BARLOW, P. *Treatiſe on the ſtrength of materials.* London 1833. — Neue Ausg. von W. HUMBER. 1867.
LAMÉ, G. *Leçons ſur la théorie mathématique de l'élaſticité des corps ſolides.* Paris 1852. — 2. Aufl. 1866.
MOLL, C. L. und F. REULEAUX. Die Feſtigkeit der Materialien etc. Braunſchweig 1853.
MORIN, A. *Réſiſtance des matériaux.* Paris 1853. — 3. Aufl. 1862.
ROFFIAEN, E. *Traité ſur la réſiſtance des matériaux dans les conſtructions.* Lüttich 1858.
BOURDAIS, J. *Traité pratique de la réſiſtance des matériaux appliquée à la conſtruction etc.* Paris 1859.
JEEP, W. Die Feſtigkeit der Materialien etc. Weimar 1861.
SHIELDS, F. W. *The ſtrains on ſtructures of ironwork.* London 1861.
CLEBSCH, A. Theorie der Elaſticität feſter Körper. Leipzig 1862.
GRASHOF, F. Theorie der Elaſticität und Feſtigkeit etc. Berlin 1866. — 2. Aufl. 1878.
WINKLER, E. Die Lehre von der Elaſticität und Feſtigkeit etc. 1. Theil. Prag 1867.
ANDERSON, C. E. *The ſtrength of materials and ſtructures.* London 1872.
MÜLLER-BRESLAU, H. Elementares Handbuch der Feſtigkeitslehre etc. Berlin 1875.
KURZ, A. Taſchenbuch der Feſtigkeitslehre etc. Berlin 1877.
SERGENT, E. *Traité pratique de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1878. — 3. Aufl. 1881.
KENT, W. *The ſtrength of materials.* New-York 1879.
LAMBERT, P. Tabellariſche Zuſammenſtellung der Reſultate aus der angewandten Feſtigkeitslehre, mit beſonderer Berückſichtigung von Conſtructionen in Eiſen und Holz. Zürich 1880.
LINGLIN, TH. *Traité élémentaire de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1880.
MADAMET, A. *Réſiſtance des matériaux.* Paris 1881.
BOX, TH. *A practical treatiſe on the ſtrength of materials etc.* London 1883.
VIGREUX, L. *Traité théoretique et pratique de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1885.
STONEY, B. B. *The theory of ſtreſſes in girders and ſimilar ſtructures etc.* London 1885.
UHLICH, P. Die Feſtigkeitslehre und ihre Anwendung etc. Mittweida 1885. — 2. Aufl. Dresden 1887.
PLANAT, P. *Pratique de la mécanique appliquée à la réſiſtance des matériaux.* Paris 1887.
MOOS, N. A. *Elementary treatiſe on the ſtrength of materials and ſtrains in ſtructures.* London 1887.
AERTS, L. *Eléments pratiques de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1888.
JOHNEN, P. J. Elemente der Feſtigkeitslehre etc. Weimar 1889.

---

2. Kapitel.

Zug- und Druckelaſticität, bezw. Zug- und Druckfeſtigkeit.

Die reine Zug- und Druckelaſticität kommt nur bei geraden Stäben vor, weſshalb hier nur ſolche betrachtet werden ſollen. 74. Elaſticitäts-geſetze.

Die Geſetze für alle Arten der Elaſticität ergeben ſich aus denen, welche für die Zug- und Druckelaſticität gelten; demnach muſs die letztere die Grundlage für die ganze Behandlung bilden.

Die geſammte Elaſticitätslehre beruht auf folgendem, äuſserſt wichtigem Geſetze, welches durch Verſuche feſt geſtellt iſt:

1) Die Verlängerung, bezw. Verkürzung eines in ſeiner Axenrichtung, d. h. auf Zug- oder Druckelaſticität beanſpruchten Stabes iſt, ſo lange die Beanſpruchung innerhalb der Elaſticitätsgrenze bleibt, der urſprünglichen Länge des Stabes direct proportional. Das Verhältniſs der Verlängerung (poſitiv oder negativ genommen) zu der urſprünglichen Länge heiſst das Verlängerungsverhältniſs.

2) Die Verlängerung eines, wie angegeben, beanſpruchten Stabes iſt, ſo lange die Spannung deſſelben innerhalb der Elaſticitätsgrenze liegt, direct proportional der in dem Stabe herrſchenden Spannung. Iſt alſo die Spannung im Stabe N, ſo iſt die Verlängerung, alſo auch das Verlängerungsverhältniſs N-mal ſo groſs, als bei der Spannung 1.

3) Das Verlängerungsverhältniſs iſt vom Material abhängig, aus welchem der Stab beſteht. Für dieſe Abhängigkeit iſt eine beſondere Bezeichnung eingeführt. Nennt man die Verlängerung, welche ein Gewicht gleich der Krafteinheit an einem Stabe hervorbringt, deſſen Querſchnitt gleich der Flächeneinheit iſt, λ, die urſprüngliche Länge des Stabes vor der Verlängerung l, ſo iſt für dieſen Fall das Verlängerungsverhältniſs $= \frac{\lambda}{l}$.

75. Elaſticitäts-Coefficient.

Dieſes Verlängerungsverhältniſs, welches je nach dem Material, aus welchem der Stab beſteht, verſchieden iſt, bezeichnet man mit $\frac{1}{E}$ und nennt E den **Elaſticitäts-Modulus** oder **Elaſticitäts-Coefficienten** des betreffenden Materials. Demnach iſt der Elaſticitäts-Modulus E der umgekehrte Werth des (poſitiven oder negativen) Verlängerungsverhältniſſes, welches durch die Spannung 1 an einem Stabe vom Querſchnitt gleich der Flächeneinheit hervorgebracht wird.

Wirkt in dem Stabe eine Spannung N für die Flächeneinheit des Querſchnittes, ſo iſt nach 2 das Verlängerungsverhältniſs N-mal ſo groſs, als bei der Spannung 1 für die Flächeneinheit des Querſchnittes; mithin iſt ſodann das Verlängerungsverhältniſs

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N.1}{E} = \frac{N}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 30.$$

Wirkt auf einen Stab, deſſen Querſchnitt F Flächeneinheiten enthält, deſſen Querſchnitt alſo gleich F iſt, eine Kraft P, und kann man annehmen, daſs dieſe Kraft ſich gleichmäſsig über den ganzen Querſchnitt vertheilt, ſo iſt die Spannung für die Flächeneinheit derſelben $N = \frac{P}{F}$, und wenn man dieſen Werth für N in die Gleichung für $\frac{\Delta l}{l}$ einſetzt, erhält man folgende wichtige Gleichung:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{F E} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{P l}{F E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31.$$

Die hier vorgeführten Ergebniſſe gelten ſowohl, wenn die Verlängerung eine poſitive, d. h. eine wirkliche Verlängerung, als auch wenn ſie eine negative, d. h. eine Verkürzung iſt. Sie gelten alſo ſowohl für Zug- als auch für Druckbeanſpruchungen; nur hat für erſtere im Allgemeinen E einen anderen Werth, als für letztere.

76. Zuläſſige Beanſpruchung.

Die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ kann benutzt werden, um die Gröſse der Kraft zu beſtimmen, mit welcher ein Stab von gegebenem Querſchnitt höchſtens auf Zug- bezw. Druckelaſticität beanſprucht werden darf.

Nach dieſer Gleichung iſt $P = N F$. Wird für N der gröſste Werth eingeſetzt, welchen das Material auf die Flächeneinheit des Querſchnittes höchſtens erleiden kann, ohne zerſtört zu werden, d. i. der Feſtigkeits-Coefficient, ſo ergiebt ſich $P_{max} = N_{max} F$. In dieſer Gleichung iſt P_{max} diejenige Belaſtung, deren geringſte Vergröſserung ein Zerreiſsen, bezw. Zerdrücken des Stabes zur Folge haben würde; N_{max} iſt nach Früherem die Zug-, bezw. Druckfeſtigkeit.

Die Stäbe werden nicht bis zu dieſer Grenze beanſprucht; vielmehr werden **Sicherheits-Coefficienten** eingeführt, welche für verſchiedene Materialien verſchiedene Werthe haben. Man trägt durch dieſelben den etwa möglichen Ueberlastungen, den Fehlern im Material, den im Laufe der Zeit möglichen Veränderungen des Materials durch Rost, Faulen etc., den Stössen und anderen ungünstigen Einflüssen Rechnung.

Bezeichnet n den Sicherheits-Coefficienten, so ist als wirkliche Maximalbelastung P des Stabes nur $\frac{1}{n}$ von P_{max} einzuführen, d. h. es darf nur sein:

$$P = \frac{N_{max} F}{n}.$$

Man nennt nun $\frac{N_{max}}{n}$ die **zulässige Beanspruchung**, die im Folgenden mit K bezeichnet werden soll. Es ist demnach

$$K = \frac{N_{max}}{n}.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt die Bedingungsgleichung für die Querschnittsgrösse:

$$F = \frac{P}{K} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 32.$$

In dieser Gleichung bedeutet P die im ganzen Stabe höchstens auftretende Kraft.

Für die Bestimmung der Querschnittsgrösse, welche den auf Zug-, bezw. Druckelasticität beanspruchten Stäben zu geben ist, kommt es vor Allem darauf an, welche Werthe als die zulässigen Beanspruchungen $\frac{N_{max}}{n}$ eingeführt werden dürfen. Ueber diese Frage herrscht zur Zeit durchaus noch keine Uebereinstimmung. 77. Querschnitts-bestimmung.

Da die Materialien, sobald die Beanspruchungen die Elasticitätsgrenze überschreiten, merkbare bleibende Veränderungen erleiden, so muss eine Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze bei der Belastung unter allen Umständen vermieden werden. Die Lage der Elasticitätsgrenze ist aber nach Früherem nicht mit vollständiger Gewissheit bekannt; auch haben kleine Arbeitsfehler sehr grossen, schädlichen Einfluss. Deshalb muss man mit der zulässigen Beanspruchung wesentlich unter der Elasticitätsgrenze bleiben, so dass auch eine unbeabsichtigte Vergrösserung der Spannung, in Folge etwaiger Fehler, selbst die tiefer als erwartet liegende Elasticitätsgrenze nicht erreicht. Beim Schmiedeeisen, dem wichtigsten einer genauen Berechnung zu unterwerfenden Baustoff, kann man die zulässige Beanspruchung auf die Hälfte bis zwei Drittel der Spannung an der Elasticitätsgrenze fest stellen. Wenn die Belastung ruhend, ohne Stösse, stattfindet, so ist die höhere Grenze zulässig; wirkt die Last dagegen in Verbindung mit Stössen, so ist die untere Grenze einzuführen.

Für schmiedeeiserne Stäbe, welche nur gezogen, bezw. nur gedrückt werden, kann man einen genaueren Anhalt über die zu wählenden Beanspruchungen folgendermassen finden. Wenn der Stab abwechselnd eine höhere und niedrigere Beanspruchung zu erleiden hat, etwa dadurch, dass die betreffende Construction zeitweilig ausser dem Eigengewicht noch eine Nutzlast trägt, so mögen die obere und untere Grenze der ganzen Stabkraft P_{max} und P_{min} sein; die entsprechenden Grenzen der auf die Flächeneinheit entfallenden Spannungen seien

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F} \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}.$$

Die Verkehrslaſt tritt ſtets mit gröſseren oder geringeren Stöſsen verbunden auf, welchem Umſtande man dadurch Rechnung trägt, daſs man dieſelbe mit einem Werthe $(1 + \mu)$ multiplicirt in die Rechnung einführt; dabei iſt μ der ſog. Stoſs-coefficient. Durch das Eigengewicht allein wird P_{min}, bezw. σ_{min} erzeugt; durch Eigengewicht und Verkehrslaſt werden P_{max}, bezw. σ_{max} hervorgerufen; es wird demnach die Verkehrslaſt allein

$$(P_{max} - P_{min}), \text{ bezw. } (\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

erzeugen. Wird nun die Verkehrslaſt mit $(1 + \mu)$ multiplicirt eingeführt, ſo wird durch dieſelbe die Spannung $(1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ auf die Flächeneinheit des Querſchnittes hervorgerufen; die geſammte Beanſpruchung auf die Flächeneinheit iſt alsdann

$$\sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}).$$

Wäre man vor unbeabſichtigten Spannungen in der Conſtruction ganz ſicher, ſo könnte man dieſe ſoeben entwickelte Spannung gleich derjenigen an der Elaſticitätsgrenze ſetzen; da aber unbeabſichtigte Spannungen ſehr wohl auftreten können, da eine Querſchnittsverminderung durch Roſten nicht ausgeſchloſſen iſt, auch wohl einmal höhere Verkehrslaſten, als angenommen ſind, vorkommen können, ſo wird es ſich empfehlen, die oben vorgeführte Spannung nur auf $^2/_3$ der Spannung an der Elaſticitätsgrenze feſt zu ſtellen, demnach die Gleichung zu ſchreiben (mit Abrundung und bezogen auf das Quadrat-Centimeter als Flächeneinheit):

$$\sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1050.$$

Die Spannung an der Elaſticitätsgrenze iſt hierbei zu 1600^{kg} für 1^{qcm} angenommen. Die Auflöſung nach σ_{max} ergiebt

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}} \quad \dots\dots\dots \quad 33.$$

σ_{max} iſt die zuläſſige Beanſpruchung, und es wird die Querſchnittsfläche des Stabes

$$F = \frac{P_{max}}{\sigma_{max}} \quad \dots\dots\dots \quad 34.$$

Nun iſt offenbar $\sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}$ und $\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F}$, demnach

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{P_{min}}{P_{max}} \quad \text{und} \quad \sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{P_{min}}{P_{max}}}.$$

Für Schmiedeeiſen kann man $\mu = 0{,}5$ ſetzen; P_{min} und P_{max} ſind bekannt, mithin auch σ_{max}. Es wird

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1{,}5 - 0{,}5 \frac{P_{min}}{P_{max}}} \quad \dots\dots\dots \quad 35.$$

Nach Gleichung 34 iſt

$$F = \frac{P_{max}\left(1{,}5 - \frac{0{,}5\, P_{min}}{P_{max}}\right)}{1050} = \frac{1{,}5\, P_{max} - 0{,}5\, P_{min}}{1050}.$$

Werden die durch das Eigengewicht, bezw. die Verkehrslaſt allein im ganzen Stabe erzeugten Spannungen mit P_0, bezw. P_1 bezeichnet, ſo iſt

$$P_{max} = P_0 + P_1 \quad \text{und} \quad P_{min} = P_0, \quad \text{alſo}$$

$$F = \frac{1{,}5\, P_0 + 1{,}5\, P_1 - 0{,}5\, P_0}{1050} = \frac{P_0 + 1{,}5\, P_1}{1050} = \frac{P_0}{1050} + \frac{P_1}{700} \quad \dots \quad 36.$$

Dieser Ausdruck kann für Stäbe aus Schmiedeeisen benutzt werden, welche nur auf Zug oder nur auf Druck in Anspruch genommen werden.

Wenn hingegen die Beanspruchungen zwischen Zug und Druck wechseln, so sind die Querschnittsgrößen F aus folgenden Formeln[15] zu ermitteln:

$$\text{für } P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0 \text{ und } P_2 > \frac{2}{3} P_0: \qquad \text{für } P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0 \text{ und } P_2 > \frac{2}{3} P_0:$$

$$F = \frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{2100} \qquad F = -\frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{700} \quad . \quad . \quad 37.$$

Hierin bedeutet P_0 die Stabspannung, welche durch das Eigengewicht allein hervorgerufen wird; P_1 die durch ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Stabspannung, welche mit P_0 gleichen Sinn hat; P_2 die durch ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Stabspannung, welche entgegengesetzten Sinn hat, wie P_0.

In der Spalte 5. der nachfolgenden Tabelle sind für die hauptsächlichsten Constructions-Materialien die in der Praxis üblichen Werthe der zulässigen Beanspruchung K zusammengestellt; ferner sind in der Tabelle die Elasticitäts-Coefficienten, die Festigkeits-Coefficienten, so wie diejenigen Beanspruchungen angegeben, bei welchen die Elasticitätsgrenze erreicht wird. Naturgemäfs können die in der Tabelle angeführten Werthe nur Mittelwerthe sein, die sich mit der Güte des Materials, der Art der Beanspruchung und anderen Umständen ändern.

1.	2.	3.		4.		5.					
Bezeichnung der Materialien	Elasticitäts-Coefficient E	Festigkeits-Coefficient bei Beanspruchung auf		Beanspruchung an der Elasticitätsgrenze auf		Zulässige Beanspruchung K für definitive Bauwerke, Belastung mit starken Stößen		Zulässige Beanspruchung K für definitive Bauwerke, Belastung mit mäßigen Erschütterungen		provisorische Bauten, Belastung mit mäßigen Erschütterungen	
		Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
Schmiedeeisen . . .	2000	3500 bis 4000	3200 bis 3600	1,56	1,56	700	700	1000	1000	—	—
Gußeisen	1000	1250 bis 1450	7500 bis 8000	0,66	1,65 bis 1,9	—	—	250	500	—	—
Stahl	2200	8000	7000	3,0	3,0	1500	1500	1800	2000	—	—
Holz in der Faserrichtung:											
Eichenholz . . .	120	965	487	0,26	0,21	—	—	90	65	180	130
Kiefernholz . . .	120	820	410	0,29	0 22	—	—	80	60	160	110
Holz radial, d. h. in der Richtung der Jahresringe:											
Eichenholz . . .	18,9	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Kiefernholz . . .	9,6	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Mauerwerk:											
Gewöhnliches Backsteinmauerwerk in Kalkmörtel . .	—	—	—	—	—	—	—	0 bis 0,9	7	—	—
Gutes Backsteinmauerwerk in Cementmörtel . .	—	—	—	—	—	—	--	1,3	11	—	—
Bestes Mauerwerk .	—	—	—	—	—	—	—	1,8 bis 2,0	14	—	—
Natürliche Steine:											
Granit	—	—	—	—	—	—	—	5 bis 6	45	—	—
Kalkstein	—	—	—	—	—	—	—	3	25	—	—
Sandstein	—	—	—	—	—	—	—	2 bis 4	15 bis 30	—	—
Marmor	—	—	—	—	—	—	—	3	24	—	—
	Tonnen für 1 qcm	Kilogramm für 1 qcm		Tonnen für 1 qcm		Kilogramm für 1 qcm					

Das Berliner Polizei-Präsidium legt bei seinen Berechnungen die umstehend angegebenen Zahlenwerthe als zulässige Beanspruchung zu Grunde (Bekanntmachung vom 21. Februar 1887):

[15]) Die Herleitung dieser beiden Formeln ist aus des Verfassers Abhandlung: «Ueber die Bestimmung der Querschnitte von Eisenconstructionen» (in: Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 575) zu entnehmen.

Material	Zuläffige Beanfpruchung auf Zug	Zuläffige Beanfpruchung auf Druck
Schmiedeeifen	750	750
Gufseifen	250	500
Bombirtes Eifenwellblech	500	500
Eifendraht	1200	—
Eichen- und Buchenholz	100	80
Kiefernholz	100	60
Granit	—	45
Sandftein, je nach der Härte	—	15 bis 30
Rüdersdorfer Kalkftein in Quadern	—	25
Kalkfteinmauerwerk in Kalkmörtel	—	5
Gewöhnliches Ziegelmauerwerk	—	7
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel	—	11
Beftes Klinkermauerwerk in Cementmörtel	—	12 bis 14
Mauerwerk aus poröfen Steinen	—	3 bis 6
Guter Baugrund	—	2,5
	Kilogramm für 1 qcm	

78. Beifpiele.

Beifpiele. 1) Eine fchmiedeeiferne Stange werde höchftens mit einer Zugkraft $P = 18\,750$ kg beanfprucht. Es ift die Querfchnittsgröfse unter der Annahme zu beftimmen, dafs die Stange einer endgiltigen Conftruction angehört und die Belaftung nur mit mäfsigen Erfchütterungen auftritt.

Nach umftehender Tabelle ift für den vorliegenden Fall $K = 1000$ kg, fonach

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18\,750}{1000} = 18{,}75 \text{ qcm}.$$

Wenn die Stange aus Rundeifen conftruirt werden foll, fo mufs fein:

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 18{,}75}{3{,}14}} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

Wird entfprechend den Annahmen des Berliner Polizei-Präfidiums $K = 750$ kg gefetzt, fo mufs

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18\,750}{750} = 25 \text{ qcm}$$

fein und

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = 5{,}64 \text{ cm}.$$

2) Bei einer gufseifernen gedrückten Stange fei die Maximal-Druckkraft $P = 5850$ kg. Der Querfchnitt derfelben ift demnach, wenn die Conftruction wiederum als definitiv und die Belaftung als mit mäfsigen Erfchütterungen wirkend angenommen wird,

$$F = \frac{P}{K} = \frac{5850}{500} = 11{,}7 \text{ qcm}.$$

Bei Wahl eines kreisförmigen Querfchnittes ergiebt fich der Durchmeffer d aus der Gleichung:

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11{,}7}{3{,}14}} = 3{,}8 \text{ cm}.$$

3) Auf einen Holzftab mit rechteckigem Querfchnitt wirke ein Maximaldruck $P = 16\,000$ kg. Der Stab foll einer proviforifchen Conftruction, welche mäfsigen Erfchütterungen ausgefetzt ift, angehören; das Material ift Kiefernholz. Es ergiebt fich nach Gleichung 32

$$F = \frac{16\,000}{110} = 145{,}4 \text{ qcm}.$$

Ein quadratifcher Querfchnitt von 12,1 cm Seitenlänge würde demnach genügen.

4) Wäre im erften Beifpiele die Stabkraft durch das Eigengewicht $P_0 = 6750$ kg, diejenige durch Verkehrslaft $P_1 = 12\,000$ kg, fo ergäbe fich aus Gleichung 36

$$F = \frac{6750}{1050} + \frac{12\,000}{700} = 6{,}43 + 17{,}14 = 23{,}57 \text{ qcm},$$

und es müſſte ſein:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 23{,}57}{3{,}14}} = \backsim 5{,}5 \text{ cm}.$$

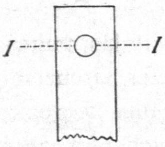
Von der wegen Beanſpruchung auf Zerknicken bei den gedrückten Stäben vorzunehmenden Vergröſserung des Querſchnittes wird im nächſten Abſchnitt (Kap. 2) die Rede ſein.

79. Beanſpruchung bei Querſchnitts-veränderungen.

Die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ ergab ſich unter der Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Kraft P über die ganze Querſchnittsfläche F. Dieſe Annahme iſt aber nur richtig, wenn 1) der Querſchnitt des Körpers conſtant iſt und 2) die äuſsere Kraft P ſich über die Endflächen gleichmäſsig vertheilt. Die Geſetze der Kraftvertheilung für den Fall, daſs dieſe beiden Bedingungen nicht erfüllt ſind, können auf rein theoretiſchem Wege nicht oder nur in einzelnen Fällen genau ermittelt werden. Gewöhnlich wird jedoch bei den Berechnungen auf die Nichtbekanntſchaft mit dieſen Geſetzen keine Rückſicht genommen und die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ auch für dieſe Fälle einfach als richtig angenommen.

Wenn ein Stab an einigen Stellen kleinere Querſchnittsflächen, als an anderen hat, ſo iſt ſelbſtverſtändlich die kleinſte Querſchnittsfläche der Berechnung des Stabes zu Grunde zu legen und dieſe ſo zu bemeſſen, daſs die in ihr wirkende Spannung an keiner Stelle die zuläſſige Beanſpruchung überſteigt. Findet in dem betreffenden Querſchnitte die Kraft P ſtatt, ſo berechnet man die Querſchnittsfläche F an dieſer Stelle nach der Gleichung 32

Fig. 67.



$$F = \frac{P}{K},$$

worin K die zuläſſige Beanſpruchung bedeutet. Der neben ſtehende Stab (Fig. 67) hat ſeine kleinſte Querſchnittsfläche im Querſchnitte $I\,I$, welcher der Nietmitte entſpricht, und es muſs demnach dieſe Querſchnittsfläche der obigen Gleichung genügen. Aehnlich iſt bei den Stäben in Fig. 68 u. 69 die durch die Verengung beſtimmte Stelle als ſchwächſte der Berechnung zu Grunde zu legen. Dabei iſt jedoch zu beachten, daſs bei Anwendung obiger Gleichung für K ein anderer Werth als derjenige einzuführen iſt, welcher für Berechnung einer ungeſchwächten Stange zu Grunde gelegt wird.

Fig. 68.

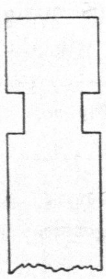
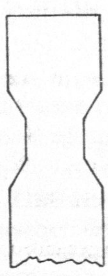


Fig. 69.



Behufs Feſtſtellung dieſer Thatſache hat *Winkler*[16]) Verſuche mit Kautſchukmodellen angeſtellt und dabei gefunden, daſs die Beanſpruchung für 1 qcm bei plötzlicher Veränderung der Querſchnittsfläche weſentlich gröſser iſt, als wenn der Stab auf ſeine ganze Länge den kleinſten Querſchnitt hätte. Dieſe Vergröſserung der Beanſpruchung iſt beſonders groſs, wenn die Veränderung des Querſchnittes mittels eines ſcharfen Abſatzes ſtattfindet (Fig. 68), während ſie bedeutend kleiner iſt, wenn zur Ueberführung des kleineren Querſchnittes in den gröſseren ein allmählicher Uebergang hergeſtellt wird (Fig. 69). Im erſteren Falle zeigt ſich eine Vergröſserung der Beanſpruchung bis zu 30 und 35 Procent. Da die Verſuche über dieſe Frage noch nicht endgiltig abgeſchloſſen ſind, ſo dürfte es an dieſer Stelle genügen, aus denſelben folgende Regeln zu ziehen:

1) Bei einer Querſchnittsveränderung iſt der Uebergang von der einen Querſchnittsform in die andere möglichſt allmählich vorzunehmen.

---

16) Deformationsverſuche mit Kautſchuk-Modellen. Civiling. 1878, S. 81.

2) Der Berechnung iſt die kleinſte Querſchnittsfläche zu Grunde zu legen.

3) Die für die Flächeneinheit des kleinſten Querſchnittes zuläſſige Beanſpruchung iſt kleiner anzunehmen, als wenn der Stab einen überall gleichen Querſchnitt hätte.

80. Formänderung der Stäbe.

Die Gröſse der Formänderung gezogener oder gedrückter Stäbe ergiebt die Gleichung 31:

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{P}{F\, E} \quad \text{oder} \quad \Delta\, l = \frac{P\, l}{F\, E}.$$

Beiſpiel. Iſt bei der in Beiſpiel 1 auf S. 54 angenommenen Stange $l = 5$ m, ſo wird

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{18750}{18{,}75\, E}.$$

Nach der Tabelle in Art. 77 (S. 53) iſt für Schmiedeeiſen $E = 2\,000\,000$ kg für 1 qcm, daher

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{18750}{18{,}75 \cdot 2\,000\,000} = 0{,}0005 \quad \text{und} \quad \Delta\, l = 0{,}0005 \cdot 5 = 0{,}0025 \text{ m}.$$

Die Verlängerung beträgt alſo 2,5 mm.

Betrachtet man die Gleichung 30:

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{N}{E}$$

und unterſucht, wie groſs die Spannung N für die Flächeneinheit des Querſchnittes ſein müſste, damit die Verlängerung $\Delta\, l$ genau ſo groſs würde, wie die urſprüngliche Stablänge — vorausgeſetzt, daſs dieſe Formel für das Verlängerungsverhältniſs noch bis zu der in dieſem Falle nöthigen Spannungsgröſse gelten würde, ſo erhält man

$$\frac{l}{l} = \frac{N}{E} = 1 \quad \text{oder} \quad N = E,$$

d. h. diejenige Spannung für die Flächeneinheit, welche den Stab auf die doppelte Länge verlängern würde, wenn das Verlängerungsgeſetz innerhalb dieſer Grenzen giltig wäre, iſt gleich E. Daher findet man häufig den Elaſticitäts-Modulus folgendermaſsen erklärt: Der Elaſticitäts-Modulus iſt diejenige Spannung, welche für die Flächeneinheit des Stabquerſchnittes wirken müſste, um den Stab auf das Doppelte ſeiner urſprünglichen Länge zu vergröſsern, falls innerhalb der dadurch bedingten Spannungsgrenzen das Elaſticitätsgeſetz giltig bliebe.

Bei Beanſpruchung auf Druck würde die Verkürzung in dieſem Falle $= l$ ſein, d. h. der Stab würde zur Länge Null zuſammengedrückt werden. Da die Elaſticitätsgeſetze nicht bis zu den erwähnten Grenzen gelten, vielmehr von einem annähernd conſtanten Elaſticitäts-Modul E nur ſo lange die Rede ſein kann, wie die Spannungen innerhalb der Elaſticitätsgrenze bleiben, ſo iſt die in Art. 75 (S. 50) gegebene Erklärung des Elaſticitäts-Moduls vorzuziehen.

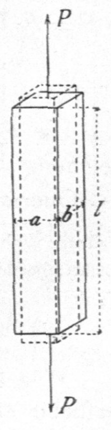


Fig. 70.

81. Aenderungen der Querſchnittsmaſse.

Die auf einen Körper wirkenden Kräfte P erzeugen auſser der Längenänderung in der Kraftrichtung auch ſolche in allen anderen Richtungen. Wir legen durch einen beliebigen Punkt der Stabaxe (Fig. 70) drei Coordinatenaxen, deren eine mit der Stabaxe zuſammenfällt, deren andere beiden ſenkrecht zu der erſteren ſtehen. Man nennt ſodann die Längenänderung in der Richtung der Stabaxe die longitudinale, diejenigen in den Richtungen der beiden anderen Axen die transverſalen Längenänderungen.

Die transverſalen Längenänderungen ſind der longitudinalen Längenänderung umgekehrt proportional. Bezeichnet μ einen für verſchiedene Materialien beſonders zu ermittelnden Zahlenwerth, ſo iſt

$$\frac{\Delta\, a}{a} = -\frac{1}{\mu}\,\frac{\Delta\, l}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\, b}{b} = -\frac{1}{\mu_1}\,\frac{\Delta\, l}{l}.$$

Nun iſt nach Gleichung 30: $\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{N}{E}$, daher

$$\frac{\Delta\, a}{a} = -\frac{1}{\mu}\,\frac{N}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\, b}{b} = -\frac{1}{\mu_1}\,\frac{N}{E}.$$

Bei Körpern, welche nach allen Richtungen gleiche Elaſticität beſitzen, d. h. bei ſog. iſotropen Körpern, iſt $\mu = \mu_1$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu}\,\frac{N}{E}\,.$$

Für iſotrope Körper liegt μ zwiſchen 3 und 4.

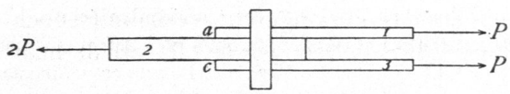
---

3. Kapitel.

Schubelaſticität und Schubfeſtigkeit.

Der Fall der reinen Schubelaſticität tritt, wie bereits in Art. 73 (S. 48) geſagt wurde, ein, wenn die wirkenden Kräfte das Beſtreben haben, zwei Nachbarquerſchnitte ſo gegen einander zu verſchieben, daſs die Entfernung der Querſchnittsebenen dieſelbe bleibt. Dies iſt nur möglich, wenn die Kräfte unmittelbar neben der Ebene wirken, längs deren das Beſtreben einer Verſchiebung ſtattfindet, und wenn dieſelben ſich zu zwei Kräften vereinen laſſen, welche einander nach Gröſse und Richtung genau gleich, dem Sinne nach entgegengeſetzt ſind. Man nennt dieſe Kräfte die **abſcherenden Kräfte**. 82. Schub-ſpannungen.

Fig. 71.



In der Technik kommt dieſer Fall u. A. bei den Niet- und Bolzenverbindungen vor. Die beiden Kräfte P (Fig. 71) haben das Beſtreben, die Bleche *1* und *3* nach rechts zu verſchieben; dieſe Verſchiebung wird durch den Niet verhindert, welcher die Bleche *1* und *3* mit *2* verbindet. Längs jeder der beiden Trennungsflächen wirkt je eine Kraft P nach rechts im Bleche *1*, bezw. *3*, je eine Kraft P nach links im Bleche *2*.

Man kann für die Beſtimmung der Spannungen, welche in den auf reine Schubelaſticität beanſpruchten Querſchnitten entſtehen, mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit annehmen, daſs die abſcherenden Kräfte ſich gleichförmig über die ganzen abzuſcherenden Querſchnitte vertheilen, mithin im Querſchnitt eine gleichförmig vertheilte Schubſpannung erzeugen. Daraus folgt, daſs der Widerſtand gegen Abſcheren der Gröſse des abzuſcherenden Querſchnittes direct proportional iſt.

Iſt alſo der Flächeninhalt des auf Abſcheren beanſpruchten Querſchnittes F die abſcherende Kraft P und die im Querſchnitt entſtehende Schubſpannung T, ſo iſt $P = F\,T$, woraus

$$T = \frac{P}{F} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 38.$$

Die Querſchnittsgröſse der auf Schub beanſpruchten Querſchnitte wird durch Gleichung 38 ermittelt. Verſteht man unter T die gröſste für die Flächeneinheit des Querſchnittes zuläſſige Schubbeanſpruchung, unter P die auf Abſcheren wirkende Kraft, ſo ergiebt ſich aus der angegebenen Gleichung die nöthige Querſchnittsgröſse 83. Querſchnitts-beſtimmung.

$$F = \frac{P}{T} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 39.$$

Was nun die für T einzuführenden Werthe anlangt, ſo haben die angeſtellten Verſuche ergeben, daſs der Widerſtand der Materialien gegen Beanſpruchung auf