Bei Körpern, welche nach allen Richtungen gleiche Elafticität befitzen, d. h. bei fog. ifotropen Körpern, ift $\mu = \mu_1$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = - \frac{1}{\mu} \frac{N}{E}.$$

Für ifotrope Körper liegt μ zwifchen 3 und 4.

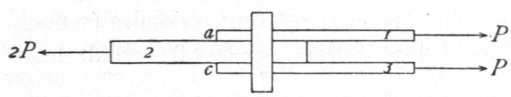
---

3. Kapitel.

Schubelafticität und Schubfeftigkeit.

Der Fall der reinen Schubelafticität tritt, wie bereits in Art. 73 (S. 48) gefagt wurde, ein, wenn die wirkenden Kräfte das Beftreben haben, zwei Nachbarquerfchnitte fo gegen einander zu verfchieben, dafs die Entfernung der Querfchnittsebenen diefelbe bleibt. Dies ift nur möglich, wenn die Kräfte unmittelbar neben der Ebene wirken, längs deren das Beftreben einer Verfchiebung ftattfindet, und wenn diefelben fich zu zwei Kräften vereinen laffen, welche einander nach Gröfse und Richtung genau gleich, dem Sinne nach entgegengefetzt find. Man nennt diefe Kräfte die abfcherenden Kräfte. 82. Schubfpannungen.

Fig. 71.



In der Technik kommt diefer Fall u. A. bei den Niet- und Bolzenverbindungen vor. Die beiden Kräfte P (Fig. 71) haben das Beftreben, die Bleche *1* und *3* nach rechts zu verfchieben; diefe Verfchiebung wird durch den Niet verhindert, welcher die Bleche *1* und *3* mit *2* verbindet. Längs jeder der beiden Trennungsflächen wirkt je eine Kraft P nach rechts im Bleche *1*, bezw. *3*, je eine Kraft P nach links im Bleche *2*.

Man kann für die Beftimmung der Spannungen, welche in den auf reine Schubelafticität beanfpruchten Querfchnitten entftehen, mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit annehmen, dafs die abfcherenden Kräfte fich gleichförmig über die ganzen abzufcherenden Querfchnitte vertheilen, mithin im Querfchnitt eine gleichförmig vertheilte Schubfpannung erzeugen. Daraus folgt, dafs der Widerftand gegen Abfcheren der Gröfse des abzufcherenden Querfchnittes direct proportional ift.

Ift alfo der Flächeninhalt des auf Abfcheren beanfpruchten Querfchnittes F die abfcherende Kraft P und die im Querfchnitt entftehende Schubfpannung T, fo ift $P = F\,T$, woraus

$$T = \frac{P}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 38.$$

Die Querfchnittsgröfse der auf Schub beanfpruchten Querfchnitte wird durch Gleichung 38 ermittelt. Verfteht man unter T die gröfste für die Flächeneinheit des Querfchnittes zuläffige Schubbeanfpruchung, unter P die auf Abfcheren wirkende Kraft, fo ergiebt fich aus der angegebenen Gleichung die nöthige Querfchnittsgröfse 83. Querfchnittsbeftimmung.

$$F = \frac{P}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 39.$$

Was nun die für T einzuführenden Werthe anlangt, fo haben die angeftellten Verfuche ergeben, dafs der Widerftand der Materialien gegen Beanfpruchung auf

Schub geringer ist, als gegen Beanspruchung auf Zug oder Druck. Daraus folgt, dass man die Materialien auf Schub nicht so stark beanspruchen darf, wie auf Zug oder Druck.

Die nachstehende Tabelle giebt für eine Reihe wichtiger Baustoffe die Festigkeits-Coefficienten für Schub und die zulässigen Schubbeanspruchungen, für das Quadrat-Centimenter als Flächeneinheit an. Dabei wird bezüglich weiterer einschlägiger Festigkeitsangaben auf den vorhergehenden Halbband dieses »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Baustoffe) verwiesen.

Bezeichnung der Materialien	Festigkeits-Coefficient für Schub	Zulässige Schubbeanspruchung T
Schmiedeeisen	3200 bis 4000	600 bis 800 [17])
Gusseisen	1000 bis 1100	220
Gussstahl	4000	800
Nadelholz: parallel der Faserrichtung . . .	46	9 bis 10
senkrecht zur Faserrichtung . .	125	16 bis 19
Eichenholz: parallel der Faserrichtung . . .	86	22 bis 27
senkrecht zur Faserrichtung . .	125	22 bis 27
	Kilogramm für 1 qcm der Querschnittsfläche.	

84. Beispiele.

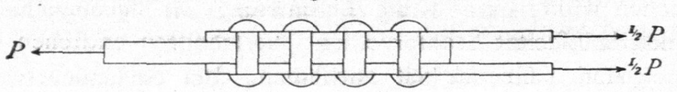
Beispiele. 1) Eine schmiedeeiserne Stange, in welcher ein Zug $P = 5600$ kg herrscht, soll mit einem Bolzen an einem Knotenbleche befestigt werden. Es ist der Durchmesser d des Bolzens zu bestimmen.

Der Querschnitt F des Bolzens ergiebt sich aus der Gleichung 39. Die zulässige Schubbeanspruchung T sei hier 700 kg, sonach

$$F = \frac{5600}{700} = 8^{\,\text{qcm}} \quad \text{und} \quad d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = 3{,}2^{\,\text{cm}} .$$

2) Es ist die Anzahl Nietquerschnitte zu bestimmen, welche nöthig sind, um einen schmiedeeisernen Constructionstheil, in welchem ein Zug $P = 30\,000$ kg herrscht, mit einem Knotenbleche zu verbinden. Der Durchmesser der Niete sei 2 cm; der betreffende Constructionstheil (Fig. 72) soll aus zwei Flacheisen hergestellt sein, welche das Knotenblech zwischen sich nehmen.

Fig. 72.



Jedes Flacheisen hat einen Zug von $\frac{P}{2} = 15\,000$ kg zu ertragen; den gleichen Zug haben die Nietquerschnitte zwischen diesem Flacheisen und dem Knotenbleche aus dem einen in das andere zu überführen, d. h. die auf Abscheren dieser Querschnitte wirkende Kraft beträgt 15 000 kg. Der Gesammtquerschnitt aller zur Befestigung des einen Flacheisens dienenden Nietquerschnitte ergiebt sich demnach zu

$$F = \frac{15\,000}{T} .$$

Die für Niete erlaubte Schubbeanspruchung T kann man (siehe Fussnote 17), da die Niete aus dem besten Eisen hergestellt werden, unbedenklich gleich der im gewöhnlichen Stabeisen und Blech erlaubten Zugbeanspruchung annehmen. Wir nehmen desshalb $T = 750$ kg, und es wird

$$F = \frac{15\,000}{750} = 20^{\,\text{qcm}} .$$

Ist die Anzahl der Nietquerschnitte n, so muss $\frac{n\,d^2\,\pi}{4} = F = 20$ qcm sein, oder, wenn $d = 2$ cm,

$$n = \frac{20 \cdot 4}{d^2\,\pi} = 6{,}37 \text{, statt dessen } 7.$$

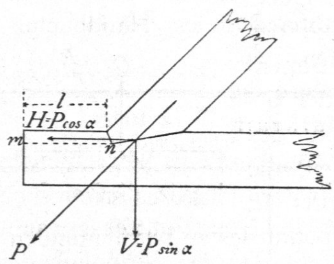
Es müssen also 7 Nietquerschnitte zur Verbindung des einen Flacheisens mit dem Knotenbleche angeordnet werden; genau eben so gross muss die Zahl der Nietquerschnitte sein, welche zur Verbindung des anderen Flacheisens mit dem Knotenbleche dienen.

17) Bei den Nieten ist wegen des vorzüglichen Materials die erlaubte Schubbeanspruchung gleich der im Blech erlaubten Zug-, bezw. Druckbeanspruchung zu setzen.

Ein Abſcheren iſt bei der Conſtruction in Fig. 72 nur möglich, wenn jeder Niet in zwei Querſchnitten abgeſchert wird; jeder Niet bietet alſo zwei Querſchnitte, ſo daſs im Ganzen 7 Niete, d. h. 14 Nietquerſchnitte anzuordnen ſind [18]).

3) Eine Strebe (Fig. 73), welche einen Druck $P = 20\,000^{\text{kg}}$ zu ertragen hat, ſei mit einem Balken durch Verſatzung verbunden; der Winkel beider Axen ſei 45 Grad. Die Länge l iſt ſo zu beſtimmen, daſs ein Abſcheren längs der Fläche $m\,n$ nicht ſtattfindet.

Fig. 73.



Die Kraft P zerlegt ſich in eine lothrechte Seitenkraft $V = P \sin \alpha$ und eine wagrechte Seitenkraft $H = P \cos \alpha$.

Es iſt $H = 20\,000 \cos 45^{0} = 14\,140^{\text{kg}}$ und

$V = 20\,000 \sin 45^{0} = 14\,140^{\text{kg}}$.

Die abſcherende Kraft A iſt die Kraft H abzüglich des Reibungswiderſtandes $f\,V$, wenn f den Reibungs-Coefficienten bedeutet. Iſt $f = 0{,}3$, ſo iſt die abſcherende Kraft

$$A = H - f\,V = 14\,140\ (1 - 0{,}3) = 9898^{\text{kg}}$$

oder $A = \backsim 10\,000^{\text{kg}}$.

Dabei iſt auf die durch den Bolzen möglicher Weiſe erzeugte Reibung keine Rückſicht genommen, weil ein Lockern des Bolzens denkbar iſt.

Die Breite des Balkens und der Strebe ſei b; alsdann wird eine Fläche von der Länge l und der Breite b auf Abſcheren in Anſpruch genommen (d. h. die Fläche $m\,n$). Iſt die für 1^{qcm} der abzuſcherenden Fläche zuläſſige Schubſpannung T, ſo darf in dieſer Fläche im Ganzen eine Schubſpannung $S = b\,l\,T$ ſtattfinden.

So groſs darf alſo A höchſtens ſein. Die Bedingungsgleichung für die Ermittelung von l iſt ſonach:

$$b\,l\,T = A \quad \text{oder} \quad l = \frac{A}{b\,T}.$$

In unſerem Falle ſei $b = 25^{\text{cm}}$; T iſt nach der Tabelle auf S. 58 für Nadelholz $= 10^{\text{kg}}$ für 1^{qcm}; es muſs alſo ſein:

$$l = \frac{10\,000}{25 \cdot 10} = 40^{\text{cm}}.$$

Auf weitere Fälle der Schubbeanſpruchung werden wir im nächſten Kapitel zurückkommen.

4. Kapitel.

Biegungselaſticität und Biegungsfeſtigkeit.

Beanſpruchung eines Balkens auf Biegung findet ſtatt, wenn die äuſseren Kräfte die beiden an den verſchiedenen Seiten eines Querſchnittes (etwa $\alpha\,\alpha$ in Fig. 74) liegenden Balkentheile um eine ſenkrecht oder geneigt zur Kraftebene ſtehende Axe zu drehen ſtreben. Drehung ſetzt ein Moment voraus; ſonach muſs ein Moment der äuſseren Kräfte für den Querſchnitt vorhanden ſein. Gewöhnlich wirkt auſser dieſem Momente noch eine abſcherende Kraft, welche weitere Beanſpruchungen hervorruft; letztere ſetzen ſich dann mit den reinen Biegungsbeanſpruchungen zuſammen. 85. Biegungsmoment und Querkraft.

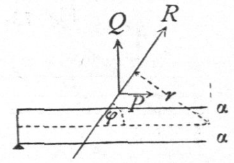
Es ſei hier die Annahme gemacht, daſs die Balkenaxe in der Kraftebene liege; wenn ſomit die Bildebene die Kraftebene vorſtellt, ſo liegen in derſelben ſowohl die äuſseren Kräfte, wie auch die Balkenaxe.

[18]) Man unterſcheidet einſchnittige und zweiſchnittige Niete. Bei den einſchnittigen Nieten wird von jedem Niet nur ein Querſchnitt, bei den zweiſchnittigen Nieten werden von jedem Niet zwei Querſchnitte auf Abſcheren beanſprucht. Näheres hierüber im III. Theil dieſes »Handbuches«, Bd. 1 (Abth. I, Abſchn. 3: Conſtructions-Elemente in Eiſen).

Die äuſseren Kräfte, als welche die Stützendrücke und die Belaſtungen einzuführen ſind, können beliebige Richtung und Gröſse haben.

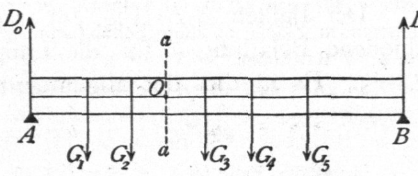
Der allgemeine Fall der Biegungselaſticität iſt durch Fig. 74 veranſchaulicht. Die Mittelkraft R aller an der einen Seite irgend eines Querſchnittes $\alpha\alpha$ wirkenden äuſseren Kräfte ſchneide die Axe des Körpers unter dem Winkel φ. Zerlegt man R in zwei Seitenkräfte, deren eine P parallel zur Axe des Körpers an der betreffenden Stelle gerichtet iſt, deren andere Q die Axe des Körpers unter 90 Grad ſchneidet, ſo nennt man die erſtere die Axialkraft, die zweite die Querkraft oder Transverſalkraft. Das ſtatiſche Moment der Kraft R in Bezug auf den Schwerpunkt des zu betrachtenden Querſchnittes erſtrebt die Drehung des linken Balkentheiles um eine in dieſem Querſchnitte liegende Axe und wird das Biegungsmoment des Querſchnittes genannt. Die Biegungsmomente ſind von gröſster Wichtigkeit für die Träger; bezüglich derſelben iſt Folgendes zu beachten.

Fig. 74.



Der ganze Träger AB (Fig. 75) muſs unter der Einwirkung aller äuſseren Kräfte im Gleichgewichte ſein; demnach muſs die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ſein. Bezeichnet man nun das ſtatiſche Moment der an dem links von $a\,a$ liegenden Trägertheile angreifenden äuſseren Kräfte für den Drehpunkt O mit M_{links}, dasjenige der äuſseren Kräfte an dem rechts liegenden Trägertheile ebenfalls für O als Drehpunkt mit M_{rechts}, ſo muſs ſein

Fig. 75.



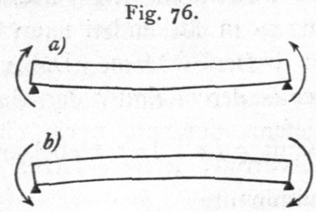
$$0 = M_{links} + M_{rechts},$$

d. h.

$$M_{rechts} = - M_{links}.$$

Die an der rechten Balkenſeite des Querſchnittes wirkenden äuſseren Kräfte haben alſo ein Biegungsmoment, welches dem Zahlenwerthe nach genau ſo groſs iſt, wie dasjenige an der linken Balkenſeite des Querſchnittes; die Vorzeichen ſind entgegengeſetzt. Wenn die Kräfte an der einen Seite nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers) drehen, ſo iſt die Drehrichtung der Kräfte an der anderen Seite nach links (entgegengeſetzt der Uhrzeigerdrehrichtung). Beide Momente beanſpruchen den Balken gleichzeitig entweder ſo, daſs er ſeine concave Seite nach oben (Fig. 76a) oder nach unten (Fig. 76b) kehrt. Die erſtere Drehrichtung der Momente ſoll in der Folge, wenn nichts anderes angegeben iſt, als poſitiv, die letztere als negativ eingeführt werden. Die Momente ſind daher poſitiv, wenn ſie links vom Querſchnitt nach rechts und rechts vom Querſchnitt nach links drehen.

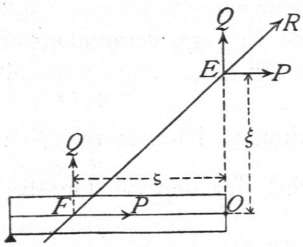
Fig. 76.



Für die Anwendung iſt zu bemerken, daſs es nach Vorſtehendem ganz gleichgiltig iſt, ob man das Moment der an der einen oder der an der anderen Seite des Querſchnittes wirkenden Kräfte ermittelt; man wird zweckmäſsig ſtets diejenige Seite wählen, welche für die Rechnung und Anſchauung die bequemere iſt.

Die Zerlegung der Mittelkraft R in Axial- und Querkraft kann an beliebiger Stelle der Kraft R vorgenommen werden. Geſchieht dieſelbe im Punkte E, dem Schnittpunkte von R mit dem Querſchnitte (oder deſſen Verlängerung), ſo hat Q kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegungsmoment, d. h. das ſtatiſche

Fig. 77.



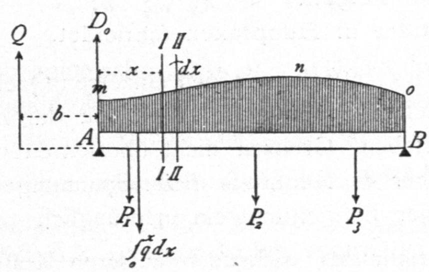
Moment von R ist dann gleich dem statischen Momente von P, also $M = P\,\xi$ (Fig. 77); zerlegt man dagegen R in F, dem Schnittpunkte von R mit der Axe, so hat P kein Moment für O als Drehpunkt und das Biegungsmoment wird gleich dem statischen Momente von Q, also $M = Q\,\zeta$ (Fig. 77). Wenn bei einem Balken mit wagrechter Axe nur lothrechte äussere Kräfte wirken, so ist R gleichfalls lothrecht, also die Seitenkraft P gleich Null und $R = Q$, bezw.

$$M = Q\,\zeta.$$

Bei den hier zu betrachtenden Balken ist dieser Fall der fast ausschliesslich vorkommende; deshalb soll in Folgendem nur lothrechte Belastung zu Grunde gelegt werden. Dann besteht nachstehende einfache Beziehung zwischen dem Biegungsmomente und der Querkraft: Die Querkraft Q ist gleich dem ersten Differenzialquotienten des Biegungsmomentes nach x, wenn x die Abscisse eines Querschnitts bedeutet.

Der Balken $A\,B$ (Fig. 78) trage eine beliebige, an den einzelnen Stellen verschiedene Belastung q für die Längeneinheit und eine Reihe von Einzellasten P_1, P_2, P_3. Es ist dies der allgemeinste Fall; jeder andere Fall ist eine Vereinfachung desselben. Die Grösse von q werde an jeder Stelle durch die Ordinate der Curve $m\,n\,o$ dargestellt. Die Abscisse irgend eines Querschnittes $I\,I$ sei x; links von diesem Querschnitt wirken D_0, P_1, und $\int_0^x q\,d\,x$. Die Mittelkraft dieser drei Kräfte ist die Querkraft Q, d. h. es ist

Fig. 78.



$$Q = D_0 - P_1 - \int_0^x q\,d\,x.$$

Q möge im Abstande b links von A angreifen. Das Biegungsmoment für den Querschnitt $I\,I$ ist gleich dem statischen Moment von Q für diesen Querschnitt, d. h. es ist

$$M = Q\,(b + x).$$

Betrachtet man einen zweiten Querschnitt $II\,II$, der um $d\,x$ von $I\,I$ entfernt ist, so ist für diesen das Moment $M + d\,M$.

Dieses Moment setzt sich zusammen aus den Momenten der links von $II\,II$ wirkenden Kräfte, d. h. der Kraft Q, und der zwischen $I\,I$ und $II\,II$ liegenden Kraft $q\,d\,x$. Der Hebelsarm von Q ist $b + x + d\,x$, derjenige von $q\,d\,x$ ist $\frac{d\,x}{2}$; mithin ist

$$M + d\,M = Q\,(b + x + d\,x) - q\,d\,x\,\frac{d\,x}{2} = Q\,(b + x) + Q\,d\,x - q\,\frac{d\,x^2}{2}.$$

Zieht man von dieser Gleichung die oben für M gefundene ab, so bleibt:

$$d\,M = Q\,d\,x - \frac{q\,d\,x^2}{2}.$$

$\frac{q\,d\,x^2}{2}$ ist eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung und verschwindet gegen die übrigen Gröſsen der Gleichung, welche unendlich kleine Gröſsen erſter Ordnung ſind. Es iſt demnach

$$d\,M = Q\,d\,x \quad \text{und, wie oben behauptet,} \quad Q = \frac{d\,M}{d\,x}\,, \qquad . \quad . \quad . \quad 40.$$

Wird $Q = 0$, ſo iſt auch $\frac{dM}{d\,x} = 0$, alſo M ein Maximum. Hieraus folgt, daſs das Moment für denjenigen Querſchnitt zum Maximum wird, für den die Querkraft gleich Null iſt.

Fig. 79.

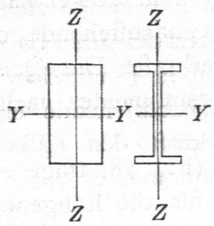
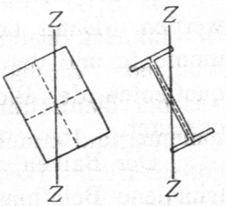


Fig. 80.



Für die Berechnung auf Biegung beanſpruchter Balken iſt es von grundlegender Bedeutung, wie die einzelnen Balkenquerſchnitte von der Kraftebene geſchnitten werden. Wenn, wie meiſtens der Fall, die Kraftebene alle Balkenquerſchnitte in Hauptaxen ſchneidet (ſiehe Art. 59, S. 39), ſo ergeben ſich für die Spannung ſehr einfache Formeln. Nach Früherem iſt jede Symmetrie-Axe eine Hauptaxe; wenn alſo z. B. die Querſchnitte die in Fig. 79 dargeſtellten Formen haben und die Kraftebene durch ZZ, ſenkrecht zur Bildebene geht, ſo iſt die obige Vorausſetzung erfüllt. Weſentlich verwickelter iſt die Berechnung, wenn die Kraftebene die Querſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet; dieſer Fall wird durch Fig. 80 veranſchaulicht, in welcher die Querſchnitte lothrecht belaſteter Dachpfetten vorgeführt ſind.

a) Axiale Biegungsſpannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

86. Axiale Biegungsſpannung.

Unter der Einwirkung des Biegungsmomentes entſtehen in den einzelnen Querſchnitten des Balkens an den verſchiedenen Stellen Spannungen; dieſelben dürfen gewiſſe durch die Natur des Materials vorgeſchriebene Grenzen nicht überſchreiten, wenn die Conſtruction ſicher ſein ſoll; es iſt daher die Kenntniſs dieſer Spannungen nothwendig. Zur Ermittelung derſelben möge der Betrachtung ein urſprünglich gerades Balkenſtück von der Länge $d\,x$ (Fig. 81) zu Grunde gelegt werden; AB fällt in die Axe des Balkens. Bei der Biegung erleidet daſſelbe Formänderungen, und es werden im Allgemeinen die vor der Biegung durch A und B gelegten Querſchnitte nach denſelben nicht mehr eben ſein; $C\,D$ möge ſich in $C_1\,D_1$ (Fig. 82) geändert haben. Die urſprüngliche Länge von $C\,D$ war $d\,x$; die jetzige Länge iſt $C_1\,D_1 = d\,x + \Delta\,d\,x$; mithin iſt die Verlängerung in Folge der Biegung $\Delta\,d\,x$ (welche Verlängerung ſowohl poſitiv, wie negativ ſein kann). Das Verlängerungsverhältniſs an dieſer Stelle iſt demnach

Fig. 81.

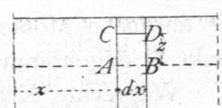
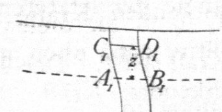


Fig. 82.



$$\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x}\,.$$

Wird die an dieſer Stelle für die Flächeneinheit des Querſchnittes herrſchende Spannung mit N und der Elaſticitäts-Modul des Materials mit E bezeichnet, ſo iſt nach Gleichung 30 das Verlängerungsverhältniſs

$$\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x} = \frac{N}{E}\,, \quad \text{alſo} \quad N = E\,\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x}\,.$$

Da E bekannt iſt, ſo iſt auch N bekannt, falls $\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x}$ gefunden iſt. Man macht nun die Annahme, daſs das Verlängerungsverhältniſs an den verſchiedenen Stellen