

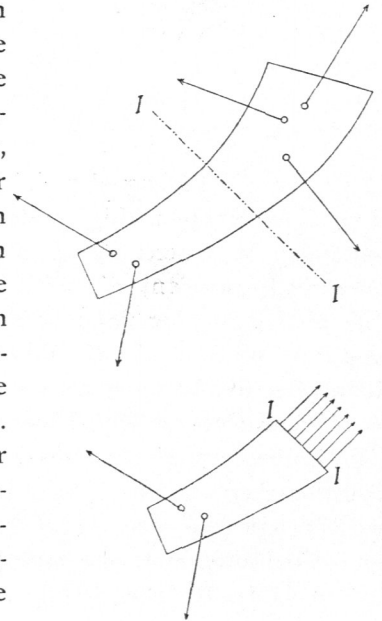
drücke dürfen demnach nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar sein soll; anderenfalls ist zur Ermittlung derselben die Elasticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

4.
Ermittlung
der inneren
Kräfte.

Nachdem die sämtlichen äußeren Kräfte gefunden sind, müssen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgesucht werden. Das hierbei einzuschlagende Verfahren ist folgendes.

Man denkt sich durch den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, eine Ebene II (Fig. 1) hindurchgelegt und untersucht nur den Theil an der einen Seite dieser Ebene; hier möge der Theil links von II betrachtet werden. Auf diesen Theil werden von dem an der anderen Seite der Ebene II liegenden Körpertheile gewisse innere Kräfte übertragen, welche denselben im Vereine mit den auf ihn wirkenden äußeren Kräften im Gleichgewichte halten; denn nicht nur der ganze Körper, sondern auch jeder Theil desselben muß unter der Einwirkung aller auf ihn wirkenden Kräfte, der äußeren und der inneren, im Gleichgewichte sein. Bringt man demnach die inneren Kräfte am linken Körpertheile an, so kann man auf die sämtlichen jetzt auf diesen Theil wirkenden Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus diesen die nach Größe und Richtung unbekannten inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, stehen auch hier, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, nur drei Bedingungsgleichungen zu Gebote; deshalb ist auch hier die Ermittlung der unbekannten inneren Kräfte auf diesem Wege nur möglich, wenn dieselben nicht mehr als drei Unbekannte enthalten. Selbstverständlich ist das Ergebnis das gleiche, ob man den Körpertheil an der einen oder anderen Seite der Ebene II untersucht.

Fig. 1.



Die aus Vorstehendem sich ergebende Regel wird auch wohl folgendermaßen ausgedrückt: Man lege durch den Körper einen Schnitt II , denke den Theil an der einen Seite des Schnittes fortgenommen und bringe an dem übrig bleibenden Bruchstück alle Kräfte an, welche vor dem Durchschneiden auf dasselbe wirkten, d. h. die äußeren Kräfte und die an der Schnittstelle von dem anderen Bruchstück übertragenen inneren Kräfte. Alsdann befindet sich dasselbe in demselben Zustande wie vor dem Durchschneiden, d. h. im Gleichgewichte; man stelle nun für diese Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

a) Grundgesetze der Statik fester Körper.

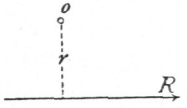
Ogleich die Statik fester Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgesetzt werden kann, sollen im Folgenden doch einige der wichtigsten anzuwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrsche.

5.
Statische
Momente.

1) Satz des statischen Momentes. Bekanntlich ist das statische Moment einer Kraft R in Bezug auf einen Punkt o (Fig. 2) das Product aus der Größe der

Kraft R in den senkrechten Abstand der Richtung dieser Kraft vom Punkte o , d. h. das statische Moment von R in Bezug auf den Punkt o ist $M = R r$.

Fig. 2.



Dabei wird der senkrechte Abstand r der Krafrichtung vom Punkte o der Hebelsarm der Kraft R für o genannt.

Aus dieser Erklärung folgt, daß die statischen Momente stets Producte von Kräften und Längen sind. Die Maßeinheiten, in denen sie ausgedrückt werden, sind demnach Producte aus Längen- und Kräfteinheiten. Ist die Kraft in Kilogrammen, die Länge in Centimetern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Kilogramm-Centimetern; ist die Kraft in Tonnen, die Länge in Metern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Tonnen-Metern¹⁾ etc.

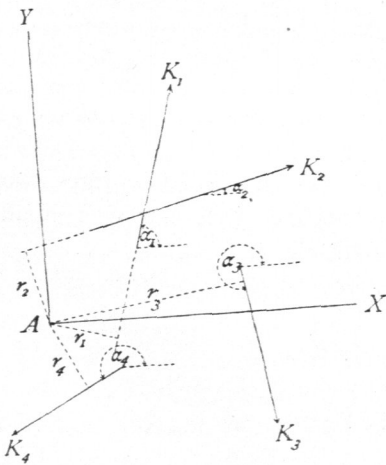
Die Kraft R hat das Bestreben, die Ebene um den als fest gedachten Punkt o , bzw. um eine im Punkte o senkrecht zur Kraftebene errichtete Axe zu drehen, hier also nach links. Wenn die statischen Momente mehrerer in derselben Ebene liegenden Kräfte aufzustellen sind, so ist zu beachten, daß die verschiedenen Kräfte allgemein verschiedene Drehrichtungen haben. Welche von diesen als positiv eingeführt wird, ist gleichgültig; ist aber die eine Drehrichtung als positiv angenommen, so ist die entgegengesetzte als negativ einzuführen.

Da Anfänger sich leicht bezüglich der für ein Moment einzuführenden Drehrichtung irren, so ist die Angabe der folgenden Regel wohl nicht überflüssig. Man denke sich den Hebelsarm durch eine Kurbel ersetzt, deren Axe mit der Drehaxe der statischen Momente zusammenfällt; die Drehrichtung der Kurbel ist auch diejenige des Momentes der Kraft.

Der in Folgendem häufig anzuwendende Satz des statischen Momentes lautet: Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Dieser Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittlung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das statische Moment aufstellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, so hat die letztere in Bezug auf diesen Punkt den Hebelsarm Null, also auch das statische Moment Null. Für diesen besonderen Fall heißt der obige Satz: Die algebraische Summe der statischen Momente einer

Fig. 3.



Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt ist gleich Null.

2) Satz vom Gleichgewichte der Kräfte. Derselbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte sind im Gleichgewichte, wenn die algebraische Summe der in zwei senkrecht zu einander stehende, sonst beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null ist und außerdem die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

Man zerlege demnach sämtliche Kräfte ($K_1, K_2, K_3 \dots$ in Fig. 3) nach zwei zu einander senkrechten Richtungen, von denen die

6.
Gleichgewicht
der
Kräfte.

¹⁾ Ein Tonnen-Meter ist gleich 100 Tonnen-Centimetern und gleich 100000 Kilogramm-Centimetern. Danach kann ein Moment, welches in der einen Einheit, etwa in Tonnen-Metern, berechnet ist, leicht in eine andere Einheit, etwa Kilogramm-Centimeter, umgerechnet werden.

eine ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die sämtlichen Kräfte die Gleichungen:

$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0, \quad \Sigma (K \sin \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma (K r) = 0.$$

Hier ist A als Momentenpunkt angenommen; es hätte indess auch jeder beliebige andere Punkt der Kraftebene gewählt werden können.

In sehr vielen Fällen ist die Mehrzahl aller äusseren Kräfte lothrecht gerichtet; alsdann empfiehlt es sich, die Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots$ nach der wagrechten und lothrechten Richtung zu zerlegen. In diesem Falle heissen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

- α) die algebraische Summe der wagrechten Seitenkräfte gleich Null ist,
- β) die algebraische Summe der lothrechten Seitenkräfte gleich Null ist,
- γ) die algebraische Summe der statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null ist.

7.
Zwei Kräfte
auf einen Körper
wirksam;
Kräftepaar.

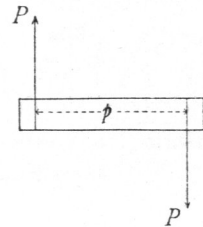
3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denselben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Grösse nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengesetzt sind und mit ihren Richtungslinien zusammenfallen (Fig. 4); denn nur dann sind alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.

Fig. 4.



Haben zwei Kräfte P (Fig. 5) parallele Richtung, gleiche Grösse und entgegengesetzten Sinn, fallen sie aber mit ihren Richtungslinien nicht zusammen, so ist allerdings jede der beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei solche Kräfte ein Kräftepaar und versteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Grösse der Kraft P in den senkrechten Abstand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ist das Moment $M = Pp$.

Fig. 5.



Es ist wohl zu beachten, dass die Summe der statischen Momente beider zu dem Kräftepaar vereinten Kräfte für jeden beliebigen Punkt der Ebene die gleiche Grösse $M = Pp$ hat. In den Berechnungen kommt vielfach das (unter Umständen vorläufig noch unbekannte) Moment M eines Kräftepaares vor; wird alsdann für einen beliebigen Punkt der Ebene die algebraische Summe der statischen Momente aufgestellt, so ist, wo auch der Punkt liege, der Beitrag des Kräftepaares mit dem Werthe M einzuführen.

8.
Drei Kräfte
auf einen Körper
wirksam.

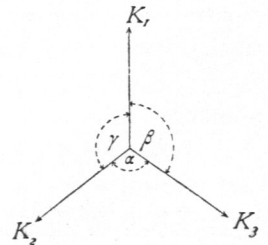
4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte sind nur dann im Gleichgewichte, wenn sich ihre Richtungslinien in einem Punkte schneiden, jede der drei Kräfte absolut genommen genau eben so gross ist, wie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Mittelkraft einen Winkel von 180 Grad einschliesst.

5) Wenn drei in derselben Ebene liegende Kräfte, welche sich in einem Punkte schneiden, im Gleichgewichte sind, so verhalten sich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte K_1, K_2 und K_3 (Fig. 6) befinden sich sonach im Gleichgewicht, wenn

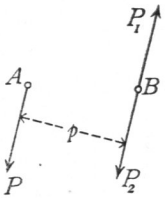
$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Fig. 6.



6) Eine in irgend einem Punkte A (Fig. 7) angreifende Kraft P kann stets ersetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte B parallel verschobene Kraft P von gleicher GröÙe, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, dessen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt B nach GröÙe und Drehrichtung gleich ist.

Fig. 7.



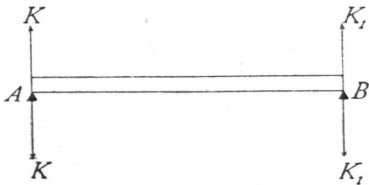
Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte B zwei Kräfte, P_1 und P_2 , angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in GröÙe und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt sind. Zwei dieser drei Kräfte, P und P_1 , ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, also auch für B , das Moment $M = Pp$ und gleiche Drehrichtung hat, wie die ursprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft P_2 ist eben die parallel sich selbst

verschobene Kraft P . Jede Kraft P wirkt also auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, dessen senkrechter Abstand von der Kraft gleich p ist, mit einem Drehmoment Pp und außerdem so, als ob sie in ihm selbst angriffe.

7) Gesetz der Wechselwirkung. Dasselbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, so erleidet er durch diesen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der GröÙe nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengesetzt ist.

9.
Gesetz
der Wechsel-
wirkung.

Fig. 8.



Dieses Gesetz wird in der Folge sehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger AB (Fig. 8) übt durch sein Eigengewicht und die wirkenden Belastungen auf die Auflagerpunkte A und B die Drücke K und K_1 aus; dieselben sind nach unten gerichtet. Genau eben so groß sind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Diese sind nach oben gerichtet, da sie den ersteren Drücken K und K_1 genau entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Betrachtet man nur den Träger, so hat man die nach oben wirkenden Kräfte K und K_1 — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, so sind die nach unten gerichteten Drücke K und K_1 der Untersuchung zu Grunde zu legen.

b) Grundlagen für die graphische Behandlung baustatischer Aufgaben.

Die Aufgaben der Statik der Bauconstructions können nicht nur durch Rechnung (auf analytischem Wege), sondern auch durch Zeichnung (auf graphischem Wege) gelöst werden. Die graphische Behandlung hat manche Vortheile. Dieselbe führt in vielen Fällen rascher und leichter zum Ziele und gewährt fast immer eine klarere Uebersicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung.

10.
Graphische
Methode.

In den folgenden Untersuchungen werden meistens beide Wege eingeschlagen werden. Damit über die bei der graphischen Behandlung vorauszusetzenden Begriffe volle Klarheit herrsche und um Wiederholungen zu vermeiden, sollen die Grundlagen für die graphische Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Dabei wird die Annahme gemacht, daß sämtliche Kräfte in einer Ebene wirken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Resultirende oder Mittelkraft ersetzt werden. Um diese Mittelkraft nach GröÙe und Richtung zu erhalten, construirt man das sog. Kraft-polygon.

11.
Kraft-
polygon.