I. Theil, 2. Abtheilung:

DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

---

2. Abſchnitt.

Elemente der Elaſticitäts- und Feſtigkeitslehre.

1. Kapitel.

Grundbegriffe.

66. Molecüle. Jeder in der Natur vorkommende Körper beſteht aus einzelnen, mit einander verbundenen, auſserordentlich kleinen Theilen, den ſog. Molecülen. Dieſe einzelnen Theile ſind nicht unabänderlich feſt zu einem ſtarren Ganzen mit einander verbunden; vielmehr verändert ſich die gegenſeitige Lage derſelben, alſo auch die Form des Körpers, wenn Kräfte auf den Körper wirken. Die Gröſse und Form der Aenderung iſt vom Material des Körpers, von ſeiner Form, von der Gröſse und Wirkungsdauer der wirkenden Kräfte, von der Temperatur und von verſchiedenen anderen Umſtänden abhängig.

Wenn die Kräfte, welche die Formveränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören, ſo nimmt unter gewiſſen Bedingungen der Körper ſeine frühere Form wieder an.

67. Elaſticität. Man nennt Elaſticität diejenige Eigenſchaft der Körper, vermöge deren ſie, wenn ſie unter der Einwirkung der Kräfte ihre urſprüngliche Form verändert haben, dieſelbe nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung mehr oder weniger wieder annehmen. Vollkommen elaſtiſch würde ein Körper ſein, wenn er nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung ſeine frühere Geſtalt genau wieder annähme; vollkommen unelaſtiſch derjenige Körper, der die in Folge der Kräfteeinwirkung geänderte Geſtalt genau beibehalten würde, auch wenn die Kräfte zu wirken aufhörten.

Es giebt in der Natur weder vollkommen elaſtiſche, noch vollkommen unelaſtiſche Körper. Daraus folgt, daſs kein Körper nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung vollſtändig ſeine frühere Form wieder annimmt; je näher er dem vollkommen elaſtiſchen Körper ſteht, deſto mehr verſchwindet die Formänderung; niemals aber verſchwindet ſie ganz.

68. Elaſtiſche u. bleibende Formänderung. Man unterſcheidet die elaſtiſche Formänderung, d. h. diejenige, welche mit dem Aufhören der Kräfteeinwirkung wieder verſchwindet, und die bleibende Formänderung, d. h. diejenige, welche nicht wieder verſchwindet, auch wenn die Kraft zu wirken aufhört. Wenn die wirkenden Kräfte gewiſſe Gröſsen nicht überſchreiten, ſo iſt die bleibende Formänderung nur ſehr gering, ſo gering, daſs man ſie für die Fälle der Praxis als nicht vorhanden anſehen kann.

69. Elaſticitätsgrenze.

Die Gröſse der Formänderung iſt ferner der Gröſse derjenigen inneren Kräfte oder Spannungen, welche durch die äuſseren Kräfte erzeugt werden, direct proportional, ſo lange dieſe Spannungen eine gewiſſe Grenze nicht überſchreiten. Dieſe Grenze kann für verſchiedene Materialien mit ziemlicher Genauigkeit feſt geſtellt werden; man nennt ſie die Elaſticitätsgrenze.

Innerhalb der Elaſticitätsgrenze iſt die bleibende Formänderung im Vergleich zu der elaſtiſchen Formänderung auſserordentlich klein, ſo gering, daſs ſie vernachläſſigt werden kann.

Im Folgenden wird unter der Elaſticitätsgrenze im Beſonderen diejenige Spannung verſtanden werden, welche ein Stab vom Querſchnitt gleich der Flächeneinheit höchſtens erleiden kann, ohne daſs die Proportionalität zwiſchen Spannung und Formänderungsgröſse aufhört.

Die Elaſticitätsgrenze iſt nicht bloſs für die verſchiedenen Materialien, ſondern auch für die verſchiedenen Arten der Beanſpruchung verſchieden. Im Allgemeinen wird ſie für Beanſpruchung durch Zug bei demſelben Material eine andere ſein, als für Beanſpruchung durch Druck.

Nach den neueren Verſuchen *Bauſchinger*'s [14]) iſt aber auch, wenigſtens für Eiſen und für dieſelbe Art der Beanſpruchung, die Elaſticitätsgrenze auſserordentlich veränderlich. Man kann dieſelbe durch gewiſſe Arbeiten allmählich immer mehr bis zu einer oberen Grenze heben, die bei manchen Materialien nahe der Bruchgrenze liegt. Andererſeits kann man die Elaſticitätsgrenze ſehr ſtark hinabwerfen und wieder heben, dann aber nur bis zu einer weit unter der urſprünglichen Grenze liegenden Höhe. Dieſe letztere bezeichnet *Bauſchinger* als die natürliche Elaſticitätsgrenze.

70. Feſtigkeits-Coefficient.

Wird die in dem Körper wirkende Spannung über die Elaſticitätsgrenze geſteigert, ſo wächſt die Formänderung weſentlich raſcher, als die Spannung; insbeſondere tritt eine ſehr merkbare bleibende Formänderung ein; eine weitere Vergröſserung der Spannung bewirkt ſchlieſslich eine Trennung der Molecüle, d. h. ein Zerreiſsen, Zerdrücken oder Zerbrechen des Körpers.

Diejenige Spannung, welche ein Stab vom Querſchnitte gleich der Flächeneinheit höchſtens ertragen kann, ehe er zerſtört wird, nennt man den Feſtigkeits-Coefficienten des Materials.

Auch die Feſtigkeits-Coefficienten ſind nach dem verſchiedenen Material und nach den verſchiedenen Beanſpruchungsweiſen verſchieden.

71. Aufgabe der Conſtruction.

Man muſs an jede Bauconſtruction zunächſt die Forderung ſtellen, daſs ſie durch die wirkenden Kräfte nicht zerſtört wird. Mit dieſer Anforderung allein darf man ſich aber nicht begnügen. Das Verhalten der Materialien, ſobald ſie über die Elaſticitätsgrenze hinaus beanſprucht werden, iſt wenig zuverläſſig, und man ſtellt deſshalb die Bedingung, daſs eine jede Conſtruction in allen ihren Theilen niemals über die Elaſticitätsgrenze hinaus in Anſpruch genommen werde.

72. Stabförmige Körper.

In den folgenden Unterſuchungen werden wir uns hauptſächlich mit den ſog. ſtabförmigen Körpern beſchäftigen. Stabförmige Körper ſind ſolche, bei denen die Längenabmeſſung die Breiten- und Höhenabmeſſungen weſentlich übertrifft.

Schneidet man den Körper an irgend einer Stelle durch eine ſenkrecht zur Längenrichtung an dieſer Stelle gerichtete Ebene, ſo erhält man einen Querſchnitt des Körpers. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querſchnitte des Körpers heiſst die Axe des Körpers.

---

[14]) Siehe: Vortrag *Bauſchinger's* auf der Wanderverſammlung des Verbandes deutſcher Architekten- und Ingenieur-Vereine zu Frankfurt a. M. 1886. Verbandsmittheilungen, Bd. 1, S. 230 u. ff.

BAUSCHINGER, J. Mittheilungen aus dem mechaniſch-techniſchen Laboratorium der K. techniſchen Hochſchule in München. XIII. Heft. München 1886.

Ist die Axe eine Gerade, so hat man einen geraden stabförmigen Körper; alsdann sind alle Querschnitte des Körpers parallel. Ist die Axe eine Curve, so ist der Körper ein krummer stabförmiger Körper.

73. Arten der Elasticität und Festigkeit.

Je nach der Art der durch die wirkenden Kräfte erzeugten Beanspruchung unterscheidet man hauptsächlich folgende Arten der Elasticität, bezw. Festigkeit:

1) die Zug- und Druckelasticität, bezw. Zug- und Druckfestigkeit,
2) die Schubelasticität, bezw. Schubfestigkeit,
3) die Biegungselasticität, bezw. Biegungsfestigkeit,
4) die Drehungselasticität, bezw. Drehungsfestigkeit.

Zu 1). Die Zug- und Druckelasticität tritt auf, wenn die auf den Körper wirkenden Kräfte die Querschnitte desselben so gegen einander zu verschieben streben, dass sich deren Entfernung in der Richtung der Axe gegen einander verändert, vergrössert oder verringert. Im ersten Falle findet Beanspruchung des Körpers auf Zug, im zweiten Falle Beanspruchung des Körpers auf Druck statt.

Unter Zug-, bezw. Druckfestigkeit wird diejenige Kraft verstanden, welche in der Richtung der Axe auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne dass durch blossen Zug, bezw. Druck eine Zerstörung des Körpers stattfindet; die geringste Vergrösserung dieser Kraft würde demnach den Zusammenhang des Körpers zerstören.

Zu 2). Die Schubelasticität tritt auf, wenn die äusseren Kräfte das Bestreben haben, zwei benachbarte Querschnitte längs einander zu verschieben, ohne dass deren Entfernung in der Richtung der Axe sich ändert. Der Körper wird an der betreffenden Stelle auf Schub oder Abscheren beansprucht.

Unter Schub- oder Abscherungsfestigkeit wird diejenige Kraft verstanden, welche auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne dass eine Zerstörung des Körpers an dieser Stelle durch Verschiebung der Nachbarquerschnitte gegen einander erfolgt.

Zu 3). Die Biegungselasticität tritt auf, wenn die äusseren Kräfte das Bestreben zeigen, zwei Nachbarquerschnitte um eine Axe, die einen Winkel mit der Kraftebene bildet, derart zu drehen, dass die Entfernung der Querschnitte sich ändert. Die Beanspruchung findet auf Biegung statt.

Biegungsfestigkeit ist die Beanspruchung, welche die am meisten gespannten Fasern des Körpers für die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens ertragen können, ehe eine Zerstörung des Körpers durch Biegen, d. h. hier, bevor ein Zerbrechen eintritt.

Zu 4). Die Drehungselasticität tritt auf, wenn die wirkenden Kräfte zwei Nachbarquerschnitte gegen einander so zu verdrehen streben, dass deren Entfernung gleich bleibt. Die Drehungselasticität ist für die Hochbau-Constructionen von untergeordneter Bedeutung.

Literatur.

Bücher über »Lehre von der Elasticität und Festigkeit«.

Indem auf die Werke über »Mechanik«, die stets einen Abriss über »Elasticität und Festigkeit« enthalten, nur ganz allgemein verwiesen werden mag, seien im Nachstehenden bloss die einschlägigen Sonderschriften namhaft gemacht:

BARLOW, P. *Treatiſe on the ſtrength of materials.* London 1833. — Neue Ausg. von W. HUMBER. 1867.
LAMÉ, G. *Leçons ſur la théorie mathématique de l'élaſticité des corps ſolides.* Paris 1852. — 2. Aufl. 1866.
MOLL, C. L. und F. REULEAUX. Die Feſtigkeit der Materialien etc. Braunſchweig 1853.
MORIN, A. *Réſiſtance des matériaux.* Paris 1853. — 3. Aufl. 1862.
ROFFIAEN, E. *Traité ſur la réſiſtance des matériaux dans les conſtructions.* Lüttich 1858.
BOURDAIS, J. *Traité pratique de la réſiſtance des matériaux appliquée à la conſtruction etc.* Paris 1859.
JEEP, W. Die Feſtigkeit der Materialien etc. Weimar 1861.
SHIELDS, F. W. *The ſtrains on ſtructures of ironwork.* London 1861.
CLEBSCH, A. Theorie der Elaſticität feſter Körper. Leipzig 1862.
GRASHOF, F. Theorie der Elaſticität und Feſtigkeit etc. Berlin 1866. — 2. Aufl. 1878.
WINKLER, E. Die Lehre von der Elaſticität und Feſtigkeit etc. 1. Theil. Prag 1867.
ANDERSON, C. E. *The ſtrength of materials and ſtructures.* London 1872.
MÜLLER-BRESLAU, H. Elementares Handbuch der Feſtigkeitslehre etc. Berlin 1875.
KURZ, A. Taſchenbuch der Feſtigkeitslehre etc. Berlin 1877.
SERGENT, E. *Traité pratique de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1878. — 3. Aufl. 1881.
KENT, W. *The ſtrength of materials.* New-York 1879.
LAMBERT, P. Tabellariſche Zuſammenſtellung der Reſultate aus der angewandten Feſtigkeitslehre, mit beſonderer Berückſichtigung von Conſtructionen in Eiſen und Holz. Zürich 1880.
LINGLIN, TH. *Traité élémentaire de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1880.
MADAMET, A. *Réſiſtance des matériaux.* Paris 1881.
BOX, TH. *A practical treatiſe on the ſtrength of materials etc.* London 1883.
VIGREUX, L. *Traité théoretique et pratique de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1885.
STONEY, B. B. *The theory of ſtreſſes in girders and ſimilar ſtructures etc.* London 1885.
UHLICH, P. Die Feſtigkeitslehre und ihre Anwendung etc. Mittweida 1885. — 2. Aufl. Dresden 1887.
PLANAT, P. *Pratique de la mécanique appliquée à la réſiſtance des matériaux.* Paris 1887.
MOOS, N. A. *Elementary treatiſe on the ſtrength of materials and ſtrains in ſtructures.* London 1887.
AERTS, L. *Eléments pratiques de la réſiſtance des matériaux.* Paris 1888.
JOHNEN, P. J. Elemente der Feſtigkeitslehre etc. Weimar 1889.

---

2. Kapitel.

Zug- und Druckelaſticität, bezw. Zug- und Druckfeſtigkeit.

Die reine Zug- und Druckelaſticität kommt nur bei geraden Stäben vor, weſshalb hier nur ſolche betrachtet werden ſollen. 74. Elaſticitäts-geſetze.

Die Geſetze für alle Arten der Elaſticität ergeben ſich aus denen, welche für die Zug- und Druckelaſticität gelten; demnach muſs die letztere die Grundlage für die ganze Behandlung bilden.

Die geſammte Elaſticitätslehre beruht auf folgendem, äuſserſt wichtigem Geſetze, welches durch Verſuche feſt geſtellt iſt:

1) Die Verlängerung, bezw. Verkürzung eines in ſeiner Axenrichtung, d. h. auf Zug- oder Druckelaſticität beanſpruchten Stabes iſt, ſo lange die Beanſpruchung innerhalb der Elaſticitätsgrenze bleibt, der urſprünglichen Länge des Stabes direct proportional. Das Verhältniſs der Verlängerung (poſitiv oder negativ genommen) zu der urſprünglichen Länge heiſst das Verlängerungsverhältniſs.

2) Die Verlängerung eines, wie angegeben, beanſpruchten Stabes iſt, ſo lange die Spannung deſſelben innerhalb der Elaſticitätsgrenze liegt, direct proportional der in dem Stabe herrſchenden Spannung. Iſt alſo die Spannung im Stabe N, ſo iſt die Verlängerung, alſo auch das Verlängerungsverhältniſs N-mal ſo groſs, als bei der Spannung 1.

3) Das Verlängerungsverhältniſs iſt vom Material abhängig, aus welchem der Stab beſteht. Für dieſe Abhängigkeit iſt eine beſondere Bezeichnung eingeführt. Nennt man die Verlängerung, welche ein Gewicht gleich der Krafteinheit an einem Stabe hervorbringt, deſſen Querſchnitt gleich der Flächeneinheit iſt, λ, die urſprüngliche Länge des Stabes vor der Verlängerung l, ſo iſt für dieſen Fall das Verlängerungsverhältniſs $= \frac{\lambda}{l}$.

75. Elaſticitäts-Coefficient.

Dieſes Verlängerungsverhältniſs, welches je nach dem Material, aus welchem der Stab beſteht, verſchieden iſt, bezeichnet man mit $\frac{1}{E}$ und nennt E den **Elaſticitäts-Modulus** oder **Elaſticitäts-Coefficienten** des betreffenden Materials. Demnach iſt der Elaſticitäts-Modulus E der umgekehrte Werth des (poſitiven oder negativen) Verlängerungsverhältniſſes, welches durch die Spannung 1 an einem Stabe vom Querſchnitt gleich der Flächeneinheit hervorgebracht wird.

Wirkt in dem Stabe eine Spannung N für die Flächeneinheit des Querſchnittes, ſo iſt nach 2 das Verlängerungsverhältniſs N-mal ſo groſs, als bei der Spannung 1 für die Flächeneinheit des Querſchnittes; mithin iſt ſodann das Verlängerungsverhältniſs

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N.1}{E} = \frac{N}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 30.$$

Wirkt auf einen Stab, deſſen Querſchnitt F Flächeneinheiten enthält, deſſen Querſchnitt alſo gleich F iſt, eine Kraft P, und kann man annehmen, daſs dieſe Kraft ſich gleichmäſsig über den ganzen Querſchnitt vertheilt, ſo iſt die Spannung für die Flächeneinheit derſelben $N = \frac{P}{F}$, und wenn man dieſen Werth für N in die Gleichung für $\frac{\Delta l}{l}$ einſetzt, erhält man folgende wichtige Gleichung:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{F E} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{P l}{F E} \quad \ldots \ldots \quad 31.$$

Die hier vorgeführten Ergebniſſe gelten ſowohl, wenn die Verlängerung eine poſitive, d. h. eine wirkliche Verlängerung, als auch wenn ſie eine negative, d. h. eine Verkürzung iſt. Sie gelten alſo ſowohl für Zug- als auch für Druckbeanſpruchungen; nur hat für erſtere im Allgemeinen E einen anderen Werth, als für letztere.

76. Zuläſſige Beanſpruchung.

Die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ kann benutzt werden, um die Gröſse der Kraft zu beſtimmen, mit welcher ein Stab von gegebenem Querſchnitt höchſtens auf Zug- bezw. Druckelaſticität beanſprucht werden darf.

Nach dieſer Gleichung iſt $P = N F$. Wird für N der gröſste Werth eingeſetzt, welchen das Material auf die Flächeneinheit des Querſchnittes höchſtens erleiden kann, ohne zerſtört zu werden, d. i. der Feſtigkeits-Coefficient, ſo ergiebt ſich $P_{max} = N_{max} F$. In dieſer Gleichung iſt P_{max} diejenige Belaſtung, deren geringſte Vergröſserung ein Zerreiſsen, bezw. Zerdrücken des Stabes zur Folge haben würde; N_{max} iſt nach Früherem die Zug-, bezw. Druckfeſtigkeit.

Die Stäbe werden nicht bis zu dieſer Grenze beanſprucht; vielmehr werden **Sicherheits-Coefficienten** eingeführt, welche für verſchiedene Materialien verſchiedene Werthe haben. Man trägt durch dieſelben den etwa möglichen Ueberlaftungen, den Fehlern im Material, den im Laufe der Zeit möglichen Veränderungen des Materials durch Roft, Faulen etc., den Stöfsen und anderen ungünftigen Einflüffen Rechnung.

Bezeichnet n den Sicherheits-Coefficienten, fo ift als wirkliche Maximalbelaftung P des Stabes nur $\frac{1}{n}$ von P_{max} einzuführen, d. h. es darf nur fein:

$$P = \frac{N_{max} F}{n} .$$

Man nennt nun $\frac{N_{max}}{n}$ die **zuläffige Beanfpruchung**, die im Folgenden mit K bezeichnet werden foll. Es ift demnach

$$K = \frac{N_{max}}{n} .$$

Aus den vorftehenden Gleichungen folgt die Bedingungsgleichung für die Querfchnittsgröfse:

$$F = \frac{P}{K} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 32.$$

In diefer Gleichung bedeutet P die im ganzen Stabe höchftens auftretende Kraft.

Für die Beftimmung der Querfchnittsgröfse, welche den auf Zug-, bezw. Druckelafticität beanfpruchten Stäben zu geben ift, kommt es vor Allem darauf an, welche Werthe als die zuläffigen Beanfpruchungen $\frac{N_{max}}{n}$ eingeführt werden dürfen. Ueber diefe Frage herrfcht zur Zeit durchaus noch keine Uebereinftimmung. 77. Querfchnittsbeftimmung.

Da die Materialien, fobald die Beanfpruchungen die Elafticitätsgrenze überfchreiten, merkbare bleibende Veränderungen erleiden, fo mufs eine Ueberfchreitung der Elafticitätsgrenze bei der Belaftung unter allen Umftänden vermieden werden. Die Lage der Elafticitätsgrenze ift aber nach Früherem nicht mit vollftändiger Gewifsheit bekannt; auch haben kleine Arbeitsfehler fehr grofsen, fchädlichen Einflufs. Defshalb mufs man mit der zuläffigen Beanfpruchung wefentlich unter der Elafticitätsgrenze bleiben, fo dafs auch eine unbeabfichtigte Vergröfserung der Spannung, in Folge etwaiger Fehler, felbft die tiefer als erwartet liegende Elafticitätsgrenze nicht erreicht. Beim Schmiedeeifen, dem wichtigften einer genauen Berechnung zu unterwerfenden Bauftoff, kann man die zuläffige Beanfpruchung auf die Hälfte bis zwei Drittel der Spannung an der Elafticitätsgrenze feft ftellen. Wenn die Belaftung ruhend, ohne Stöfse, ftattfindet, fo ift die höhere Grenze zuläffig; wirkt die Laft dagegen in Verbindung mit Stöfsen, fo ift die untere Grenze einzuführen.

Für fchmiedeeiferne Stäbe, welche nur gezogen, bezw. nur gedrückt werden, kann man einen genaueren Anhalt über die zu wählenden Beanfpruchungen folgendermafsen finden. Wenn der Stab abwechfelnd eine höhere und niedrigere Beanfpruchung zu erleiden hat, etwa dadurch, dafs die betreffende Conftruction zeitweilig aufser dem Eigengewicht noch eine Nutzlaft trägt, fo mögen die obere und untere Grenze der ganzen Stabkraft P_{max} und P_{min} fein; die entfprechenden Grenzen der auf die Flächeneinheit entfallenden Spannungen feien

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F} \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F} .$$

Die Verkehrslaſt tritt ſtets mit gröſseren oder geringeren Stöſsen verbunden auf, welchem Umſtande man dadurch Rechnung trägt, daſs man dieſelbe mit einem Werthe $(1 + \mu)$ multiplicirt in die Rechnung einführt; dabei iſt μ der ſog. Stoſs-coefficient. Durch das Eigengewicht allein wird P_{min}, bezw. σ_{min} erzeugt; durch Eigengewicht und Verkehrslaſt werden P_{max}, bezw. σ_{max} hervorgerufen; es wird demnach die Verkehrslaſt allein

$$(P_{max} - P_{min}), \text{ bezw. } (\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

erzeugen. Wird nun die Verkehrslaſt mit $(1 + \mu)$ multiplicirt eingeführt, ſo wird durch dieſelbe die Spannung $(1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ auf die Flächeneinheit des Querſchnittes hervorgerufen; die geſammte Beanſpruchung auf die Flächeneinheit iſt alsdann

$$\sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}).$$

Wäre man vor unbeabſichtigten Spannungen in der Conſtruction ganz ſicher, ſo könnte man dieſe ſoeben entwickelte Spannung gleich derjenigen an der Elaſticitätsgrenze ſetzen; da aber unbeabſichtigte Spannungen ſehr wohl auftreten können, da eine Querſchnittsverminderung durch Roſten nicht ausgeſchloſſen iſt, auch wohl einmal höhere Verkehrslaſten, als angenommen ſind, vorkommen können, ſo wird es ſich empfehlen, die oben vorgeführte Spannung nur auf $^2/_3$ der Spannung an der Elaſticitätsgrenze feſt zu ſtellen, demnach die Gleichung zu ſchreiben (mit Abrundung und bezogen auf das Quadrat-Centimeter als Flächeneinheit):

$$\sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1050.$$

Die Spannung an der Elaſticitätsgrenze iſt hierbei zu 1600^{kg} für 1^{qcm} angenommen. Die Auflöſung nach σ_{max} ergiebt

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33.$$

σ_{max} iſt die zuläſſige Beanſpruchung, und es wird die Querſchnittsfläche des Stabes

$$F = \frac{P_{max}}{\sigma_{max}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34.$$

Nun iſt offenbar $\sigma_{min} = \dfrac{P_{min}}{F}$ und $\sigma_{max} = \dfrac{P_{max}}{F}$, demnach

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{P_{min}}{P_{max}} \quad \text{und} \quad \sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \dfrac{P_{min}}{P_{max}}}.$$

Für Schmiedeeiſen kann man $\mu = 0{,}5$ ſetzen; P_{min} und P_{max} ſind bekannt, mithin auch σ_{max}. Es wird

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1{,}5 - 0{,}5 \dfrac{P_{min}}{P_{max}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 35.$$

Nach Gleichung 34 iſt

$$F = \frac{P_{max}\left(1{,}5 - \dfrac{0{,}5\, P_{min}}{P_{max}}\right)}{1050} = \frac{1{,}5\, P_{max} - 0{,}5\, P_{min}}{1050}.$$

Werden die durch das Eigengewicht, bezw. die Verkehrslaſt allein im ganzen Stabe erzeugten Spannungen mit P_0, bezw. P_1 bezeichnet, ſo iſt

$$P_{max} = P_0 + P_1 \quad \text{und} \quad P_{min} = P_0, \quad \text{alſo}$$

$$F = \frac{1{,}5\, P_0 + 1{,}5\, P_1 - 0{,}5\, P_0}{1050} = \frac{P_0 + 1{,}5\, P_1}{1050} = \frac{P_0}{1050} + \frac{P_1}{700} \quad . \quad . \quad 36.$$

Dieſer Ausdruck kann für Stäbe aus Schmiedeeiſen benutzt werden, welche nur auf Zug oder nur auf Druck in Anſpruch genommen werden.

Wenn hingegen die Beanſpruchungen zwiſchen Zug und Druck wechſeln, ſo ſind die Querſchnittsgröſsen F aus folgenden Formeln [15]) zu ermitteln:

$$\text{für } P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0 \text{ und } P_2 > \frac{2}{3} P_0: \qquad \text{für } P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0 \text{ und } P_2 > \frac{2}{3} P_0:$$

$$F = \frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{2100} \qquad F = -\frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{700} \quad . \quad . \quad 37.$$

Hierin bedeutet P_0 die Stabſpannung, welche durch das Eigengewicht allein hervorgerufen wird; P_1 die durch ungünſtigſte Verkehrslaſt allein hervorgerufene Stabſpannung, welche mit P_0 gleichen Sinn hat; P_2 die durch ungünſtigſte Verkehrslaſt allein hervorgerufene Stabſpannung, welche entgegengeſetzten Sinn hat, wie P_0.

In der Spalte 5. der nachfolgenden Tabelle ſind für die hauptſächlichſten Conſtructions-Materialien die in der Praxis üblichen Werthe der zuläſſigen Beanſpruchung K zuſammengeſtellt; ferner ſind in der Tabelle die Elaſticitäts-Coefficienten, die Feſtigkeits-Coefficienten, ſo wie diejenigen Beanſpruchungen angegeben, bei welchen die Elaſticitätsgrenze erreicht wird. Naturgemäſs können die in der Tabelle angeführten Werthe nur Mittelwerthe ſein, die ſich mit der Güte des Materials, der Art der Beanſpruchung und anderen Umſtänden ändern.

1.	2.	3.		4.		5.					
Bezeichnung der Materialien	Elaſticitäts-Coefficient E	Feſtigkeits-Coefficient bei Beanſpruchung auf		Beanſpruchung an der Elaſticitätsgrenze auf		Zuläſſige Beanſpruchung K für definitive Bauwerke, Belaſtung mit ſtarken Stöſsen		Belaſtung mit mäſsigen Erſchütterungen		proviſoriſche Bauten, Belaſtung mit mäſsigen Erſchütterungen	
		Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
Schmiedeeiſen . . .	2000	3500 bis 4000	3200 bis 3600	1,56	1,56	700	700	1000	1000	—	—
Guſseiſen	1000	1250 bis 1450	7500 bis 8000	0,66	1,65 bis 1,9	—	—	250	500	—	—
Stahl	2200	8000	7000	3,0	3,0	1500	1500	1800	2000	—	—
Holz in der Faſerrichtung:											
Eichenholz . . .	120	965	487	0,26	0,21	—	—	90	65	180	130
Kiefernholz . . .	120	820	410	0,29	0 22	—	—	80	60	160	110
Holz radial, d. h. in der Richtung der Jahresringe:											
Eichenholz . . .	18,9	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Kiefernholz . . .	9,6	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Mauerwerk:											
Gewöhnliches Backſteinmauerwerk in Kalkmörtel . .	—	—	—	—	—	—	—	0 bis 0,9	7	—	—
Gutes Backſteinmauerwerk in Cementmörtel . .	—	—	—	—	—	—	—	1,3	11	—	—
Beſtes Mauerwerk .	—	—	—	—	—	—	—	1,8 bis 2,0	14	—	—
Natürliche Steine:											
Granit	—	—	—	—	—	—	—	5 bis 6	45	—	—
Kalkſtein	—	—	—	—	—	—	—	3	25	—	—
Sandſtein	—	—	—	—	—	—	—	2 bis 4	15 bis 30	—	—
Marmor	—	—	—	—	—	—	—	3	24	—	—
	Tonnen für 1 qcm	Kilogramm für 1 qcm		Tonnen für 1 qcm		Kilogramm für 1 qcm					

Das Berliner Polizei-Präſidium legt bei ſeinen Berechnungen die umſtehend angegebenen Zahlenwerthe als zuläſſige Beanſpruchung zu Grunde (Bekanntmachung vom 21. Februar 1887):

[15]) Die Herleitung dieſer beiden Formeln iſt aus des Verfaſſers Abhandlung: »Ueber die Beſtimmung der Querſchnitte von Eiſenconſtructionen« (in: Zeitſchr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 575) zu entnehmen.

Material	Zulässige Beanspruchung auf Zug	Zulässige Beanspruchung auf Druck
Schmiedeeisen	750	750
Gusseisen	250	500
Bombirtes Eisenwellblech	500	500
Eisendraht	1200	—
Eichen- und Buchenholz	100	80
Kiefernholz	100	60
Granit	—	45
Sandstein, je nach der Härte	—	15 bis 30
Rüdersdorfer Kalkstein in Quadern	—	25
Kalksteinmauerwerk in Kalkmörtel	—	5
Gewöhnliches Ziegelmauerwerk	—	7
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel	—	11
Bestes Klinkermauerwerk in Cementmörtel	—	12 bis 14
Mauerwerk aus porösen Steinen	—	3 bis 6
Guter Baugrund	—	2,5
	Kilogramm für 1 qcm	

78. Beispiele.

Beispiele. 1) Eine schmiedeeiserne Stange werde höchstens mit einer Zugkraft $P = 18\,750$ kg beansprucht. Es ist die Querschnittsgrösse unter der Annahme zu bestimmen, dass die Stange einer endgiltigen Construction angehört und die Belastung nur mit mässigen Erschütterungen auftritt.

Nach umstehender Tabelle ist für den vorliegenden Fall $K = 1000$ kg, sonach

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18\,750}{1000} = 18{,}75 \text{ qcm}.$$

Wenn die Stange aus Rundeisen construirt werden soll, so muss sein:

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 18{,}75}{3{,}14}} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

Wird entsprechend den Annahmen des Berliner Polizei-Präsidiums $K = 750$ kg gesetzt, so muss

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18\,750}{750} = 25 \text{ qcm}$$

sein und

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = 5{,}64 \text{ cm}.$$

2) Bei einer gusseisernen gedrückten Stange sei die Maximal-Druckkraft $P = 5850$ kg. Der Querschnitt derselben ist demnach, wenn die Construction wiederum als definitiv und die Belastung als mit mässigen Erschütterungen wirkend angenommen wird,

$$F = \frac{P}{K} = \frac{5850}{500} = 11{,}7 \text{ qcm}.$$

Bei Wahl eines kreisförmigen Querschnittes ergiebt sich der Durchmesser d aus der Gleichung:

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11{,}7}{3{,}14}} = 3{,}8 \text{ cm}.$$

3) Auf einen Holzstab mit rechteckigem Querschnitt wirke ein Maximaldruck $P = 16\,000$ kg. Der Stab soll einer provisorischen Construction, welche mässigen Erschütterungen ausgesetzt ist, angehören; das Material ist Kiefernholz. Es ergiebt sich nach Gleichung 32

$$F = \frac{16\,000}{110} = 145{,}4 \text{ qcm}.$$

Ein quadratischer Querschnitt von 12,1 cm Seitenlänge würde demnach genügen.

4) Wäre im ersten Beispiele die Stabkraft durch das Eigengewicht $P_0 = 6750$ kg, diejenige durch Verkehrslast $P_1 = 12\,000$ kg, so ergäbe sich aus Gleichung 36

$$F = \frac{6750}{1050} + \frac{12\,000}{700} = 6{,}43 + 17{,}14 = 23{,}57 \text{ qcm},$$

und es müſste ſein:

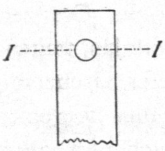
$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 23{,}57}{3{,}14}} = \backsim 5{,}5 \text{ cm}.$$

Von der wegen Beanſpruchung auf Zerknicken bei den gedrückten Stäben vorzunehmenden Vergröſserung des Querſchnittes wird im nächſten Abſchnitt (Kap. 2) die Rede ſein.

Die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ ergab ſich unter der Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Kraft P über die ganze Querſchnittsfläche F. Dieſe Annahme iſt aber nur richtig, wenn 1) der Querſchnitt des Körpers conſtant iſt und 2) die äuſsere Kraft P ſich über die Endflächen gleichmäſsig vertheilt. Die Geſetze der Kraftvertheilung für den Fall, daſs dieſe beiden Bedingungen nicht erfüllt ſind, können auf rein theoretiſchem Wege nicht oder nur in einzelnen Fällen genau ermittelt werden. Gewöhnlich wird jedoch bei den Berechnungen auf die Nichtbekanntſchaft mit dieſen Geſetzen keine Rückſicht genommen und die Gleichung $N = \frac{P}{F}$ auch für dieſe Fälle einfach als richtig angenommen. 79. Beanſpruchung bei Querſchnitts-veränderungen.

Wenn ein Stab an einigen Stellen kleinere Querſchnittsflächen, als an anderen hat, ſo iſt ſelbſtverſtändlich die kleinſte Querſchnittsfläche der Berechnung des Stabes zu Grunde zu legen und dieſe ſo zu bemeſſen, daſs die in ihr wirkende Spannung an keiner Stelle die zuläſſige Beanſpruchung überſteigt. Findet in dem betreffenden Querſchnitte die Kraft P ſtatt, ſo berechnet man die Querſchnittsfläche F an dieſer Stelle nach der Gleichung 32

Fig. 67.



$$F = \frac{P}{K},$$

worin K die zuläſſige Beanſpruchung bedeutet. Der neben ſtehende Stab (Fig. 67) hat ſeine kleinſte Querſchnittsfläche im Querſchnitte $I\,I$, welcher der Nietmitte entſpricht, und es muſs demnach dieſe Querſchnittsfläche der obigen Gleichung genügen. Aehnlich iſt bei den Stäben in Fig. 68 u. 69 die durch die Verengung beſtimmte Stelle als ſchwächſte der Berechnung zu Grunde zu legen. Dabei iſt jedoch zu beachten, daſs bei Anwendung obiger Gleichung für K ein anderer Werth als derjenige einzuführen iſt, welcher für Berechnung einer ungeſchwächten Stange zu Grunde gelegt wird.

Fig. 68.

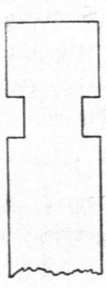
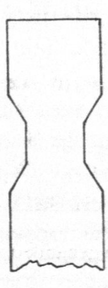


Fig. 69.



Behufs Feſtſtellung dieſer Thatſache hat *Winkler*[16]) Verſuche mit Kautſchukmodellen angeſtellt und dabei gefunden, daſs die Beanſpruchung für 1 qcm bei plötzlicher Veränderung der Querſchnittsfläche weſentlich gröſser iſt, als wenn der Stab auf ſeine ganze Länge den kleinſten Querſchnitt hätte. Dieſe Vergröſserung der Beanſpruchung iſt beſonders groſs, wenn die Veränderung des Querſchnittes mittels eines ſcharfen Abſatzes ſtattfindet (Fig. 68), während ſie bedeutend kleiner iſt, wenn zur Ueberführung des kleineren Querſchnittes in den gröſseren ein allmählicher Uebergang hergeſtellt wird (Fig. 69). Im erſteren Falle zeigt ſich eine Vergröſserung der Beanſpruchung bis zu 30 und 35 Procent. Da die Verſuche über dieſe Frage noch nicht endgiltig abgeſchloſſen ſind, ſo dürfte es an dieſer Stelle genügen, aus denſelben folgende Regeln zu ziehen:

1) Bei einer Querſchnittsveränderung iſt der Uebergang von der einen Querſchnittsform in die andere möglichſt allmählich vorzunehmen.

---

16) Deformationsverſuche mit Kautſchuk-Modellen. Civiling. 1878, S. 81.

2) Der Berechnung ift die kleinfte Querfchnittsfläche zu Grunde zu legen.

3) Die für die Flächeneinheit des kleinften Querfchnittes zuläffige Beanfpruchung ift kleiner anzunehmen, als wenn der Stab einen überall gleichen Querfchnitt hätte.

80. **Formänderung der Stäbe.**

Die Gröfse der Formänderung gezogener oder gedrückter Stäbe ergiebt die Gleichung 31:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{F E} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{P l}{F E}.$$

Beifpiel. Ift bei der in Beifpiel 1 auf S. 54 angenommenen Stange $l = 5$ m, fo wird

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18{,}75 \, E}.$$

Nach der Tabelle in Art. 77 (S. 53) ift für Schmiedeeifen $E = 2\,000\,000$ kg für 1 qcm, daher

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18{,}75 \cdot 2\,000\,000} = 0{,}0005 \quad \text{und} \quad \Delta l = 0{,}0005 \cdot 5 = 0{,}0025 \text{ m}.$$

Die Verlängerung beträgt alfo 2,5 mm.

Betrachtet man die Gleichung 30:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E}$$

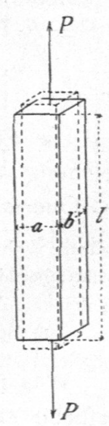
und unterfucht, wie grofs die Spannung N für die Flächeneinheit des Querfchnittes fein müfste, damit die Verlängerung Δl genau fo grofs würde, wie die urfprüngliche Stablänge — vorausgefetzt, dafs diefe Formel für das Verlängerungsverhältnifs noch bis zu der in diefem Falle nöthigen Spannungsgröfse gelten würde, fo erhält man

$$\frac{l}{l} = \frac{N}{E} = 1 \quad \text{oder} \quad N = E,$$

d. h. diejenige Spannung für die Flächeneinheit, welche den Stab auf die doppelte Länge verlängern würde, wenn das Verlängerungsgefetz innerhalb diefer Grenzen giltig wäre, ift gleich E. Daher findet man häufig den Elafticitäts-Modulus folgendermafsen erklärt: Der Elafticitäts-Modulus ift diejenige Spannung, welche für die Flächeneinheit des Stabquerfchnittes wirken müfste, um den Stab auf das Doppelte feiner urfprünglichen Länge zu vergröfsern, falls innerhalb der dadurch bedingten Spannungsgrenzen das Elafticitätsgefetz giltig bliebe.

Bei Beanfpruchung auf Druck würde die Verkürzung in diefem Falle $= l$ fein, d. h. der Stab würde zur Länge Null zufammengedrückt werden. Da die Elafticitätsgefetze nicht bis zu den erwähnten Grenzen gelten, vielmehr von einem annähernd conftanten Elafticitäts-Modul E nur fo lange die Rede fein kann, wie die Spannungen innerhalb der Elafticitätsgrenze bleiben, fo ift die in Art. 75 (S. 50) gegebene Erklärung des Elafticitäts-Moduls vorzuziehen.

Fig. 70.



81. **Aenderungen der Querfchnitts-mafse.**

Die auf einen Körper wirkenden Kräfte P erzeugen aufser der Längenänderung in der Kraftrichtung auch folche in allen anderen Richtungen. Wir legen durch einen beliebigen Punkt der Stabaxe (Fig. 70) drei Coordinatenaxen, deren eine mit der Stabaxe zufammenfällt, deren andere beiden fenkrecht zu der erfteren ftehen. Man nennt fodann die Längenänderung in der Richtung der Stabaxe die longitudinale, diejenigen in den Richtungen der beiden anderen Axen die transverfalen Längenänderungen.

Die transverfalen Längenänderungen find der longitudinalen Längenänderung umgekehrt proportional. Bezeichnet μ einen für verfchiedene Materialien befonders zu ermittelnden Zahlenwerth, fo ift

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta l}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\Delta l}{l}.$$

Nun ift nach Gleichung 30: $\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E}$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu} \frac{N}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{N}{E}.$$

Bei Körpern, welche nach allen Richtungen gleiche Elaſticität beſitzen, d. h. bei ſog. iſotropen Körpern, iſt $\mu = \mu_1$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = - \frac{1}{\mu} \frac{N}{E} .$$

Für iſotrope Körper liegt μ zwiſchen 3 und 4.

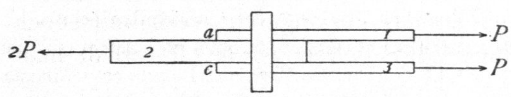
---

3. Kapitel.

Schubelaſticität und Schubfeſtigkeit.

Der Fall der reinen Schubelaſticität tritt, wie bereits in Art. 73 (S. 48) geſagt wurde, ein, wenn die wirkenden Kräfte das Beſtreben haben, zwei Nachbarquerſchnitte ſo gegen einander zu verſchieben, daſs die Entfernung der Querſchnittsebenen dieſelbe bleibt. Dies iſt nur möglich, wenn die Kräfte unmittelbar neben der Ebene wirken, längs deren das Beſtreben einer Verſchiebung ſtattfindet, und wenn dieſelben ſich zu zwei Kräften vereinen laſſen, welche einander nach Gröſse und Richtung genau gleich, dem Sinne nach entgegengeſetzt ſind. Man nennt dieſe Kräfte die abſcherenden Kräfte. 82. Schubſpannungen.

Fig. 71.



In der Technik kommt dieſer Fall u. A. bei den Niet- und Bolzenverbindungen vor. Die beiden Kräfte P (Fig. 71) haben das Beſtreben, die Bleche *1* und *3* nach rechts zu verſchieben; dieſe Verſchiebung wird durch den Niet verhindert, welcher die Bleche *1* und *3* mit *2* verbindet. Längs jeder der beiden Trennungsflächen wirkt je eine Kraft P nach rechts im Bleche *1*, bezw. *3*, je eine Kraft P nach links im Bleche *2*.

Man kann für die Beſtimmung der Spannungen, welche in den auf reine Schubelaſticität beanſpruchten Querſchnitten entſtehen, mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit annehmen, daſs die abſcherenden Kräfte ſich gleichförmig über die ganzen abzuſcherenden Querſchnitte vertheilen, mithin im Querſchnitt eine gleichförmig vertheilte Schubſpannung erzeugen. Daraus folgt, daſs der Widerſtand gegen Abſcheren der Gröſse des abzuſcherenden Querſchnittes direct proportional iſt.

Iſt alſo der Flächeninhalt des auf Abſcheren beanſpruchten Querſchnittes F die abſcherende Kraft P und die im Querſchnitt entſtehende Schubſpannung T, ſo iſt $P = F\,T$, woraus

$$T = \frac{P}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38.$$

Die Querſchnittsgröſse der auf Schub beanſpruchten Querſchnitte wird durch Gleichung 38 ermittelt. Verſteht man unter T die gröſste für die Flächeneinheit des Querſchnittes zuläſſige Schubbeanſpruchung, unter P die auf Abſcheren wirkende Kraft, ſo ergiebt ſich aus der angegebenen Gleichung die nöthige Querſchnittsgröſse 83. Querſchnittsbeſtimmung.

$$F = \frac{P}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 39.$$

Was nun die für T einzuführenden Werthe anlangt, ſo haben die angeſtellten Verſuche ergeben, daſs der Widerſtand der Materialien gegen Beanſpruchung auf

Schub geringer iſt, als gegen Beanſpruchung auf Zug oder Druck. Daraus folgt, daſs man die Materialien auf Schub nicht ſo ſtark beanſpruchen darf, wie auf Zug oder Druck.

Die nachſtehende Tabelle giebt für eine Reihe wichtiger Bauſtoffe die Feſtigkeits-Coefficienten für Schub und die zuläſſigen Schubbeanſpruchungen, für das Quadrat-Centimenter als Flächeneinheit an. Dabei wird bezüglich weiterer einſchlägiger Feſtigkeitsangaben auf den vorhergehenden Halbband dieſes »Handbuches« (Abth. I: Die Technik der wichtigeren Bauſtoffe) verwieſen.

Bezeichnung der Materialien	Feſtigkeits-Coefficient für Schub	Zuläſſige Schubbeanſpruchung T
Schmiedeeiſen	3200 bis 4000	600 bis 800[17])
Guſseiſen	1000 bis 1100	220
Guſsſtahl	4000	800
Nadelholz: parallel der Faſerrichtung	46	9 bis 10
ſenkrecht zur Faſerrichtung	125	16 bis 19
Eichenholz: parallel der Faſerrichtung	86	22 bis 27
ſenkrecht zur Faſerrichtung	125	22 bis 27
	Kilogramm für 1 qcm der Querſchnittsfläche.	

84. Beiſpiele.

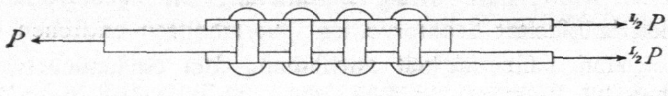
Beiſpiele. 1) Eine ſchmiedeeiſerne Stange, in welcher ein Zug $P = 5600$ kg herrſcht, ſoll mit einem Bolzen an einem Knotenbleche befeſtigt werden. Es iſt der Durchmeſſer d des Bolzens zu beſtimmen.

Der Querſchnitt F des Bolzens ergiebt ſich aus der Gleichung 39. Die zuläſſige Schubbeanſpruchung T ſei hier 700 kg, ſonach

$$F = \frac{5600}{700} = 8 \text{ qcm} \quad \text{und} \quad d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 3{,}2 \text{ cm} .$$

2) Es iſt die Anzahl Nietquerſchnitte zu beſtimmen, welche nöthig ſind, um einen ſchmiedeeiſernen Conſtructionstheil, in welchem ein Zug $P = 30\,000$ kg herrſcht, mit einem Knotenbleche zu verbinden. Der Durchmeſſer der Niete ſei 2 cm; der betreffende Conſtructionstheil (Fig. 72) ſoll aus zwei Flacheiſen hergeſtellt ſein, welche das Knotenblech zwiſchen ſich nehmen.

Fig. 72.



Jedes Flacheiſen hat einen Zug von $\frac{P}{2} = 15\,000$ kg zu ertragen; den gleichen Zug haben die Nietquerſchnitte zwiſchen dieſem Flacheiſen und dem Knotenbleche aus dem einen in das andere zu überführen, d. h. die auf Abſcheren dieſer Querſchnitte wirkende Kraft beträgt 15 000 kg. Der Geſammtquerſchnitt aller zur Befeſtigung des einen Flacheiſens dienenden Nietquerſchnitte ergiebt ſich demnach zu

$$F = \frac{15\,000}{T} .$$

Die für Niete erlaubte Schubbeanſpruchung T kann man (ſiehe Fuſsnote 17), da die Niete aus dem beſten Eiſen hergeſtellt werden, unbedenklich gleich der im gewöhnlichen Stabeiſen und Blech erlaubten Zugbeanſpruchung annehmen. Wir nehmen deſshalb $T = 750$ kg, und es wird

$$F = \frac{15\,000}{750} = 20 \text{ qcm} .$$

Iſt die Anzahl der Nietquerſchnitte n, ſo muſs $\frac{n\,d^2\,\pi}{4} = F = 20$ qcm ſein, oder, wenn $d = 2$ cm,

$$n = \frac{20 \cdot 4}{d^2\,\pi} = 6{,}37 \text{ , ſtatt deſſen } 7.$$

Es müſſen alſo 7 Nietquerſchnitte zur Verbindung des einen Flacheiſens mit dem Knotenbleche angeordnet werden; genau eben ſo groſs muſs die Zahl der Nietquerſchnitte ſein, welche zur Verbindung des anderen Flacheiſens mit dem Knotenbleche dienen.

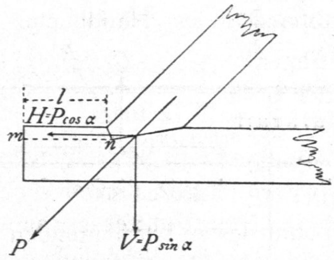
---

17) Bei den Nieten iſt wegen des vorzüglichen Materials die erlaubte Schubbeanſpruchung gleich der im Blech erlaubten Zug-, bezw. Druckbeanſpruchung zu ſetzen.

Ein Abſcheren iſt bei der Conſtruction in Fig. 72 nur möglich, wenn jeder Niet in zwei Querſchnitten abgeſchert wird; jeder Niet bietet alſo zwei Querſchnitte, ſo daſs im Ganzen 7 Niete, d. h. 14 Nietquerſchnitte anzuordnen ſind [18]).

3) Eine Strebe (Fig. 73), welche einen Druck $P = 20\,000\,^{kg}$ zu ertragen hat, ſei mit einem Balken durch Verſatzung verbunden; der Winkel beider Axen ſei 45 Grad. Die Länge l iſt ſo zu beſtimmen, daſs ein Abſcheren längs der Fläche $m\,n$ nicht ſtattfindet.

Fig. 73.



Die Kraft P zerlegt ſich in eine lothrechte Seitenkraft $V = P \sin \alpha$ und eine wagrechte Seitenkraft $H = P \cos \alpha$.

Es iſt $H = 20\,000 \cos 45^0 = 14\,140\,^{kg}$ und
$V = 20\,000 \sin 45^0 = 14\,140\,^{kg}$.

Die abſcherende Kraft A iſt die Kraft H abzüglich des Reibungswiderſtandes $f\,V$, wenn f den Reibungs-Coefficienten bedeutet. Iſt $f = 0{,}3$, ſo iſt die abſcherende Kraft

$$A = H - f\,V = 14\,140\,(1 - 0{,}3) = 9898\,^{kg}$$
$$\text{oder } A = \backsim 10\,000\,^{kg}.$$

Dabei iſt auf die durch den Bolzen möglicher Weiſe erzeugte Reibung keine Rückſicht genommen, weil ein Lockern des Bolzens denkbar iſt.

Die Breite des Balkens und der Strebe ſei b; alsdann wird eine Fläche von der Länge l und der Breite b auf Abſcheren in Anſpruch genommen (d. h. die Fläche $m\,n$). Iſt die für $1\,^{qcm}$ der abzuſcherenden Fläche zuläſſige Schubſpannung T, ſo darf in dieſer Fläche im Ganzen eine Schubſpannung $S = b\,l\,T$ ſtattfinden.

So groſs darf alſo A höchſtens ſein. Die Bedingungsgleichung für die Ermittelung von l iſt ſonach:

$$b\,l\,T = A \quad \text{oder} \quad l = \frac{A}{b\,T}.$$

In unſerem Falle ſei $b = 25\,^{cm}$; T iſt nach der Tabelle auf S. 58 für Nadelholz $= 10\,^{kg}$ für $1\,^{qcm}$; es muſs alſo ſein:

$$l = \frac{10\,000}{25 \cdot 10} = 40\,^{cm}.$$

Auf weitere Fälle der Schubbeanſpruchung werden wir im nächſten Kapitel zurückkommen.

4. Kapitel.

Biegungselaſticität und Biegungsfeſtigkeit.

Beanſpruchung eines Balkens auf Biegung findet ſtatt, wenn die äuſseren Kräfte die beiden an den verſchiedenen Seiten eines Querſchnittes (etwa $\alpha\,\alpha$ in Fig. 74) liegenden Balkentheile um eine ſenkrecht oder geneigt zur Kraftebene ſtehende Axe zu drehen ſtreben. Drehung ſetzt ein Moment voraus; ſonach muſs ein Moment der äuſseren Kräfte für den Querſchnitt vorhanden ſein. Gewöhnlich wirkt auſser dieſem Momente noch eine abſcherende Kraft, welche weitere Beanſpruchungen hervorruft; letztere ſetzen ſich dann mit den reinen Biegungsbeanſpruchungen zuſammen. 85. Biegungsmoment und Querkraft.

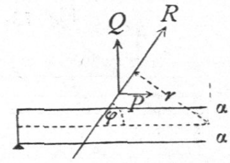
Es ſei hier die Annahme gemacht, daſs die Balkenaxe in der Kraftebene liege; wenn ſomit die Bildebene die Kraftebene vorſtellt, ſo liegen in derſelben ſowohl die äuſseren Kräfte, wie auch die Balkenaxe.

[18]) Man unterſcheidet einſchnittige und zweiſchnittige Niete. Bei den einſchnittigen Nieten wird von jedem Niet nur ein Querſchnitt, bei den zweiſchnittigen Nieten werden von jedem Niet zwei Querſchnitte auf Abſcheren beanſprucht. Näheres hierüber im III. Theil dieſes »Handbuches«, Bd. 1 (Abth. I, Abſchn. 3: Conſtructions-Elemente in Eiſen).

Die äuſseren Kräfte, als welche die Stützendrücke und die Belaſtungen einzuführen ſind, können beliebige Richtung und Gröſse haben.

Der allgemeine Fall der Biegungselaſticität iſt durch Fig. 74 veranſchaulicht. Die Mittelkraft R aller an der einen Seite irgend eines Querſchnittes $\alpha\alpha$ wirkenden äuſseren Kräfte ſchneide die Axe des Körpers unter dem Winkel φ. Zerlegt man R in zwei Seitenkräfte, deren eine P parallel zur Axe des Körpers an der betreffenden Stelle gerichtet iſt, deren andere Q die Axe des Körpers unter 90 Grad ſchneidet, ſo nennt man die erſtere die Axialkraft, die zweite die Querkraft oder Transverſalkraft.

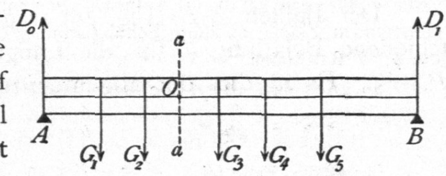
Fig. 74.



Das ſtatiſche Moment der Kraft R in Bezug auf den Schwerpunkt des zu betrachtenden Querſchnittes erſtrebt die Drehung des linken Balkentheiles um eine in dieſem Querſchnitte liegende Axe und wird das Biegungsmoment des Querſchnittes genannt. Die Biegungsmomente ſind von gröſster Wichtigkeit für die Träger; bezüglich derſelben iſt Folgendes zu beachten.

Der ganze Träger AB (Fig. 75) muſs unter der Einwirkung aller äuſseren Kräfte im Gleichgewichte ſein; demnach muſs die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ſein. Bezeichnet man nun das ſtatiſche Moment der an dem links von $a\,a$ liegenden Trägertheile angreifenden äuſseren Kräfte für den Drehpunkt O mit M_{links}, dasjenige der äuſseren Kräfte an dem rechts liegenden Trägertheile ebenfalls für O als Drehpunkt mit M_{rechts}, ſo muſs ſein

Fig. 75.



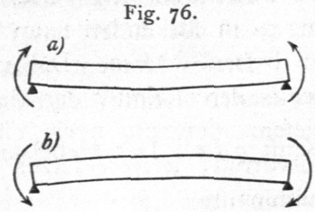
$$0 = M_{links} + M_{rechts}\,,$$

d. h.

$$M_{rechts} = -\,M_{links}.$$

Die an der rechten Balkenſeite des Querſchnittes wirkenden äuſseren Kräfte haben alſo ein Biegungsmoment, welches dem Zahlenwerthe nach genau ſo groſs iſt, wie dasjenige an der linken Balkenſeite des Querſchnittes; die Vorzeichen ſind entgegengeſetzt. Wenn die Kräfte an der einen Seite nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers) drehen, ſo iſt die Drehrichtung der Kräfte an der anderen Seite nach links (entgegengeſetzt der Uhrzeigerdrehrichtung). Beide Momente beanſpruchen den Balken gleichzeitig entweder ſo, daſs er ſeine concave Seite nach oben (Fig. 76a) oder nach unten (Fig. 76b) kehrt. Die erſtere Drehrichtung der Momente ſoll in der Folge, wenn nichts anderes angegeben iſt, als poſitiv, die letztere als negativ eingeführt werden. Die Momente ſind daher poſitiv, wenn ſie links vom Querſchnitt nach rechts und rechts vom Querſchnitt nach links drehen.

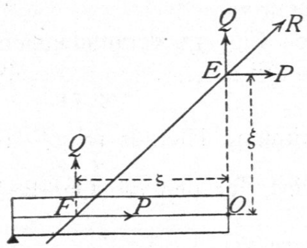
Fig. 76.



Für die Anwendung iſt zu bemerken, daſs es nach Vorſtehendem ganz gleichgiltig iſt, ob man das Moment der an der einen oder der an der anderen Seite des Querſchnittes wirkenden Kräfte ermittelt; man wird zweckmäſsig ſtets diejenige Seite wählen, welche für die Rechnung und Anſchauung die bequemere iſt.

Die Zerlegung der Mittelkraft R in Axial- und Querkraft kann an beliebiger Stelle der Kraft R vorgenommen werden. Geſchieht dieſelbe im Punkte E, dem Schnittpunkte von R mit dem Querſchnitte (oder deſſen Verlängerung), ſo hat Q kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegungsmoment, d. h. das ſtatiſche

Fig. 77.



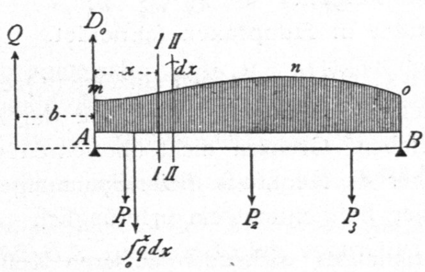
Moment von R ist dann gleich dem statischen Momente von P, also $M = P\,\xi$ (Fig. 77); zerlegt man dagegen R in F, dem Schnittpunkte von R mit der Axe, so hat P kein Moment für O als Drehpunkt und das Biegungsmoment wird gleich dem statischen Momente von Q, also $M = Q\,\zeta$ (Fig. 77). Wenn bei einem Balken mit wagrechter Axe nur lothrechte äußere Kräfte wirken, so ist R gleichfalls lothrecht, also die Seitenkraft P gleich Null und $R = Q$, bezw.

$$M = Q\,\zeta.$$

Bei den hier zu betrachtenden Balken ist dieser Fall der fast ausschließlich vorkommende; deshalb soll in Folgendem nur lothrechte Belastung zu Grunde gelegt werden. Dann besteht nachstehende einfache Beziehung zwischen dem Biegungsmomente und der Querkraft: Die Querkraft Q ist gleich dem ersten Differenzialquotienten des Biegungsmomentes nach x, wenn x die Abscisse eines Querschnitts bedeutet.

Der Balken $A\,B$ (Fig. 78) trage eine beliebige, an den einzelnen Stellen verschiedene Belastung q für die Längeneinheit und eine Reihe von Einzellasten P_1, P_2, P_3. Es ist dies der allgemeinste Fall; jeder andere Fall ist eine Vereinfachung desselben. Die Größe von q werde an jeder Stelle durch die Ordinate der Curve $m\,n\,o$ dargestellt. Die Abscisse irgend eines Querschnittes $I\,I$ sei x; links von diesem Querschnitt wirken D_0, P_1, und $\int_0^x q\,d\,x$. Die Mittelkraft dieser drei Kräfte ist die Querkraft Q, d. h. es ist

Fig. 78.



$$Q = D_0 - P_1 - \int_0^x q\,d\,x.$$

Q möge im Abstande b links von A angreifen. Das Biegungsmoment für den Querschnitt $I\,I$ ist gleich dem statischen Moment von Q für diesen Querschnitt, d. h. es ist

$$M = Q\,(b + x).$$

Betrachtet man einen zweiten Querschnitt $II\,II$, der um $d\,x$ von $I\,I$ entfernt ist, so ist für diesen das Moment $M + d\,M$.

Dieses Moment setzt sich zusammen aus den Momenten der links von $II\,II$ wirkenden Kräfte, d. h. der Kraft Q, und der zwischen $I\,I$ und $II\,II$ liegenden Kraft $q\,d\,x$. Der Hebelsarm von Q ist $b + x + d\,x$, derjenige von $q\,d\,x$ ist $\frac{d\,x}{2}$; mithin ist

$$M + d\,M = Q\,(b + x + d\,x) - q\,d\,x\,\frac{d\,x}{2} = Q\,(b + x) + Q\,d\,x - q\,\frac{d\,x^2}{2}.$$

Zieht man von dieser Gleichung die oben für M gefundene ab, so bleibt:

$$d\,M = Q\,d\,x - \frac{q\,d\,x^2}{2}.$$

$\frac{q\,d\,x^2}{2}$ ist eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung und verschwindet gegen die übrigen Gröſsen der Gleichung, welche unendlich kleine Gröſsen erſter Ordnung ſind. Es iſt demnach

$$d\,M = Q\,d\,x \quad \text{und, wie oben behauptet,} \quad Q = \frac{d\,M}{d\,x}, \quad . \quad . \quad . \quad 40.$$

Wird $Q = 0$, ſo iſt auch $\frac{d\,M}{d\,x} = 0$, alſo M ein Maximum. Hieraus folgt, daſs das Moment für denjenigen Querſchnitt zum Maximum wird, für den die Querkraft gleich Null iſt.

Für die Berechnung auf Biegung beanſpruchter Balken iſt es von grundlegender Bedeutung, wie die einzelnen Balkenquerſchnitte von der Kraftebene geſchnitten werden. Wenn, wie meiſtens der Fall, die Kraftebene alle Balkenquerſchnitte in Hauptaxen ſchneidet (ſiehe Art. 59, S. 39), ſo ergeben ſich für die Spannung ſehr einfache Formeln. Nach Früherem iſt jede Symmetrie-Axe eine Hauptaxe; wenn alſo z. B. die Querſchnitte die in Fig. 79 dargeſtellten Formen haben und die Kraftebene durch ZZ, ſenkrecht zur Bildebene geht, ſo iſt die obige Vorausſetzung erfüllt. Weſentlich verwickelter iſt die Berechnung, wenn die Kraftebene die Querſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet; dieſer Fall wird durch Fig. 80 veranſchaulicht, in welcher die Querſchnitte lothrecht belaſteter Dachpfetten vorgeführt ſind.

Fig. 79.

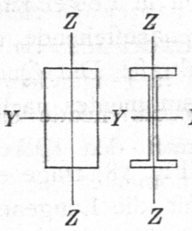
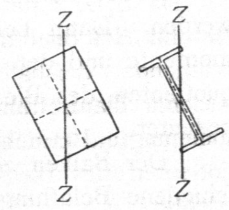


Fig. 80.



a) Axiale Biegungsſpannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerſchnitte in Hauptaxen ſchneidet.

86. Axiale Biegungsſpannung.

Unter der Einwirkung des Biegungsmomentes entſtehen in den einzelnen Querſchnitten des Balkens an den verſchiedenen Stellen Spannungen; dieſelben dürfen gewiſſe durch die Natur des Materials vorgeſchriebene Grenzen nicht überſchreiten, wenn die Conſtruction ſicher ſein ſoll; es iſt daher die Kenntniſs dieſer Spannungen nothwendig. Zur Ermittelung derſelben möge der Betrachtung ein urſprünglich gerades Balkenſtück von der Länge $d\,x$ (Fig. 81) zu Grunde gelegt werden; AB fällt in die Axe des Balkens. Bei der Biegung erleidet daſſelbe Formänderungen, und es werden im Allgemeinen die vor der Biegung durch A und B gelegten Querſchnitte nach denſelben nicht mehr eben ſein; CD möge ſich in $C_1\,D_1$ (Fig. 82) geändert haben. Die urſprüngliche Länge von CD war $d\,x$; die jetzige Länge iſt $C_1\,D_1 = d\,x + \Delta\,d\,x$; mithin iſt die Verlängerung in Folge der Biegung $\Delta\,d\,x$ (welche Verlängerung ſowohl poſitiv, wie negativ ſein kann). Das Verlängerungsverhältniſs an dieſer Stelle iſt demnach

Fig. 81.

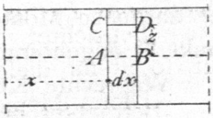
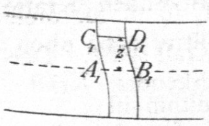


Fig. 82.



$$\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x}.$$

Wird die an dieſer Stelle für die Flächeneinheit des Querſchnittes herrſchende Spannung mit N und der Elaſticitäts-Modul des Materials mit E bezeichnet, ſo iſt nach Gleichung 30 das Verlängerungsverhältniſs

$$\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x} = \frac{N}{E}, \quad \text{alſo} \quad N = E\,\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x}.$$

Da E bekannt iſt, ſo iſt auch N bekannt, falls $\frac{\Delta\,d\,x}{d\,x}$ gefunden iſt. Man macht nun die Annahme, daſs das Verlängerungsverhältniſs an den verſchiedenen Stellen des Querſchnittes dem Abſtande z von der durch den Schwerpunkt des Querſchnittes normal zur Kraftebene gelegten Axe YY (Fig. 83) proportional iſt, und zwar der erſten Potenz dieſes Abſtandes. Allgemein wird alſo ſtattfinden, wenn α und β zwei noch zu beſtimmende Conſtanten ſind,

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \alpha + \beta z .$$

Demnach iſt

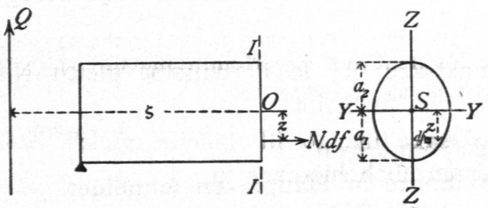
$$N = E \frac{\Delta dx}{dx} = E(\alpha + \beta z) .$$

Da E, α, β für den ganzen Querſchnitt conſtant ſind, ſo ſind auch die Producte $E\alpha$ und $E\beta$ conſtant. Es ſei $E\alpha = a$ und $E\beta = b$; alsdann wird

$$N = a + bz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41.$$

Für die Beſtimmung der beiden Werthe a und b ſtehen zwei Gleichungen zur Verfügung. Betrachtet man den Balkentheil links von dem unterſuchten Querſchnitte II (Fig. 83), ſo muſs derſelbe unter der Einwirkung aller an ihm wirkenden Kräfte, der äuſseren und der inneren, im Gleichgewichte ſein (ſiehe Art. 4, S. 6). Auf dieſen Theil wirken aber:

Fig. 83.



1) Aeuſsere Kräfte, deren Mittelkraft Q iſt; letztere hat in Bezug auf den Querſchnitt II nach Vorſtehendem das Biegungsmoment $M = Q\zeta$.

2) Innere Kräfte, d. h. die axialen Spannungen im Querſchnitt II; für ein Flächentheilchen vom Inhalt df ſind dieſelben Ndf; für den ganzen Querſchnitt iſt deren Summe einzuführen, d. h. allgemein $\int N df$, wobei die Integration über den ganzen Querſchnitt auszuführen iſt. Die in den Querſchnitt fallenden Spannungen kommen bei der nachſtehenden Unterſuchung nicht in Betracht.

Das Gleichgewicht des Balkenſtückes verlangt nun, daſs die algebraiſche Summe der wagrechten Kräfte gleich Null ſei und daſs die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente für einen beliebigen Punkt der Kraftebene, als welcher der Punkt O angenommen werden ſoll, ebenfalls gleich Null ſei.

Wagrechte Kräfte ſind auſser den axialen Spannungen nicht vorhanden; die Summe der letzteren iſt $\int N df$. Es wird alſo, wenn man die Ordinaten nach unten poſitiv, nach oben negativ annimmt,

$$\int_{-a_2}^{+a_1} N df = 0 .$$

Das Moment der äuſseren Kräfte iſt $M = Q\zeta$; jede Spannung Ndf hat in Bezug auf O das Moment $Nz\,df$. Das geſammte Moment aller dieſer Spannungen iſt alſo $\int_{-a_2}^{+a_1} Nz\,df$; da die Integration über den ganzen Querſchnitt auszudehnen iſt, ſo ſind für z die Grenzen $-a_2$ und $+a_1$. Die Bedingungsgleichungen heiſsen demnach:

$$\int_{-a_2}^{+a_1} N\,df = 0 \quad \text{und} \quad M - \int_{-a_2}^{+a_1} N z\,df = 0 .$$

Führt man für N den Werth aus Gleichung 41 ein, fo wird

$$\int_{-a_2}^{+a_1} (a + b z)\;df = 0 \quad \text{und} \quad M - \int_{-a_2}^{+a_1} (a + b z)\;z\,df = 0 .$$

Da a und b conftant find, können fie vor die Integralzeichen gefetzt werden. Man erhält zunächft für die erfte Gleichung

$$a \int_{-a_2}^{+a_1} df + b \int_{-a_2}^{+a_1} z\,df = 0 .$$

Nun ift $\int_{-a_2}^{+a_1} df = F$, wenn F den Flächeninhalt des ganzen Querfchnittes bedeutet; $\int_{-a_2}^{+a_1} z\,df$ ift nach Art. 30 (S. 24) das ftatifche Moment der Querfchnittsfläche bezogen auf die Axe YY. Da YY eine Schwerpunktsaxe ift, fo ift daffelbe gleich Null. Setzt man diefe Werthe in obige Gleichung ein, fo bleibt

$$a F = 0 , \quad \text{woraus} \quad a = 0 \text{ folgt.}$$

Die zweite der obigen Gleichungen ändert fich hiernach in

$$M - b \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df = 0 .$$

$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df$ ift aber nach Art. 46 (S. 32) das Trägheitsmoment des Querfchnittes für die Axe YY; daffelbe foll hier kurz mit $\mathcal{J}$ bezeichnet werden, fo dafs ftattfindet:

$$\mathcal{J} = \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df ;$$

alsdann wird

$$M = b\mathcal{J} \quad \text{und} \quad b = \frac{M}{\mathcal{J}} .$$

Nunmehr ift der Werth der axialen Biegungsfpannung N durch Einfetzung der für a und b gefundenen Werthe in die Gleichung 41 leicht zu ermitteln; man erhält

$$N = \frac{M}{\mathcal{J}} z . \quad \ldots \ldots \ldots \quad 42.$$

87. **Neutrale Axe oder Nulllinie.**

Für alle Theile deffelben Querfchnittes haben bei einer gegebenen beftimmten Belaftung fowohl M (das Biegungsmoment oder das Moment der an der einen Seite des Querfchnittes wirkenden äufseren Kräfte bezogen auf die wagrechte Schweraxe deffelben als Drehaxe), wie auch das Trägheitsmoment $\mathcal{J}$, welches nur von der Form und Gröfse der Querfchnittsfläche abhängt, denfelben Werth. Demnach ift nach Gleichung 42 die axiale Spannung N an den verſchiedenen Stellen eines Querſchnittes nur mit dem Abſtande z derſelben von der wagrechten Schwerpunktsaxe veränderlich. Alle Punkte eines Querſchnittes, welche in gleicher Höhe z über der wagrechten Schwerpunktsaxe liegen, werden alſo gleich ſtark beanſprucht. Trägt man die in den verſchiedenen Höhen z für die Flächeneinheit wirkenden Axialſpannungen derart graphiſch auf, daſs man die z als Abſciſſen, die zugehörigen N als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, ſo erhält man die Linie der Gleichung $N = \frac{M}{\mathcal{J}} z$. Dieſe Linie wird eine Gerade, weil die Veränderlichen N und z nur in der erſten Potenz vorkommen.

Für $z = 0$ wird $N = 0$, d. h. in allen in der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punkten iſt die Axialſpannung gleich Null.

An dieſen Stellen iſt alſo auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn dieſelben laſſen ſich aus der Gleichung ermitteln

$$\frac{\Delta\, dx}{dx} = \frac{N}{E}, \quad \text{ſonach} \quad \Delta\, dx = \frac{N}{E}\, dx = 0\,.$$

Man nennt die Faſerſchicht, in welcher durch die Biegung weder eine Verlängerung, noch eine Verkürzung bewirkt wird, die neutrale Faſerſchicht, und die Axe YY, welche alle Punkte des Querſchnittes enthält, in denen die Axialſpannung gleich Null iſt, die neutrale Axe oder Nulllinie.

Hiermit iſt der Satz bewieſen: Bei einem geraden wagrechten Balken, deſſen Querſchnitte durch die Kraftebene in Hauptaxen geſchnitten werden, fällt, wenn nur lothrechte Kräfte wirken, in jedem Querſchnitt die neutrale Axe mit der wagrechten Schwerpunktsaxe zuſammen.

Aus Gleichung 42 folgt ferner, daſs N deſto gröſser iſt, je gröſser z iſt, d. h. je weiter der betreffende Punkt von der wagrechten Schwerpunktsaxe entfernt iſt. 88. Gröſste Beanſpruchung.
Die gröſsten Werthe von N finden alſo in den am weiteſten entfernten Punkten ſtatt. Es ſeien die Abſtände der am weiteſten nach oben und unten von der Neutralen entfernten Punkte (Fig. 83) bezw. $+a_1$ und $-a_2$; alsdann iſt

$$N_{max} = + \frac{M}{\mathcal{J}} a_1 \quad \text{und} \quad N_{min} = - \frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43.$$

Die Gleichungen 43 werden benutzt, um die Gröſse und Form des Querſchnittes an den verſchiedenen Stellen des Balkens zu beſtimmen. Bedeutet M das gröſste für einen Querſchnitt mögliche Moment, ſo iſt die gröſste in dieſem Querſchnitt vorhandene Zug-, bezw. Druckſpannung aus den Gleichungen 43 zu ermitteln. Iſt für das betreffende Material und den vorliegenden Fall die zuläſſige Beanſpruchung für die Flächeneinheit des Querſchnittes K', bezw. $-K''$ (für Zug, bezw. Druck), ſo darf höchſtens ſtattfinden:

$$N_{max} = K' \quad \text{und} \quad N_{min} = -K''\,,$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querſchnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathcal{J}} a_1\,, \quad -K'' = -\frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{M}{\mathcal{J}} a_2\,.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch geſchrieben werden:

$$\frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{M}{K'} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{M}{K''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 44 ſind bekannt; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verſchiedenen Fälle die Werthe von M ermittelt; diejenigen der zulässigen Beanspruchungen, d. h. die Werthe für K' und K'' sind ebenfalls (aus den Tabellen auf S. 53 u. 54) bekannt. Sollen also an den meist beanspruchten Stellen der Querschnitte die zulässigen Beanspruchungen K' und K'' nicht überschritten werden, so sind $\frac{\mathfrak{J}}{a_1}$ und $\frac{\mathfrak{J}}{a_2}$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen 44 erfüllt sind. $\mathfrak{J}$, a_1 und a_2 hängen aber nur von der Form und Grösse der Querschnittsfläche ab; man kann daher durch passende Anordnung des Querschnittes diese Bedingung erfüllen.

89. Widerstandsmoment.

Für den Quotienten $\frac{\mathfrak{J}}{a}$ hat man eine besondere Bezeichnung: das Widerstandsmoment eingeführt. Hierin bedeutet a den grösseren von den beiden Werthen a_1 und a_2, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

Es möge noch bemerkt werden, dass die grössten Werthe der axialen Spannungen N nicht ohne Weiteres die überhaupt wirkenden Maximalspannungen sind. In den meisten Fällen aber ist die grösste Spannung entweder gleich dem grössten Werth der axialen Spannung oder doch so wenig von demselben verschieden, dass der letztere Werth unbedenklich als grösster Werth der Spannung überhaupt eingeführt werden kann.

90. Querschnittsbestimmung.

Die Querschnitte der auf Biegung beanspruchten Balken werden mittels der beiden Gleichungen 44 bestimmt, indem für M der grösstmögliche Werth des Biegungsmomentes für den betreffenden Querschnitt, für K' und K'' die bezüglichen Werthe aus den Tabellen auf S. 53 u. 54 eingeführt werden. Eine günstige Anordnung wird es sein, wenn gleichzeitig in den am meisten gezogenen und gedrückten Punkten des Querschnittes die zulässigen grössten Beanspruchungen auf Zug und Druck eintreten.

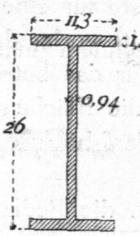
91. Stäbe aus Schmiedeeisen und Stahl.

Für Schmiedeeisen und Stahl sind die zulässigen Zug-, bezw. Druckbeanspruchungen (absolut genommen) einander nahezu gleich, so dass für die Querschnittsbildung in den Gleichungen 44 $K' = K''$ zu setzen ist. Es ergiebt sich alsdann

$$\frac{M}{\mathfrak{J}}\, a_1 = \frac{M}{\mathfrak{J}}\, a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2\,,$$

d. h. die Querschnittsform für Stäbe aus Schmiedeeisen und Stahl, welche auf Biegungselasticität beansprucht werden, ist so zu wählen, dass die am meisten gezogenen, bezw. gedrückten Punkte gleich weit vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernt sind, dass also der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in halber Höhe liegt.

Fig. 84.



Beispiel. Das Maximalmoment in einem schmiedeeisernen Walzbalken mit I-förmigem Querschnitt betrage $M = 280\,000$ kgcm.

Nach der Tabelle auf S. 53 ist für Schmiedeeisen $K' = K'' = K = 700$ kg für 1 qcm, also

$$\frac{\mathfrak{J}}{a_1} = \frac{\mathfrak{J}}{a_2} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

Das neben stehende Profil Nr. 26 der »Deutschen Normal-Profile für I-Eisen« (Fig. 84) hat ein Trägheitsmoment $\mathfrak{J} = 5798$; ferner ist $a = \frac{26}{2} = 13$ cm, demnach $\frac{\mathfrak{J}}{a} = 446$, so dass dieser Querschnitt im vorliegenden Falle genügt.

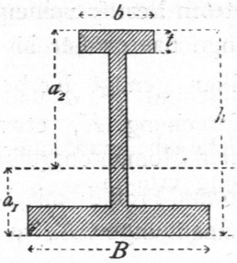
92. Stäbe aus Gusseisen.

Für Gusseisen ist die zulässige Beanspruchung auf Druck doppelt so gross, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 53), also $K'' = 2\,K'$, und demnach

$$\frac{M}{\mathfrak{J}}\, a_2 = 2\, \frac{M}{\mathfrak{J}}\, a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2\, a_1\,.$$

Nun ist die ganze Höhe des Querschnittes $h = a_1 + a_2 = 3\, a_1$, woraus $a_1 = \frac{h}{3}$.

Fig. 85.



Daraus folgt die Regel: Die Querfchnitte der gufseifernen Balken (Fig. 85) find fo anzuordnen, dafs der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Gefammthöhe des Querfchnittes von der am meiften gezogenen Fafer entfernt liegt. Befinden fich alfo die gezogenen Fafern, wie meiftens, unten, die gedrückten Fafern oben, fo foll der Schwerpunkt im Abftande $\frac{h}{3}$ über der Grundlinie des Querfchnittes liegen.

Die auf Biegung beanfpruchten Stäbe aus Holz werden, der Natur des Materials entfprechend, mit rechteckigem Querfchnitt hergeftellt; der Schwerpunkt des Querfchnittes liegt alfo in halber Höhe h, und es ift $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und es ift aus der Tabelle auf S. 53 der kleinere der beiden Werthe, welche als zuläffige Zug-, bezw. Druckbeanfpruchung angegeben find, einzuführen. Wenn diefer Werth K genannt wird, fo ift 93. Stäbe aus Holz.

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{M}{K}.$$

Beifpiel. Es fei etwa $M = 180\,000$ kgcm; alsdann mufs für kieferne Balken ftattfinden:

$$\frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{180\,000}{60} = 3000.$$

Nach Gleichung 19 ift

$$\mathfrak{J} = \frac{b\,h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{J}}{a} = \frac{b\,h^3}{12\,\frac{h}{2}} = \frac{b\,h^2}{6}.$$

Im vorliegenden Falle mufs alfo fein

$$\frac{b\,h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b\,h^2 = 18\,000.$$

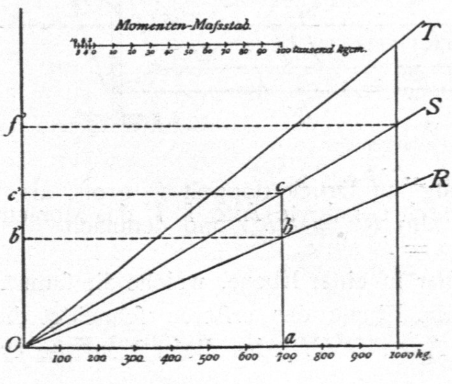
Ift $b = \frac{3}{4}\,h$, fo wird $\frac{3}{4}\,h^3 = 18\,000$ und $h = \sqrt[3]{24\,000}$ = rot. 29 cm, fonach $b = 22$ cm.

Bei den fchmiedeeifernen Walzbalken I- und [-förmigen Querfchnittes, welche im Handel in ganz beftimmten Kalibern erhältlich find, kann man das für jeden Fall nothwendige Kaliber mittels einer einfachen Figur fehr leicht ermitteln. Die Bedingung für die Querfchnittsbildung ift 94. Querfchnittsbeftimmung mittels graphifcher Tafel.

$$M = K\,\frac{\mathfrak{J}}{a}.$$

Je nachdem man bei einem Balken mit gegebenem Querfchnitt, alfo bekanntem Widerftandsmoment $\frac{\mathfrak{J}}{a}$, eine gröfsere oder geringere Beanfpruchung K als zuläffig einführt, kann man ihn für ein gröfseres oder geringeres Moment M verwenden. Trägt man nun die Werthe von K als Abfciffen, die zugehörigen Werthe $\frac{K\,\mathfrak{J}}{a} = M$ als Ordinaten auf, fo ergiebt fich für jedes Kaliber eine Gerade, etwa $O\,R$ (Fig. 86), die durch den Coordinatenanfang O geht und die Gröfse der Momente angiebt, welche diefes Kaliber bei

Fig. 86.



den verſchiedenen Beanſpruchungen K ertragen kann. In Fig. 86 ſind drei ſolche Linien OR, OS, OT angegeben. Bei einer als zuläſſig erachteten Beanſpruchung $K = 700$ kg würde der zu OR gehörige Balken genügen, ſo lange das gröſste Moment nicht gröſser als $\overline{ab} = Ob'$ iſt; der zu OS gehörige Balken genügt hierbei noch für ein Moment $\overline{ac} = Oc'$. Wird eine gröſsere Beanſpruchung K, etwa $K = 1000$ kg, zugelaſſen, ſo genügt der Balken OS bis zu einer Momentengröſse $\overline{Of'}$. Auf der neben ſtehenden Tafel ſind für die »Deutſchen Normal-Profile« mit **I**- und **[**-Form die Linien gezogen; auf der Abſciſſenaxe ſind die Spannungen K, auf der Ordinatenaxe die Momente abgetragen.

Wenn z. B. ein Moment von 125 000 kgcm aufzunehmen iſt, ſo würde das **I**-Eiſen Nr. 20 dieſes mit einer gröſsten Beanſpruchung $K = 580$ kg ertragen können, Nr. 18 mit einer Beanſpruchung von 765 kg, Nr. 16 mit einer Spannung von 1060 kg. Wäre vorgeſchrieben, daſs K nicht gröſser ſein ſolle, als 700 kg, ſo würde das Kaliber zu wählen ſein, welches zunächſt über dem Punkte P liegt, in welchem die zu $K = 700$ kg gehörige Ordinate den Werth $M = 125\,000$ kgcm hat. Die Verwendung dieſer graphiſchen Tafel iſt ſonach ſehr bequem.

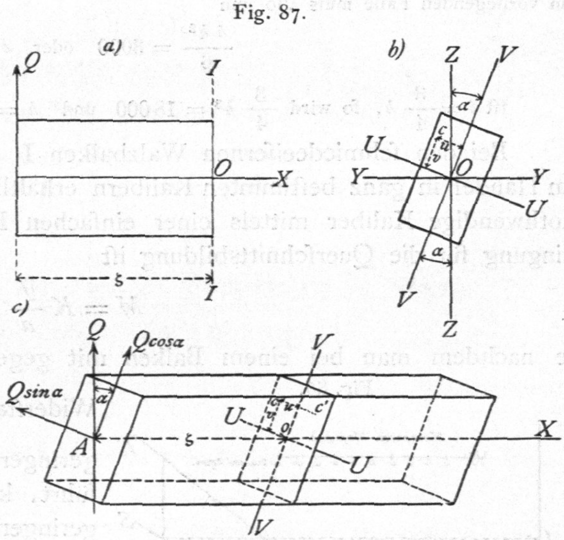
b) Axiale Biegungsſpannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet.

95. Axiale Biegungsſpannungen.

Auf den Querſchnitt II in Fig. 87a wirke das Biegungsmoment $M = Q\,\zeta$; Fig. 87b giebt die Vorderanſicht des Querſchnittes; die Kraftebene fällt mit der Bildebene der Fig. 87a zuſammen, geht durch die Balkenaxe und iſt die XZ-Ebene.

Bezeichnen UU und VV die beiden Hauptaxen des Querſchnittes, ſo kann nach bekannten Geſetzen der Statik das in der XZ-Ebene wirkende Moment M in zwei Seitenmomente zerlegt werden, welche in der XU- und XV-Ebene wirken; das erſtere iſt alsdann $M_u = M \sin\alpha$, das letztere $M_v = M \cos\alpha$. Dieſe Zerlegung, ſo wie die Drehrichtung der Seitenmomente wird durch die iſometriſche Anſicht in Fig. 87c verdeutlicht, bei welcher, der einfacheren Zeichnung halber, ein Rechteckquerſchnitt angenommen iſt. Q zerlegt ſich im Punkte A in $Q\cos\alpha$ und $Q\sin\alpha$, welche Kräfte bezw. in den Ebenen XV und XU wirken. Die erſtere Kraft hat in Bezug auf die durch O, den Schwerpunkt des betrachteten Querſchnittes, gelegte Hauptaxe UU das Moment:

Fig. 87.

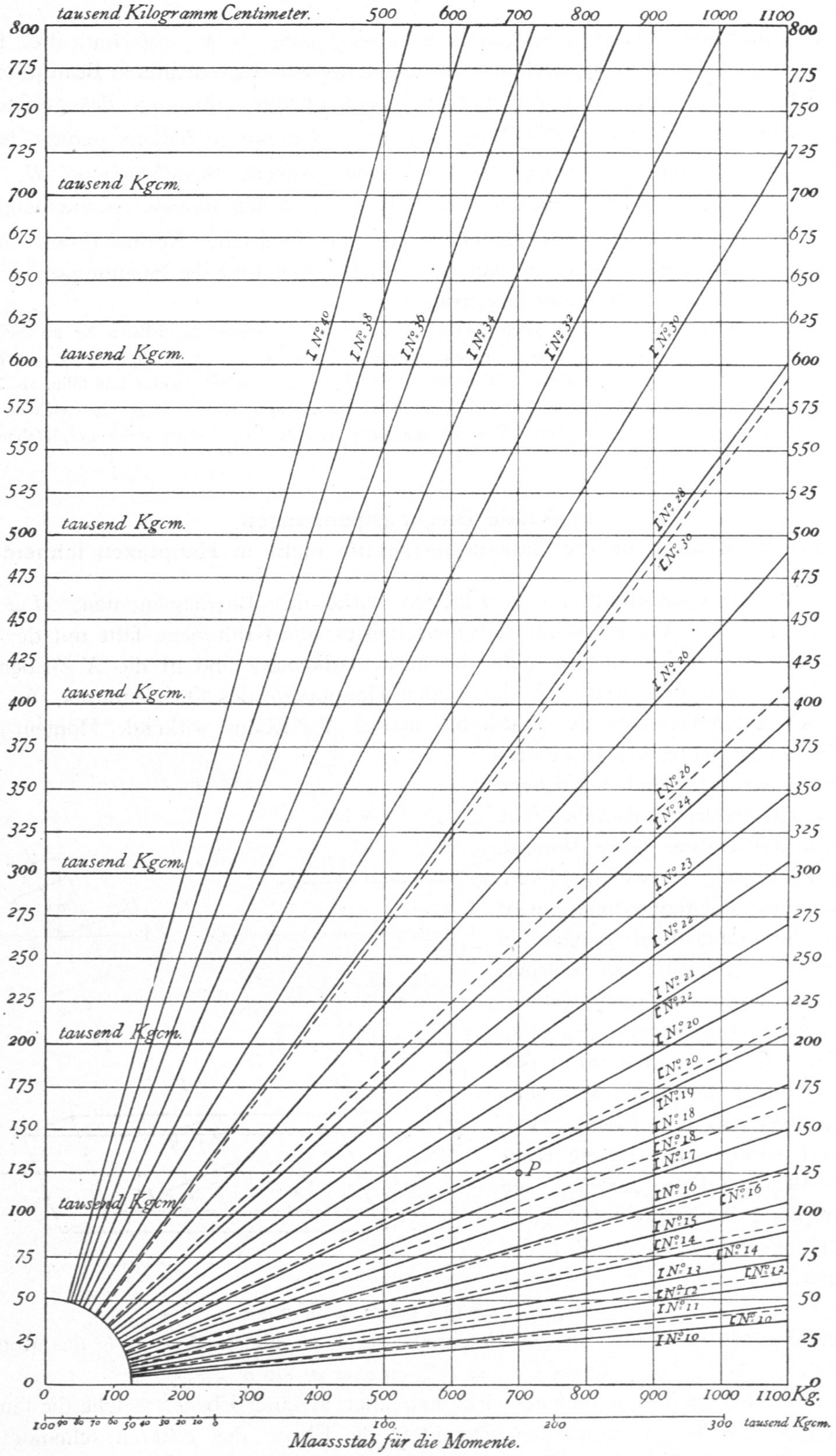


$$Q\cos\alpha \,.\, \zeta = Q\,\zeta\cos\alpha = M\cos\alpha;$$

die letztere hat in Bezug auf die gleichfalls durch O gelegte Axe VV das Moment

$$Q\sin\alpha \,.\, \zeta = Q\,\zeta\sin\alpha = M\sin\alpha.$$

Jedes dieſer beiden Theilmomente wirkt nun aber in einer Ebene, welche die ſämmtlichen Querſchnitte in Hauptaxen ſchneidet; die Ebene des erſteren ſchneidet die Querſchnitte in VV, die des letzteren in den Axen UU; jedes dieſer Momente er-



Graphische Tafel

für die Querschnittsermittelung von I- und C-förmigen Walzbalken.
(Deutsche Normal-Profile.)

zeugt fonach für fich allein Biegungsfpannungen, welche nach Gleichung 42 zu berechnen find. Es foll das Trägheitsmoment des Querfchnittes bezogen auf die Hauptaxe $U\,U$ mit A, dasjenige bezogen auf die Hauptaxe $V\,V$ mit B bezeichnet werden; dann erhält man die Spannungen in einem Punkte C mit den Coordinaten u und v wie folgt.

Wirkte nur $M \cos \alpha$, fo wäre die Spannung $N_1 = \frac{M \cos \alpha \, . \, v}{A}$;

wirkte nur $M \sin \alpha$, fo wäre die Spannung $N_2 = \frac{M \sin \alpha \, . \, u}{B}$.

Die wirkliche Spannung fetzt fich aus beiden Einzelwerthen zufammen, d. h. es wird fein

$$N = N_1 + N_2 = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right).$$

Bei der angenommenen Kraft- und Drehrichtung der Momente, fo wie bei der Lage des Punktes C werden fowohl N_1 wie N_2 pofitive, im vorliegenden Falle Druckbeanfpruchungen bedeuten; wenn der Punkt an der anderen Seite von $V\,V$ liegt, etwa in C', fo würde $N_2 = - \frac{M \sin \alpha \, . \, u}{B}$ werden. Man fieht leicht, dafs alle Punkte, die in denjenigen von beiden Hauptaxen gebildeten Quadranten des Querfchnittes liegen, welche von Q gefchnitten werden, durch beide Momente Druck, bezw. Zug erhalten, dafs dagegen in den beiden anderen Quadranten die Spannungen N_1 und N_2 verfchiedene Vorzeichen haben.

Nach Vorftehendem ift allgemein

96. Neutrale Axe oder Nulllinie.

$$N = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} \pm \frac{u \sin \alpha}{B} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45.$$

Für die nachfolgende Unterfuchung ift es zweckmäfsig, nur das Minuszeichen einzuführen, weil die in Betracht kommenden Punkte des Querfchnittes in den Quadranten deffelben liegen, welchen das Minuszeichen entfpricht. Es werden demnach u, bezw. v nach links, bezw. oben als pofitiv, nach rechts, bezw. unten als negativ eingeführt. Alle Punkte des Querfchnittes, in welchen die Spannung den Werth Null hat, genügen der Gleichung

$$\frac{v \cos \alpha}{A} - \frac{u \sin \alpha}{B} = 0 .$$

Dies ift hier demnach die Gleichung der neutralen Axe (fiehe Art. 87, S. 64).

Löft man diefe Gleichung nach v auf, fo erhält man

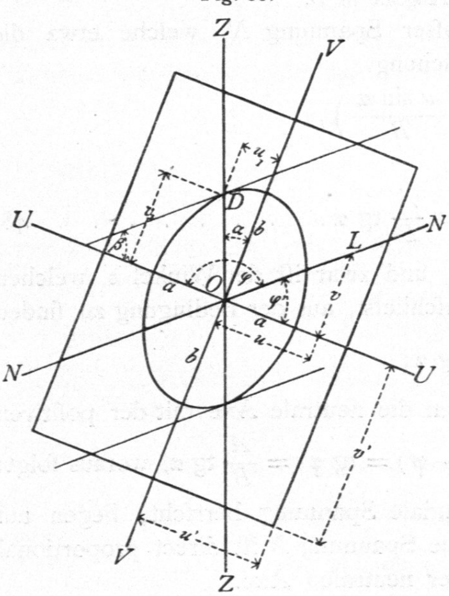
$$v = \frac{A}{B}\, u \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46.$$

Die beiden Veränderlichen u und v kommen nur in der erften Potenz vor; mithin ift die Linie eine Gerade.

Für $u = 0$ wird auch $v = 0$, woraus folgt, dafs die neutrale Axe bei den gemachten Annahmen durch den Punkt O, den Schwerpunkt des Querfchnittes, geht.

Es fei $N\,N$ (Fig. 88) die neutrale Axe;

Fig. 88.



alsdann ist für jeden Punkt L derselben $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{v}{-u} = -\frac{v}{u}$, wenn φ' der Winkel ist, welchen die neutrale Axe mit der negativen Seite der Hauptaxe UU bildet. Nun ist nach Gleichung 46, da NN die neutrale Axe ist,

$$\frac{v}{u} = \frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha,\ \text{also}\ \operatorname{tg}\varphi' = -\frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47.$$

Die Lage der Neutralen ist also nur von der Querschnittsbildung (darauf weist der Quotient $\frac{A}{B}$ hin) und der Lage der Kraftebene zu den Hauptaxen (d. h. von α) abhängig, nicht aber von der Gröfse des Momentes.

Gleichung 47 giebt ein bequemes Mittel, die Lage der neutralen Axe zu construiren. Zeichnet man (Fig. 88) für den betreffenden Querschnitt die Ellipse der Trägheitsmomente (siehe Art. 65, S. 44), so sind die beiden Halbaxen bezw.

$$\frac{K}{\sqrt{A}} = a \quad \text{und} \quad \frac{K}{\sqrt{B}} = b.$$

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente an die Ellipse in einem Punkte, dessen Coordinaten u und v sind, mit der U-Axe einschliefst, ist

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u\,b^2}{v\,a^2}.$$

Die Coordinaten des Punktes D seien u_1 und v_1; alsdann ist für die Tangente in diesem Punkte

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2 u_1}{a^2 v_1} = -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Aus den oben stehenden Gleichungen für a und b folgt

$$A = \frac{K^2}{a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{K^2}{b^2};$$

sonach ist also

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi' \quad \text{und} \quad \beta = \varphi'.$$

Die neutrale Axe ist sonach parallel zu der Tangente, welche in demjenigen Punkte D an die Ellipse der Trägheitsmomente gelegt wird, in welchem die Schnittlinie der Kraftebene und des Querschnittes die Ellipse schneidet. Die neutrale Axe ist also parallel zur Tangente in D.

Alle Querschnittspunkte mit gleich grofser Spannung N, welche etwa die Gröfse $N = C$ haben möge, genügen der Gleichung

$$C = M\left(\frac{v\cos\alpha}{A} - \frac{u\sin\alpha}{B}\right),$$

aus welcher folgt

$$v = \frac{A}{M}\,\frac{C}{\cos\alpha} + u\,\frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48.$$

Dies ist ebenfalls die Gleichung einer Geraden, und zwar ist der Winkel ε, welchen dieselbe mit der positiven Seite der UU-Axe einschliefst, aus der Bedingung zu finden

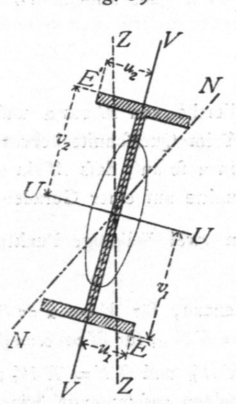
$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha;$$

ε ist genau so grofs, wie der Winkel φ, welchen die neutrale Axe mit der positiven Seite der ~~U~~ U-Axe bildet, da $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(180 - \varphi') = \operatorname{tg}\varphi' = \frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha$, woraus folgt: Alle Querschnittspunkte, in welchen gleiche axiale Spannung herrscht, liegen auf einer zur neutralen Axe parallelen Geraden; die Spannung N ist direct proportional dem senkrechten Abstande der Geraden von der neutralen Axe.

Der Fall, daſs die Kraftebene die Balkenquerſchnitte nicht in Hauptaxen ſchneidet, kommt im Hochbau ſehr häufig vor, ſo z. B. bei den Dachpfetten, welche nach Fig. 80 mit einer Querſchnittsſeite in die Dachſchräge gelegt ſind, ferner bei I- oder C-förmigen Walzbalken, welche Gewölbe tragen, falls der wagrechte Gewölbeſchub nicht vollſtändig (durch Anker etc.) aufgehoben iſt; auſserdem bei einer Anzahl von Querſchnittsformen, deren lothrechte Schwerpunktsaxe keine Hauptaxe iſt, wie bei gleichſchenkeligen und ungleichſchenkeligen Winkeleiſen, Z-Eiſen etc., falls die Belaſtung lothrecht iſt (Fig. 92); auch die Gratſparren der Dächer gehören hierher. In allen dieſen Fällen darf man nicht nach der einfachen Formel 42 rechnen, muſs vielmehr die gröſste Beanſpruchung aus Gleichung 45 entnehmen und dann den Querſchnitt ſo beſtimmen, daſs die gröſste Beanſpruchung die zuläſſige Grenze nicht überſchreite. 97. Gröſste axiale Spannung; Querſchnittsermittelung.

Die gröſste Beanſpruchung wird in der Regel in denjenigen Querſchnittspunkten ſtattfinden, welche in den von der Kraftebene geſchnittenen Quadranten des Querſchnittes liegen, in welche die Hauptaxen den Querſchnitt theilen. Allgemein kann man mittels der Verzeichnung der neutralen Axe leicht diejenigen Punkte finden, welche die gröſste Beanſpruchung erleiden; denn da die Beanſpruchung der ſenkrechten Entfernung von der neutralen Axe proportional iſt, ſo iſt ſie am gröſsten in denjenigen Querſchnittspunkten, welche, ſenkrecht zur Neutralen gemeſſen, am weiteſten von derſelben entfernt liegen. So werden in Fig. 89 die Punkte E und E' am meiſten beanſprucht werden, erſterer bei der gewöhnlichen Drehrichtung der Momente auf Zug, letzterer auf Druck. Werden die Coordinaten der meiſt beanſpruchten Punkte mit $+u_1$, $+v_1$ und $-u_2$, $-v_2$ bezeichnet, wobei dieſelben nach denjenigen Seiten als poſitiv gerechnet ſind, an welchen die Einzelmomente $M \cos \alpha$, bezw. $M \sin \alpha$ Zug erzeugen, ſo ergiebt ſich mit Rückſicht auf Gleichung 45

Fig. 89.



$$N_{max} = M\left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B}\right) \quad \text{und} \quad N_{min} = -M\left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B}\right).$$

Falls die zuläſſigen Beanſpruchungen auf Zug und Druck mit $+K'$ und $-K''$ bezeichnet werden, ſo erhält man als Bedingungsgleichungen für die Querſchnittsbildung:

$$\left.\begin{aligned} K' &= M\left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B}\right) \\ K'' &= M\left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 49.$$

Bei den Materialien, für welche nahezu $K' = K'' = K$ iſt (Schmiedeeiſen, Holz), ändern ſich die Gleichungen in

$$K = M\left(\frac{v' \cos \alpha}{A} + \frac{u' \sin \alpha}{B}\right) \quad \ldots \ldots \quad 50.$$

Im letzten Ausdruck bedeuten v' und u' die Coordinaten des meiſt beanſpruchten Punktes, bezogen auf die Hauptaxen als Coordinatenaxen.

$\frac{A}{v'}$ nennt man das Widerſtandsmoment für die Axe $U\,U$, $\frac{B}{u'}$ dasjenige für die Axe $V\,V$; man ſetzt abkürzungsweiſe

$$\frac{A}{v'} = W_u \quad \text{und} \quad \frac{B}{u'} = W_v,$$

so dafs Gleichung 50 nunmehr lautet:

$$K = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 51.$$

98. Rechteckiger Querschnitt.

Für die weiteren Untersuchungen sind bestimmte Querschnittsformen zu Grunde zu legen:

1) Rechteckiger Querschnitt (Fig. 87).

Für diesen ist, falls die Breite mit b und die Höhe mit h bezeichnet wird,

$$A = \frac{b h^3}{12}, \quad v' = \frac{h}{2}, \quad \frac{A}{v'} = W_u = \frac{b h^2}{6},$$

$$B = \frac{h b^3}{12}, \quad u' = \frac{b}{2}, \quad \frac{B}{u'} = W_v = \frac{h b^2}{6};$$

sonach

$$K = \frac{6 M}{b h} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 52.$$

Für einen bestimmten Fall sind K, M, α gegeben, b und h so zu ermitteln, dafs vorstehende Gleichung erfüllt wird. Meistens wird ein mehrmaliges Versuchen mit verschiedenen Werthen von b und h nöthig sein.

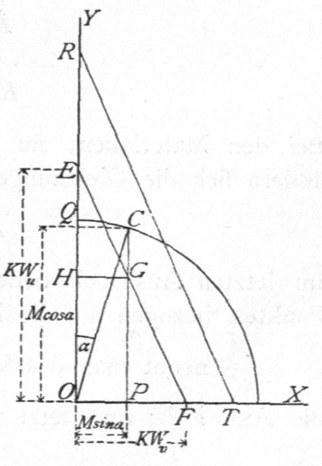
Eine leichte Lösung ergiebt sich auf graphischem Wege, wie folgt, und zwar ganz allgemein für beliebige Querschnittsform [19]). Die allgemeine Bedingungsgleichung 51 heifst

$$K = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v}.$$

Wenn ein Querschnitt gegeben ist, so sind W_u und W_v bekannt; alle Werthe von $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$, welche vorstehender Gleichung genügen, rufen die gröfste Spannung K im Querschnitt hervor. Trägt man nun je zwei derartig zusammengehörige Werthe von $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$ so auf, dafs $M \sin \alpha$ die Abscisse, $M \cos \alpha$ die Ordinate bildet, so liegen offenbar alle erhaltenen Punkte auf einer Geraden, deren Gleichung $K = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v}$ ist. Die Gerade ist bekannt, wenn zwei beliebige Punkte derselben gefunden sind.

Für $M \sin \alpha = 0$ erhält man den Schnittpunkt derselben mit der Ordinatenaxe, für $M \cos \alpha = 0$ den Schnittpunkt der Geraden mit der Abscissenaxe; für $M \sin \alpha = 0$ wird $(M \cos \alpha) = K W_u$; für $M \cos \alpha = 0$ wird $(M \sin \alpha) = K W_v$. Es sei (Fig. 90) in dem gewählten Mafsstabe $\overline{OE} = K W_u$ und $\overline{OF} = K W_v$; alsdann wird EF die gesuchte Linie sein; je zwei als Ordinate und Abscisse derselben zusammengehörige Werthe $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$ rufen in dem Querschnitte mit den Widerstandsmomenten W_u und W_v die Spannung K hervor, z. B. die beiden zu Punkt G gehörigen Werthe $M \cos \alpha = \overline{GP}$ und $M \sin \alpha = \overline{GH}$. Für alle diese Momente genügt der Querschnitt, dessen Widerstandsmomente mit K multiplicirt die Punkte E und F auf den Coordinatenaxen ergeben haben.

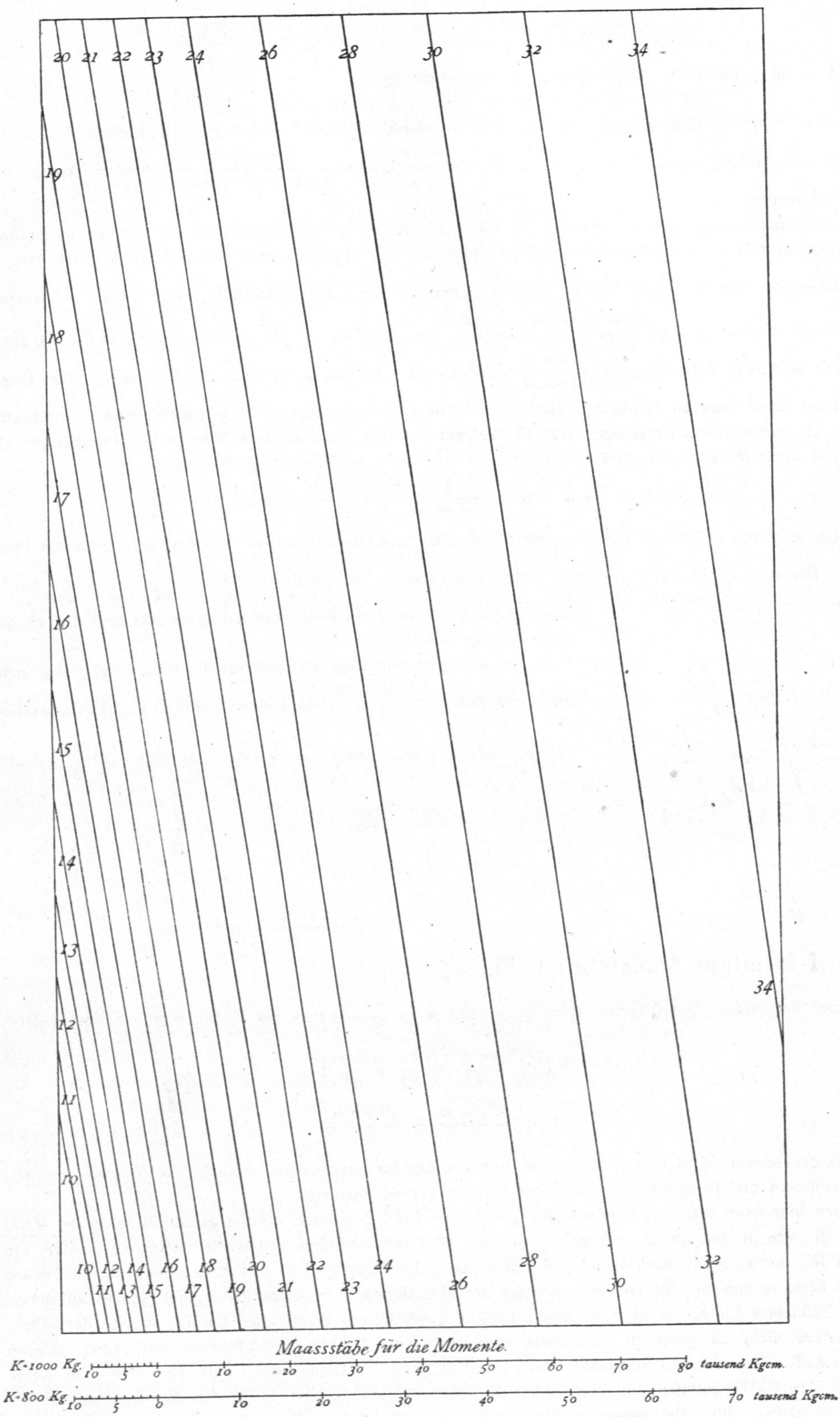
Fig. 90.



Diese Construction gewährt nun die Mittel, rasch zu ersehen, welcher Querschnitt gewählt werden mufs, wenn irgend welche Werthe von $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$ gegeben sind. Man trage für den gewählten Werth von K und eine Anzahl von Querschnitten verschiedener Seitenlängen (beim Rechteck) die Werthe $K W_u$ und $K W_v$ auf OY, bezw. OX ab und verbinde die zusammengehörigen Punkte mit einander; diese Construction kann man ein für alle Mal auf einer besonderen Tafel vornehmen. In dieselbe trage man nun $M \cos \alpha$ und $M \sin \alpha$ nach demselben Mafsstabe ein, in welchem die KW aufgetragen sind; man erhält etwa den Punkt C, indem $\overline{OP} = M \sin \alpha$ und $\overline{OQ} = M \cos \alpha$ wird. Da C zwischen den Linien EF und RT liegt, welche gewissen Querschnitten entsprechen, so sieht man, dafs der Querschnitt, welcher zu EF gehört, nicht ganz genügt, und dafs derjenige, welcher RT entspricht, etwas zu grofs ist; letzterer wird also als zunächst liegender zu wählen sein.

Handelt es sich im Besonderen um eine rechteckige Querschnittsform von der Höhe h und Breite b, so sind aufzutragen

[19]) Siehe: SEIPP. Berechnung auf Doppelbiegung beanspruchter Träger. Centralbl. d. Bauverw. 1887, S. 393.



Graphische Tafel

für die Querschnittsermittelung von auf Doppelbiegung beanspruchten Trägern.
(I-Eisen der „Deutschen Normal-Profile“.)

$$\text{auf } O\,Y\text{: } K\,W_u = \frac{K b h^2}{6} \quad \text{und} \quad \text{auf } O\,X\text{: } K\,W_v = \frac{K h b^2}{6}.$$

Wird $K = 60\,\text{kg}$ für $1\,\text{qcm}$ (Holz) gefetzt, fo find abzutragen:

$$\text{auf } O\,Y\text{: } K\,W_u = 10\,b\,h^2 \quad \text{und} \quad \text{auf } O\,X\text{: } K\,W_v = 10\,h\,b^2.$$

Was den Mafsftab anlangt, fo ift derfelbe felbftverftändlich beliebig; die Einheit ift für die Momente zweckmäfsig kgcm; für die $K\,W$ ift dann die Einheit $\frac{\text{Kilogramm}}{\text{Quadrat-Centimeter}} \cdot \text{cm}^3 = \text{kgcm}$, wie für die Momente.

Will man einen anderen Werth, als $60\,\text{kg}$ für K als zuläffig einführen, etwa $80\,\text{kg}$, fo braucht man nicht das Ganze umzuzeichnen; vielmehr genügt es, die Momente nach einem Mafsftabe aufzutragen, auf welchen die Werthe $\frac{80}{60} = 1{,}25$mal fo viel bedeuten; ein folcher Mafsftab ift leicht zu conftruiren.

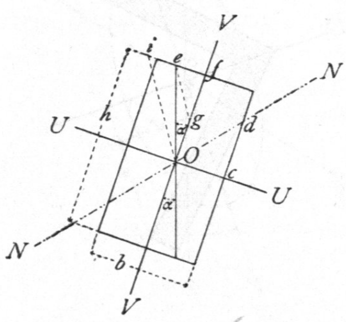
Es ift offenbar $M = \sqrt{(M \cos \alpha)^2 + (M \sin \alpha)^2}$, alfo, da (Fig. 90) $\overline{CP} = M \cos \alpha$ und $\overline{QC} = M \sin \alpha$ ift: $\overline{OC} = M$; ferner ift $\operatorname{tg} COQ = \frac{M \sin \alpha}{M \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ und $COQ = \alpha$. Indem die Kraftebene eine Querfchnittsform unter anderen Winkeln fchneidet, erfordert daffelbe Moment $O\,C$ verfchiedene Querfchnittsgrössen, wie fich aus dem Kreisbogen ergiebt, welcher mit $O\,C = M$ um den Mittelpunkt O gefchlagen ift.

Die neutrale Axe kann hier leicht ermittelt werden. Aus Gleichung 46 folgt

$$v = \frac{A}{B}\,u \operatorname{tg} \alpha = \frac{6\,b\,h^3}{6\,h\,b^3} \operatorname{tg} \alpha \,.\, u = \frac{h^2}{b^2}\,u \operatorname{tg} \alpha.$$

Da fie durch O geht, fo genügt für die Conftruction derfelben die Auffuchung noch eines ihrer Punkte. Für $u = \frac{b}{2}$ ift $v_1 = \frac{h^2}{2b} \operatorname{tg} \alpha$; trägt man alfo v als Ordinate für $u = \frac{b}{2}$ ab, d. h. macht man $\overline{cd} = v_1$, fo ift d ein Punkt der neutralen Axe und $O\,d$ ift die neutrale Axe felbft.

Fig. 91.



v_1 ift leicht wie folgt zu conftruiren. Von f aus trage man auf der V-Axe $fg = \frac{b}{2}$ ab, ziehe $e\,g$ und durch O eine Linie parallel zu $e\,g$; alsdann erhält man $fi = v_1$; denn es ift $ef = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha$ und

$$\frac{ef}{\frac{b}{2}} = \frac{if}{\frac{h}{2}}, \quad \text{fonach} \quad if = \frac{\frac{h}{2}}{\frac{b}{2}}\,ef;$$

hieraus folgt

$$if = \frac{h^2 \operatorname{tg} \alpha}{2\,b} = v_1.$$

2) I-förmiger Querfchnitt (Fig. 89).

99. I-förmiger Querfchnitt.

Auch bei diefem Querfchnitte ift $v' = \frac{h}{2}$ und $u' = \frac{b}{2}$, fo dafs die Bedingungsgleichung heifst:

$$K = M\left(\frac{h}{2}\,\frac{\cos \alpha}{A} + \frac{b}{2}\,\frac{\sin \alpha}{B}\right),$$

$$K = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 53.$$

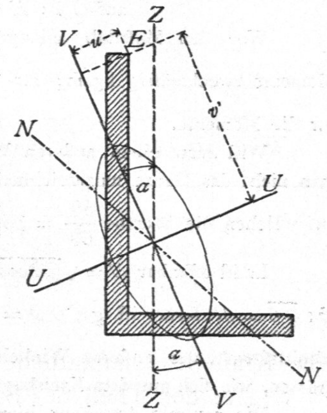
Bei gegebenem M, α und K wird man zweckmäfsig für verfchiedene Kaliber die Werthe von W_u und W_v einfetzen und fo unterfuchen, welches Kaliber gerade ausreicht.

Auch hier kann man mit Vortheil eine graphifche Tafel benutzen, welche genau in derfelben Weife conftruirt ift, wie in Art. 98 (S. 72) gezeigt wurde. Auf der Abfciffen-, bezw. Ordinatenaxe werden die Werthe $K\,W_u$, bezw. $K\,W_v$ nach beliebigem Mafsftabe aufgetragen und je zwei zufammengehörige Punkte durch eine Linie verbunden; für ein jedes Kaliber der »Deutfchen Normal-Profile« ergiebt fich fo auf neben ftehender Tafel eine Linie. K ift dort gleich $1000\,\text{kg}$ gewählt, ein Werth, der für die Zwecke des Hochbaues meiftens nicht zu grofs ift, jedenfalls aber auch eine leichte Zurückführung auf einen anderen Mafsftab zuläfft. Der Momentenmafsftab der Tafel ift $1\,\text{cm} = 10\,000\,\text{kgcm}$; will man nur eine Beanfpruchung $K = 700\,\text{kg}$ zulaffen, fo darf jedem Kaliber nur ein $0{,}7$-mal fo grofses Moment zugemuthet werden; es müffen alfo die Momente dann auf einem Mafsftabe abgegriffen werden, auf welchem

1 cm = 0,7 . 10 000 = 7000 kgcm bedeutet. Für die Werthe $K = 1000$ und 800 kg ſind die Maſsſtäbe auf der Tafel ſogleich mit angegeben.

Bei den beiden betrachteten Querſchnittsformen, der rechteckigen und der I-förmigen, iſt es in den meiſten Fällen nicht zweifelhaft, welche Punkte am meiſten beanſprucht werden; da dieſe Punkte die Coordinaten $\frac{b}{2}$, bezw. $\frac{h}{2}$ haben, ſo konnte man die ſog. Widerſtandsmomente in die Gleichung einführen und in der graphiſchen Tafel mit Nutzen verwenden. Bei ſehr vielen anderen Querſchnittsformen iſt dies nicht möglich, weil einmal von vornherein nicht feſt ſteht, welche Punkte am meiſten beanſprucht werden, und dieſe meiſt beanſpruchten Punkte gewöhnlich nicht diejenigen ſind, welche gleichzeitig von beiden Hauptaxen die gröſsten Abſtände haben. Der Gang der vorzunehmenden Rechnung iſt beim nachfolgenden Querſchnitte beſprochen.

Fig. 92.



100. Winkeleiſen-querſchnitt.

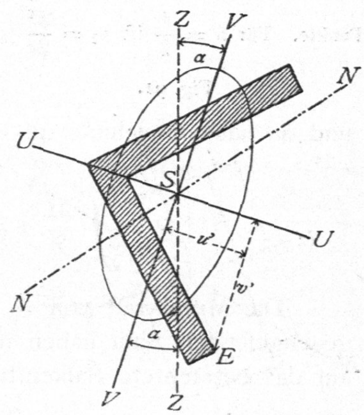
3) Winkeleiſen-Querſchnitt (Fig. 92).

Die Kraftebene ſchneide das (gleichſchenkelige oder ungleichſchenkelige) Winkeleiſen in der Linie ZZ. Man conſtruire für ein zunächſt angenommenes Kaliber die Hauptaxen, ſuche mit Hilfe der Trägheitsellipſe die Nulllinie und kann nun nach Art. 97 (S. 71) den oder die Querſchnittspunkte beſtimmen, in welchen die gröſste Beanſpruchung ſtattfindet. (In Fig. 92 iſt dies der Punkt E mit den Ordinaten u' und v'.) Es muſs dann

$$K = M \cos \alpha \frac{v'}{A} + M \sin \alpha \frac{u'}{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 54.$$

ſein. Die Werthe von A und B (die Hauptträgheitsmomente) ſind in den Profil-Tabellen enthalten; man kann demnach bei bekanntem M, α und K durch Verſuchen leicht dasjenige Kaliber finden, welches der Gleichung 54 möglichſt genau entſpricht. Zu beachten iſt, daſs auch die Werthe von v' und u' bei den verſchiedenen Kalibern verſchieden ſind, ſo wie daſs, da das Kaliber bei Beginn der Berechnung nicht bekannt war, auch die Conſtruction in Fig. 92 nur eine vorläufige war. Es iſt alſo wohl möglich, daſs bei der wiederholten genauen Conſtruction mit dem gefundenen Kaliber ſich ein anderer Punkt E ergiebt.

Fig. 93.



Iſt Lage und Belaſtung des Winkeleiſens diejenige in Fig. 93 (Pfette bei Wellblechdächern), ſo iſt das Verfahren genau dem eben vorgeführten entſprechend. Der meiſt geſpannte Punkt iſt E.

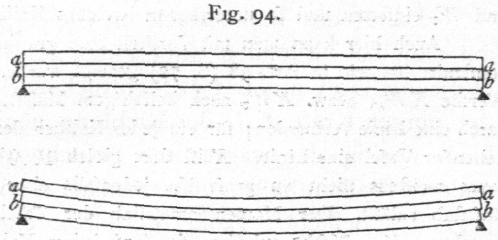
c) Schubſpannungen.

101. Wagrechte Schubſpannungen.

Auſser den oben ermittelten Biegungsſpannungen treten bei den verſchiedenen Belaſtungen der Balken auch noch Schubſpannungen auf, von denen hier zunächſt die wagrechten Schubſpannungen betrachtet werden ſollen.

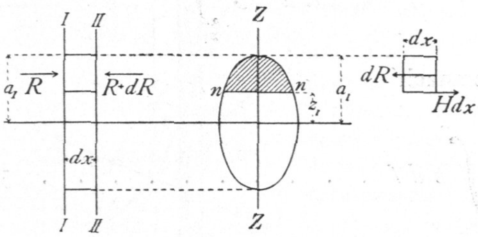
Denkt man ſich eine Anzahl Lagen dünner Bretter über einander gelegt, an den Endpunkten unterſtützt und in der Mitte belaſtet, ſo werden ſich dieſelben gegen einander etwa in der Weiſe verſchieben, welche in Fig. 94 angedeutet iſt. Dieſe Verſchiebung iſt eine Folge der in den Fugen $a\,a$, $b\,b$ auftretenden Schubkräfte; werden dieſelben nicht durch künſtliche Mittel (Zähne, Dübel u. dergl.) oder den Abſcherungswiderſtand des Materials aufgehoben, ſo verurſachen ſie eine Verſchiebung.

Fig. 94.



Für die rechnungsmäſsige Ermittelung dieſer Schubſpannungen möge, wie oben, angenommen werden, daſs nur ſenkrecht zur Balkenaxe gerichtete Kräfte wirken; es ſollen die wagrechten Schubſpannungen aufgeſucht werden, welche in der Schicht $n\,n$ (Fig. 95) zwiſchen zwei unendlich nahe an einander gelegenen Querſchnitten $I\,I$ und $II\,II$ wirken, wenn die Schicht $n\,n$ um z_1 über der Balkenaxe liegt. Dabei ſollen die vereinfachenden Annahmen gemacht werden, daſs die Querſchnitte $I\,I$ und $II\,II$ einander gleich ſeien, daſs die wagrechte Schubſpannung für die Flächeneinheit in der ganzen Breite der Schicht $n\,n$ gleich groſs ſei und daſs die Kraftebene ſämmtliche Querſchnitte in Symmetrieaxen ſchneide.

Fig. 95.



Auf den Theil des Balkenſtückes zwiſchen $I\,I$ und $II\,II$, welcher oberhalb der Faſerſchicht $n\,n$ liegt, wirkt ſenkrecht zur Ebene $I\,I$ die Summe R der axialen Biegungsſpannungen und ſenkrecht zur Ebene $II\,II$ die Kraft $R + d\,R$. Nun iſt

$$R = \int_{z_1}^{a_1} N\,d\,f,$$

und da nach Gleichung 42 $N = \frac{M}{\mathcal{J}}\,z$ iſt,

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{J}}\,z\,d\,f \quad \text{und} \quad R + d\,R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + d\,M}{\mathcal{J}}\,z\,d\,f.$$

Die Mittelkraft von R und $R + d\,R$ iſt, da beide gleiche Richtung, aber entgegengeſetzten Sinn haben und in dieſelbe Linie fallen, gleich $d\,R$, d. h. es wirkt auf das betrachtete Balkenſtück als Mittelkraft aller axialen Biegungsſpannungen

$$d\,R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + d\,M}{\mathcal{J}}\,z\,d\,f - \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{J}}\,z\,d\,f.$$

Für die Integration zwiſchen z_1 und a_1 ſind M, $d\,M$ und $\mathcal{J}$ conſtant; dieſe Werthe können alſo vor das Integralzeichen geſetzt werden, d. h. es iſt

$$d\,R = \frac{M + d\,M}{\mathcal{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f - \frac{M}{\mathcal{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f = \frac{d\,M}{\mathcal{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f.$$

Damit das Balkenſtück im Gleichgewicht ſei, muſs die algebraiſche Summe der auf daſſelbe wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null ſein; es muſs alſo noch eine Horizontalkraft auf das Balkenſtück wirken, welche der Gröſse nach genau gleich der obigen Kraft $d\,R$, der Richtung nach derſelben entgegengeſetzt iſt. Dieſe Kraft kann nur in der wagrechten Schicht wirken, mittels deren dieſes Stück mit dem anderen Balkentheile zuſammenhängt, d. h. in der um z_1 über der neutralen Axe liegenden Schicht. Längs derſelben entſteht demnach eine Schubſpannung. Wird die Gröſse derſelben für die Längeneinheit des Balkens mit H bezeichnet, ſo beträgt ſie für $d\,x$ Längeneinheiten $H\,d\,x$, und es ergiebt ſich für die Ermittelung von H die Bedingungsgleichung

$$H\,d\,x = d\,R = \frac{d\,M}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f \quad \text{und} \quad H = \frac{d\,M}{d\,x} \frac{1}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f.$$

Nach Gleichung 40 iſt $\frac{d\,M}{d\,x} = Q$; demnach

$$H = \frac{Q}{\mathfrak{J}} \int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55.$$

$\int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f$ iſt das ſtatiſche Moment des Flächentheiles zwiſchen den Ordinaten z_1 und a_1 bezogen auf die Schweraxe. Setzt man nun

$$\int_{z_1}^{a_1} z\,d\,f = S_{z_1}^{a_1},$$

ſo wird

$$H = \frac{Q\,S_{z_1}^{a_1}}{\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56.$$

Die wagrechte Schubſpannung für die Längeneinheit des Balkens und irgend eine Schicht ($n\,n$) wird demnach erhalten, indem man die Querkraft für den betreffenden Querſchnitt mit dem auf die neutrale Axe bezogenen ſtatiſchen Moment des Querſchnittstheiles oberhalb der betreffenden Schicht multiplicirt und dieſes Product durch das Trägheitsmoment des für die neutrale Axe genommenen ganzen Querſchnittes dividirt.

Hieraus folgt:

1) Da Q und $\mathfrak{J}$ für denſelben Querſchnitt bei beſtimmter Belaſtung ganz beſtimmte Conſtante ſind, ſo iſt die wagrechte Schubſpannung für die Längeneinheit des Balkens an den verſchiedenen Stellen eines Querſchnittes mit S veränderlich. H wird für diejenigen Schichten am gröſsten, für welche S ſeinen gröſsten Werth hat. S iſt aber am gröſsten für die wagrechte Schweraxe; dort iſt es gleich $S_{o}^{a_1}$. S iſt am kleinſten für die äuſserſten Schichten; daſelbſt iſt $S = 0$.

Demnach nimmt H in demſelben Querſchnitt bei derſelben Belaſtung von der neutralen Axe — der wagrechten Schweraxe — nach den beiden am weiteſten entfernten Faſern bis auf Null ab.

2) In denſelben Schichten verſchiedener Querſchnitte iſt nach obiger Gleichung H mit Q veränderlich, iſt demnach in demjenigen Querſchnitte am gröſsten, in welchem die Querkraft ihren gröſsten Werth hat. Sind verſchiedene Belaſtungszuſtände möglich, ſo ruft derjenige das gröſste H hervor, welcher die gröſste Querkraft Q erzeugt.

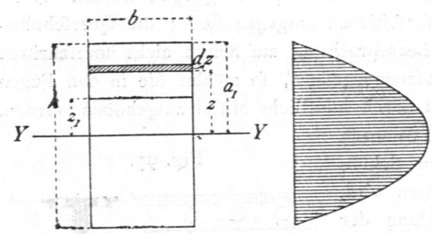
3) Werden, wie üblich und zweckmäſsig, ſowohl S, wie $\mathfrak{J}$ auf Centimeter bezogen, alſo S in cm^3, $\mathfrak{J}$ in cm^4 ausgedrückt, ſo erhält man H an irgend einer Balkenſtelle als die wagrechte Schubſpannung für das laufende Centimeter.

4) Der in Gleichung 56 gefundene Ausdruck giebt die Schubfpannung für die Längeneinheit des Balkens an; diefe Schubfpannung kann für die Fälle der Praxis genügend genau als gleichmäfsig über die Breite der Schicht vertheilt angenommen werden. Ift demnach die Breite des Querfchnittes in der Höhe der betrachteten Schicht gleich w, fo vertheilt fich H über $w \,.\, 1$ Flächeneinheiten, fo dafs fich als Schubfpannung für die Flächeneinheit ergiebt

$$\mathfrak{H} = \frac{Q\, S_{z_1}^{a_1}}{w\, \mathcal{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57.$$

Im Nachftehenden follen für einige im Hochbauwefen häufig vorkommende Querfchnittsformen die wagrechten Schubfpannungen beftimmt werden. 102. Rechteckiger Querfchnitt.

Fig. 96.



1) Für den rechteckigen Querfchnitt (Fig. 96) liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe in halber Höhe. Die wagrechte Schubfpannung in der Höhe z_1 über der neutralen Axe ift nach Gleichung 56 zu beftimmen.

Für den vorliegenden Querfchnitt ift

$$S_{z_1}^{a_1} = S_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} z\, d f \quad \text{und, da} \quad d f = b\, d z,$$

$$S_{z_1}^{a_1} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} b\, d z \,.\, z = \left[\frac{b\, z^2}{2}\right]_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - {z_1}^2\right).$$

Da ferner $\mathcal{J} = \frac{b\, h^3}{12}$, wird nach Gleichung

$$H = \frac{Q\, \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - {z_1}^2\right)}{\frac{b\, h^3}{12}} = \frac{6\, Q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - {z_1}^2\right) = \frac{6\, Q}{h}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad 58.$$

In diefem Ausdruck ift auf der rechten Seite nur eine Veränderliche, nämlich z_1; alle anderen Gröfsen haben für fämmtliche Schichten gleiche Werthe. Das Gefetz der Veränderlichkeit wird befonders anfchaulich, wenn man in den verfchiedenen Abftänden z_1 über und unter $Y\,Y$ die in den betreffenden Schichten herrfchenden Werthe von H nach Gleichung 58 wagrecht nach einem beliebigen Mafsftabe aufträgt und die Endpunkte verbindet; man erhält die in Fig. 96 fchraffirte Fläche; die begrenzende Verbindungslinie der Endpunkte ift offenbar die Curve der Gleichung 58. Die Form der Gleichung zeigt, dafs diefe Curve eine Parabel ift.

Für $z_1 = 0$ ift $H_0 = H_{max} = \frac{6\, Q}{4\, h} = \frac{3\, Q}{2\, h}$, und für $z_1 = \frac{h}{2}$ ift $H_{\frac{h}{2}} = \frac{6\, Q}{h}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0.$

Die wagrechte Spannung für die Flächeneinheit längs der einzelnen Schichten ift $\mathfrak{H} = \frac{H}{b}$, d. h.

$$\mathfrak{H} = \frac{6\, Q}{b\, h}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h}\right)^2\right], \quad \text{ferner} \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{3\, Q}{2\, b\, h} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_{\frac{h}{2}} = 0.$$

Die in Fig. 96 gezeichnete Curve giebt alfo auch die graphifche Darftellung der für die Flächeneinheit ftattfindenden wagrechten Schubfpannungen, natürlich in anderem Mafsftabe, als die wagrechten Schubfpannungen für die Längeneinheit.

2) Für den fymmetrifchen I-förmigen Querfchnitt liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe 103. I-förmiger Querfchnitt.
gleichfalls in halber Höhe. Q und $\mathcal{J}$ find wieder für alle Schichten deffelben Querfchnittes gleich grofs, mithin H mit S veränderlich (natürlich nur in demfelben Trägerquerfchnitt und bei beftimmter Belaftung). Die gröfste wagrechte Schubfpannung findet wieder in der Neutralen ftatt, und es ift nach Gleichung 56

$$H = \frac{Q\, S}{\mathcal{J}},$$

worin S und $\mathcal{J}$ auf die neutrale Axe bezogen find.

Bezeichnet man mit f die Querſchnittsfläche des oberen, bezw. unteren Flanſches des Trägers, mit $\mathfrak{h}$ den Abſtand der Schwerpunkte der Flanſche, mit d die Stegſtärke, ſo iſt bei kleinem d nahezu

$$S = \frac{f\mathfrak{h}}{2} \quad \text{und nach Gleichung 20:} \quad \mathcal{J} = \left(f + \frac{d\mathfrak{h}}{6}\right)\frac{\mathfrak{h}^2}{2};$$

mithin

$$H = \frac{Qf}{\left(f + \frac{d\mathfrak{h}}{6}\right)\mathfrak{h}}.$$

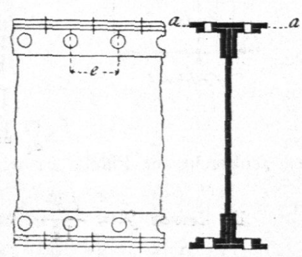
Iſt $\frac{d\mathfrak{h}}{6}$ gegen f klein, ſo iſt nahezu

$$H = \frac{Q}{\mathfrak{h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 59.$$

104. Blechträger-Querſchnitt.

3) Querſchnitt der Blechträger. Bei den aus einem einzigen Stücke beſtehenden Querſchnitten werden die in den einzelnen Faſern wirkenden wagrechten Schubſpannungen durch den Widerſtand aufgehoben, den der Zuſammenhang der Faſern dem Verſchieben entgegen ſtellt; die Querſchnittsabmeſſungen ſind demnach ſo zu wählen, daſs die erlaubte Beanſpruchung auf Schub nicht überſchritten wird. Iſt dagegen der Querſchnitt aus mehreren Theilen zuſammengeſetzt, ſo müſſen die in den Fugen zwiſchen den einzelnen Theilen entſtehenden Schubſpannungen durch künſtliche Mittel aufgehoben werden. Bei den Blechträgern dienen dazu die Niete. Die Niete ſind demnach ſo zu beſtimmen, daſs ihr Schubwiderſtand die auftretenden Schubſpannungen aufhebt, ohne daſs die zuläſſige Grenze überſchritten wird. Um den Abſtand der Niete zu ermitteln, welche zur Verbindung der Lamellen mit den Winkeleiſen dienen, ſuche man demnach die für die Längeneinheit in der Fuge aa (Fig. 97) ſtattfindende Schubſpannung auf die oben gezeigte Weiſe.

Fig. 97.



Es iſt wieder $H = \frac{QS}{\mathcal{J}}$, worin S das ſtatiſche Moment der Lamellenfläche bezogen auf die neutrale Axe bezeichnet. Nennt man den Abſtand der Nietbolzen e, ſo iſt die Geſammtſchubſpannung auf die Länge e gleich

$$D = \frac{QS}{\mathcal{J}}\,e.$$

Allerdings iſt die Querkraft Q auf die Länge e allgemein nicht conſtant; es genügt aber ſtets, für Q irgend einen der auf der Strecke e ſich ergebenden Werthe einzuführen; zweckmäſsig wird man den gröſsten wählen.

Dieſe Schubſpannung erſtrebt eine wagrechte Verſchiebung der Lamelle in der Richtung der Trägeraxe; dieſelbe ſoll durch die Niete verhindert werden. Werden zwei einſchnittige Niete vom Durchmeſſer d verwendet, ſo darf deren Widerſtand gegen Abſcheren nach Art. 82 (S. 57)

$$W = \frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T$$

ſein, wenn T die zuläſſige Schubbeanſpruchung für die Flächeneinheit der abzuſcherenden Fläche iſt. Durch Gleichſetzung beider Werthe, derjenigen für D und für W, erhält man folgende Gleichung für e:

$$\frac{QSe}{\mathcal{J}} = \frac{2\,d^2\,\pi}{4}\,T, \quad \text{woraus} \quad e = \frac{d^2\,\pi\,T\,\mathcal{J}}{2\,QS}.$$

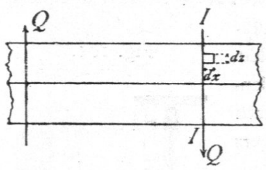
Je gröſser Q iſt, deſto kleiner wird e, deſto näher ſind alſo die Niete zu ſetzen.

Die angegebene Berechnung kann auch mit hinreichender Genauigkeit für die Ermittelung der in den lothrechten Fugen auftretenden wagrechten Schubkraft, alſo zur Beſtimmung derjenigen Niete dienen, welche die lothrechten Schenkel der Winkeleiſen mit der Blechwand verbinden. Alsdann iſt unter S das ſtatiſche Moment desjenigen Theiles der Querſchnittsfläche zu verſtehen, welcher durch dieſe Niete mit der Blechwand vereinigt wird, d. h. die Querſchnittsfläche der Winkeleiſen und Lamellen.

105. Lothrechte Schubſpannungen.

Auſser den betrachteten wagrechten wirken auch lothrechte Schubſpannungen. Für die Ermittelung derſelben ſoll die gleiche Annahme, wie oben, gemacht werden, daſs nur ſenkrecht zur Balkenaxe gerichtete äuſsere Kräfte vorhanden ſeien, die Balkenaxe aber wagrecht ſei (Fig. 98). Es ſei die Mittelkraft aller links vom beliebigen Querſchnitte II wirkenden Kräfte gleich Q; alsdann verlangt das Gleichgewicht

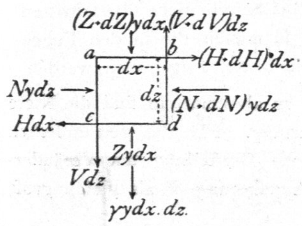
Fig. 98.



des Balkenſtückes, daſs an demſelben noch eine lothrechte Kraft Q wirke, welche der erſten an Gröſse genau gleich, der Richtung nach entgegengeſetzt iſt. Eine ſolche Kraft kann aber nur längs des Querſchnittes $I\,I$ wirken, da nur in dieſem das linksſeitige Balkenſtück mit dem anderen Balken zuſammenhängt. Dieſe Kraft iſt der lothrechte Abſcherungswiderſtand, welcher dem Verſchieben des Balkenſtückes längs des Querſchnittes $I\,I$ entgegenwirkt.

Es folgt hieraus: In jedem lothrechten Querſchnitte wirken lothrechte Schubſpannungen, deren Summe genau gleich der Querkraft iſt, welche ſich für dieſen Querſchnitt ergiebt.

Fig. 99.



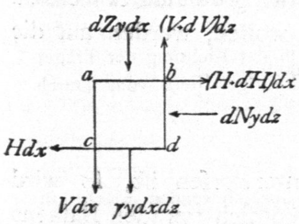
Die Vertheilung dieſer Schubſpannungen über den Querſchnitt findet nach folgendem Geſetze ſtatt: Die an irgend einer Stelle für die Längeneinheit wirkende lothrechte Schubſpannung iſt gleich der an derſelben Stelle für die Längeneinheit wirkenden wagrechten Schubſpannung.

Um dieſes Geſetz nachzuweiſen, betrachten wir ein im Abſtande z (Fig. 99) über der neutralen Axe liegendes Balkenſtück von der Länge $d\,x$, der Höhe $d\,z$ und der Dicke y (ſenkrecht zur Bildfläche gemeſſen). Auf dieſes Balkenſtück wirken im Allgemeinen folgende Kräfte:

ſenkrecht zur Fläche	$a\,c$	wirkt $N y\,d z$;	längs der Fläche	$a\,c$	wirkt	$V d z$;
» » »	$b\,d$	» $(N + d\,N)\,y\,d z$;	» » »	$b\,d$	»	$(V + d\,V)\,d z$;
» » »	$c\,d$	» $Z y\,d x$;	» » »	$c\,d$	»	$H d x$;
» » »	$a\,b$	» $(Z + d Z)\,y\,d x$;	» » »	$a\,b$	»	$(H + d\,H)\,d x$.

Hierin bedeuten Z und $Z + d\,Z$ die auf die wagrechten Flächen $a\,b$ und $c\,d$ wirkenden Normalſpannungen, V, bezw. $V + d\,V$ die lothrechten Schubſpannungen für die Längeneinheit in den Flächen $a\,c$, bezw. $b\,d$. Endlich wirkt noch das Eigengewicht des Stückes, nämlich $\gamma\,y\,.\,d\,z\,.\,d\,x$.

Fig. 100.



Läſst man diejenigen Kräfte, welche einander gegenſeitig aufheben, fort, ſo bleiben die in Fig. 100 angegebenen übrig. Dieſelben halten das Balkenſtück im Gleichgewicht; es müſſen alſo die Summen der ſtatiſchen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Bildebene, gleich Null ſein.

Es ſei b dieſer Punkt; alsdann iſt

$$0 = V\,d\,z\,d\,x - H\,d\,x\,d\,z + \gamma\,y\,\frac{d\,x\,.\,d\,z\,.\,d\,x}{2} + d\,Z\,y\,d\,x\,\frac{d\,x}{2} - d\,N\,y\,d\,z\,\frac{d\,z}{2}\,.$$

Die unendlich kleinen Gröſsen dritter Ordnung fallen gegen die unendlich kleinen Gröſsen zweiter Ordnung fort; es bleibt alſo

$$0 = V\,d\,z\,d\,x - H\,d\,x\,d\,z,$$

woraus

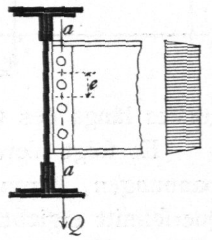
$$V = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60.$$

Dies gilt für jede Stelle des Balkens, womit der obige Satz bewieſen iſt. Es iſt mithin nach Gleichung 56

$$V = \frac{Q\,S_{z_1}^{a_1}}{\mathcal{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 61.$$

Die in Art. 102 bis 104 für verſchiedene Querſchnittsformen ermittelten Werthe und graphiſchen Darſtellungen für H gelten alſo auch für V.

Fig. 101.



Das Geſetz, nach welchem ſich die lothrechten Schubſpannungen im Querſchnitt vertheilen, iſt von beſonderer Wichtigkeit, wenn es ſich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben ſtehender Verbindung (Fig. 101) entfallenden Beanſpruchungen zu ermitteln. Der **I**-förmige Walzträger wird durch Winkeleiſen mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querſchnitt $a\,a$ des **I**-Trägers entſtehende Querkraft Q iſt durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete ſind nun ſo zu vertheilen, daſs deren Entfernung der Gröſse der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubſpannung entſpricht. Iſt an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten e und die lothrechte Schubſpannung für die Längeneinheit im Mittel in dieſer Höhe gleich V, ſo kommt auf einen Niet die Schubkraft $V e$.

Der Niet wird in zwei Querſchnitten abgeſchert; mithin iſt der Abſcherungswiderſtand des Nietes $\frac{2\,d^2 \pi}{4}\,T$; es ergiebt ſich alſo für e die Gleichung:

$$V e = \frac{2\,d^2 \pi}{4}\,T, \quad \text{woraus} \quad e = \frac{\pi\,d^2\,T}{2\,V}.$$

Da V von der neutralen Axe nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, ſo ſind die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu ſetzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen **I**-förmigen Walzbalken kann man die oben ſtehende Fig. 101 als graphiſche Darſtellung der Veränderlichkeit der lothrechten Schubſpannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung V als gleich groſs über die ganze Trägerſteghöhe annehmen, worin nach Gleichung 59: $V = \frac{Q}{\mathfrak{h}}$.

106. Spannungen f. ein beliebiges Flächen-element.

In den bisherigen Betrachtungen ſind nur die Normalſpannungen, welche in den lothrechten Balkenquerſchnitten, und die Schubſpannungen, welche in den wagrechten und lothrechten Balkenquerſchnitten entſtehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanſpruchungen eingehend zu löſen, wären noch die Normal- und Schubſpannungen in einem Querſchnitte aufzuſuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Wagrechten macht. Auf dieſe Unterſuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meiſten Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Leſer, welche ſich über dieſen Gegenſtand unterrichten wollen, werden auf die S. 49 genannten Werke von *Grashof* und *Winkler* verwieſen.

d) Elaſtiſche Linie.

107. Axiale Biegungs-ſpannung.

Wenn ein Balken dem Einfluſſe biegender Kräfte unterworfen iſt, ſo wird eine Formänderung deſſelben eintreten. Die Axe des urſprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 102), und zwar iſt dieſe krumme Linie eine ebene Curve, wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, welche ſämmtliche Querſchnitte in Hauptaxen — meiſt Symmetrieaxen — ſchneidet. Alsdann liegen alle Punkte der gebogenen Axe in der Kraftebene. Man nennt die Axe des gebogenen Balkens die elaſtiſche Linie.

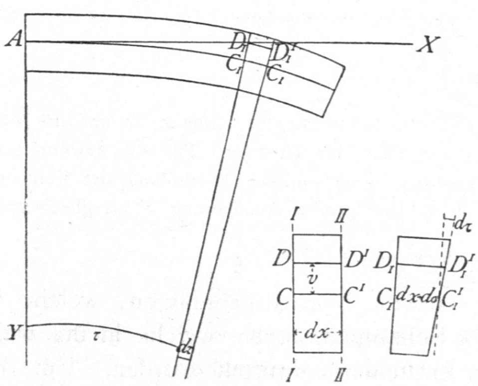
Die Gleichung der elaſtiſchen Linie wird für eine groſse Zahl von Aufgaben gebraucht; bei vielen derſelben wirken nicht nur Kräfte ſenkrecht zur urſprünglichen Balkenaxe, ſondern auch ſolche, welche in die Axe fallen, ſog. Axialkräfte. Es ſoll deſshalb dieſer allgemeinere Fall für die Entwickelung der Gleichung zu Grunde gelegt, im Uebrigen aber angenommen werden, daſs die Kraftebene alle Querſchnitte in Hauptaxen ſchneide.

Es iſt zunächſt der Ausdruck für die alsdann an beliebiger Stelle irgend eines

Querſchnittes auftretende axiale Biegungsſpannung N zu entwickeln; die Axialkraft für den betreffenden Querſchnitt ſei P, das Biegungsmoment ſei M.

Wirkte nur die Kraft P in der Richtung der Axe, ſo würde dieſelbe in allen Punkten des Querſchnittes die gleiche axiale Spannung $N_1 = \frac{P}{F}$ erzeugen, wenn F den Flächeninhalt des Querſchnittes bedeutet. Das Moment M allein würde nach den Entwickelungen in Art. 86 (S. 62) in verſchiedenen Punkten des Querſchnittes eine verſchiedene axiale Spannung hervorrufen, welche ſich für einen Punkt im Abſtande v von der wagrechten Schwerpunktsaxe zu $N_2 = \frac{M v}{\mathcal{J}}$ ergiebt. Da beide Wirkungen gleichzeitig vorhanden ſein ſollen, ſo wird die wirkliche axiale Spannung in irgend einem Punkte gleich der algebraiſchen Summe von N_1 und N_2 ſein, d. h. es wird ſein

Fig. 102.



vor nach
der Formänderung.

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M v}{\mathcal{J}} \quad . \quad . \quad . \quad 62.$$

108. Gleichung der elaſtiſchen Linie.

Mit Hilfe dieſes wichtigen Ausdruckes kann die Gleichung der elaſtiſchen Linie folgendermaſsen entwickelt werden.

Man lege durch einen Punkt A der Balkenaxe drei Coordinatenaxen, von denen die X-Axe mit der urſprünglichen Balkenaxe zuſammenfalle, die Y-Axe ſenkrecht zu derſelben in der Kraftebene, die Z-Axe ſenkrecht zur Kraftebene ſteht, und betrachte ein Balkenſtück zwiſchen den Ebenen $I\,I$ und $II\,II$, deſſen Länge vor der Formänderung $d\,x$ war. Die Ebenen $I\,I$ und $II\,II$ waren vor der Formänderung parallel und ſenkrecht zur Balkenaxe und hatten die Abſciſſen x und $x + d\,x$; die Länge einer Faſer $D\,D'$ in der Höhe v über der Axe war $d\,x$.

Wir beſtimmen nunmehr die Formänderung dieſer Faſer $D\,D'$. Durch die beiden Punkte der gebogenen Axe C_1 und C_1' legen wir Ebenen ſenkrecht zu der gebogenen Axe; der Winkel beider ſei $d\,\tau$, der Winkel der durch C_1 gelegten Ebene mit der Y-Axe ſei τ. Die einzelnen Punkte der Querſchnitte $I\,I$ und $II\,II$ werden nach der Biegung allgemein nicht mehr in Ebenen liegen; man kann aber annehmen, daſs der Abſtand zweier Punkte in der Höhe v über der Axe alsdann eben ſo groſs ſei, wie der Abſtand der Normalebenen in der Höhe v über der Axe, d. h. daſs ſtattfindet

$$D_1\,D_1' = C_1\,C_1' + v\,d\,\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes $C\,C'$ bei der Formänderung $d\,\sigma$, ſo iſt

$$C_1\,C_1' = d\,x + d\,\sigma \quad \text{und} \quad D_1\,D_1' = d\,x + d\,\sigma + v\,d\,\tau.$$

Dies iſt die Länge der gebogenen Faſer. Die urſprüngliche Länge derſelben war $D\,D' = d\,x$; folglich iſt die Verlängerung

$$D_1\,D_1' - D\,D' = d\,x + d\,\sigma + v\,d\,\tau - d\,x = d\,\sigma + v\,d\,\tau$$

und das Verlängerungsverhältniſs $\frac{d\,\sigma + v\,d\,\tau}{d\,x}$.

Iſt N die axiale Faſerſpannung in dieſer Faſer, ſo iſt

$$\frac{N}{E}=\frac{d\sigma+v\,d\tau}{d\,x}=\frac{d\sigma}{d\,x}+\frac{v\,d\tau}{d\,x},$$

$$N=E\frac{d\sigma}{d\,x}+\frac{E\,d\tau}{d\,x}v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63.$$

Nach Gleichung 62 ist aber auch

$$N=\frac{P}{F}+\frac{M}{\mathfrak{J}}v.$$

Die Gleichsetzung beider für N gefundener Werthe ergiebt

$$\frac{P}{F}+\frac{M}{\mathfrak{J}}v=E\frac{d\sigma}{d\,x}+\frac{E\,d\tau}{d\,x}v,$$

woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$\left.\begin{aligned}E\frac{d\sigma}{d\,x}&=\frac{P}{F}\\ E\frac{d\tau}{d\,x}&=\frac{M}{\mathfrak{J}}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64.$$

Es wird demnach
$$\frac{d\tau}{d\,x}=\frac{M}{E\,\mathfrak{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65.$$

Nun ist $\operatorname{tg}\tau=\frac{d\,y}{d\,x}$, sonach $\frac{d\operatorname{tg}\tau}{d\,x}=\frac{d\tau}{\cos^2\tau\,.\,d\,x}=\frac{d^2y}{d\,x^2}$;

mithin

$$\frac{d\tau}{d\,x}=\cos^2\tau\,\frac{d^2y}{d\,x^2}.$$

Bei den hier in Betracht kommenden Formänderungen ist τ so klein, dass $\cos^2\tau$ unbedenklich gleich 1 gesetzt werden kann, d. h. dass nahezu

$$\frac{d\tau}{d\,x}=\frac{d^2y}{d\,x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66.$$

Wird dieser Werth für $\frac{d\tau}{d\,x}$ in Gleichung 65 eingesetzt, so erhält man

$$\frac{d^2y}{d\,x^2}=\frac{M}{E\,\mathfrak{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 67.$$

Gleichung 67 ist die Differentialgleichung der elastischen Linie. In derselben bedeutet M das Moment an einer Stelle mit der Abscisse x, im Allgemeinen also etwas Veränderliches; $\mathfrak{J}$ ist das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe des Querschnittes an derselben Stelle.

Die Gleichung der elastischen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 67 erhalten; bei der Integration ist E constant. Es wird

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{1}{E}\int\frac{M}{\mathfrak{J}}\,d\,x+C_1$$

und

$$y=\frac{1}{E}\int\!\!\int\frac{M}{\mathfrak{J}}\,(d\,x)^2+C_1\,x+C_2$$

Bekanntlich ist der Krümmungshalbmesser für eine ebene Curve

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{d\,x^2}}$$

oder, wenn $\operatorname{tg} \tau = \frac{d\,y}{d\,x}$ nur klein ift, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d\,x^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elaftifchen Linie auch gefchrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\,\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 68.$$

Für $M = 0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elaftifche Linie eine Gerade. Das Moment M ift Null an demjenigen Punkte des Balkens, bei welchem es aus dem pofitiven in den negativen Werth übergeht, alfo das Vorzeichen wechfelt; an diefen Punkten hat fonach die elaftifche Linie fog. Wendepunkte.