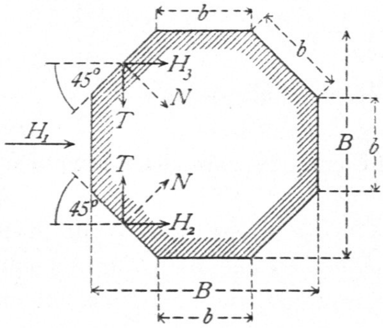
ſonach $$H = pr\frac{\pi}{2} \qquad \ldots \qquad 9.$$

Wird $p = 120$ kg eingeführt, ſo iſt die Kraft H für das ſteigende Meter
$$H = 188{,}4\, r = \backsim 190\, r \text{ Kilogr.},$$
worin r in Metern einzuſetzen iſt.

Die Kraft H liegt in der lothrechten Ebene der Axe XX und greift in halber Höhe des Cylinders an.

c) Winddruck gegen ein regelmäſsiges achtſeitiges Prisma (Fig. 24). Die Breite des umſchriebenen Quadrates ſei B, die Seitenlänge der achteckigen Grundfläche ſei b; dann iſt $b = 0{,}414\ B$. Der Winddruck gegen die ſenkrecht getroffene Fläche iſt für die Längeneinheit der Höhe
$$H_1 = p\, b,$$
derjenige gegen die unter 45 Grad getroffenen Seitenflächen je
$$N = p\, b \sin 45^0,$$
und die in die Windrichtung fallende Seitenkraft von N iſt
$$H_2 = p\, b \sin^2 45^0 = \frac{p\, b}{2}.$$

Fig. 24.



Eben ſo groſs iſt H_3; mithin wird die geſammte Kraft, welche ein Umſturz-Moment erzeugt, für das ſteigende Meter ſein
$$H = H_1 + H_2 + H_3 = 2\, p\, b.$$

Die Mittelkraft aller H greift, wie oben, in halber Höhe des Prismas an und liegt in der durch die Axe des Prismas und H_1 beſtimmten lothrechten Ebene.

Die bisher ganz allgemein und auch in vorſtehenden Entwickelungen gemachte Annahme einer gleichmäſsigen Vertheilung des Winddruckes über eine ebene getroffene Fläche ſcheint nach den neueren Verſuchen und theoretiſchen Ermittelungen nicht ganz richtig zu ſein; demnach iſt es auch nicht ohne Weiteres richtig, daſs die Mittelkraft durch den Schwerpunkt der getroffenen Fläche geht. Es ſcheint, daſs der Druck an den Rändern am kleinſten iſt und nach der Mitte der Ebene hin zunimmt. Bis über die Geſetzmäſsigkeit genauere Angaben vorliegen, wird man jedoch für die Zwecke des Hochbaues unbedenklich die vorgeführten Annahmen den Berechnungen zu Grunde legen können.

b) Schwerpunkte und ſtatiſche Momente.

1) Schwerpunkte von ebenen Figuren.

30. Grundgleichungen.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Figur zu finden, genügt es, zwei Linien zu beſtimmen, auf deren jeder der Schwerpunkt liegen muſs; alsdann iſt der Schnittpunkt beider Linien der geſuchte Schwerpunkt. Werden in der Ebene, in welcher die betreffende Figur liegt, zwei Coordinaten-Axen OX und OY beliebig angenommen, ſo erhält man die Abſtände x_0 und y_0 des Schwerpunktes von den beiden Axen OY und OX aus den Gleichungen
$$x_0 = \frac{\int x\, df}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\int y\, df}{F}, \qquad \ldots \qquad 10.$$
in denen F die ganze Querſchnittsfläche, df den Flächeninhalt eines beliebigen Theilchens mit den Coordinaten x und y bedeutet und die Summirung über die ganze Fläche auszudehnen iſt. Die vorſtehenden beiden Gleichungen können hier aus der

Mechanik als bekannt vorausgefetzt werden. Man kann ftatt der unendlich kleinen Theilchen df Flächentheile f von endlicher Gröfse einführen, alfo die obigen Gleichungen fchreiben:

$$x_0 = \frac{\Sigma\,(f\,x)}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\Sigma\,(f\,y)}{F}, \qquad \ldots \qquad 11.$$

wenn x und y die Schwerpunkts-Coordinaten der Flächentheile f bedeuten.

Die Zähler der Gleichungen nennt man die ftatifchen Momente der Fläche, bezogen auf die Y- und X-Axe; denn denkt man in jedem Theile der Fläche den Inhalt deffelben als Kraft fenkrecht zur Ebene der Figur wirkend, fo find die ftatifchen Momente diefer Kräfte für die beiden Axen eben die Zählergröfsen obiger Gleichungen.

Aus den Schwerpunktsgleichungen folgt: 31. Folgerungen.

α) x_0 wird gleich Null, wenn der Zähler $\Sigma\,(f\,x)$, bezw. $\int x\,df$ gleich Null wird, d. h. für eine Axe, für welche das ftatifche Moment der Fläche gleich Null wird. Der Schwerpunkt liegt demnach auf einer folchen Axe. Daffelbe gilt natürlich für y_0, fo dafs man allgemein fagen kann: Jede Axe, für welche das ftatifche Moment einer Fläche gleich Null ift, geht durch den Schwerpunkt der Fläche, ift alfo, wie man fagt, eine Schwerpunktsaxe.

Man fuche daher zwei Axen auf, für welche die ftatifchen Momente gleich Null find; alsdann ift deren Schnittpunkt auch der Schwerpunkt.

β) Liegt eine Figur fymmetrifch zu einer Axe $X\,X$, fo ift das ftatifche Moment $\int y\,df$ der Figur für diefe Axe gleich Null; denn jedem Flächentheilchen f_1 im Abftande y_1 von der Axe entfpricht ein eben fo grofses Theilchen f_1 im Abftande $-y_1$ von der Axe; der Beitrag beider Theile zum ftatifchen Momente ift alfo $f_1\,y_1 - f_1\,y_1 = 0$. Das Gleiche gilt von je zwei anderen Theilen, fo dafs alfo das gefammte ftatifche Moment gleich Null wird. Daraus folgt: Jede Symmetrie-Axe einer Fläche ift eine Schwerpunktsaxe.

Hat fonach ein Querfchnitt eine Symmetrie-Axe, fo ift nur noch die Lage des Schwerpunktes auf derfelben zu beftimmen; hat ein Querfchnitt zwei Symmetrie-Axen, fo ift der Schnittpunkt beider auch der Schwerpunkt.

γ) Nach Gleichung 10 ift $F\,x_0 = \int x\,df$. Ift es möglich, die ganze Fläche in eine Anzahl Gruppen F_1, F_2, F_3 ... zu zerlegen, von deren jeder der Schwerpunktsabftand (x_1, x_2, x_3 ...) bekannt ift, fo mufs für diefe fein

$$F_1\,x_1 = \left(\int x\,df\right)_1, \qquad F_2\,x_2 = \left(\int x\,df\right)_2, \qquad F_3\,x_3 = \left(\int x\,df\right)_3, \quad . \quad 12.$$

in welchen Ausdrücken fich die Einzelintegrale auf die einzelnen Gruppen beziehen. Dann ift fonach

$$F\,x_0 = F_1\,x_1 + F_2\,x_2 + F_3\,x_3 + \ldots + F_n\,x_n\,,$$

und es wird

$$x_0 = \frac{F_1\,x_1 + F_2\,x_2 + F_3\,x_3 + \ldots + F_n\,x_n}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13.$$

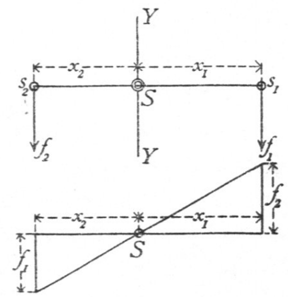
Es ift fehr oft möglich, die gegebene Figur in Rechtecke, bezw. folche kleinere Figuren zu zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt find und alsdann mit Hilfe obiger Formel die Lage des Gefammtfchwerpunktes zu finden.

δ) Der Schwerpunkt S zweier Flächen F_1 und F_2 (Fig. 25) mit den Schwerpunkten s_1 und s_2 liegt auf der Verbindungslinie $s_1\,s_2$ beider Schwerpunkte. Nennt man nämlich den Abftand des Gefammtfchwerpunktes von diefer Verbindungslinie y_0, fo ift $F y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$. Die Abftände y_1 und y_2 der beiden Schwerpunkte s_1 und s_2 von derfelben Axe find aber gleich Null, weil die Axe durch diefe Schwerpunkte gelegt ift. Demnach ift für diefe Axe $F y_0 = 0$, alfo auch $y_0 = 0$.

Hieraus folgt weiter, dafs, wenn die Schwerpunkte noch weiterer Flächen auf diefer Linie liegen, der Gefammtfchwerpunkt gleichfalls auf derfelben liegt; kann man alfo eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, fo befindet fich auch der Schwerpunkt der gefammten Fläche auf diefer Linie.

Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie $s_1 s_2$ (Fig. 25) ift leicht zu finden. Werden die Abftände desfelben von s_1 und s_2 mit bezw. $+ x_1$ und $- x_2$ bezeichnet, fo mufs für eine fenkrecht zu $s_1 s_2$ durch den Schwerpunkt S gelegte Axe $Y Y$ fein

Fig. 25.



$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1} .$$

Daraus ergiebt fich die nachfolgende Conftruction.

Man errichte in s_1 eine Senkrechte, welche f_2 Flächeneinheiten in beliebigem Mafsftabe enthält, in s_2 eine Senkrechte, jedoch nach entgegengefetzter Seite, welche f_1 Flächeneinheiten in demfelben Mafsftabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann fchneidet diefe Verbindungslinie die Axe $s_1 s_2$ im Schwerpunkte S.

2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

32. Regelmäfsige Figuren.

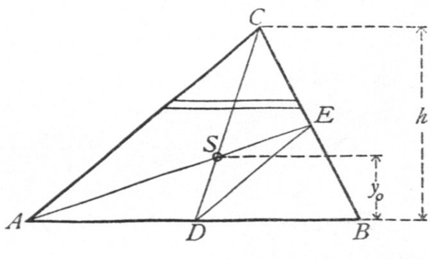
α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreifes und einer Ellipfe. Jede diefer Figuren hat wenigftens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbirungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt fich befindet.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Diagonalen und beim Kreife und bei der Ellipfe im Mittelpunkte.

33. Dreieck.

β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 26).

Fig. 26.



Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite ($A B$ in Fig. 26) parallel find, in eine Anzahl fehr fchmaler Streifen, fo liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte feiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 31 liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt alfo auf der Linie $C D$, welche die Mitte D einer Dreieckfeite mit der gegenüber liegenden Ecke (C) verbindet. Aus demfelben Grunde liegt er auch auf der Linie $A E$, wenn $C E = E B$ ift. Der Schwerpunkt S ift der Schnittpunkt beider. Da aber $D E$ und $A C$ parallel find, fo ift

$$\frac{\overline{D S}}{\overline{S C}} = \frac{\overline{D E}}{\overline{C A}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{D S} = \frac{\overline{S C}}{2} = \frac{\overline{C D}}{3} .$$

Daraus folgt, dafs der fenkrechte Abftand des Schwerpunktes S von der Grundlinie $A B$ des Dreieckes ein Drittel der Höhe ift, d. h. es ift

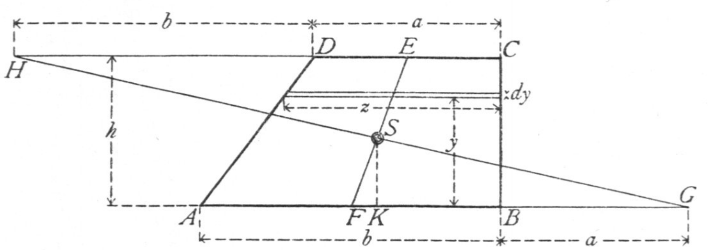
$$y_0 = \frac{h}{3} .$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angefehen werden kann, fo liegt S auch auf einer Parallelen zu $B C$, deren fenkrechter Abftand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem A von $B C$ liegt. Das Gleiche gilt von $A C$, bezw. B. Mittels diefes Gefetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 27).

34. Parallel-Trapez.

Fig. 27.



Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 27 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F, welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner ift

$$F y_0 = \int y \, d f.$$

Nennt man die Breite eines Streifens z und deffen Höhe dy, fo ift

$$d f = z \, d y, \quad z = b - \frac{b-a}{h} y \quad \text{und} \quad F = (a + b) \frac{h}{2};$$

fonach

$$F y_0 = \int_o^h \left(b \, y - \frac{b-a}{h} y^2 \right) d y = \frac{b \, h^2}{2} - \frac{(b-a)}{h} \frac{h^3}{3},$$

und

$$y_0 = \frac{h}{3} \frac{(2 a + b)}{(a + b)}.$$

Daraus ergiebt fich folgende Conftruction.

Man halbire die beiden parallelen Seiten in E und F, trage $B \, G = a$ und $D \, H = b$ nach rechts, bezw. links in den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten auf und ziehe $H G$; alsdann ift der Schnittpunkt von $H G$ mit $E F$ der Schwerpunkt S. Denn es ift

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2} + b + \frac{a}{2}} = \frac{2 a + b}{3 (a + b)}, \quad \text{aber auch} \quad \frac{S F}{\overline{E F}} = \frac{\overline{SK}}{h};$$

mithin ift

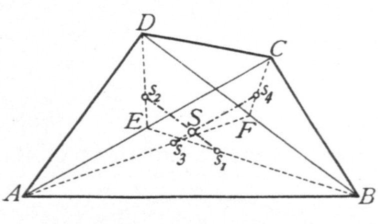
$$\frac{\overline{SK}}{h} = \frac{2 a + b}{3 (a + b)} \quad \text{und} \quad \overline{SK} = \frac{h}{3} \frac{(2 a + b)}{(a + b)} = y_0.$$

Der Punkt S ift alfo in der That der Schwerpunkt.

δ) Schwerpunkt eines unregelmäfsigen Viereckes (Fig. 28).

35. Unregelmäfsiges Viereck.

Fig. 28.



Um den Schwerpunkt des unregelmäfsigen Viereckes $A B C D$ zu beftimmen, ziehe man die Gerade $A C$ und ermittele die Schwerpunkte s_1 und s_2 der beiden Dreiecke $A C B$ und $A C D$, wie unter β gezeigt; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_1 \, s_2$. Nun ziehe man $B D$ und ermittele die Schwerpunkte s_3 und s_4 der beiden Dreiecke $A B D$ und $B C D$; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auch auf der Linie $s_3 \, s_4$. Demnach ift der Schnittpunkt der beiden Linien $s_1 \, s_2$ und $s_3 \, s_4$ der gefuchte Schwerpunkt.

In ganz ähnlicher Weife kann man weiter verfahren, wenn es fich um den Schwerpunkt eines Vieleckes handelt, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Doch wird in einem folchen Falle vielfach das unten vorzuführende graphifche Verfahren bequemer fein.

ε) Schwerpunkt eines Kreisausfchnittes (Fig. 29).

36. Kreisausfchnitt.

Der ganze zum Kreisausfchnitt gehörige Winkel fei 2α; die Halbirungslinie des Winkels ift eine Symmetrie-Axe, enthält alfo den Schwerpunkt; es ift fomit nur noch der Abftand deffelben vom Kreismittelpunkte oder, was daffelbe befagt, von einer durch diefen fenkrecht zur Winkelhalbirenden gelegten Axe $X X$ zu fuchen.

Für den zu einem Bogenftück $d s = r \, d \varphi$ gehörigen Theil des Ausfchnittes (Fig. 29), welcher als

Dreieck aufgefaſst werden kann, iſt der Schwerpunktsabſtand von der Axe XX: $y = \frac{2}{3} r \cos \varphi$, der Flächeninhalt:

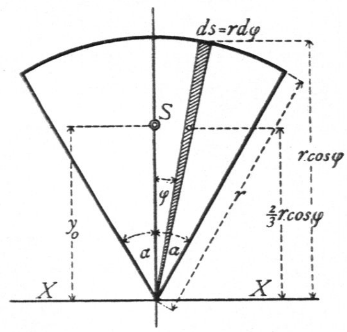
$$d f = d s \frac{r}{2} = \frac{r^2 \, d \varphi}{2} ;$$

mithin iſt

$$y_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} y \, d f}{m} = \frac{2 \int_0^{\alpha} y \, d f}{m} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \int_0^{\alpha} \cos \varphi \, d \varphi}{r^2 \alpha}$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \, \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14.$$

Fig. 29.



Für den Halbkreis wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \alpha = 1$, ſonach

$$y_0 = \frac{4 r}{3 \pi} = 0{,}425 \, r .$$

Für den Viertelkreis iſt $\alpha = \frac{\pi}{4}$, daher $y_0 = \frac{4 \sqrt{2}}{3 \pi} r = 0{,}6 \, r$.

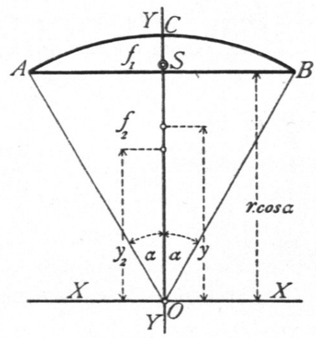
Für den Sechſtelkreis iſt $\alpha = \frac{\pi}{6}$, mithin $y_0 = \frac{2}{\pi} r = 0{,}637 \, r$.

37. Kreisabſchnitt.

ζ) Schwerpunkt eines Kreisabſchnittes (Fig. 30).

Der Schwerpunkt des Kreisabſchnittes liegt zunächſt wieder auf der Winkelhalbirenden; ferner iſt aber nach der Folgerung δ in Art. 31, wenn F der Flächeninhalt des Kreisausſchnittes $A\,C\,B\,m$, y der Abſtand des Schwerpunktes dieſer Fläche von $X\,X$ iſt, wenn ferner f_1 und f_2 die Flächeninhalte des Kreisabſchnittes $A\,C\,B$, bezw. des Dreieckes $A\,B\,m$ und y_1, bezw. y_2 die Schwerpunktsabſtände dieſer Flächen von $X\,X$ ſind,

Fig. 30.



$$F y = f_1 y_1 + f_2 y_2 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{F y - f_2 y_2}{f_1} .$$

Nun iſt $F = r^2 \alpha$, $y = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ und $f_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$;

ferner

$$y_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und} \quad f_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

mithin wird

$$y_1 = \frac{\frac{2}{3} r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{\sin 2 \alpha}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15.$$

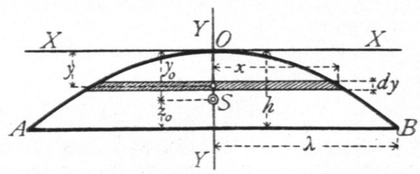
38. Parabelfläche.

η) Schwerpunkt einer Parabelfläche (Fig. 31).

Die Gleichung der Parabel $A\,m\,B$ iſt, bezogen auf O als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen,

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{y}{h} .$$

Fig. 31.



Der Schwerpunkt der Fläche $A\,B\,m$ liegt zunächſt auf der Symmetrie-Axe $Y\,Y$; der Abſtand desſelben von $X\,X$ iſt

$$y_0 = \frac{\int y \, d f}{F} = \frac{\int y \, d f}{\int d f} .$$

Es iſt $d f = 2 x \, d y$, $y = \frac{h x^2}{\lambda^2}$ und $d y = \frac{2 x h}{\lambda^2} d x$, alſo $d f = \frac{4 x^2 h}{\lambda^2} d x$, ſomit

$$y_0 = \frac{\frac{4 h^2}{\lambda^4} \int_0^{\lambda} x^4 d x}{\frac{4 h}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} x^2 d x} = \frac{h}{\lambda^2} \, \frac{3}{5} \lambda^2 = \frac{3}{5} h .$$

Der Schwerpunkt liegt alfo

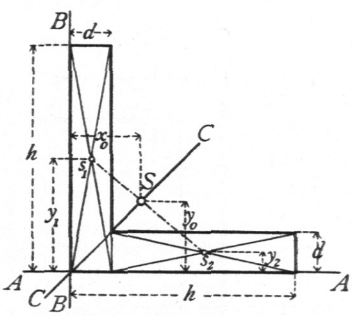
vom Scheitel O um $y_0 = \frac{3}{5} h$ . . . . 16. von der Linie AB um $z_0 = \frac{2}{5} h$ . . . . . 17.

entfernt.

3) Schwerpunkte von Querfchnittsflächen, die aus einfachen Figuren zufammengefetzt find.

α) Schwerpunkt des gleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 32). Auf die Ausrundung im Winkel und die Abrundung der Ecken foll keine Rückficht genommen werden; diefelbe kann fowohl bei diefer, wie bei den folgenden Querfchnittsformen meiftens unbeachtet gelaffen werden. 39. Winkeleifen.

Fig. 32.



Der Abftand des Schwerpunktes S von AA, bezw. BB ift

$$y_0 = x_0 = \frac{\Sigma (f y)}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Hierin ift f_1 der Flächeninhalt des lothrecht, f_2 derjenige des wagrecht gezeichneten Schenkels, bei letzterem nach Abzug des Flächentheiles, der mit dem lothrechten Schenkel zufammenfällt; y_1 und y_2 find die Abftände der Schwerpunkte von AA.

Eine angenäherte, faft ftets genügend genaue Formel wird folgendermafsen gefunden [13]). Es ift

$$y_0 = \frac{\frac{d h . h}{2} + (h-d) d \frac{d}{2}}{2 d h - d^2} = \frac{h^2 + (h-d) d}{2 (2 h - d)} = \frac{h^2 + h d - d^2}{2 (2 h - d)} = \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4} d - \frac{d^2}{8 h} \right].$$

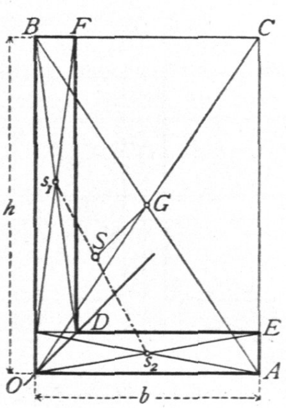
Innerhalb der für $\frac{d}{h}$ vorkommenden Grenzen liegt $\frac{d^2}{2 . 8 h}$ zwifchen $0{,}0125$ und $0{,}00625$, hat etwa den Mittelwerth $0{,}009$. Wird diefer eingeführt, fo erhält man

$$y_0 = x_0 = \frac{h}{4} + 0{,}366\, d.$$

Sehr leicht kann der Schwerpunkt durch Conftruction gefunden werden.

Man zerlege den Querfchnitt in zwei Rechtecke, ermittele deren Schwerpunkte s_1 und s_2, die nach Art. 32 (unter δ) die Schnittpunkte der Diagonalen find; dann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf der Linie $s_1 s_2$; da er auch auf der Symmetrie-Axe CC liegt, fo ift der Schnittpunkt S der genannten beiden Linien der gefuchte Schwerpunkt.

Fig. 33.



Beifpiel. Es fei die Schenkellänge $h = 10$ cm und die Dicke $d = 1$ cm; alsdann ift $f_1 = 10$ qcm, $f_2 = 9$ qcm, $y_1 = 5$ cm und $y_2 = 0{,}5$ cm; fonach

$$y_0 = \frac{10 . 5 + 9 . 0{,}5}{10 + 9} = 2{,}87 \text{ cm} = x_0.$$

Die angenäherte Formel giebt

$$y_0 = 2{,}5 + 0{,}366 = 2{,}866 \text{ cm} = x_0.$$

β) Schwerpunkt des ungleichfchenkeligen Winkeleifens (Fig. 33).

Hier ift keine Symmetrie-Axe vorhanden; man mufs alfo x_0 und y_0 getrennt berechnen. Es ift

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Die Conftruction des Schwerpunktes ift in ähnlicher Weife möglich, wie unter α [13]). Man ermittelt zunächft s_1 und s_2, wie oben; alsdann liegt der Gefammtfchwerpunkt auf $s_1 s_2$. Der Querfchnitt kann

[13]) Siehe: ZIMMERMANN. Ueber Winkeleifen-Querfchnitte. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 33.