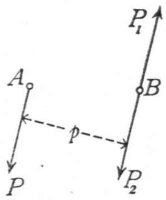
6) Eine in irgend einem Punkte A (Fig. 7) angreifende Kraft P kann ſtets erſetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte B parallel verſchobene Kraft P von gleicher Gröſse, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, deſſen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt B nach Gröſse und Drehrichtung gleich iſt.

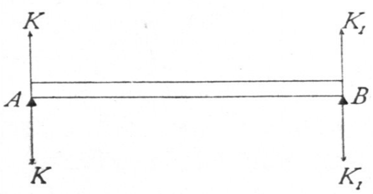
Fig. 7.



Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte B zwei Kräfte, P_1 und P_2, angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in Gröſse und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegengeſetzt ſind. Zwei dieſer drei Kräfte, P und P_1, ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, alſo auch für B, das Moment $M = Pp$ und gleiche Drehrichtung hat, wie die urſprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft P_2 iſt eben die parallel ſich ſelbſt verſchobene Kraft P. Jede Kraft P wirkt alſo auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, deſſen ſenkrechter Abſtand von der Kraft gleich p iſt, mit einem Drehmoment Pp und auſserdem ſo, als ob ſie in ihm ſelbſt angriffe.

7) Geſetz der Wechſelwirkung. Daſſelbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, ſo erleidet er durch dieſen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Gröſse nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengeſetzt iſt. 9. Geſetz der Wechſelwirkung.

Fig. 8.



Dieſes Geſetz wird in der Folge ſehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger AB (Fig. 8) übt durch ſein Eigengewicht und die wirkenden Belaſtungen auf die Auflagerpunkte A und B die Drücke K und K_1 aus; dieſelben ſind nach unten gerichtet. Genau eben ſo groſs ſind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Dieſe ſind nach oben gerichtet, da ſie den erſteren Drücken K und K_1 genau entgegengeſetzt gerichtet ſein müſſen.

Betrachtet man nur den Träger, ſo hat man die nach oben wirkenden Kräfte K und K_1 — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, ſo ſind die nach unten gerichteten Drücke K und K_1 der Unterſuchung zu Grunde zu legen.

b) Grundlagen für die graphiſche Behandlung bauſtatiſcher Aufgaben.

Die Aufgaben der Statik der Bauconſtructionen können nicht nur durch Rechnung (auf analytiſchem Wege), ſondern auch durch Zeichnung (auf graphiſchem Wege) gelöst werden. Die graphiſche Behandlung hat manche Vortheile. Dieſelbe führt in vielen Fällen raſcher und leichter zum Ziele und gewährt faſt immer eine klarere Ueberſicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung. 10. Graphiſche Methode.

In den folgenden Unterſuchungen werden meiſtens beide Wege eingeſchlagen werden. Damit über die bei der graphiſchen Behandlung vorauszuſetzenden Begriffe volle Klarheit herrſche und um Wiederholungen zu vermeiden, ſollen die Grundlagen für die graphiſche Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Dabei wird die Annahme gemacht, daſs ſämmtliche Kräfte in einer Ebene wirken.

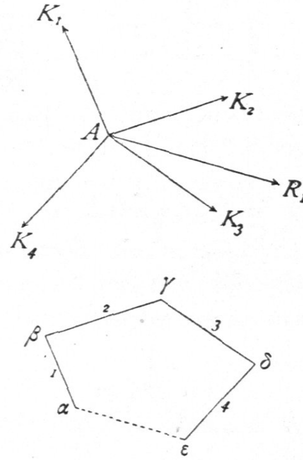
1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Reſultirende oder Mittelkraft erſetzt werden. Um dieſe Mittelkraft nach Gröſse und Richtung zu erhalten, conſtruirt man das ſog. Kraftpolygon. 11. Kraftpolygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften iſt derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man ſämmtliche Kräfte nach irgend einem Maſsſtabe ſo an einander reiht, daſs die Gröſse, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in dieſem Linienzuge mit der Gröſse, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinſtimmt und daſs der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zuſammenfällt.

Der Maſsſtab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch ſind ſämmtliche Kräfte nach demſelben Maſsſtabe aufzutragen.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 zu erhalten, welche im Punkte A (Fig. 9) angreifen, trage man zunächſt von einem beliebig anzunehmenden Punkte α aus nach irgend einem Maſsſtabe ſo viele Krafteinheiten ab, wie K_1 enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\ \beta$, welche mit derjenigen von K_1 übereinſtimmt. Iſt etwa $K_1 = 20^{\mathrm{t}}$ und der Maſsſtab ſo gewählt, daſs $1^{\mathrm{cm}} = 20^{\mathrm{t}}$ bedeutet, ſo würde man von α aus 1^{cm} abzutragen haben. Man ziehe alſo durch α eine Linie parallel zur Richtung von K_1 und trage auf dieſer Linie $\alpha\ \beta = K_1$ ab. Daran trage man K_2; zu dieſem Zwecke ziehe man durch β eine Linie parallel zur Richtung von K_2 und trage auf dieſer Linie $\beta\ \gamma = K_2$ ab. In derſelben Weiſe verfahre man weiter und erhält ſo $\gamma\ \delta = K_3$, $\delta\ \varepsilon = K_4$. Alsdann iſt $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4.

Fig. 9.



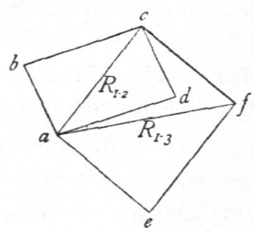
Es iſt oben angegeben, daſs der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinſtimmen muſs. In der gegebenen Kraft iſt der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, ſo daſs Unklarheit über denſelben nicht beſtehen kann; im Kraftpolygon ergiebt ſich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte ſtets ſo aufträgt, daſs die Richtung vom früheren Buchſtaben des Alphabetes bis zum höheren Buchſtaben deſſelben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinſtimmt. Die Kraft $\alpha\ \beta$ wirkt alſo im Sinne von α nach β, nicht im Sinne von β nach α.

12. Satz I. Die Gröſse, die Richtung und der Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte A (Fig. 9) angreifenden Kräfte wird erhalten, indem man den Anfangspunkt des für dieſe Kräfte conſtruirten Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte verbindet.

In Fig. 9 giebt alſo $\alpha\ \varepsilon$ die Gröſse, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus dieſen beiden Kräften conſtruirten Parallelogramms dargeſtellt, d. h. es ſtellt in Fig. 10 $a\ c$ die Mittelkraft von K_1 und K_2 nach Gröſse und Richtung dar, wenn $a\ b = K_1$, $a\ d = K_2$ iſt. Die Diagonale $a\ c$ theilt das Parallelogramm $a\ b\ c\ d$ in zwei congruente Dreiecke; es wird alſo genügen, das Dreieck $a\ b\ c$ zu conſtruiren, in welchem $a\ b = K_1$ und $b\ c = K_2$ iſt. Alsdann iſt die dritte Seite $a\ c$ des Dreieckes gleich der Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2. Das Dreieck $a\ b\ c$ iſt aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte K_1 und K_2, und $a\ c$ verbindet den Anfangspunkt a deſſelben mit dem Endpunkte c. Für zwei Kräfte iſt damit obiger Satz bewieſen.

Fig. 10.



Kommt eine dritte Kraft K_3 hinzu, ſo iſt die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2 mit K_3 zu vereinen, um die Reſultirende R_{1-3} von K_1, K und K_3 zu erhalten. Iſt $K_3 = a\ e$, ſo conſtruire man das Parallelogramm $a\ c\ f\ e$, und ziehe die Diagonale $a\ f$ deſſelben; die letztere iſt die geſuchte Mittelkraft. Auch hier genügt es, um $a\ f$ zu erhalten, nur das Dreieck $a\ c\ f$ zu zeichnen. Man erhält alſo die Mittelkraft R_{1-3}, indem man an den Endpunkt von $R_{1-2} = a\ c$ die Kraft K_3 nach Gröſse und Richtung gleich $c\ f$ anträgt und a mit f verbindet. Der Linienzug $a\ b\ c\ f$ iſt aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 und $a\ f$ die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte.

Damit iſt der Beweis unſeres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derſelben Weiſe kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon iſt nur eine Hilfsfigur, welche wohl Gröſse, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber deren Lage in der Ebene angiebt. Die Lage derſelben iſt aber nicht zweifelhaft, ſobald man auſser der Richtung der Kraft einen Punkt kennt, durch welchen die Kraft hindurchgeht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Punkt iſt auch bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte muſs durch den gemeinſchaftlichen Angriffspunkt derſelben, d. h. durch A (Fig. 9), gehen. Zieht man alſo durch A eine Linie parallel zu $\alpha\ \varepsilon$, ſo ergiebt dieſe die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die Gröſse derſelben iſt $\alpha\ \varepsilon$.

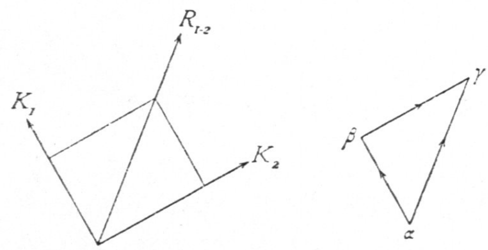
Zu jedem Kraftpolygon gehört als nothwendige Ergänzung ein Kräftemaſsſtab, der nie vergeſſen werden ſoll.

Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo iſt das Kraftpolygon eine geſchloſſene Figur. 13. Satz II.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt ihre Mittelkraft gleich Null; dieſelbe wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte dargeſtellt. Dieſe Verbindungslinie muſs alſo für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null ſein; es muſs demnach der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte zuſammen fallen, d. h. das Kraftpolygon muſs eine geſchloſſene Figur ſein.

Der Sinn der Mittelkraft iſt vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften conſtruirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte deſſelben gerichtet; der Umfahrungsſinn des ganzen Polygons mit Einſchluſs der Mittelkraft erleidet alſo am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung. 14. Satz III.

Fig. 11.



Um dieſen Satz zu beweiſen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzuſuchen. Iſt in Fig. 11 $\alpha\,\beta = K_1$ und $\beta\,\gamma = K_2$, ſo haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfahrungsſinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derſelbe bleibt, d. h. er iſt ſtets vom Anfangspunkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desſelben gerichtet. Der Sinn der Reſultirenden $R_{1-2} = \alpha\ \gamma$ iſt aber, wie ſich aus der Parallelogramm-Conſtruction in Fig. 11 ergiebt, von α nach γ gerichtet; er iſt alſo dem Umfahrungsſinne der Einzelkräfte direct entgegengeſetzt. Damit iſt der Satz für zwei Kräfte bewieſen. Jede dritte Kraft K_3 läſſt ſich aber mit R_{1-2} in derſelben Weiſe, wie bei K_1 und K_2 gezeigt, zuſammenſetzen; es handelt ſich dabei auch ſtets nur um zwei Kräfte, und es gilt deſshalb das Geſagte auch für R_{1-2} und K_3, d. h. für K_1, K_2, K_3. Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ dargeſtellten Kräfte (Fig. 9) iſt $\alpha\ \varepsilon$, der Sinn iſt von α nach ε gerichtet; der Umfahrungsſinn erleidet ſonach bei ε eine Unterbrechung.

Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt für das ganze Kraftpolygon der Umfahrungsſinn derſelbe. 15. Satz IV.

Denn alsdann iſt die Reſultirende gleich Null, und dieſe iſt nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umfahrungsſinn hat, als die übrigen Kräfte. Dieſe einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in dieſem Falle alle Kräfte denſelben Umfahrungsſinn.

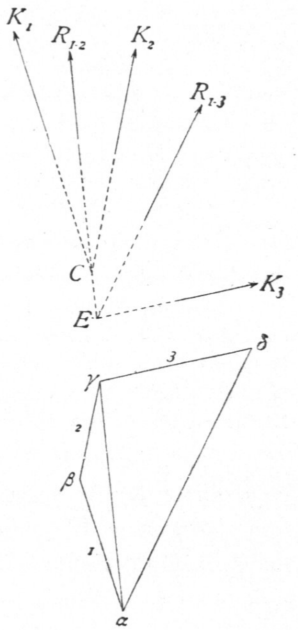
2) Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten. **Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verſchiedenen Punkten deſſelben angreifen, ſo iſt zunächſt die Ermittelung der Gröſse und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter 1 angegeben, vorzunehmen.** 16. Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten.

Denn man kann (Fig. 12) zunächſt die beiden Kräfte K_1 und K_2 auf ihren Richtungslinien beliebig verſchieben, alſo auch bis zu dem Schnittpunkte C derſelben. Für die beiden im Punkte C angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau ſo, wie oben entwickelt iſt. Iſt $K_1 = \alpha\ \beta$ und $K_2 = \beta\ \gamma$, ſo iſt $\alpha\ \gamma$ die Mittelkraft R_{1-2} von K_1 und K_2.

Dieſe Mittelkraft R_{1-2} greift in C, dem Schnittpunkte der beiden Kräfte K_1 und K_2, an und hat die Richtung, welche durch $\alpha\ \gamma$ feſt gelegt iſt, d. h. ſie iſt parallel zu $\alpha\ \gamma$. Um jetzt die Mittelkraft von

R_{1-2} und K_3, d. h. diejenige von K_1, K_2, K_3 zu finden, verfährt man genau ſo, wie bei der Zuſammenſetzung von K_1 und K_2. Man verſchiebt R_{1-2} und K_3 bis zum Schnittpunkte E ihrer Richtungslinien; in dieſem muſs die geſuchte Mittelkraft R_{1-3} angreifen. Die Zuſammenſetzung von R_{1-2} ($= \alpha\,\gamma$ im Kraftpolygon) und K_3 ($= \gamma\,\delta$ im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weiſe erfolgen, indem man $\gamma\,\delta = K_3$ an γ anträgt und $\alpha\,\delta$ zieht. $\alpha\,\delta$ giebt die Gröſse und Richtung der Mittelkraft R_{1-3} von K_1, K_2, K_3 an; dieſelbe geht durch den Punkt E. In der gleichen Weiſe kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

Fig. 12.



Wenn die Gröſse und Richtung der Mittelkraft gefunden iſt, iſt auch die Lage derſelben bekannt, ſobald ein Punkt bekannt iſt, durch welchen ſie gehen muſs; denn durch dieſen Punkt läſſt ſich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen. Ein ſolcher Punkt iſt in Fig. 12 bei R_{1-2} der Punkt C, bei R_{1-3} der Punkt E etc.

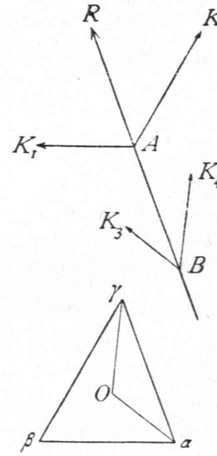
17. Seil-polygon. Bei einer groſsen Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittelung der Lage der Mittelkraft ſehr umſtändlich ſein; deſshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconſtruction eingeführt, das ſog. Seilpolygon. Daſſelbe ergiebt ſich durch die folgende Betrachtung.

Wie man die Gröſse und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 in der dritten Seite $\alpha\,\gamma$ (Fig. 13) des für die beiden Kräfte conſtruirten Kraftpolygons $\alpha\,\beta\,\gamma$, hier der Schluſsſeite des Kraftdreieckes, findet, ſo kann man auch irgend eine gegebene Kraft R als Mittelkraft zweier Kräfte K_1 und K_2 auffaſſen. Dieſe beiden Kräfte müſſen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

α) Das aus ihnen conſtruirte Kraftpolygon muſs als dritte Seite die gegebene Kraft nach Gröſse und Richtung enthalten, und

β) die beiden Kräfte müſſen ſich auf einem Punkte der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden.

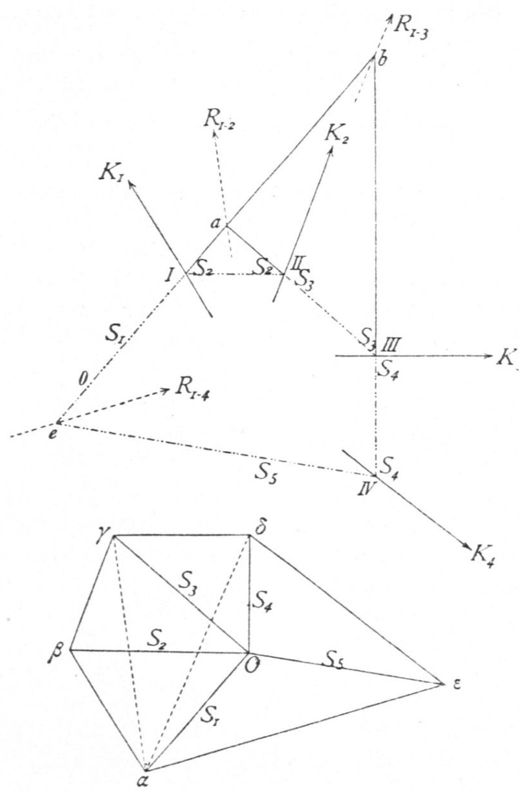
Fig. 13.



Man kann alſo R als Mittelkraft der beiden Kräfte K_1 und K_2 auffaſſen, die im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\,\beta$ und $\beta\,\gamma$ dargeſtellt ſind und deren Richtungslinien ſich auf dem Punkte A der Kraftrichtung R ſchneiden. In gleicher Weiſe kann R auch als Mittelkraft der beiden Kräfte K_3 und K_4 angeſehen werden, denen das Kraftdreieck $\alpha\,O\,\gamma$ entſpricht, die alſo im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\,O$ und $O\,\gamma$ dargeſtellt werden und deren Richtungslinien ſich im Punkte B der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft R ſowohl durch die Kräfte K_1 und K_2, wie durch K_3 und K_4 erſetzen. Daraus folgt, daſs man für die Zerlegung einer gegebenen Kraft den Punkt O ganz beliebig, den Punkt B auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.

Iſt nun eine gröſsere Anzahl von Kräften K_1, K_2, K_3, K_4 .... gegeben (Fig. 14), ſo kann man zunächſt K_1 in der angegebenen Weiſe zerlegen. K_1 werde im Kraftpolygon durch $\alpha\,\beta$ dargeſtellt und möge in $\alpha\,O = S_1$ und $O\,\beta = S_2$ zerlegt werden. Nach Früherem iſt, da K_1 den Sinn von α nach β hat, S_1 von α nach O, S_2 von O nach β gerichtet. Als Schnittpunkt dieſer beiden Seitenkräfte von K kann der Punkt I auf der Richtungslinie von K_1 beliebig angenommen werden. Ferner kann K_2, welches im Kraftpolygon durch $\beta\,\gamma$ dargeſtellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit $\beta\,\gamma$ zuſammen ein Dreieck bilden müſſen. Die Spitze des Dreieckes kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann alſo den Punkt O als dieſe Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von K_2 ($= \beta\,\gamma$) die Kraftlinien $\beta\,O$ und $O\,\gamma$. Die erſte dieſer Seitenkräfte iſt nach Gröſse und Richtung

Fig. 14.



der zweiten Seitenkraft von K_1 genau gleich, da dieſe $O\,\beta$ war. $S_2 = \beta\, O$ hat den Sinn von β nach O, $S_3 = O\,\gamma$ den Sinn von O nach γ. Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft K_2 den Punkt II, in welchem die Richtungslinie der Kraft K_2 von der zweiten Seitenkraft S_2 der Kraft K_1 geſchnitten wird, ſo greifen in dieſem Punkte die beiden Kräfte S_2 und S_3 an. In der Richtungslinie $I\ II$ wirken alſo die beiden Kräfte S_2, deren eine in I, deren andere in II angreift. Beide ſind, wie eben entwickelt iſt, der Gröſse nach einander gleich; ſie haben dieſelbe Richtung, aber entgegengeſetzten Sinn, heben ſich alſo gegenſeitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte K_1 und K_2 ſind alſo durch vier neue Kräfte erſetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3; zwei von dieſen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden S_2; es bleiben alſo zwei Kräfte S_1 und S_3, welche die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 vollſtändig erſetzen. Die Mittelkraft von K_1 und K_2 iſt demnach derjenigen von S_1 und S_3 gleich in der Gröſse, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von S_1 und S_3 geht aber durch den Schnittpunkt a der Richtungslinien derſelben; durch dieſen Punkt a muſs alſo auch die Mittelkraft von K_1 und K_2 gehen.

Verfährt man nun mit der dritten Kraft K_3 eben ſo, wie mit K_2, d. h. zerlegt man K_3 in zwei Seitenkräfte ſo, daſs der Punkt O als Spitze des Kraftdreieckes für die Zerlegung von $K_3 = \gamma\,\delta$ gewählt wird, ſo werden die beiden Seitenkräfte $S_3 = \gamma\, O$ und $S_4 = O\,\delta$ ſein. Die erſte dieſer beiden Seitenkräfte iſt wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von K_2, hat aber entgegengeſetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von K_3 den Punkt III, in welchem die Richtungslinie von K_3 durch die Richtungslinie der Seitenkraft S_3 der Kraft K_2 geſchnitten wird, ſo wirken in der Linie $II\ III$ zwei Kräfte S_3, welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte K_1, K_2, K_3 ſind jetzt durch ſechs Kräfte erſetzt, nämlich durch S_1, S_2, S_2, S_3, S_3, S_4, von denen ſich die vier mittleren, die beiden S_2 und die beiden S_3, gegenſeitig aufheben, ſo daſs nur S_1 und S_4 übrig bleiben. Die Mittelkraft von S_1 und S_4 iſt alſo auch diejenige von K_1, K_2 und K_3. Daraus folgt, daſs die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 durch den Schnittpunkt der Kraftrichtungen S_1 und S_4, alſo durch den Punkt b geht.

Verfährt man ſo weiter, ſo erhält man einen Linienzug $O\ I\ II\ III\ IV \ldots$, welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorſtehenden Erklärung der Entſtehung ergiebt ſich folgender Satz:

Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonſeite, welche der erſten dieſer Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonſeite, welche auf die letzte dieſer Kräfte folgt. 18. Satz V.

Denn die in den mittleren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte heben ſich ſämmtlich gegenſeitig auf, und es bleiben nur die in den äuſseren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft mit derjenigen der gegebenen Kräfte in jeder Beziehung übereinſtimmt [2]).

Den Punkt O (Fig. 14) nennt man den Pol des Seilpolygons.

Durch das Kraft- und Seilpolygon iſt die Mittelkraft ganz beliebig in einer Ebene wirkender Kräfte beſtimmt. Die Gröſse, die Richtung und den Sinn derſelben

---

[2]) Kehrt man die Richtungen der in einem Eckpunkte des Seilpolygons wirkenden zwei Seitenkräfte S um, ſo halten ſich dieſelben offenbar mit der auf den Eckpunkt wirkenden Kraft K im Gleichgewicht. In jedem Eckpunkte eines Seilpolygons befindet ſich demnach die äuſsere Kraft K mit den im entgegengeſetzten Sinne genommenen Spannungen S im Gleichgewicht.

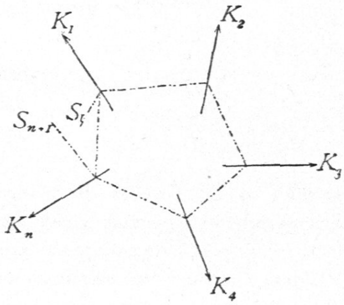
giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da dasselbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergiebt. Zieht man durch diesen eine Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, so erhält man die wirkliche Lage derselben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrschen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der sämmtlichen wirkenden Kräfte, sondern auch einer beliebigen Gruppe dieser Kräfte ergeben. So ist die Mittelkraft von K_1 und K_2 (Fig. 14) nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\gamma$ und geht durch a. Zieht man also durch a eine Linie parallel zu $\alpha\gamma$, so erhält man diese Mittelkraft R_{1-2}. So ist ferner die Mittelkraft von K_1, K_2 und K_3 nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\delta$ und geht durch b; eine durch b parallel zu $\alpha\delta$ gezogene Linie ergiebt R_{1-3}. Die Mittelkraft von K_1, K_2, K_3 und K_4 ist nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\varepsilon$ und geht durch e etc.

19. Satz VI. Wenn die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so ist sowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine geschlossene Figur.

Dass das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine geschlossene Figur sein muss, geht aus dem Früheren hervor; denn es ist nachgewiesen, dass das Kraftpolygon für an verschiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben so construirt wird und genau dieselbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte. Es muss also nach Satz II das Kraftpolygon eine geschlossene Figur sein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen.

Fig. 15.



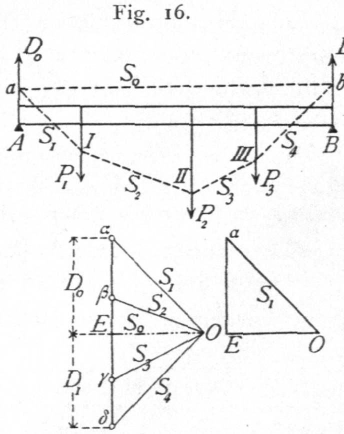
Dass sich auch das Seilpolygon schliessen muss, ergiebt sich folgendermassen.

Construirt man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, so heben sich, wie oben auseinandergesetzt, die sämmtlichen in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äussersten Seilpolygonseiten wirken, d. h. diejenige, welche der ersten Kraft K_1 vorangeht, und diejenige, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, also S_1 und S_{n+1} (Fig. 15). Diese beiden Kräfte ersetzen alle gegebenen Kräfte K_1, K_2, $K_3 \ldots K_n$. Die letzteren sind nach der Voraussetzung im Gleichgewicht; folglich müssen auch S_1 und S_{n+1} im Gleichgewicht sein. Gleichgewicht zwischen zwei Kräften ist aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. Es muss also diejenige Seilpolygonseite, welche der ersten Kraft K_1 vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte Kraft K_n folgt, zusammenfallen, d. h. das Seilpolygon muss eine geschlossene Figur sein.

Die schliessende Seilpolygonseite nennt man die **Schlusslinie des Seilpolygons.**

In der Statik der Bauconstructionen kommt sehr häufig der Fall vor, dass alle wirksamen Kräfte parallel sind. In diesem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade. Sind diese Kräfte im Gleichgewicht, so schliesst sich nach Satz VI das Kraftpolygon; es fallen also dann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zusammen.

Fig. 16.



Für neben stehenden Balken AB (Fig. 16) sei im Kraftpolygon $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; das Kraftpolygon muss sich schliessen, wenn die ausserdem noch wirkenden Kräfte D_1 und D_0, die Stützendrücke, an δ angetragen werden, d. h. es müssen D_0 und D_1, welche, eben so wie

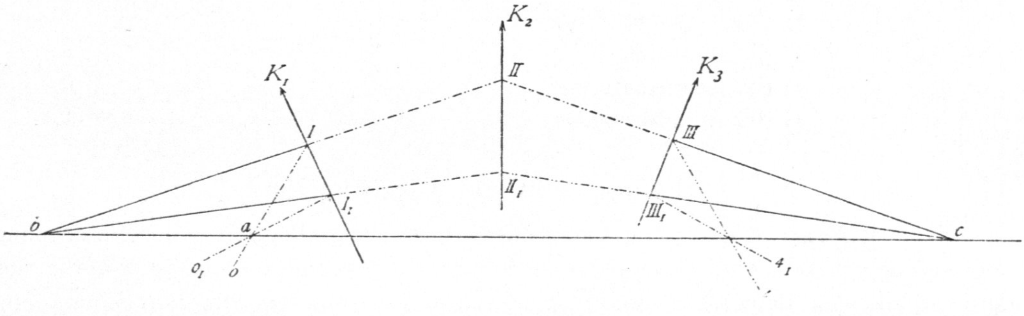
P_1, P_2, P_3, lothrecht ſind, mit $\delta\,\alpha$ zuſammenfallen, und der Endpunkt von D_0 muſs auf α fallen. Unbekannt iſt zunächſt noch der Punkt E im Kraftpolygon, welcher die Grenze zwiſchen D_1 und D_0 bildet. Da aber Gleichgewicht ſtattfindet, ſo muſs ſich auch das Seilpolygon ſchlieſsen, welches für einen beliebigen Pol und die fünf Kräfte P_1, P_2, P_3, D_1, D_0 conſtruirt wird. Es ſei der Pol O, das Seilpolygon $I\ II\ III$ und a der Schnittpunkt der erſten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von D_0, b der Schnittpunkt der letzten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von D_1; alsdann müſſen nach dem Satze VI die vor D_0 liegende und die auf D_1 folgende Seilpolygonſeite, d. h. S_0 und S_{n+1} zuſammenfallen; es muſs alſo $a\,b$ die ſchlieſsende Seilpolygonſeite, d. h. die Schluſslinie des Seilpolygons ſein.

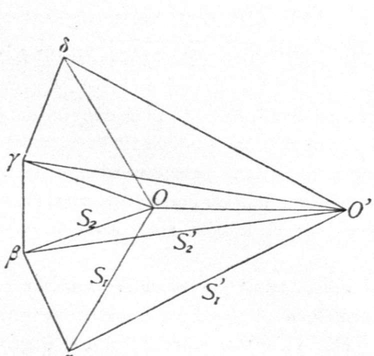
Nach der Erklärung des Seilpolygons in Art. 17 (S. 12) ſtellen die von den Ecken des Kraftpolygons nach dem Pol O laufenden Strahlen die in den Seilpolygonſeiten auftretenden Kräfte oder, wie man ſagt, die Spannungen im Seilpolygon vor, natürlich in demſelben Maſsſtabe, in welchem die Kräfte P aufgetragen ſind. Im Punkte a des Seilpolygons halten ſich nun folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Stützendruck D_0, die Spannung in der Seilpolygonſeite $a\ I$ und diejenige in der Schluſslinie $a\ b$ (beide in dem gleichen Sinne, wie in Fuſsnote 2 [S. 13] genommen). Von allen dieſen drei Kräften ſind die Richtungen bekannt, von einer — der Seilpolygonſpannung in $a\ I$ — auch die Gröſse; dieſelbe iſt gleich $\alpha\ O$. Man kann alſo für dieſe drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, conſtruiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft $\alpha\ O$, durch α, eine Parallele zur Richtung von D_0, durch den anderen Endpunkt, durch O, eine Parallele zur Schluſslinie $a\ b$ zieht. Dann iſt $O\ E\ \alpha$ das geſuchte Kraftdreieck, $E\,\alpha = D_0$ und $O\ E$ gleich der Seilſpannung in der Schluſslinie. Gewöhnlich benutzt man zu dieſer Conſtruction unmittelbar das Kraftpolygon $\alpha \ldots \delta$. Selbſtverſtändlich iſt dann auch ſofort $\delta\,E = D_1$, da $D_0 + D_1 = P_1 + P_2 + P_3$ iſt.

Hieraus ergiebt ſich die Regel: Die Stützendrücke bei einem Träger auf zwei Stützen mit nur lothrechten Kräften werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon conſtruirt, die Schluſslinie und parallel zu dieſer eine Linie durch den Pol zieht; letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Gröſse und Richtung die Stützendrücke darſtellen.

Conſtruirt man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verſchiedenen Polen die entſprechenden Seilpolygone, ſo liegen die ſämmtlichen Schnittpunkte der gleich- 20. Satz VII.

Fig. 17.





vielten Seilpolygonſeiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel iſt.

Das aus einem beliebigen Pole O (Fig. 17) conſtruirte Seilpolygon ſei $o\ I\ II\ III\ 4$, das aus einem anderen Pole O' conſtruirte ſei $o_1\ I_1\ II_1\ III_1\ 4_1$. Alsdann ſchneiden ſich die beiden erſten Seiten $o\ I$ und $o_1\ I_1$ in a, die beiden zweiten Seiten $I\ II$ und $I_1\ II_1$ in b, die dritten Seiten $II\ III$ und $II_1\ III_1$ in c etc. Die ſämmtlichen Punkte $a, b, c, d \ldots$ liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu $O\ O'$ parallel iſt.

Nach der Erklärung des Seilpolygons iſt $K_1 = \alpha\ \beta$ im erſten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1 und S_2 zerlegt, deren

Gröfse und Richtung fich im Kraftpolygon zu bezw. αO und $O \beta$ ergiebt; diefelbe Kraft ift im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte S_1' und S_2' zerlegt, deren Gröfse und Richtung bezw. $\alpha O'$ und $O' \beta$ ift. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte S_1' und S_2' umgekehrt, fo find diefe beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft K_1, welche mit der gegebenen Kraft K_1 nach Gröfse und Richtung genau übereinftimmt, deren Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengefetzt ift. Diefe neue Kraft K_1 mufs fich alfo mit der gegebenen Kraft K_1 im Gleichgewicht halten; folglich müffen auch die vier Seitenkräfte diefer beiden Kräfte K_1 im Gleichgewicht fein. Verbindet man S_1 und S_1' zu einer, S_2 und S_2' zur anderen Mittelkraft, fo geht die erftere durch den Schnittpunkt a diefer beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt b der beiden Kräfte S_2 und S_2'. Beide Mittelkräfte halten fich im Gleichgewichte, fie müffen alfo in eine gerade Linie fallen; diefelbe ift durch die beiden Punkte a und b, durch welche beide Mittelkräfte gehen müffen, beftimmt.

Nun ift die Mittelkraft von S_1 und S_1' nach Gröfse und Richtung die Schlufslinie des Kraftpolygons $O' \alpha O$, d. h. $O' O$. Die Richtungslinie der Mittelkraft ift alfo parallel zu $O' O$, d. h. die Linie $a b$ ift parallel zu $O' O$, zur Verbindungslinie der beiden Pole.

Genau in derfelben Weife ift es unfchwer zu beweifen, dafs der Schnittpunkt b von S_2 und S_2' mit dem Schnittpunkte c von S_3 und S_3' auf einer zu $O O'$ parallelen Geraden liegt, d. h. auf der Linie $a b$, da durch b zu $O O'$ nur eine Parallele möglich ift, womit der obige Satz bewiefen ift.

---

2. Kapitel.

Aeufsere Kräfte, Schwerpunkte, ftatifche und Trägheitsmomente.

a) Belaftungen.

Als Belaftungen der Conftructionen treten auf:

1) das Eigengewicht,
2) die Nutzlaft,
3) die Schneelaft und
4) der Winddruck.

1) Eigengewicht der Conftruction.

21. Eigengewichte.

Das Eigengewicht der Conftruction ift beim Beginne jeder Berechnung nur angenähert bekannt. Für die gewöhnlichen Anordnungen genügt es, die aus den vorhandenen Bauwerken ermittelten Erfahrungswerthe bei der Berechnung einzuführen. Meiftens kann man das Eigengewicht mit hinreichender Genauigkeit als gleichmäfsig über die ganze Ausdehnung (des Trägers, der Balkendecke, des Daches etc.) vertheilt annehmen.

Neben ftehend (unter α, a) find die Eigengewichte einiger wichtiger Bauftoffe und (unter α, b) diejenigen von verfchiedenen Bautheilen angegeben, und zwar in der Gröfse, wie fie vom Berliner Polizei-Präfidium nach einer Bekanntmachung vom 21. Februar 1887 den Berechnungen zu Grunde gelegt werden. Die Zufammenftellung (unter b) »Eigengewichte und Belaftung von Bautheilen« enthält in der letzten Spalte auch die Nutzlaft, welche erft im folgenden Artikel befprochen werden foll; es fcheint aber dennoch zweckmäfsig, die betreffenden Angaben hier fogleich mit zu machen.

Die Angaben der Tabellen unter α genügen in fehr vielen Fällen nicht; insbefondere find die Angaben über Eigengewichte der Dächer nicht ausreichend. Bei denfelben ift das Eigengewicht gar nicht von den anderen, zum Theile fchief wirkenden Laften getrennt. Die Tabellen unter β, γ und δ geben einige Vervollftändigungen.