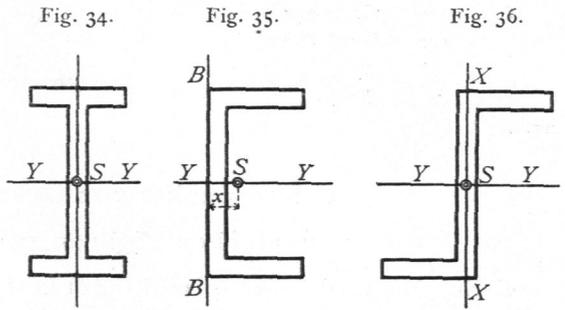


ferner als Differenz der beiden Rechtecke $OACB$ und $DECF$ betrachtet werden; der Schwerpunkt liegt also auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser beiden Rechtecke; da diese Schwerpunkte jedoch sehr nahe zusammenfallen, so ergibt sich die Richtung der Verbindungslinie nicht genügend genau. Nun muß aber die Verbindungslinie zur Linie OD parallel sein; man ziehe also durch den Schwerpunkt G des umschriebenen Rechteckes $OACB$ die Parallele zu OD ; alsdann ist der Schnittpunkt dieser mit $s_1 s_2$ der gefuchte Schwerpunkt.



40.
I-Eifen.

γ) Schwerpunkt des I-Eifens (Fig. 34).

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt beider Symmetrie-Axen.

41.
C-Eifen.

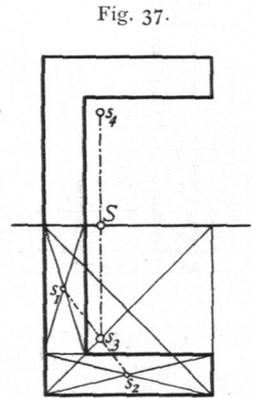
δ) Schwerpunkt des C-Eifens (Fig. 35 u. 37).

Der Schwerpunkt liegt auf der wagrechten Symmetrie-Axe im Abstände x_0 von BB ; x_0 ist nach obiger Gleichung aufzufinden, durch Construction wie folgt. Die wagrechte Symmetrie-Axe theilt das C-Eifen in zwei Theile, deren jeder einen Winkeleifen-Querschnitt darstellt. Man ermittelt deren Schwerpunkte s_3 und s_4 ; wie eben gezeigt wurde, ist der Gesamtschwerpunkt der Schnittpunkt der Linie $s_3 s_4$ mit der Symmetrie-Axe.

42.
Z-Eifen.

ε) Schwerpunkt des Z-Eifens (Fig. 36).

Der Schwerpunkt fällt mit demjenigen des lothrechten Rechteckes, des fog. Steges, zusammen; denn sowohl für die Axe XX , wie für die Axe YY ist das statische Moment der beiden wagrechten Rechtecke zusammen gleich Null; dieselben sind also ohne Einfluß auf die Schwerpunktslage. Dabei ist vorausgesetzt, daß dieselben gleichen Flächeninhalt haben.



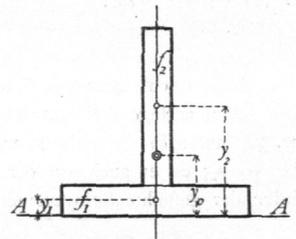
43.
T-Eifen.

ζ) Schwerpunkt des T-Eifens (Fig. 38 und 39).

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie-Axe im Abstände y_0 von der Axe AA , und es ist

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}$$

Durch Construction ist derselbe folgendermaßen zu finden. Man zerlege den Querschnitt in drei Rechtecke, ein lothrecht und zwei wagrechte. Die Schwerpunkte seien s_1, s_2, s_3 . Das lothrechte und das eine wagrechte Rechteck bilden zusammen einen Winkeleifenquerschnitt, dessen Schwerpunkt s_4 , wie unter β angegeben, zu finden ist. Dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie $s_3 s_4$, ferner auch auf der lothrechten Symmetrie-Axe, also auf dem Schnittpunkt S dieser beiden Linien.



44.
Statisches
Moment.

4) Graphische Ermittlung der statischen Momente und der Schwerpunkte von Flächen.

Wenn die Figur, deren statisches Moment, bzw. deren Schwerpunkt ermittelt werden soll, eine unregelmäßige Form hat, so ist die graphische Behandlung der Aufgabe zu empfehlen.

Man zerlege die ganze Figur in Streifen, welche derjenigen Axe parallel laufen, für welche das statische Moment gefucht wird (Fig. 40). Es seien die Flächeninhalte der einzelnen Streifen $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, die Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe XX bzw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots + f_n y_n$$

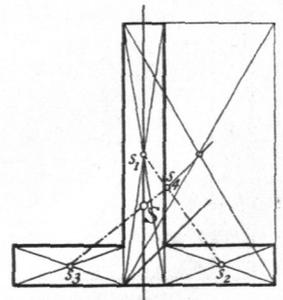
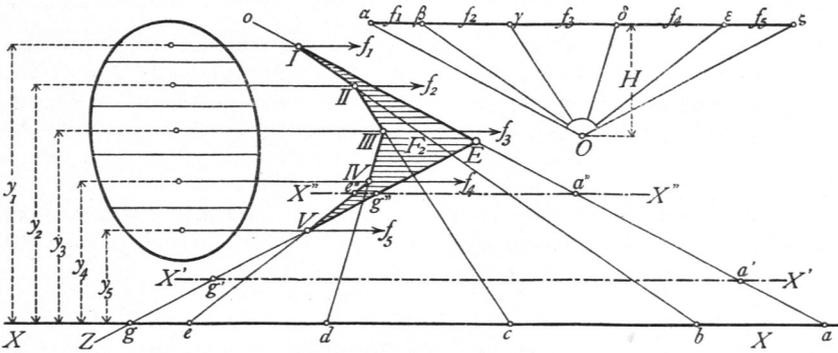


Fig. 40.



Man führe nun die einzelnen Flächengrößen als parallel zur Axe XX' wirkende Kräfte ein, welche in den Einzelschwerpunkten angreifen, füge sie zu einer Kraftlinie zusammen, indem man sie nach einem beliebigen, jedoch für alle gleichen Maßstabe aufträgt. Es sei $\alpha \beta = f_1, \beta \gamma = f_2, \gamma \delta = f_3 \dots$. Nun nehme man im Abstände H von dieser Kraftlinie einen Pol O an und construiere das den Werthen $f_1, f_2, f_3 \dots$ und diesem Pol entsprechende Seilpolygon $o I II III \dots$. Verlängere man die Seilpolygon-Seiten, welche die erste Kraft f_1 begrenzen, bis zum Schnitte mit der Axe XX' , so erhält man ein Dreieck $I a b$, und es ist

$$\triangle I a b \sim \triangle O \alpha \beta,$$

da die Seiten dieser Dreiecke einander bzw. parallel sind; in Folge dessen ist

$$\frac{\overline{a b}}{y_1} = \frac{\alpha \beta}{H} = \frac{f_1}{H}, \text{ d. h. } H \cdot \overline{a b} = f_1 y_1.$$

Der Abschnitt $\overline{a b}$ der die Kraft f_1 begrenzenden Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX' multiplicirt mit dem Polabstand H giebt sonach das statische Moment von f_1 für diese Axe.

Eben so ist $\triangle II b c \sim \triangle O b \gamma$;

also
$$\frac{\overline{b c}}{y_2} = \frac{\beta \gamma}{H} = \frac{f_2}{H}, \text{ } H \cdot \overline{b c} = f_2 y_2 \text{ und } H \cdot \overline{c d} = f_3 y_3 \text{ u. f. w.}$$

Das statische Moment der ganzen Fläche für die Axe XX' ist daher gleich dem Product aus dem Stück $a g$, welches von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf der Axe XX' abgechnitten wird, und dem Polabstand H , oder es ist

$$H \cdot \overline{a g} = \Sigma (f y).$$

Für die Anwendung ist zu beachten: Die Abschnitte $a b, b c, c d \dots$ auf der Axe XX' liegen in den Dreiecken $I a b, II b c \dots$, bedeuten demnach Längen; die Werthe von H dagegen sind auf dieselbe Einheit zu beziehen, wie die Größen $f_1, f_2, f_3 \dots$, bedeuten also Flächen. Daher ist H auf dem Flächenmaßstabe, $\overline{a b}, \overline{b c}, \overline{c d} \dots$ hingegen sind auf dem Längenmaßstabe zu messen.

Bei der Zerlegung der betreffenden Figur in parallele Streifen müssen dieselben so schmal gewählt werden, dass man mit genügender Genauigkeit die einzelnen Streifen als Rechtecke, Parallelogramme, Paralleltrapeze, überhaupt als solche einfache Figuren ansehen kann, deren Flächeninhalte und Schwerpunktlagen leicht bestimmt werden können.

Handelt es sich um das statische Moment der Fläche für die Axe $X' X''$, so ist dasselbe offenbar gleich $H \cdot \overline{a' g'}$. Rückt aber die Axe zwischen die Kräfte f , etwa nach $X'' X'''$, so ist zunächst das statische Moment der oberhalb liegenden Flächentheile gleich $H \cdot \overline{a'' e''}$; im statischen Momente der gesammten Fläche ist aber auch der Beitrag der an der anderen Seite der Axe gelegenen Theile enthalten, welche einen negativen Beitrag liefern, weil die y -Werthe für dieselben von der Axe $X'' X'''$ aus nach unten gerechnet werden müssen; die von der Axe nach oben gerechneten Werthe der y sind ja positiv eingeführt. Demnach liefert hier f_5 ein statisches Moment gleich $-H \cdot \overline{g'' e''}$, und es ist daher das statische Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die Axe $X'' X'''$, gleich $H \cdot \overline{a'' g''}$.

Demnach ist allgemein nachgewiesen: Das statische Moment einer Fläche F , bezogen auf eine Axe XX' , wird erhalten, wenn man das von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf dieser Axe ab-

geschnittene Stück (ag , bzw. $a'g'$, $a''g''$) mit dem Polabstand H multiplicirt. Dabei muß das Stück ag auf dem Längenmaßstabe, der Polabstand H auf dem Flächenmaßstabe gemessen werden, nach welchem die Werthe von f aufgezeichnet sind.

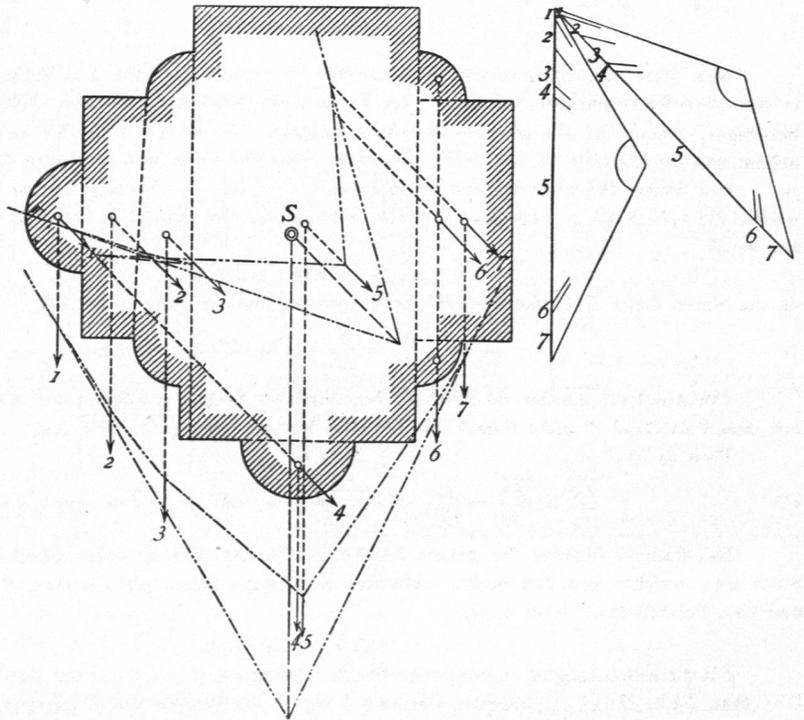
45.
Schwerpunkt.

Rückt die Axe XX weiter nach oben, so wird das von den äußersten Seilpolygon-Seiten auf derselben abgeschnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten, so ist das abgeschnittene Stück gleich Null; also wird auch das statische Moment in Bezug auf diese Axe gleich Null; dieselbe ist also eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt E der äußersten Seilpolygon-Seiten parallel zu XX gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche.

Das soeben gefundene Ergebnis folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachstehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt sind, so kann man annehmen, diese Kräfte seien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich starken Platte, welche dieselbe Form hat, wie die gegebene

Fläche, und in eben solche Theile getheilt ist, wie diese. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe f mit demselben Factor γ , dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergestellt und beliebig stark annehmen kann, so ist γ ganz beliebig, kann also auch gleich 1 gesetzt werden; die Werthe f können demnach auch als die Gewichte selbst angesehen werden. Die Mittelkraft aller dieser parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; sie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äußersten

Fig. 41.



Seilpolygon-Seiten und ist der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch diesen Schnittpunkt parallel zur Axe XX gezogene Linie ist also die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, also auch der Kräfte f angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

Die gezeigte graphische Ermittlung des Schwerpunktes ist besonders bei unregelmäßigen Querschnitten empfehlenswerth; Fig. 41 zeigt diese Bestimmung für den Querschnitt eines Vierungspfegers.

c) Trägheitsmomente.

46.
Trägheitsmoment.

Wird jedes Theilchen df einer gegebenen Querschnittsfläche F mit dem Quadrate seines senkrechten Abstandes u von einer Axe AA multiplicirt und die Summe aller dieser Producte hergestellt, so erhält man einen Ausdruck

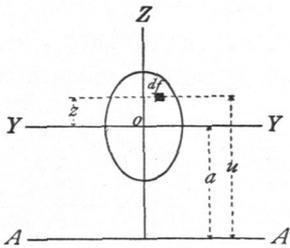
$$\mathcal{I} = \int u^2 df,$$

welchen man das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche F für die Axe AA nennt. Die Trägheitsmomente haben eine sehr große Wichtigkeit in der Elasticitätslehre; es sollen deshalb die wichtigsten Sätze über dieselben hier vorgeführt und zugleich die Trägheitsmomente für eine Reihe häufig vorkommender Querschnittsformen entwickelt werden. Am Fusse von \mathcal{F} soll als Zeiger angegeben werden, auf welche Axe das Trägheitsmoment bezogen ist; \mathcal{F}_A bedeutet demnach: das Trägheitsmoment bezogen auf die Axe AA .

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes, bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe, ist gleich dem Trägheitsmomente für diese Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querschnittsfläche in das Quadrat des Abstandes beider Axen.

47.
Trägheitsmomente für zur Schwerpunktsaxe parallele Axen.

Fig. 42.



Geht die Axe YY (Fig. 42) durch den Schwerpunkt der Fläche, so ist demnach

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_Y + F a^2.$$

Nach der Erklärung des Trägheitsmomentes ist

$$\mathcal{F}_A = \int u^2 df.$$

Die Summirung soll alle Flächentheile df umfassen; die Integration ist also über den ganzen Querschnitt auszudehnen. Nun ist

$$u = a + z \quad \text{und} \quad u^2 = a^2 + 2 a z + z^2,$$

$$\text{also } \mathcal{F}_A = \int u^2 df = a^2 \int df + 2 a \int z df + \int z^2 df.$$

Es ist jedoch $\int df = F$ und $\int z^2 df = \mathcal{F}_Y$, ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt $\int z df = 0$, weil YY eine Schwerpunktsaxe ist, mithin in der That

$$\mathcal{F}_A = F a^2 + \mathcal{F}_Y \dots \dots \dots 18.$$

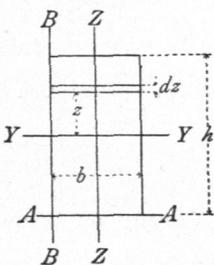
Im Folgenden sollen für einige häufiger vorkommende Querschnittsformen die Trägheitsmomente rechnerisch ermittelt werden.

a) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 43).

Für diesen ist, bezogen auf die Schwerpunktsaxe YY ,

48.
Trägheitsmomente für: Rechteckige Querschnitte.

Fig. 43.



$$\mathcal{F}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 df.$$

Da für alle Theile eines zu YY parallelen Streifens z dieselbe Größe hat, so kann man $df = b dz$ setzen, und es wird

$$\mathcal{F}_Y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \left[\frac{b z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{b h^3}{12} \dots 19.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe AA , welche mit einer Kante des Rechteckes zusammenfällt, ist nach Gleichung 18

$$\mathcal{F}_A = \frac{b h^3}{12} + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{b h^3}{3}.$$

Für eine zu YY normal stehende Schwerpunktsaxe ZZ ist nach Obigem

$$\mathcal{J}_Z = \frac{h b^3}{12}$$

und für die Kante BB ist

$$\mathcal{J}_B = \frac{h b^3}{3}$$

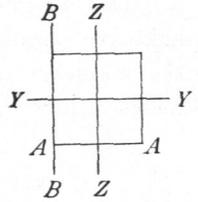
Man kann dies in Worten folgendermaßen ausdrücken: Das Trägheitsmoment eines Rechteckes für eine zu einer der Seiten parallele Schwerpunktsaxe ist gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch zwölf; für eine mit einer Kante des Rechteckes zusammenfallende Axe ist das Trägheitsmoment dagegen gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch drei. Als Breite gilt die Abmessung des Rechteckes in der Richtung der betreffenden Axe, als Höhe die zu der ersten fenkrechte Abmessung.

Mit Zuhilfenahme dieses Ergebnisses kann man leicht für eine große Zahl von Querschnitten der Praxis die Trägheitsmomente finden.

Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten; ist dessen Seitenlänge $b = h = d$, so wird (Fig. 44)

$$\mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_Y = \frac{d^4}{12} \text{ und } \mathcal{J}_A = \mathcal{J}_B = \frac{d^4}{3}$$

Fig. 44.



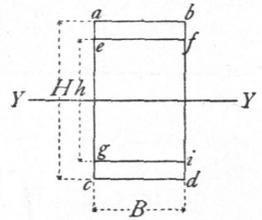
49.
Symmetrische
I u. E-förmige
Querschnitte.

β) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von \mathcal{J} werden vielfach angewendet, um für zusammengesetzte Querschnitte die Trägheitsmomente zu finden.

Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Fig. 45 ist gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes $abcd$ weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes $efig$, d. h. es ist

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} B H^3 - \frac{1}{12} B h^3 = \frac{B}{12} (H^3 - h^3)$$

Fig. 45.



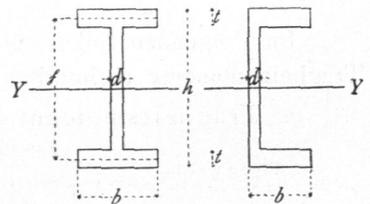
Für den symmetrischen I-förmigen (Fig. 46) und für den E-förmigen Querschnitt (Fig. 47) ergibt sich hiernach

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{12} \left\{ b [h^3 - (h - 2t)^3] + d(h - 2t)^3 \right\}$$

Dieser für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann wesentlich vereinfacht werden. Wird der Abstand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit \mathfrak{h} bezeichnet, also $h - t = \mathfrak{h}$ gesetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes statt $h - 2t$ (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler) \mathfrak{h} eingeführt, so ist

Fig. 46.

Fig. 47.



$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} b t (h^2 - 2 h t + t^2) + \frac{1}{6} b t^3 + \frac{d \mathfrak{h}^3}{12}$$

Wir setzen $b t = f$; alsdann wird

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f (h - t)^2 + \frac{f t^2}{6} + \frac{d \mathfrak{h}^3}{12}$$

$\frac{f t^2}{6}$ ist gegen das erste Glied sehr klein und kann ohne Bedenken vernachlässigt werden; dann ist der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f \mathfrak{h}^2 + \frac{d \mathfrak{h}^3}{12} = \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \left(f + \frac{d \mathfrak{h}}{6} \right) \dots \dots \dots 20.$$

Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche f des oberen Rechteckes im Schwerpunkt desselben vereinigt, also im Abstände $\frac{\mathfrak{h}}{2}$ von der Axe YY , und eben so die des unteren Rechteckes in dem bez. Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

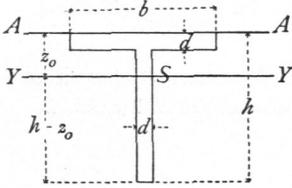
$$i = 2 f \left(\frac{\mathfrak{h}}{2} \right)^2 = \frac{f \mathfrak{h}^2}{2}$$

Dies ist aber der erste Theil unseres obigen Ausdruckes 20 für \mathcal{J}_Y ; der zweite Theil des Ausdruckes stellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leistet. Mit ziemlich

genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des fymmetrischen I-förmigen Querchnittes, indem man die Querchnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je $\frac{1}{8}$ der Querchnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtfchwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufsucht.

Wird beim T-förmigen Querchnitt (Fig. 48) der Abstand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe AA mit z_0 bezeichnet, so ist nach der Schwerpunktslehre

Fig. 48.



$$F z_0 = d(b-d) \frac{d}{2} + d h \frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b-d)d + dh.$$

Sonach ist

$$z_0 = \frac{(b-d)d^2 + dh^2}{2[(b-d)d + dh]} = \frac{(b-d)d + h^2}{2(b-d) + 2h},$$

und das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe YY

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{3} [d(h-z_0)^3 + dz_0^3 + (b-d)z_0^3 - (b-d)(z_0-d)^3].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe AA ist

$$\mathcal{J}_A = \frac{1}{3} [dh^3 + (b-d)d^3].$$

Für den unsymmetrischen I-förmigen Querchnitt (Fig. 49) ist, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält,

$$z_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (b-d)t \left(h - \frac{t}{2}\right) + \frac{(B-d)t^2}{2}}{dh + (b-d)t + (B-d)t} = \frac{dh^2 + (b-d)t(2h-t) + (B-d)t^2}{2[dh + (b-d)t + (B-d)t]}$$

$$\text{und } \mathcal{J}_Y = \frac{1}{3} [b(h-z_0)^3 + Bz_0^3 - (b-d)c^3 - (B-d)(z_0-t)^3].$$

Fig. 49.

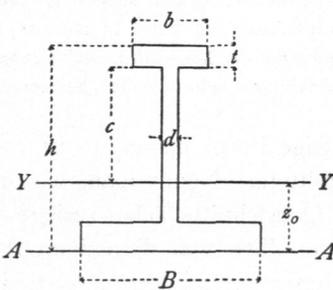
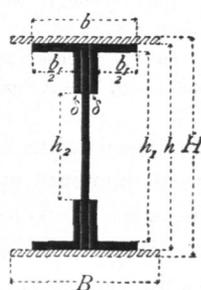


Fig. 50.



Bei den Querchnitten der Blechträger (Fig. 50) liegt der Schwerpunkt in halber Höhe. Alsdann ist, falls nur das lothrechte Blech und die 4 Winkelleifen vorhanden sind, für die durch den Schwerpunkt gelegte wagrechte Axe

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3 - 2 \delta h_2^3).$$

Falls noch Blechplatten vorhanden sind, ermittelt man deren Trägheitsmomente am besten besonders und zählt sie zum Trägheitsmoment des Querchnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment dieser Deckplatten (Fig. 50) ist alsdann

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

γ) Trägheitsmoment für kreisförmige Querchnitte (Fig. 51).

Der Halbmesser des kreisförmigen Querchnittes sei r , der Durchmesser d . Es soll zuerst das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe YY bestimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in schmale Ringe, deren Mittelpunkte mit demjenigen der gegebenen Flächen zusammenfallen, und bestimme zunächst das Trägheitsmoment einer solchen Ringfläche. Der Halbmesser eines solchen Ringes sei ρ , seine sehr geringe Breite sei $d\rho$. Der Flächeninhalt eines Theilchens df dieser Ringfläche, welches zum Mittelpunktswinkel $d\varphi$ gehört, ist $df = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$, und dessen Trägheitsmoment bezogen auf die Axe YY

50.
T-förmige
Querchnitte.

51.
Unsymmetrische
I-förmige
Querchnitte.

52.
Blechträger-
Querchnitte.

53.
Kreisförmige
Querchnitte.

$$d(i) = y^2 \cdot df = \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \rho^3 d\rho \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Das Trägheitsmoment des halben Ringes wird erhalten, indem man für alle Theile df desselben $d(i)$ aufsucht, d. h. indem man zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integrirt, wobei natürlich ρ und $d\rho$ als Festwerthe (Constante) zu betrachten sind, da sie für alle Theilchen des Ringes gleiche Gröfse haben. Man erhält

$$i = \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \rho^3 d\rho \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_0^\pi = \frac{\rho^3 d\rho \cdot \pi}{2}.$$

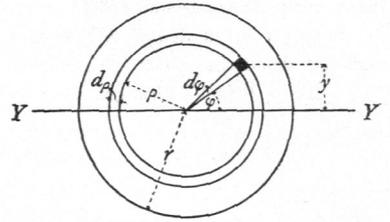
Um aus diesem Trägheitsmomente einer halben Ringfläche dasjenige der halben Kreisfläche zu erhalten, beachte man, daß die letztere sich aus lauter halben Ringflächen zusammensetzt; demnach ist

$$\frac{\mathcal{I}}{2} = \Sigma(i) = \int_0^r \rho^3 d\rho \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} r^4,$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Kreisfläche für die Axe $Y Y$

$$\mathcal{I} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \dots \dots \dots 21.$$

Fig. 51.



55.
Mafseinheit für
die Trägheits-
momente.

Bei allen Angaben von Trägheitsmomenten ist das Folgende wohl zu beachten. Die Mafseinheit der Trägheitsmomente ist die Längeneinheit in der vierten Potenz (also entweder: Meter zur vierten, oder Centimeter zur vierten, oder Millimeter zur vierten Potenz etc.); denn jeder Theil des Trägheitsmomentes, also auch das Ganze ist das Product einer Fläche in das Quadrat einer Länge. Es ist deshalb stets mit der ziffermäßigen Gröfse auch die Mafseinheit des Trägheitsmomentes anzugeben. Meistens geschieht dies allerdings nicht; doch ist streng darauf zu achten, daß diese Vorschrift befolgt werde, weil sonst leicht grofse Fehler gemacht werden.

Um ein Trägheitsmoment, welches in cm^4 angegeben ist, in ein solches zu verwandeln, dessen Mafseinheit mm^4 sind, muß man mit $10^4 = 10000$ multipliciren; umgekehrt ist mit $10^4 = 10000$ zu dividiren, wenn ein in mm^4 gegebenes Trägheitsmoment in eines mit der Mafseinheit cm^4 verwandelt werden soll.

Für die Statik und die Aufgaben derselben empfiehlt es sich, die Trägheitsmomente in cm^4 anzugeben.

55.
Graphische
Ermittlung der
Trägheits-
momente.

Wenn die Querschnitte eine unregelmäßige Form haben, so ist es oft vortheilhaft, die Trägheitsmomente graphisch zu ermitteln. Nennt man, wie oben, die einzelnen Flächentheile, in welche die ganze Querschnittsfläche zerlegt wird, $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$, die Abstände der Schwerpunkte derselben von derjenigen Axe XX , für welche das Trägheitsmoment gesucht wird, bezw. $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$, so ist

$$\mathcal{I} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = \Sigma(f y^2) = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots$$

$$\mathcal{I} = f_1 y_1 \cdot y_1 + f_2 y_2 \cdot y_2 + f_3 y_3 \cdot y_3 + \dots$$

Nun sind $f_1 y_1, f_2 y_2, f_3 y_3 \dots$ die statischen Momente der einzelnen Flächentheile für die Axe XX ; setzt man $f_1 y_1 = m_1, f_2 y_2 = m_2, f_3 y_3 = m_3 \dots$, so wird

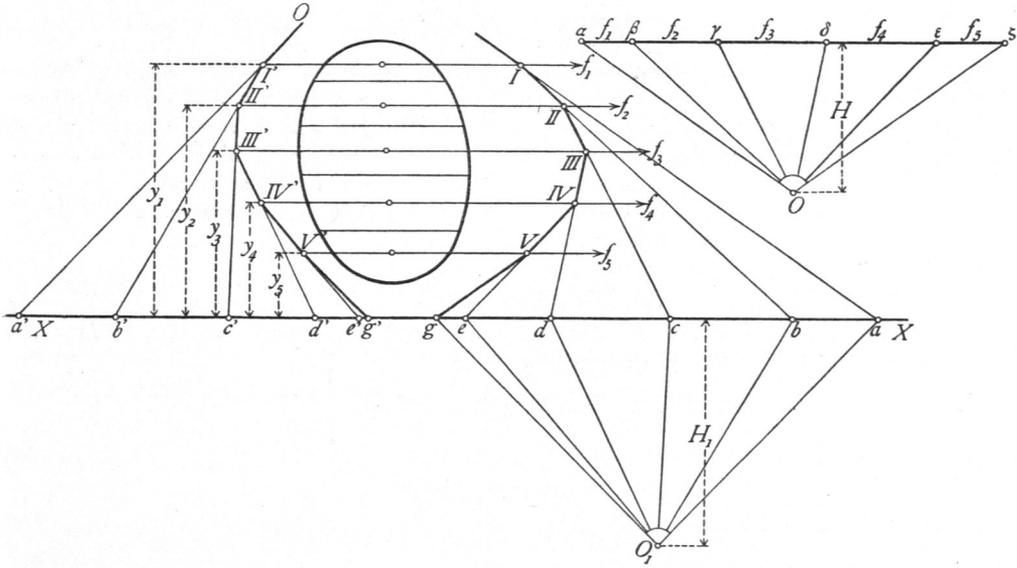
$$\mathcal{I} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots$$

56.
Culman'sches
Verfahren.

Man braucht also nur mit den Werthen $m_1, m_2, m_3 \dots$ genau so zu verfahren, wie oben (in Art. 44, S. 30) mit den Werthen $f_1, f_2, f_3 \dots$, um die statischen Momente von $m_1, m_2, m_3 \dots$, d. h. die Trägheitsmomente zu erhalten. Darauf beruht das nachfolgende von Culman angegebene Verfahren (Fig. 52).

Man zerlege den Querschnitt in Streifen, die zu derjenigen Axe parallel sind, für welche das Trägheitsmoment gesucht wird, und ermittle zunächst, wie oben (in Art. 44) gezeigt, die statischen Momente für die Axe XX . Die Stücke $a b, b c, c d \dots$ sind den statischen Momenten proportional. Man nehme nun einen neuen Pol O_1 an, ziehe die Strahlen $O_1 a, O_1 b, O_1 c \dots$ und construire für die Kräfte $m_1, m_2, m_3 \dots$, die in denselben Linien wirkend angenommen werden, wie die $f_1, f_2, f_3 \dots$, das zugehörige Seilpolygon $O I' II' III' \dots g' \dots$. Werden die Seilpolygonseiten über die Eckpunkte hinaus bis zu den Schnittpunkten mit der Axe XX verlängert, so ist

Fig. 52.



$$\triangle I' a' b' \sim \triangle O_1 a b, \text{ also } \frac{a' b'}{y_1} = \frac{a b}{H_1}.$$

Es ist aber (siehe Art. 44, S. 31)

$$\overline{a b} = \frac{f_1 y_1}{H}, \text{ mithin } a' b' = \frac{f_1 y_1^2}{H H_1} = \frac{i_1}{H H_1} \text{ und } i_1 = H H_1 \overline{a' b'}.$$

Eben so ergibt sich

$$\triangle II' b' c' \sim \triangle O' b c, \text{ mithin } \frac{b' c'}{y_2} = \frac{b c}{H_1} = \frac{f_2 y_2}{H H_1} \text{ und } b_1' c' = \frac{f_2 y_2^2}{H H_1} = \frac{i_2}{H H_1},$$

sonach $i_2 = H \cdot H_1 \cdot \overline{b' c'}$; eben so $i_3 = H \cdot H_1 \cdot \overline{c' d'}$

Man erhält demnach

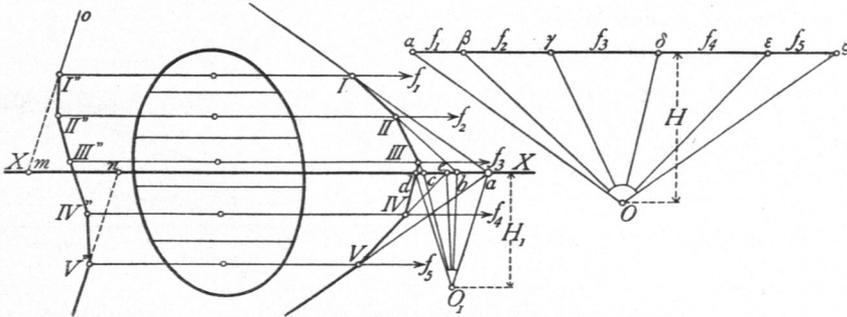
$$\mathcal{J} = \Sigma (i) = H H_1 [a' b' + b' c' + c' d' + \dots] = H H_1 \overline{a' g'}.$$

Das Trägheitsmoment der Fläche F für eine Axe XX ist also gleich dem von den äußersten Seiten des Seilpolygons $O I' II' III' \dots$ auf der Axe abgechnittenen Stücke $\overline{a' g'}$, multiplicirt mit dem Producte der beiden Polabstände H und H_1 .

Genau eben so, wie oben bei den statischen Momenten (siehe Art. 44) nachgewiesen ist, ergibt sich auch hier, daß die Strecke $\overline{a' g'}$ und H_1 auf dem Längenmaßstabe, H auf demjenigen Flächenmaßstabe zu messen ist, nach welchem $f_1, f_2, f_3 \dots$ aufgetragen sind; das Ergebnis ist jedoch das gleiche, wenn $\overline{a' g'}$ auf dem Flächenmaßstabe, H und H_1 auf dem Längenmaßstabe gemessen werden.

Es sei ein Querschnitt in natürlicher Größe aufgezeichnet, $H = 5 \text{ cm}$ und $H_1 = 5 \text{ cm}$; ferner seien

Fig. 53.



$f_1, f_2, f_3 \dots$ in einem Maßstabe aufgetragen, in welchem $1 \text{ cm} = 10 \text{ qcm}$ ist; alsdann wird, wenn $\overline{a'g'} = 4,6 \text{ cm}$ ist,

$$\mathcal{J} = 4,6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^4.$$

Wenn die Axe XX eine Schwerpunktsaxe ist (Fig. 53), so sind zunächst die statischen Momente genau wie oben gezeigt zu ermitteln; die statischen Momente der oberhalb von XX liegenden Flächentheile haben entgegengesetzten Sinn, wie diejenigen der unterhalb von XX liegenden Flächen, weil die Hebelsarme verschiedene Vorzeichen haben. Der Sinn der einzelnen Momente ist $a b, b c, c d, d e, e a$; Anfangspunkt a und Endpunkt a fallen zusammen. Wird jetzt der Pol O_1 angenommen, so sind die Strahlen $O_1 a, O_1 b, O_1 c, O_1 d, O_1 e, O_1 a$; der letzte Strahl fällt mit dem ersten zusammen. Als Seilpolygon erhält man $O I'' I I'' \dots V''$, und es ist

$$\mathcal{J}_S = H \cdot H_1 \cdot \overline{mn}.$$

Ein anderes Verfahren hat *Mohr* angegeben.

Wenn die statischen Momente nach dem in Art. 44 (S. 30) vorgeführten Verfahren konstruiert sind (Fig. 52), so ist der Flächeninhalt des Dreiecks $I a b$

$$\varphi_1 = \frac{\overline{a b} \cdot y_1}{2} = \frac{f_1 y_1}{H} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{f_1 y_1^2}{2 H} = \frac{i_1}{2 H}$$

und der Flächeninhalt des Dreiecks $I I b c$

$$\varphi_2 = \frac{\overline{b c} \cdot y_2}{2} = \frac{f_2 y_2}{H} \cdot \frac{y_2}{2} = \frac{f_2 y_2^2}{2 H} = \frac{i_2}{2 H}.$$

Eben so kann man für jeden Flächenteil f nachweisen, daß sein Trägheitsmoment für eine Axe XX gleich ist dem Flächeninhalte des Dreiecks, welches von der Axe und den das betreffende Flächentheilchen begrenzenden Seilpolygonseiten eingeschlossen ist, multiplicirt mit dem doppelten Polabstand. Es ist also

$$i_1 = 2 H \varphi_1, \quad i_2 = 2 H \varphi_2, \quad i_3 = 2 H \varphi_3 \dots \dots$$

$$\text{und } \mathcal{J} = \Sigma (i) = 2 H \Sigma (\varphi) = 2 H F_1,$$

wenn $F_1 = \Sigma (\varphi)$ ist.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe (Fig. 53), so bleibt Alles giltig, und es wird

$$\mathcal{J}_S = 2 H F_2,$$

wenn F_2 den Flächeninhalt der Figur $I I I I V V a I$ bedeutet.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment eines Querschnittes für eine beliebige, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe, so kann man dasselbe aus demjenigen für die parallele Schwerpunktsaxe nach Art. 47 ermitteln; dieses letztere ist aber im Vorstehenden nur für sehr einfache Querschnittsformen und selbst bei diesen nur für einige wenige Lagen der Axen rechnerisch bestimmt. Für beliebig liegende Axen, also beispielsweise beim Rechteckquerschnitt für eine Axe, welche keiner Seite parallel ist, wird die Berechnung meist recht umständlich. Dagegen ist die Ermittlung sehr bequem, wenn man das gesuchte Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe durch diejenigen für zwei andere Schwerpunktsachsen ausdrückt, welche einen beliebigen, zweckmäßigen rechten Winkel mit einander bilden. Die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten zweier senkrecht zu einander stehender Schwerpunktsachsen und demjenigen für eine andere Axe ergeben sich folgendermaßen.

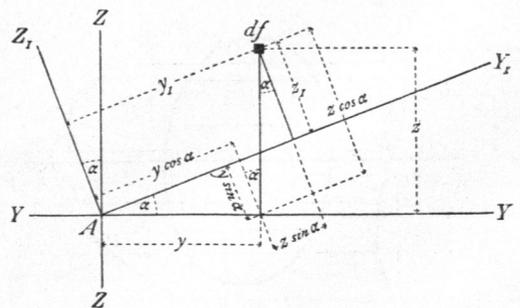
Das Trägheitsmoment eines Querschnittes für die beliebige Axe $A Y_1$ (Fig. 54), welche den Winkel α mit der Axe $Y Y$ einschließt, ist nach Art. 47 (S. 33)

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \int z_1^2 d f;$$

Nach Fig. 54 ist

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

Fig. 54.



57.
Mohr'sches
Verfahren.

58.
Trägheits-
momente für
verschiedene
Schwerpunkts-
achsen.

folglich

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha \, df + \int y^2 \sin^2 \alpha \, df - \int 2 y z \sin \alpha \cos \alpha \, df.$$

Die Integration ist über den gefamnten Querschnitt auszudehnen; für die ganze Integration ist aber α constant, also

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \cos^2 \alpha \int z^2 \, df + \sin^2 \alpha \int y^2 \, df - \sin 2 \alpha \int y z \, df.$$

Nun ist

$$\int z^2 \, df = \mathcal{F}_Y = \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \int y^2 \, df = \mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_1;$$

mithin, wenn man noch $\int y z \, df = H$ setzt,

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \mathcal{F} \cos^2 \alpha + \mathcal{F}_1 \sin^2 \alpha - H \sin 2 \alpha \dots \dots \dots 22.$$

Das Trägheitsmoment für die Axe $A Z_1$ wird erhalten, indem man an Stelle von α den Winkel einführt, welchen $A Z_1$ mit $Y Y$ bildet, d. h. $90 + \alpha$. Dann ergibt sich

$$\mathcal{F}_{Z_1} = \mathcal{F}_1 \cos^2 \alpha + \mathcal{F} \sin^2 \alpha + H \sin 2 \alpha \dots \dots \dots 23.$$

Die beiden Gleichungen 22 u. 23 geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Schweraxen an. Besonders wichtig ist die Lage der Axen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird. \mathcal{F}_{Y_1} wird ein Maximum für den Werth von α , für welchen

$$\frac{d \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha} = - 2 \mathcal{F} \cos \alpha \sin \alpha + 2 \mathcal{F}_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2 H \cos 2 \alpha = 0,$$

d. h. für welchen $(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \sin 2 \alpha = 2 H \cos 2 \alpha$ wird. Es ist also

$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2 H}{\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}} \dots \dots \dots 24.$$

Dieser Gleichung genügen zwei Winkelgrößen 2α , welche um 180 Grad aus einander liegen, da $\text{tg} (180 + 2 \alpha) = \text{tg } 2 \alpha$ ist. Es giebt also zwei Axen, für welche ein Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet, und diese beiden Axen bilden mit der angenommenen Axe $Y Y$ die Winkel α_{max} , bezw. $90 + \alpha_{max}$; diese beiden Axen stehen senkrecht zu einander. Ob Maximum oder Minimum für die eine oder andere Axe stattfindet, ergibt die zweite Differentiation.

Es ist
$$\frac{d \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha} = (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \sin 2 \alpha - 2 H \cos 2 \alpha,$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha + 4 H \sin 2 \alpha.$$

Setzt man statt α den um 90 Grad abweichenden Werth $(90 + \alpha)$ ein, so ist

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d^2 \alpha} = + 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos (180 + 2 \alpha) + 4 H \sin (180 + 2 \alpha),$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = - 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha - 4 H \sin 2 \alpha.$$

Die zweiten Ableitungen sind also für zwei Winkel, welche um 90 Grad verschieden sind, der Größe nach gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; entspricht demnach dem Winkel α das Maximum, so tritt für den Winkel $(90 + \alpha)$ das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

Es folgt daraus der Satz: In jedem Querschnitt ist eine Schwerpunktsaxe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen stehen zu einander senkrecht.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum wird, nennt man die erste Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heißt die zweite Hauptaxe.

Wir bezeichnen oben $\int y z df = H$; setzt man entsprechend $H_1 = \int y_1 z_1 df$, führt man ferner für z_1 den oben gefundenen Werth und endlich nach Fig. 54 für $y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$ ein, so wird

$$H_1 = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha) (z \cos \alpha - y \sin \alpha) df,$$

$$H_1 = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int y z df + \frac{\sin 2 \alpha}{2} \left(\int z^2 df - \int y^2 df \right),$$

$$H_1 = H \cos 2 \alpha + \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1). \quad \dots \quad 25.$$

H_1 wird gleich Null für $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_1) \sin 2 \alpha = -2 H \cos 2 \alpha$, fonach für

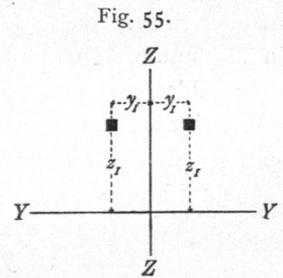
$$\operatorname{tg} 2 \alpha = - \frac{2 H}{\mathcal{F} - \mathcal{F}_1} = \frac{2 H}{\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}}.$$

Dies ist derselbe Werth, für welchen nach Gleichung 24 Maximum, bzw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet. Für die Hauptaxen ist fonach

$$H_1 = \int y_1 z_1 df = 0.$$

Für viele Querschnitte ist hierdurch ein bequemes Kennzeichen zur Bestimmung der Hauptaxen gefunden. Man suche diejenigen Axen, für welche $H_1 = 0$ ist; dann sind die gefundenen Axen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu suchen, da ja die andere nach Früherem stets einen Winkel von 90 Grad mit derselben einschließt.

Bei sämtlichen zu einer oder mehreren Axen symmetrisch liegenden Querschnitten sind die Symmetriaxen auch zugleich die Hauptaxen. Denn sei etwa die Z -Axe eine Symmetrieaxe, so entspricht jedem df mit den Coordinaten y_1, z_1 ein df mit den Coordinaten $-y_1, z_1$ (Fig. 55). Die Beiträge der beiden df zu H_1 sind also $df \cdot y_1 z_1 - df \cdot y_1 z_1 = 0$.



Genau eben so ist es mit sämtlichen übrigen Querschnittstheilen; die Summe der Beiträge je zweier symmetrisch liegender Flächentheile ist gleich Null, so dass also auch die Gesamtsomme $H_1 = \int y_1 z_1 df = 0$ ist.

Bei den in Fig. 56 bis 60 dargestellten Querschnitten sind die Hauptaxen angegeben. In den im vorhergehenden Halbbande dieses »Handbuches« mitgetheilten Tabellen über die »Deutschen Normal-Profile für Walzeisen« sind die Trägheitsmomente

Fig. 56.

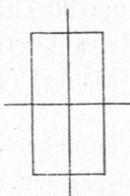


Fig. 57.



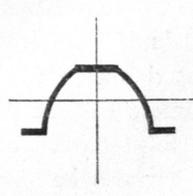
Fig. 58.



Fig. 59.



Fig. 60.



für solche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-
Constructions eine Rolle spielen.

Wählt man die Hauptaxen als Axen der Y und Z (Fig. 55), so ist für diese
nach Obigem $\int y z df = H = 0$; mithin ist, wenn man das Trägheitsmoment in Be-
zug auf die eine Hauptaxe mit A , dasjenige in Bezug auf die andere mit B be-
zeichnet, in den Gleichungen 22 und 23 für \mathcal{F} und \mathcal{F}_1 bezw. A und B , so wie für
 $H = 0$ einzusetzen. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{Y_1} &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Z_1} &= A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \\ H_1 &= (A-B) \frac{\sin 2\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 26.$$

60.
Wahl der
Hauptaxen
als Axen der
 Y und Z .

Sind A und B , d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A,$$

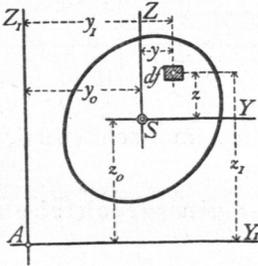
d. h. \mathcal{F}_{Y_1} ist alsdann von α unabhängig, also für jedes α gleich A .

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich groß, so sind
alle Trägheitsmomente gleich groß.

Bei vielen statischen Untersuchungen ist es wichtig, die Lage der Hauptaxen
und die Größe der Werthe von A und B zu kennen. Für die Ermittlung dieser
Werthe aber bedarf man nach vorstehenden Entwicklungen der Kenntniß von
 $H = \int y z df$. Man nennt H das Centrifugalmoment des Querschnittes für die
Axen $A Y$ und $A Z$.

61.
Centrifugal-
momente.

Fig. 61.



Legt man durch einen beliebigen Punkt A in der
Ebene eines Querschnittes (Fig. 61) und durch den Schwerk-
punkt S desselben je zwei parallele Axen $A Y_1$ und $A Z_1$,
bezw. $S Y$ und $S Z$, bezeichnet man die Coordinaten des
Schwerpunktes für die ersten beiden Axen mit z_0 und y_0 ,
die Centrifugalmomente für die Axenpaare bezw. mit H_1
und H , so ist

$$H_1 = H + F y_0 z_0.$$

Denn es ist

$$H_1 = \int y_1 z_1 df, \quad y_1 = y + y_0 \quad \text{und} \quad z_1 = z + z_0, \quad \text{also}$$

$$H_1 = \int (y + y_0) (z + z_0) df = \int y z df + y_0 \int z df + z_0 \int y df + y_0 z_0 \int df.$$

Nun ist $\int y z df = H$, $\int df = F$, $\int z df = 0$ und $\int y df = 0$; die

letzteren beiden Werthe ergeben sich, weil $S Y$ und $S Z$ Schwerpunktsaxen sind
(vergl. Art. 31, S. 25, unter α). Es wird somit

$$H_1 = H + F y_0 z_0. \dots \dots \dots 27.$$

Wenn die Schwerpunktsaxen Hauptaxen sind, so ist $H = 0$, demnach

$$H_1 = F y_0 z_0. \dots \dots \dots 28.$$

Diese Formel ist sehr bequem. Soll beispielsweise das Centrifugalmoment für
die Axen $A Y_1$ und $A Z_1$ (Fig. 62) und den Rechtecksquerschnitt ermittelt werden,

deffen Seiten parallel zu den Axen find, fo lege man durch den Schwerpunkt zwei den ersteren bezw. parallele Axen $S Y$ und $S Z$; alsdann wird

$$H_1 = F y_0 z_0.$$

Fällt etwa A mit einer Ecke zufammen, fo wird

$$H_1 = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Beispiel. Es soll das Centrifugalmoment eines ungleichschenkeligen Winkeleifens (Fig. 63) für zwei durch dessen Schwerpunkt gelegte Axen ermittelt werden, welche den Winkeleifenschenkeln parallel find.

Zerlegt man den Querschnitt in zwei Rechtecke, deren eines den ganzen lothrechten Schenkel enthält, deren anderes den wagrechten Schenkel nach Abzug des schon beim ersten mitberechneten Rechteckes in der Ecke bildet, und nennt man die Flächeninhalte F_1 und F_2 , fo wie die Abstände der Einzelschwerpunkte von den Axen bezw. y_0', z_0', y_0'', z_0'' , fo ist

$$H = F_1 y_0' z_0' + F_2 y_0'' z_0''.$$

Es sei die Länge des großen und kleinen Schenkels bezw. 12 und 8 cm, die Stärke beider Schenkel 1,0 cm (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) und der Abstand des Schwerpunktes von der äußeren Kante des langen, bezw. kurzen Schenkels 1,97 cm, bezw. 3,97 cm; alsdann ist

$$H = 12 \cdot 1 \cdot 1,97 (6 - 3,97) + 7 \cdot 1 \cdot 3,97 (4,5 - 1,97) = 97,26 \text{ cm}^4.$$

Die Einheit, in welcher die Centrifugalmomente erhalten werden, ist dieselbe, wie bei den Trägheitsmomenten, und es wird auf das hierüber in Art. 54 (S. 36) Gefagte verwiesen. Besondere Aufmerksamkeit ist aber hier auf die Vorzeichen der Coordinaten y_0 und z_0 zu verwenden. In obigem Beispiel sind für das erste Rechteck beide positiv, für das zweite Rechteck beide negativ einzuführen; das Product ist hier also für jedes der Theilrechtecke positiv.

Für einige häufiger vorkommende Querschnittsformen sollen im Nachstehenden die Maximal- und Minimal-Trägheitsmomente ermittelt werden.

α) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein gleichschenkeliges Winkeleifen (Fig. 64).

Hauptaxen sind die Symmetrieaxe $Y_1 V_1$, welche den Winkel halbirt, und die zu dieser im Schwerpunkte senkrechte Axe $Z_1 Z_1$. Die erstere bildet mit der Axe $Y Y$ den Winkel $\alpha = 45$ Grad. Somit ist nach Gleichung 22

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \mathcal{J}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{J}_Z \sin^2 \alpha - H \sin 2 \alpha$$

und, da $\alpha = 45$ Grad ist,

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - H.$$

Die Werthe auf der rechten Seite vorstehender Gleichung sind leicht zu finden.

Für ein Winkeleifen mit 10 cm Schenkellänge, 1 cm Schenkelfstärke (Deutsches Normal-Profil Nr. 10) ist $y_0 = z_0 = 2,87$ cm; mithin

$$\mathcal{J}_Y = \mathcal{J}_A - F z_0^2 \text{ und } \mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_B - F y_0^2;$$

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1 \cdot 10^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^3}{3} - (10 + 9) \cdot 1 \cdot 2,87^2 = 179,83 \text{ cm}^4; \text{ eben so groß ist } \mathcal{J}_Z = 179,83 \text{ cm}^4;$$

$H = -10 \cdot 1 \cdot (5 - 2,87) (2,87 - 0,5) - 9 \cdot 1 \cdot (5,5 - 2,87) (2,87 - 0,5) = -106,58 \text{ cm}^4.$
(Die Werthe der y und z sind nach rechts, bezw. oben als positiv eingeführt.) Es wird sonach

$$\mathcal{J}_{Y_1} = 179,83 + 106,58 = 286,41 \text{ cm}^4$$

Fig. 62.

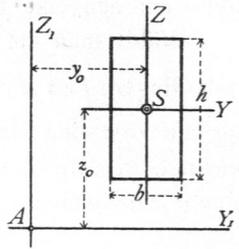


Fig. 63.

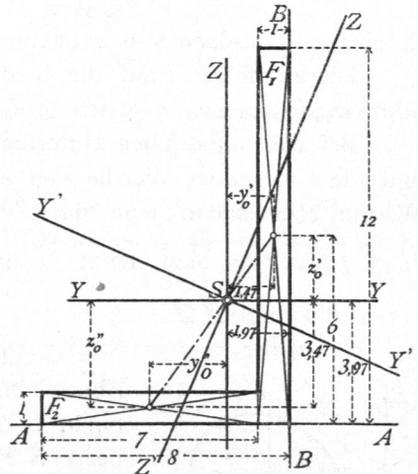
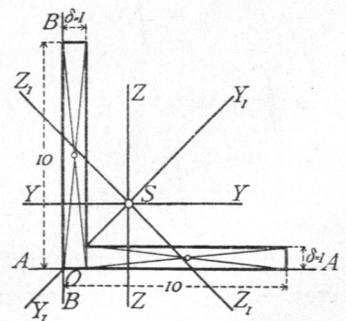


Fig. 64.



62.
Maximal- u.
Minimal-
Trägheits-
momente für:
Winkeleifen.

und $\mathcal{J}_{Z_1} = \mathcal{J}_Y \sin^2 \alpha + \mathcal{J}_Z \cos^2 \alpha + H \sin 2\alpha = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + H = 179,83 - 106,58 = 73,25 \text{ cm}^4$.

Mithin ist $\mathcal{J}_{Y_1} = A = 286,41 \text{ cm}^4$ (Maximum),
 $\mathcal{J}_{Z_1} = B = 73,25 \text{ cm}^4$ (Minimum).

β) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein ungleichschenkeliges Winkeleifen (Fig. 63).

Zunächst ist die Lage der Haupttaxen aufzufuchen. Da hier keine Symmetrie-Axe vorhanden ist, so ist dieselbe nach Formel 24

$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2H}{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}}$$

zu berechnen.

Für das in Fig. 63 dargestellte Winkeleifen (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) ist

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_Y = \mathcal{J}_A - Fz_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 12^3 + 7,0 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 3,97^2 = 278,87 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_B - Fy_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 8^3 + 11 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 1,97^2 = 100,59 \text{ cm}^4,$$

$$H = 97,26 \text{ cm}^4 \text{ (siehe Art. 61, S. 41).}$$

Hiernach ist $\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2 \cdot 97,26}{100,59 - 278,87} = -1,09109$.

Nun ist, wenn man $2 \alpha_{max} = 180 - 2 \beta$ setzt, $\text{tg } 2 \alpha_{max} = -\text{tg } 2 \beta$; somit $\text{tg } 2 \beta = 1,09109$ und $2 \beta = 47^\circ 29' 40''$, woraus $\beta = 23^\circ 44' 50''$; mithin

$$\alpha_{max} = 90 - \beta, \text{ bzw. } 180 - \beta.$$

Hieraus ergibt sich $\alpha_{max} = 156^\circ 15' 10''$ und $\alpha_{min} = 66^\circ 15' 10''$.

Die Axen $Y' Y'$ und $Z' Z'$ sind demnach die Haupttaxen; man erhält nach Gleichung 22

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \mathcal{J} \cos^2 156^\circ 15' 10'' + \mathcal{J}_1 \sin^2 156^\circ 15' 10'' - H \sin 312^\circ 30' 20'',$$

$$= \mathcal{J} \cos^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{J}_1 \sin^2 23^\circ 44' 50'' + H \sin 47^\circ 29' 40'' = 321,43 \text{ cm}^4 = A;$$

$$\mathcal{J}_{Z_1} = \mathcal{J} \cos^2 66^\circ 45' 10'' + \mathcal{J}_1 \sin^2 66^\circ 15' 10'' - H \sin 47^\circ 29' 40'' = 57,80 \text{ cm}^4 = B.$$

γ) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein Z-Eifen.

Die Ermittlung soll für das Deutsche Normal-Profil Nr. 12 (Fig. 65) vorgenommen werden.

Es ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}_Y = \frac{0,7 \cdot 12^3}{12} + 2 \left[\frac{5,3 (6^3 - 5,1^3)}{3} \right] = 395,3 \text{ cm}^4,$

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_Z = \frac{10,2 \cdot 0,7^3}{12} + 2 \left[\frac{(5,65^3 + 0,35^3)}{3} \cdot 0,9 \right] = 108,53 \text{ cm}^4,$$

$$H = 0 - 0,9 \cdot 5,3 \cdot 5,55 \cdot 3,0 \cdot 2 = -158,84 \text{ cm}^4,$$

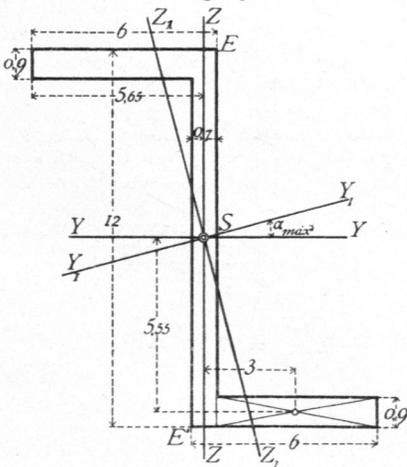
$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = -\frac{2 \cdot 158,84}{108,53 - 395,3} = \frac{2 \cdot 158,84}{286,77} = 1,1078, \text{ woraus } 2 \alpha_{max} = 47^\circ 56';$$

somit $\alpha_{max} = 23^\circ 58'$ und $\alpha_{min} = 113^\circ 58'$.

$$\mathcal{J}_{Y_1} = 395,3 \cdot \cos^2 23^\circ 58' + 108,53 \cdot \sin^2 23^\circ 58' + 158,84 \cdot \sin 47^\circ 56' = 465,9 \text{ cm}^4 = A,$$

$$\mathcal{J}_{Z_1} = 395,3 \cdot \sin^2 23^\circ 58' + 108,53 \cdot \cos^2 23^\circ 58' - 158,84 \cdot \sin 47^\circ 56' = 38,1 \text{ cm}^4 = B.$$

Fig. 65.



Bedeutet \mathcal{J} das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, so kann man $\mathcal{J} = F R^2$ setzen, in welcher Gleichung F die Querschnittsfläche bedeutet. Es ist dann

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}},$$

und es wird R der Trägheitsradius für die betreffende Axe genannt. Beispielsweise würden sich die Trägheitsradien für die Haupttaxen aus den Gleichungen:

$$A = F R_1^2 \text{ und } B = F R_2^2 \text{ zu}$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \text{ und } R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

63.
Z-Eifen.

64.
Trägheits-
radius.

65.
Ellipse
der Trägheits-
momente.

Die den Gleichungen 22 und 23 entsprechende Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels α kann man graphisch veranschaulichen, indem man vom Schwerpunkte aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmomente für diese Axe entspricht. Wählt man die Haupttaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe $\frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}}}$ ab, in welcher Gleichung K eine zunächst beliebige Constante, \mathcal{F} das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, so erhält man als Endpunkt eines *Radius vector* etwa den Punkt P (Fig. 66). Alsdann ist

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K}.$$

Nach Gleichung 26 ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \frac{A y^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{K^2} + \frac{B z^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{K^2}.$$

$$K^2 = A y^2 + B z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \dots \dots \dots 29.$$

Gleichung 29 ist die Gleichung der Curve für die Punkte P ; die Endpunkte der *Radii vectores* liegen also auf einer Ellipse, deren beide Halbaxen $\frac{K}{\sqrt{A}}$ und $\frac{K}{\sqrt{B}}$ sind; $\frac{K}{\sqrt{A}}$ ist der *Radius vector* auf der Hauptaxe $O Y$, $\frac{K}{\sqrt{B}}$ derjenige auf der Hauptaxe $O Z$.

Man nennt diese Ellipse die Ellipse der Trägheitsmomente. Dieselbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt construirt werden; gehen sämtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so nennt man dieselbe die Centraellipse.

Der Werth K kann beliebig angenommen werden. Durch passende Wahl dieses Werthes kann man erreichen, daß der senkrechte Abstand einer Schwerpunktsaxe und der zu ersterer parallelen Tangente an die Ellipse gleich dem Trägheitsradius für die betreffende Schwerpunktsaxe, daß also e (Fig. 66) der Trägheitsradius für die Axe $Y_1 Y_1$ ist.

Alsdann ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = F e^2.$$

Der für K zu diesem Zwecke zu wählende Werth ergibt sich wie folgt. Zieht man die vier Tangenten, welche dem Durchmesser $Y_1 Y_1$ und dem zugehörigen conjugirten Durchmesser $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ entsprechen, so schließen dieselben bekanntlich eine Fläche ein, welche $= 4 a b$ ist. Diese Fläche ist aber auch $= 4 r e$; daher ist $a b = r e$ und

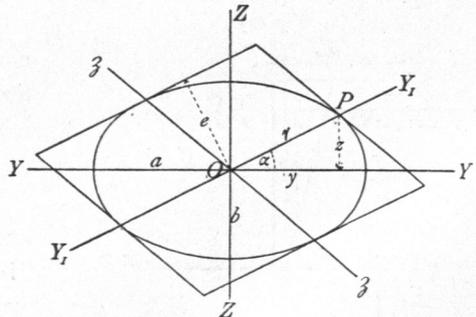
$$e = \frac{a b}{r}.$$

Nun ist $a = \frac{K}{\sqrt{A}}, b = \frac{K}{\sqrt{B}}, r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}$, also $e = \frac{K^2 \sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K \sqrt{A B}} = K \sqrt{\frac{\mathcal{F}_{Y_1}}{A B}}.$

Soll e gleich dem Trägheitsradius für $Y_1 Y_1$ sein, so muß $F e^2 = \mathcal{F}_{Y_1}$ sein, d. h.

$$\mathcal{F}_{Y_1} = F e^2 = \frac{F K^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{A B} \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{F K^2}{A B};$$

Fig. 66.



daher

$$K = \sqrt{\frac{AB}{F}}.$$

Wird also $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$ gewählt, so ist für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmessen des senkrechten Abstandes dieser beiden Linien zu ermitteln. Sodann ist a der Trägheitsradius für die Z -Axe, b der Trägheitsradius für die Y -Axe, d. h. $A = Fb^2$ und $B = Fa^2$.