M}{\mathfrak{J}}\,v\,.$$

Die Gleichsetzung beider für N gefundener Werthe ergiebt

$$\frac{P}{F}+\frac{M}{\mathfrak{J}}\,v=E\,\frac{d\sigma}{d\,x}+\frac{E\,d\tau}{d\,x}\,v,$$

woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$\left.\begin{array}{l} E\,\dfrac{d\sigma}{d\,x}=\dfrac{P}{F} \\[2ex] E\,\dfrac{d\tau}{d\,x}=\dfrac{M}{\mathfrak{J}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 64.$$

Es wird demnach

$$\frac{d\tau}{d\,x}=\frac{M}{E\,\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 65.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\tau=\frac{d\,y}{d\,x}$, sonach $\frac{d\operatorname{tg}\tau}{d\,x}=\frac{d\tau}{\cos^2\tau\,.\,d\,x}=\frac{d^2y}{d\,x^2}$;

mithin

$$\frac{d\tau}{d\,x}=\cos^2\tau\;\frac{d^2y}{d\,x^2}\,.$$

Bei den hier in Betracht kommenden Formänderungen ist τ so klein, dass $\cos^2\tau$ unbedenklich gleich 1 gesetzt werden kann, d. h. dass nahezu

$$\frac{d\tau}{d\,x}=\frac{d^2y}{d\,x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 66.$$

Wird dieser Werth für $\frac{d\tau}{d\,x}$ in Gleichung 65 eingesetzt, so erhält man

$$\frac{d^2y}{d\,x^2}=\frac{M}{E\,\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67.$$

Gleichung 67 ist die Differentialgleichung der elastischen Linie. In derselben bedeutet M das Moment an einer Stelle mit der Abscisse x, im Allgemeinen also etwas Veränderliches; $\mathfrak{J}$ ist das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe des Querschnittes an derselben Stelle.

Die Gleichung der elastischen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 67 erhalten; bei der Integration ist E constant. Es wird

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{1}{E}\int\frac{M}{\mathfrak{J}}\,d\,x+C_1$$

und

$$y=\frac{1}{E}\int\!\!\int\frac{M}{\mathfrak{J}}\,(d\,x)^2+C_1\,x+C_2$$

Bekanntlich ist der Krümmungshalbmesser für eine ebene Curve

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\dfrac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{d\,x^2}}$$

oder, wenn tg $\tau = \frac{dy}{dx}$ nur klein ift, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elaftifchen Linie auch gefchrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \mathfrak{J}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 68.$$

Für $M = 0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elaftifche Linie eine Gerade. Das Moment M ift Null an demjenigen Punkte des Balkens, bei welchem es aus dem pofitiven in den negativen Werth übergeht, alfo das Vorzeichen wechfelt; an diefen Punkten hat fonach die elaftifche Linie fog. Wendepunkte.