MAURER, M. *Statique graphique appliquée aux conftructions, toitures, planchers, poutres etc.* Paris 1882. — 2. Aufl. 1885.
GRAHAM, R. H. *Graphic and analytic ftatics in theory and comparifon etc.* London 1883. (New York 1887.)
WILDA, E. Statik fefter Körper. Brünn 1884.
JENTZEN, E. Baumechanik mit befonderer Rückficht auf die Berechnung der Träger und Stützen aus Holz und Eifen etc. Hamburg 1886.
FLAMANT, A. *Stabilité des conftructions, réfiftance des matériaux.* Paris 1886.
Praktifche Unterrichtsbücher für Bautechniker. III. Die Feftigkeitslehre und die Statik im Hochbau. Von H. DIESENER. Halle 1886.
HAUSSER, A. E. & L. CUNQ. *Statique graphique appliquée etc.* Paris. Erfcheint feit 1886.
SCHLOTKE, J. Lehrbuch der graphifchen Statik. Hamburg 1887.
RITTER, W. Anwendungen der graphifchen Statik. Zürich. Erfcheint feit 1888.

## 1. Kapitel.

# Allgemeines.

Für die Löfung der zwei in Art. 1 bezeichneten Aufgaben ift die Kenntnifs derjenigen Kräfte nöthig, welche bei den verfchiedenartigen möglichen Belaftungszuftänden im Inneren der Conftructionen entftehen, d. h. der fog. inneren Kräfte oder Spannungen, die wohl auch widerftehende Kräfte genannt werden. Die inneren Kräfte aber ftehen wiederum in einem ganz beftimmten Verhältnifs zu den von aufsen auf die Conftructionen wirkenden Kräften, zu den fog. äufseren Kräften, welche auch als die angreifenden Kräfte bezeichnet werden. 2. Aeufsere und innere Kräfte.

Eine jede ftatifche Unterfuchung zerfällt defshalb zunächft in zwei Theile: in die Ermittelung der äufseren Kräfte, bezw. der für den zu unterfuchenden Conftructionstheil ungünftigften äufseren Kräfte, und in die Ermittelung der inneren Kräfte oder Spannungen, welche durch die äufseren Kräfte hervorgerufen werden.

Die äufseren Kräfte laffen fich in zwei Hauptgruppen theilen:

1) Die Belaftungen. Diefelben find beim Beginne der Unterfuchung nur zum Theile bekannt; die Eigengewichte z. B. find zunächft noch unbekannt, da erft die vorzunehmende Berechnung die genauen Abmeffungen und damit die Gewichte feft ftellen foll. Meiftens find aber ähnliche Conftructionen ausgeführt und bekannt, und nach diefen kann das Eigengewicht annähernd beftimmt werden.

2) Die Auflager- oder Stützendrücke derjenigen feften Punkte, welche die zu betrachtenden Conftructionen ftützen. Diefelben find meiftens von vornherein nicht gegeben und find nach den Gefetzen der Statik, bezw. der Elafticitätslehre zu ermitteln.

Da die Statik der Bauconftructionen fich nur mit folchen Körpern befchäftigt, welche unter der Einwirkung der äufseren Kräfte im Gleichgewichte find, fo kann man für die fämmtlichen äufseren Kräfte, welche auf eine Conftruction wirken, die Gleichgewichtsbedingungen aufftellen und mittels der fo gefundenen Gleichungen die unbekannten äufseren Kräfte, die Stützendrücke, ermitteln. Man führt die letzteren defshalb als vorläufig unbekannte Kräfte ein und ftellt die Gleichgewichtsbedingungen auf. So lange die Kräfte in einer Ebene wirken, wie es in den hier zu betrachtenden Fällen meiftens ftattfindet, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen, alfo auch drei Gleichungen für die Ermittelung der Unbekannten. Aus drei Gleichungen kann man aber nur drei Unbekannte finden; find alfo mehr als drei Unbekannte vorhanden, fo genügt die angegebene Methode nicht mehr. Die Gleichungen für die Stützen- 3. Ermittelung der äufseren Kräfte.

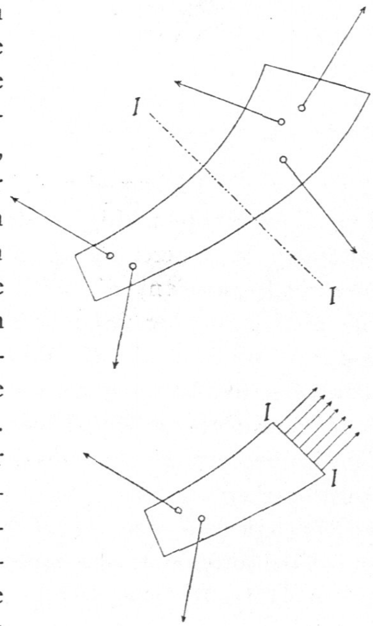
drücke dürfen demnach nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar ſein ſoll; anderenfalls iſt zur Ermittelung derſelben die Elaſticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

4. Ermittelung der inneren Kräfte.

Nachdem die ſämmtlichen äuſseren Kräfte gefunden ſind, müſſen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgeſucht werden. Das hierbei einzuſchlagende Verfahren iſt folgendes.

Man denkt ſich durch den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, eine Ebene *I I* (Fig. 1) hindurchgelegt und unterſucht nur den Theil an der einen Seite dieſer Ebene; hier möge der Theil links von *I I* betrachtet werden. Auf dieſen Theil werden von dem an der anderen Seite der Ebene *I I* liegenden Körpertheile gewiſſe innere Kräfte übertragen, welche denſelben im Vereine mit den auf ihn wirkenden äuſseren Kräften im Gleichgewichte halten; denn nicht nur der ganze Körper, ſondern auch jeder Theil deſſelben muſs unter der Einwirkung aller auf ihn wirkenden Kräfte, der äuſseren und der inneren, im Gleichgewichte ſein. Bringt man demnach die inneren Kräfte am linken Körpertheile an, ſo kann man auf die ſämmtlichen jetzt auf dieſen Theil wirkenden Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus dieſen die nach Gröſse und Richtung unbekannten inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, ſtehen auch hier, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, nur drei Bedingungsgleichungen zu Gebote; deſshalb iſt auch hier die Ermittelung der unbekannten inneren Kräfte auf dieſem Wege nur möglich, wenn dieſelben nicht mehr als drei Unbekannte enthalten. Selbſtverſtändlich iſt das Ergebniſs das gleiche, ob man den Körpertheil an der einen oder anderen Seite der Ebene *I I* unterſucht.

Fig. 1.




Die aus Vorſtehendem ſich ergebende Regel wird auch wohl folgendermaſsen ausgedrückt: Man lege durch den Körper einen Schnitt *I I*, denke den Theil an der einen Seite des Schnittes fortgenommen und bringe an dem übrig bleibenden Bruchſtück alle Kräfte an, welche vor dem Durchſchneiden auf daſſelbe wirkten, d. h. die äuſseren Kräfte und die an der Schnittſtelle von dem anderen Bruchſtück übertragenen inneren Kräfte. Alsdann befindet ſich daſſelbe in demſelben Zuſtande wie vor dem Durchſchneiden, d. h. im Gleichgewichte; man ſtelle nun für dieſe Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

### a) **Grundgeſetze der Statik feſter Körper.**

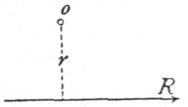
Obgleich die Statik feſter Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgeſetzt werden kann, ſollen im Folgenden doch einige der wichtigſten anzuwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrſche.

5. Statiſche Momente.

1) Satz des ſtatiſchen Momentes. Bekanntlich iſt das ſtatiſche Moment einer Kraft *R* in Bezug auf einen Punkt *o* (Fig. 2) das Product aus der Gröſse der

Kraft $R$ in den ſenkrechten Abſtand der Richtung dieſer Kraft vom Punkte $o$, d. h. das ſtatiſche Moment von $R$ in Bezug auf den Punkt $o$ iſt $M = R\,r$.

Fig. 2.




Dabei wird der ſenkrechte Abſtand $r$ der Kraftrichtung vom Punkte $o$ der Hebelsarm der Kraft $R$ für $o$ genannt.

Aus dieſer Erklärung folgt, daſs die ſtatiſchen Momente ſtets Producte von Kräften und Längen ſind. Die Maſseinheiten, in denen ſie ausgedrückt werden, ſind demnach Producte aus Längen- und Krafteinheiten. Iſt die Kraft in Kilogrammen, die Länge in Centimetern angegeben, ſo ergiebt ſich das ſtatiſche Moment in Kilogramm-Centimetern; iſt die Kraft in Tonnen, die Länge in Metern angegeben, ſo ergiebt ſich das ſtatiſche Moment in Tonnen-Metern [1]) etc.

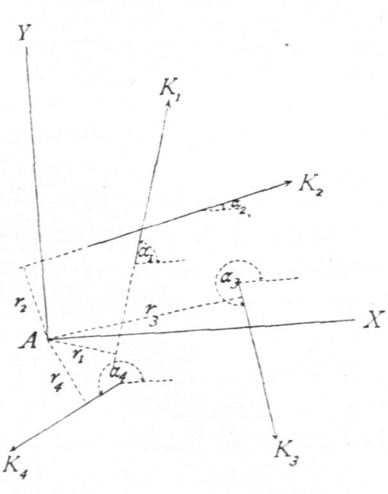
Die Kraft $R$ hat das Beſtreben, die Ebene um den als feſt gedachten Punkt $o$, bezw. um eine im Punkte $o$ ſenkrecht zur Kraftebene errichtete Axe zu drehen, hier alſo nach links. Wenn die ſtatiſchen Momente mehrerer in derſelben Ebene liegenden Kräfte aufzuſtellen ſind, ſo iſt zu beachten, daſs die verſchiedenen Kräfte allgemein verſchiedene Drehrichtungen haben. Welche von dieſen als poſitiv eingeführt wird, iſt gleichgiltig; iſt aber die eine Drehrichtung als poſitiv angenommen, ſo iſt die entgegengeſetzte als negativ einzuführen.

Da Anfänger ſich leicht bezüglich der für ein Moment einzuführenden Drehrichtung irren, ſo iſt die Angabe der folgenden Regel wohl nicht überflüſſig. Man denke ſich den Hebelsarm durch eine Kurbel erſetzt, deren Axe mit der Drehaxe der ſtatiſchen Momente zuſammenfällt; die Drehrichtung der Kurbel iſt auch diejenige des Momentes der Kraft.

Der in Folgendem häufig anzuwendende Satz des ſtatiſchen Momentes lautet: Das ſtatiſche Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, iſt gleich der algebraiſchen Summe der ſtatiſchen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denſelben Punkt.

Dieſer Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittelung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das ſtatiſche Moment aufſtellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, ſo hat die letztere in Bezug auf dieſen Punkt den Hebelsarm Null, alſo auch das ſtatiſche Moment Null. Für dieſen beſonderen Fall heiſst der obige Satz: Die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente einer Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt iſt gleich Null.

Fig. 3.




2) Satz vom Gleichgewichte der Kräfte. Derſelbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte ſind im Gleichgewichte, wenn die algebraiſche Summe der in zwei ſenkrecht zu einander ſtehende, ſonſt beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null iſt und auſserdem die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente ſämmtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null iſt. 6. Gleichgewicht der Kräfte.

Man zerlege demnach ſämmtliche Kräfte ($K_1$, $K_2$, $K_3$ . . . in Fig. 3) nach zwei zu einander ſenkrechten Richtungen, von denen die

[1]) Ein Tonnen-Meter iſt gleich 100 Tonnen-Centimetern und gleich 100000 Kilogramm-Centimetern. Danach kann ein Moment, welches in der einen Einheit, etwa in Tonnen-Metern, berechnet iſt, leicht in eine andere Einheit, etwa Kilogramm-Centimeter, umgerechnet werden.

eine ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die fämmtlichen Kräfte die Gleichungen:

$$\Sigma\ (K \cos \alpha) = 0, \quad \Sigma\ (K \sin \alpha) = 0 \quad \text{und } \Sigma\ (K\ r) = 0.$$

Hier ift $A$ als Momentenpunkt angenommen; es hätte indefs auch jeder beliebige andere Punkt der Kraftebene gewählt werden können.

In fehr vielen Fällen ift die Mehrzahl aller äufseren Kräfte lothrecht gerichtet; alsdann empfiehlt es fich, die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$ . . . nach der wagrechten und lothrechten Richtung zu zerlegen. In diefem Falle heifsen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte find im Gleichgewicht, wenn

$\alpha$) die algebraifche Summe der wagrechten Seitenkräfte gleich Null ift,

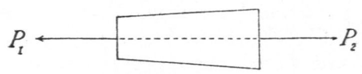
$\beta$) die algebraifche Summe der lothrechten Seitenkräfte gleich Null ift,

$\gamma$) die algebraifche Summe der ftatifchen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null ift.

7. Zwei Kräfte auf einen Körper wirkfam; Kräftepaar.

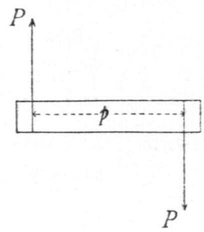
3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denfelben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Gröfse nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengefetzt find und mit ihren Richtungslinien zufammenfallen (Fig. 4); denn nur dann find alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.

Fig. 4.




Haben zwei Kräfte $P$ (Fig. 5) parallele Richtung, gleiche Gröfse und entgegengefetzten Sinn, fallen fie aber mit ihren Richtungslinien nicht zufammen, fo ift allerdings jede der beiden erften Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei folche Kräfte ein **Kräftepaar** und verfteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Gröfse der Kraft $P$ in den fenkrechten Abftand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ift das Moment $M = P p$.

Fig. 5.



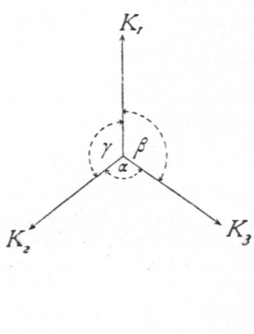

Es ift wohl zu beachten, dafs die Summe der ftatifchen Momente beider zu dem Kräftepaar vereinten Kräfte für jeden beliebigen Punkt der Ebene die gleiche Gröfse $M = P p$ hat. In den Berechnungen kommt vielfach das (unter Umftänden vorläufig noch unbekannte) Moment $M$ eines Kräftepaares vor; wird alsdann für einen beliebigen Punkt der Ebene die algebraifche Summe der ftatifchen Momente aufgeftellt, fo ift, wo auch der Punkt liege, der Beitrag des Kräftepaares mit dem Werthe $M$ einzuführen.

8. Drei Kräfte auf einen Körper wirkfam.

4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte find nur dann im Gleichgewichte, wenn fich ihre Richtungslinien in einem Punkte fchneiden, jede der drei Kräfte abfolut genommen genau eben fo grofs ift, wie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Mittelkraft einen Winkel von 180 Grad einfchliefst.

5) Wenn drei in derfelben Ebene liegende Kräfte, welche fich in einem Punkte fchneiden, im Gleichgewichte find, fo verhalten fich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Fig. 6.

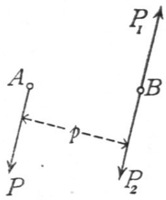



Die drei Kräfte $K_1$, $K_2$ und $K_3$ (Fig. 6) befinden fich fonach im Gleichgewicht, wenn

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

6) Eine in irgend einem Punkte $A$ (Fig. 7) angreifende Kraft $P$ kann ſtets erſetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte $B$ parallel verſchobene Kraft $P$ von gleicher Gröſse, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, deſſen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt $B$ nach Gröſse und Drehrichtung gleich iſt.

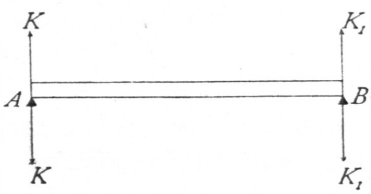
Fig. 7.




Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte $B$ zwei Kräfte, $P_1$ und $P_2$, angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in Gröſse und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegengeſetzt ſind. Zwei dieſer drei Kräfte, $P$ und $P_1$, ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, alſo auch für $B$, das Moment $M = Pp$ und gleiche Drehrichtung hat, wie die urſprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft $P_2$ iſt eben die parallel ſich ſelbſt verſchobene Kraft $P$. Jede Kraft $P$ wirkt alſo auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, deſſen ſenkrechter Abſtand von der Kraft gleich $p$ iſt, mit einem Drehmoment $Pp$ und auſserdem ſo, als ob ſie in ihm ſelbſt angriffe.

7) Geſetz der Wechſelwirkung. Daſſelbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, ſo erleidet er durch dieſen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der Gröſse nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengeſetzt iſt. 9. Geſetz der Wechſelwirkung.

Fig. 8.




Dieſes Geſetz wird in der Folge ſehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger $AB$ (Fig. 8) übt durch ſein Eigengewicht und die wirkenden Belaſtungen auf die Auflagerpunkte $A$ und $B$ die Drücke $K$ und $K_1$ aus; dieſelben ſind nach unten gerichtet. Genau eben ſo groſs ſind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Dieſe ſind nach oben gerichtet, da ſie den erſteren Drücken $K$ und $K_1$ genau entgegengeſetzt gerichtet ſein müſſen.

Betrachtet man nur den Träger, ſo hat man die nach oben wirkenden Kräfte $K$ und $K_1$ — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, ſo ſind die nach unten gerichteten Drücke $K$ und $K_1$ der Unterſuchung zu Grunde zu legen.

## b) Grundlagen für die graphiſche Behandlung bauſtatiſcher Aufgaben.

Die Aufgaben der Statik der Bauconſtructionen können nicht nur durch Rechnung (auf analytiſchem Wege), ſondern auch durch Zeichnung (auf graphiſchem Wege) gelöst werden. Die graphiſche Behandlung hat manche Vortheile. Dieſelbe führt in vielen Fällen raſcher und leichter zum Ziele und gewährt faſt immer eine klarere Ueberſicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung. 10. Graphiſche Methode.

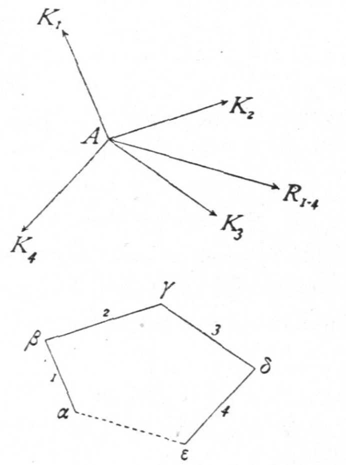
In den folgenden Unterſuchungen werden meiſtens beide Wege eingeſchlagen werden. Damit über die bei der graphiſchen Behandlung vorauszuſetzenden Begriffe volle Klarheit herrſche und um Wiederholungen zu vermeiden, ſollen die Grundlagen für die graphiſche Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Dabei wird die Annahme gemacht, daſs ſämmtliche Kräfte in einer Ebene wirken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Reſultirende oder Mittelkraft erſetzt werden. Um dieſe Mittelkraft nach Gröſse und Richtung zu erhalten, conſtruirt man das ſog. Kraftpolygon. 11. Kraftpolygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften iſt derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man ſämmtliche Kräfte nach irgend einem Maſsſtabe ſo an einander reiht, daſs die Gröſse, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in dieſem Linienzuge mit der Gröſse, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinſtimmt und daſs der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zuſammenfällt.

Der Maſsſtab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch ſind ſämmtliche Kräfte nach demſelben Maſsſtabe aufzutragen.

Fig. 9.




Um das Kraftpolygon für die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ zu erhalten, welche im Punkte $A$ (Fig. 9) angreifen, trage man zunächſt von einem beliebig anzunehmenden Punkte $\alpha$ aus nach irgend einem Maſsſtabe ſo viele Krafteinheiten ab, wie $K_1$ enthält, und zwar nach einer Richtung $\alpha\,\beta$, welche mit derjenigen von $K_1$ übereinſtimmt. Iſt etwa $K_1 = 20^{\text{t}}$ und der Maſsſtab ſo gewählt, daſs $1^{\text{cm}} = 20^{\text{t}}$ bedeutet, ſo würde man von $\alpha$ aus $1^{\text{cm}}$ abzutragen haben. Man ziehe alſo durch $\alpha$ eine Linie parallel zur Richtung von $K_1$ und trage auf dieſer Linie $\alpha\,\beta = K_1$ ab. Daran trage man $K_2$; zu dieſem Zwecke ziehe man durch $\beta$ eine Linie parallel zur Richtung von $K_2$ und trage auf dieſer Linie $\beta\,\gamma = K_2$ ab. In derſelben Weiſe verfahre man weiter und erhält ſo $\gamma\,\delta = K_3$, $\delta\,\varepsilon = K_4$. Alsdann iſt $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ das Kraftpolygon für die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$.

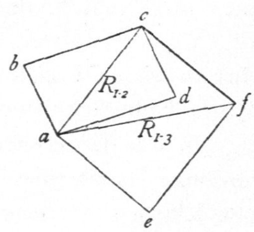
Es iſt oben angegeben, daſs der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinſtimmen muſs. In der gegebenen Kraft iſt der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, ſo daſs Unklarheit über denſelben nicht beſtehen kann; im Kraftpolygon ergiebt ſich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte ſtets ſo aufträgt, daſs die Richtung vom früheren Buchſtaben des Alphabetes bis zum höheren Buchſtaben deſſelben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinſtimmt. Die Kraft $\alpha\,\beta$ wirkt alſo im Sinne von $\alpha$ nach $\beta$, nicht im Sinne von $\beta$ nach $\alpha$.

12. Satz I. Die Gröſse, die Richtung und der Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte $A$ (Fig. 9) angreifenden Kräfte wird erhalten, indem man den Anfangspunkt des für dieſe Kräfte conſtruirten Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte verbindet.

In Fig. 9 giebt alſo $\alpha\,\varepsilon$ die Gröſse, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$ wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus dieſen beiden Kräften conſtruirten Parallelogramms dargeſtellt, d. h. es ſtellt in Fig. 10 $a\,c$ die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ nach Gröſse und Richtung dar, wenn $a\,b = K_1$, $a\,d = K_2$ iſt. Die Diagonale $a\,c$ theilt das Parallelogramm $a\,b\,c\,d$ in zwei congruente Dreiecke; es wird alſo genügen, das Dreieck $a\,b\,c$ zu conſtruiren, in welchem $a\,b = K_1$ und $b\,c = K_2$ iſt. Alsdann iſt die dritte Seite $a\,c$ des Dreieckes gleich der Mittelkraft $R_{1-2}$ von $K_1$ und $K_2$. Das Dreieck $a\,b\,c$ iſt aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$, und $a\,c$ verbindet den Anfangspunkt $a$ deſſelben mit dem Endpunkte $c$. Für zwei Kräfte iſt damit obiger Satz bewieſen.

Fig. 10.




Kommt eine dritte Kraft $K_3$ hinzu, ſo iſt die Mittelkraft $R_{1-2}$ von $K_1$ und $K_2$ mit $K_3$ zu vereinen, um die Reſultirende $R_{1-3}$ von $K_1$, $K$ und $K_3$ zu erhalten. Iſt $K_3 = a\,e$, ſo conſtruire man das Parallelogramm $a\,c\,f\,e$, und ziehe die Diagonale $a\,f$ deſſelben; die letztere iſt die geſuchte Mittelkraft. Auch hier genügt es, um $a\,f$ zu erhalten, nur das Dreieck $a\,c\,f$ zu zeichnen. Man erhält alſo die Mittelkraft $R_{1-3}$, indem man an den Endpunkt von $R_{1-2} = a\,c$ die Kraft $K_3$ nach Gröſse und Richtung gleich $c\,f$ anträgt und $a$ mit $f$ verbindet. Der Linienzug $a\,b\,c\,f$ iſt aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte $K_1$, $K_2$ und $K_3$ und $a\,f$ die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte.

Damit iſt der Beweis unſeres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derſelben Weiſe kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon iſt nur eine Hilfsfigur, welche wohl Gröſse, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber deren Lage in der Ebene angiebt. Die Lage derſelben iſt aber nicht zweifelhaft, ſobald man auſser der Richtung der Kraft einen **Punkt** kennt, durch welchen die Kraft hindurchgeht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Punkt iſt auch bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte muſs durch den gemeinſchaftlichen Angriffspunkt derſelben, d. h. durch $A$ (Fig. 9), gehen. Zieht man alſo durch $A$ eine Linie parallel zu $\alpha\ \varepsilon$, ſo ergiebt dieſe die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die Gröſse derſelben iſt $\alpha\ \varepsilon$.

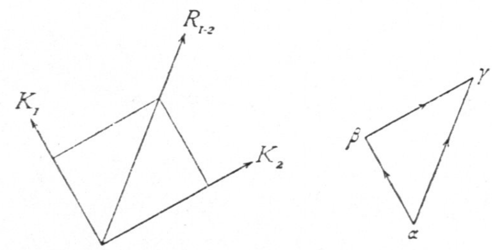
Zu jedem Kraftpolygon gehört als nothwendige Ergänzung ein Kräftemaſsſtab, der nie vergeſſen werden ſoll.

Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo iſt das Kraftpolygon eine geſchloſſene Figur. 13. Satz II.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt ihre Mittelkraft gleich Null; dieſelbe wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte dargeſtellt. Dieſe Verbindungslinie muſs alſo für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null ſein; es muſs demnach der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit deſſen Endpunkte zuſammen fallen, d. h. das Kraftpolygon muſs eine geſchloſſene Figur ſein.

Der Sinn der Mittelkraft iſt vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften conſtruirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte deſſelben gerichtet; der Umfahrungsſinn des ganzen Polygons mit Einſchluſs der Mittelkraft erleidet alſo am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung. 14. Satz III.

Fig. 11.




Um dieſen Satz zu beweiſen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzuſuchen. Iſt in Fig. 11 $\alpha\ \beta = K_1$ und $\beta\ \gamma = K_2$, ſo haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfahrungsſinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derſelbe bleibt, d. h. er iſt ſtets vom Anfangspunkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desſelben gerichtet. Der Sinn der Reſultirenden $R_{1-2} = \alpha\ \gamma$ iſt aber, wie ſich aus der Parallelogramm-Conſtruction in Fig. 11 ergiebt, von $\alpha$ nach $\gamma$ gerichtet; er iſt alſo dem Umfahrungsſinne der Einzelkräfte direct entgegengeſetzt. Damit iſt der Satz für zwei Kräfte bewieſen. Jede dritte Kraft $K_3$ läſſt ſich aber mit $R_{1-2}$ in derſelben Weiſe, wie bei $K_1$ und $K_2$ gezeigt, zuſammenſetzen; es handelt ſich dabei auch ſtets nur um zwei Kräfte, und es gilt deſshalb das Geſagte auch für $R_{1-2}$ und $K_3$, d. h. für $K_1$, $K_2$, $K_3$. Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ dargeſtellten Kräfte (Fig. 9) iſt $\alpha\ \varepsilon$, der Sinn iſt von $\alpha$ nach $\varepsilon$ gerichtet; der Umfahrungsſinn erleidet ſonach bei $\varepsilon$ eine Unterbrechung.

Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte, ſo iſt für das ganze Kraftpolygon der Umfahrungsſinn derſelbe. 15. Satz IV.

Denn alsdann iſt die Reſultirende gleich Null, und dieſe iſt nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umfahrungsſinn hat, als die übrigen Kräfte. Dieſe einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in dieſem Falle alle Kräfte denſelben Umfahrungsſinn.

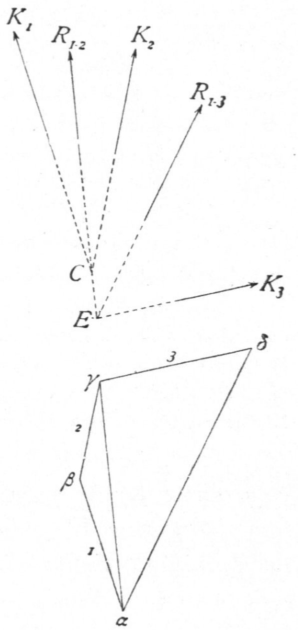
2) Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten. Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verſchiedenen Punkten deſſelben angreifen, ſo iſt zunächſt die Ermittelung der Gröſse und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter 1 angegeben, vorzunehmen. 16. Kräfte an verſchiedenen Angriffspunkten.

Denn man kann (Fig. 12) zunächſt die beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$ auf ihren Richtungslinien beliebig verſchieben, alſo auch bis zu dem Schnittpunkte $C$ derſelben. Für die beiden im Punkte $C$ angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau ſo, wie oben entwickelt iſt. Iſt $K_1 = \alpha\ \beta$ und $K_2 = \beta\ \gamma$, ſo iſt $\alpha\ \gamma$ die Mittelkraft $R_{1-2}$ von $K_1$ und $K_2$.

Dieſe Mittelkraft $R_{1-2}$ greift in $C$, dem Schnittpunkte der beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$, an und hat die Richtung, welche durch $\alpha\ \gamma$ feſt gelegt iſt, d. h. ſie iſt parallel zu $\alpha\ \gamma$. Um jetzt die Mittelkraft von

$R_{1-2}$ und $K_3$, d. h. diejenige von $K_1$, $K_2$, $K_3$ zu finden, verfährt man genau ſo, wie bei der Zuſammenſetzung von $K_1$ und $K_2$. Man verſchiebt $R_{1-2}$ und $K_3$ bis zum Schnittpunkte $E$ ihrer Richtungslinien; in dieſem muſs die geſuchte Mittelkraft $R_{1-3}$ angreifen. Die Zuſammenſetzung von $R_{1-2}$ ($= \alpha\,\gamma$ im Kraftpolygon) und $K_3$ ($= \gamma\,\delta$ im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weiſe erfolgen, indem man $\gamma\,\delta = K_3$ an $\gamma$ anträgt und $\alpha\,\delta$ zieht. $\alpha\,\delta$ giebt die Gröſse und Richtung der Mittelkraft $R_{1-3}$ von $K_1$, $K_2$, $K_3$ an; dieſelbe geht durch den Punkt $E$. In der gleichen Weiſe kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

Fig. 12.




Wenn die Gröſse und Richtung der Mittelkraft gefunden iſt, iſt auch die Lage derſelben bekannt, ſobald ein Punkt bekannt iſt, durch welchen ſie gehen muſs; denn durch dieſen Punkt läſſt ſich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen. Ein ſolcher Punkt iſt in Fig. 12 bei $R_{1-2}$ der Punkt $C$, bei $R_{1-3}$ der Punkt $E$ etc.

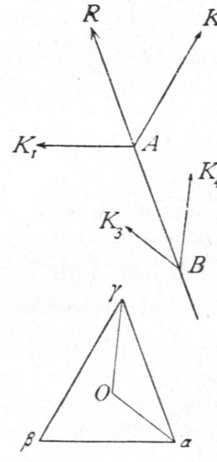
17. Seil-polygon. Bei einer groſsen Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittelung der Lage der Mittelkraft ſehr umſtändlich ſein; deſshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconſtruction eingeführt, das ſog. Seilpolygon. Daſſelbe ergiebt ſich durch die folgende Betrachtung.

Wie man die Gröſse und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte $K_1$ und $K_2$ in der dritten Seite $\alpha\,\gamma$ (Fig. 13) des für die beiden Kräfte conſtruirten Kraftpolygons $\alpha\,\beta\,\gamma$, hier der Schluſsſeite des Kraftdreieckes, findet, ſo kann man auch irgend eine gegebene Kraft $R$ als Mittelkraft zweier Kräfte $K_1$ und $K_2$ auffaſſen. Dieſe beiden Kräfte müſſen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

$\alpha$) Das aus ihnen conſtruirte Kraftpolygon muſs als dritte Seite die gegebene Kraft nach Gröſse und Richtung enthalten, und

$\beta$) die beiden Kräfte müſſen ſich auf einem Punkte der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden.

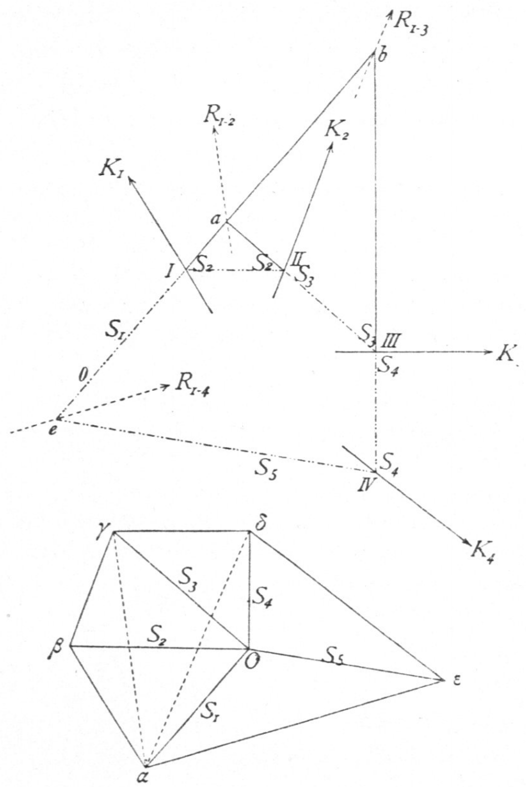
Fig. 13.




Man kann alſo $R$ als Mittelkraft der beiden Kräfte $K_1$ und $K_2$ auffaſſen, die im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\,\beta$ und $\beta\,\gamma$ dargeſtellt ſind und deren Richtungslinien ſich auf dem Punkte $A$ der Kraftrichtung $R$ ſchneiden. In gleicher Weiſe kann $R$ auch als Mittelkraft der beiden Kräfte $K_3$ und $K_4$ angeſehen werden, denen das Kraftdreieck $\alpha\,O\,\gamma$ entſpricht, die alſo im Kraftpolygon durch bezw. $\alpha\,O$ und $O\,\gamma$ dargeſtellt werden und deren Richtungslinien ſich im Punkte $B$ der gegebenen Kraftrichtung ſchneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft $R$ ſowohl durch die Kräfte $K_1$ und $K_2$, wie durch $K_3$ und $K_4$ erſetzen. Daraus folgt, daſs man für die Zerlegung einer gegebenen Kraft den Punkt $O$ ganz beliebig, den Punkt $B$ auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.

Iſt nun eine gröſsere Anzahl von Kräften $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ .... gegeben (Fig. 14), ſo kann man zunächſt $K_1$ in der angegebenen Weiſe zerlegen. $K_1$ werde im Kraftpolygon durch $\alpha\,\beta$ dargeſtellt und möge in $\alpha\,O = S_1$ und $O\,\beta = S_2$ zerlegt werden. Nach Früherem iſt, da $K_1$ den Sinn von $\alpha$ nach $\beta$ hat, $S_1$ von $\alpha$ nach $O$, $S_2$ von $O$ nach $\beta$ gerichtet. Als Schnittpunkt dieſer beiden Seitenkräfte von $K$ kann der Punkt $I$ auf der Richtungslinie von $K_1$ beliebig angenommen werden. Ferner kann $K_2$, welches im Kraftpolygon durch $\beta\,\gamma$ dargeſtellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit $\beta\,\gamma$ zuſammen ein Dreieck bilden müſſen. Die Spitze des Dreieckes kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann alſo den Punkt $O$ als dieſe Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von $K_2$ ($= \beta\,\gamma$) die Kraftlinien $\beta\,O$ und $O\,\gamma$. Die erſte dieſer Seitenkräfte iſt nach Gröſse und Richtung

Fig. 14.




der zweiten Seitenkraft von $K_1$ genau gleich, da dieſe $O\,\beta$ war. $S_2 = \beta\, O$ hat den Sinn von $\beta$ nach $O$, $S_3 = O\,\gamma$ den Sinn von $O$ nach $\gamma$. Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft $K_2$ den Punkt $II$, in welchem die Richtungslinie der Kraft $K_2$ von der zweiten Seitenkraft $S_2$ der Kraft $K_1$ geſchnitten wird, ſo greifen in dieſem Punkte die beiden Kräfte $S_2$ und $S_3$ an. In der Richtungslinie $I\ II$ wirken alſo die beiden Kräfte $S_2$, deren eine in $I$, deren andere in $II$ angreift. Beide ſind, wie eben entwickelt iſt, der Gröſse nach einander gleich; ſie haben dieſelbe Richtung, aber entgegengeſetzten Sinn, heben ſich alſo gegenſeitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte $K_1$ und $K_2$ ſind alſo durch vier neue Kräfte erſetzt, nämlich durch $S_1$, $S_2$, $S_2$, $S_3$; zwei von dieſen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden $S_2$; es bleiben alſo zwei Kräfte $S_1$ und $S_3$, welche die gegebenen Kräfte $K_1$ und $K_2$ vollſtändig erſetzen. Die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ iſt demnach derjenigen von $S_1$ und $S_3$ gleich in der Gröſse, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von $S_1$ und $S_3$ geht aber durch den Schnittpunkt $a$ der Richtungslinien derſelben; durch dieſen Punkt $a$ muſs alſo auch die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ gehen.

Verfährt man nun mit der dritten Kraft $K_3$ eben ſo, wie mit $K_2$, d. h. zerlegt man $K_3$ in zwei Seitenkräfte ſo, daſs der Punkt $O$ als Spitze des Kraftdreieckes für die Zerlegung von $K_3 = \gamma\,\delta$ gewählt wird, ſo werden die beiden Seitenkräfte $S_3 = \gamma\, O$ und $S_4 = O\,\delta$ ſein. Die erſte dieſer beiden Seitenkräfte iſt wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von $K_2$, hat aber entgegengeſetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von $K_3$ den Punkt $III$, in welchem die Richtungslinie von $K_3$ durch die Richtungslinie der Seitenkraft $S_3$ der Kraft $K_2$ geſchnitten wird, ſo wirken in der Linie $II\ III$ zwei Kräfte $S_3$, welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3$ ſind jetzt durch ſechs Kräfte erſetzt, nämlich durch $S_1$, $S_2$, $S_2$, $S_3$, $S_3$, $S_4$, von denen ſich die vier mittleren, die beiden $S_2$ und die beiden $S_3$, gegenſeitig aufheben, ſo daſs nur $S_1$ und $S_4$ übrig bleiben. Die Mittelkraft von $S_1$ und $S_4$ iſt alſo auch diejenige von $K_1$, $K_2$ und $K_3$. Daraus folgt, daſs die Mittelkraft von $K_1$, $K_2$ und $K_3$ durch den Schnittpunkt der Kraftrichtungen $S_1$ und $S_4$, alſo durch den Punkt $b$ geht.

Verfährt man ſo weiter, ſo erhält man einen Linienzug $O\ I\ II\ III\ IV$ . . ., welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorſtehenden Erklärung der Entſtehung ergiebt ſich folgender Satz:

Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonſeite, welche der erſten dieſer 18. Satz V.
Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonſeite, welche auf die letzte dieſer Kräfte folgt.

Denn die in den mittleren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte heben ſich ſämmtlich gegenſeitig auf, und es bleiben nur die in den äuſseren Seilpolygonſeiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft mit derjenigen der gegebenen Kräfte in jeder Beziehung übereinſtimmt [2]).

Den Punkt $O$ (Fig. 14) nennt man den Pol des Seilpolygons.

Durch das Kraft- und Seilpolygon iſt die Mittelkraft ganz beliebig in einer Ebene wirkender Kräfte beſtimmt. Die Gröſse, die Richtung und den Sinn derſelben

---

[2]) Kehrt man die Richtungen der in einem Eckpunkte des Seilpolygons wirkenden zwei Seitenkräfte $S$ um, ſo halten ſich dieſelben offenbar mit der auf den Eckpunkt wirkenden Kraft $K$ im Gleichgewicht. In jedem Eckpunkte eines Seilpolygons befindet ſich demnach die äuſsere Kraft $K$ mit den im entgegengeſetzten Sinne genommenen Spannungen $S$ im Gleichgewicht.

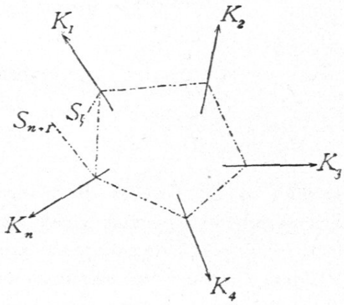
giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da dasselbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergiebt. Zieht man durch diesen eine Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, so erhält man die wirkliche Lage derselben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrschen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der sämmtlichen wirkenden Kräfte, sondern auch einer beliebigen Gruppe dieser Kräfte ergeben. So ist die Mittelkraft von $K_1$ und $K_2$ (Fig. 14) nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\gamma$ und geht durch $a$. Zieht man also durch $a$ eine Linie parallel zu $\alpha\gamma$, so erhält man diese Mittelkraft $R_{1-2}$. So ist ferner die Mittelkraft von $K_1$, $K_2$ und $K_3$ nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\delta$ und geht durch $b$; eine durch $b$ parallel zu $\alpha\delta$ gezogene Linie ergiebt $R_{1-3}$. Die Mittelkraft von $K_1$, $K_2$, $K_3$ und $K_4$ ist nach Grösse und Richtung gleich $\alpha\varepsilon$ und geht durch $e$ etc.

19. Satz VI. Wenn die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so ist sowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine geschlossene Figur.

Dass das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine geschlossene Figur sein muss, geht aus dem Früheren hervor; denn es ist nachgewiesen, dass das Kraftpolygon für an verschiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben so construirt wird und genau dieselbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte. Es muss also nach Satz II das Kraftpolygon eine geschlossene Figur sein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen.

Fig. 15.



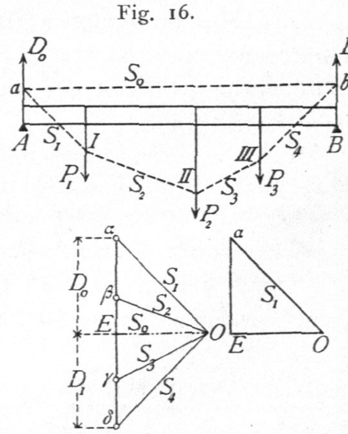

Dass sich auch das Seilpolygon schliessen muss, ergiebt sich folgendermassen.

Construirt man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, so heben sich, wie oben auseinandergesetzt, die sämmtlichen in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äussersten Seilpolygonseiten wirken, d. h. diejenige, welche der ersten Kraft $K_1$ vorangeht, und diejenige, welche auf die letzte Kraft $K_n$ folgt, also $S_1$ und $S_{n+1}$ (Fig. 15). Diese beiden Kräfte ersetzen alle gegebenen Kräfte $K_1$, $K_2$, $K_3 \ldots K_n$. Die letzteren sind nach der Voraussetzung im Gleichgewicht; folglich müssen auch $S_1$ und $S_{n+1}$ im Gleichgewicht sein. Gleichgewicht zwischen zwei Kräften ist aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. Es muss also diejenige Seilpolygonseite, welche der ersten Kraft $K_1$ vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte Kraft $K_n$ folgt, zusammenfallen, d. h. das Seilpolygon muss eine geschlossene Figur sein.

Die schliessende Seilpolygonseite nennt man die **Schlusslinie des Seilpolygons.**

In der Statik der Bauconstructionen kommt sehr häufig der Fall vor, dass alle wirksamen Kräfte parallel sind. In diesem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade. Sind diese Kräfte im Gleichgewicht, so schliesst sich nach Satz VI das Kraftpolygon; es fallen also dann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zusammen.

Fig. 16.




Für neben stehenden Balken $A\,B$ (Fig. 16) sei im Kraftpolygon $P_1 = \alpha\beta$, $P_2 = \beta\gamma$, $P_3 = \gamma\delta$; das Kraftpolygon muss sich schliessen, wenn die ausserdem noch wirkenden Kräfte $D_1$ und $D_0$, die Stützendrücke, an $\delta$ angetragen werden, d. h. es müssen $D_0$ und $D_1$, welche, eben so wie

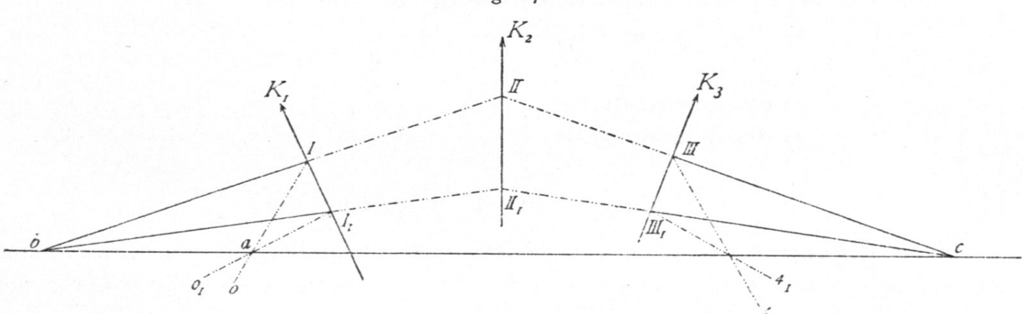
$P_1$, $P_2$, $P_3$, lothrecht ſind, mit $\delta\,\alpha$ zuſammenfallen, und der Endpunkt von $D_0$ muſs auf $\alpha$ fallen. Unbekannt iſt zunächſt noch der Punkt $E$ im Kraftpolygon, welcher die Grenze zwiſchen $D_1$ und $D_0$ bildet. Da aber Gleichgewicht ſtattfindet, ſo muſs ſich auch das Seilpolygon ſchlieſsen, welches für einen beliebigen Pol und die fünf Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $D_1$, $D_0$ conſtruirt wird. Es ſei der Pol $O$, das Seilpolygon $I\;II\;III$ und $a$ der Schnittpunkt der erſten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von $D_0$, $b$ der Schnittpunkt der letzten Seilpolygonſeite mit der Richtungslinie von $D_1$; alsdann müſſen nach dem Satze VI die vor $D_0$ liegende und die auf $D_1$ folgende Seilpolygonſeite, d. h. $S_0$ und $S_{n+1}$ zuſammenfallen; es muſs alſo $a\,b$ die ſchlieſsende Seilpolygonſeite, d. h. die Schluſslinie des Seilpolygons ſein.

Nach der Erklärung des Seilpolygons in Art. 17 (S. 12) ſtellen die von den Ecken des Kraftpolygons nach dem Pol $O$ laufenden Strahlen die in den Seilpolygonſeiten auftretenden Kräfte oder, wie man ſagt, die Spannungen im Seilpolygon vor, natürlich in demſelben Maſsſtabe, in welchem die Kräfte $P$ aufgetragen ſind. Im Punkte $a$ des Seilpolygons halten ſich nun folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Stützendruck $D_0$, die Spannung in der Seilpolygonſeite $a\,I$ und diejenige in der Schluſslinie $a\,b$ (beide in dem gleichen Sinne, wie in Fuſsnote 2 [S. 13] genommen). Von allen dieſen drei Kräften ſind die Richtungen bekannt, von einer — der Seilpolygonſpannung in $a\,I$ — auch die Gröſse; dieſelbe iſt gleich $\alpha\,O$. Man kann alſo für dieſe drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, conſtruiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft $\alpha\,O$, durch $\alpha$, eine Parallele zur Richtung von $D_0$, durch den anderen Endpunkt, durch $O$, eine Parallele zur Schluſslinie $a\,b$ zieht. Dann iſt $O\,E\,\alpha$ das geſuchte Kraftdreieck, $E\,\alpha = D_0$ und $O\,E$ gleich der Seilſpannung in der Schluſslinie. Gewöhnlich benutzt man zu dieſer Conſtruction unmittelbar das Kraftpolygon $\alpha \ldots \delta$. Selbſtverſtändlich iſt dann auch ſofort $\delta\,E = D_1$, da $D_0 + D_1 = P_1 + P_2 + P_3$ iſt.

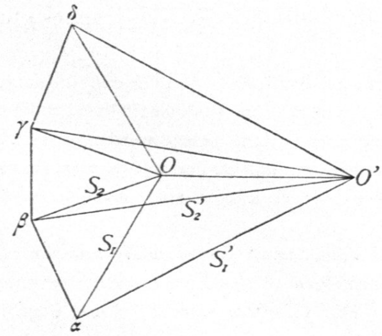
Hieraus ergiebt ſich die Regel: Die Stützendrücke bei einem Träger auf zwei Stützen mit nur lothrechten Kräften werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol $O$ das Seilpolygon conſtruirt, die Schluſslinie und parallel zu dieſer eine Linie durch den Pol zieht; letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Gröſse und Richtung die Stützendrücke darſtellen.

Conſtruirt man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verſchiedenen Polen die 20. Satz VII.
entſprechenden Seilpolygone, ſo liegen die ſämmtlichen Schnittpunkte der gleich-

Fig. 17.




vielten Seilpolygonſeiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel iſt.




Das aus einem beliebigen Pole $O$ (Fig. 17) conſtruirte Seilpolygon ſei $o\;I\;II\;III\;4$, das aus einem anderen Pole $O'$ conſtruirte ſei $o_1\;I_1\;II_1\;III_1\;4_1$. Alsdann ſchneiden ſich die beiden erſten Seiten $o\,I$ und $o_1\,I_1$ in $a$, die beiden zweiten Seiten $I\,II$ und $I_1\,II_1$ in $b$, die dritten Seiten $II\,III$ und $II_1\,III_1$ in $c$ etc. Die ſämmtlichen Punkte $a, b, c, d \ldots$ liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu $O\,O'$ parallel iſt.

Nach der Erklärung des Seilpolygons iſt $K_1 = \alpha\,\beta$ im erſten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte $S_1$ und $S_2$ zerlegt, deren

Gröfse und Richtung fich im Kraftpolygon zu bezw. $\alpha O$ und $O \beta$ ergiebt; diefelbe Kraft ift im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte $S_1'$ und $S_2'$ zerlegt, deren Gröfse und Richtung bezw. $\alpha O'$ und $O' \beta$ ift. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte $S_1'$ und $S_2'$ umgekehrt, fo find diefe beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft $K_1$, welche mit der gegebenen Kraft $K_1$ nach Gröfse und Richtung genau übereinftimmt, deren Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengefetzt ift. Diefe neue Kraft $K_1$ mufs fich alfo mit der gegebenen Kraft $K_1$ im Gleichgewicht halten; folglich müffen auch die vier Seitenkräfte diefer beiden Kräfte $K_1$ im Gleichgewicht fein. Verbindet man $S_1$ und $S_1'$ zu einer, $S_2$ und $S_2'$ zur anderen Mittelkraft, fo geht die erftere durch den Schnittpunkt $a$ diefer beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt $b$ der beiden Kräfte $S_2$ und $S_2'$. Beide Mittelkräfte halten fich im Gleichgewichte, fie müffen alfo in eine gerade Linie fallen; diefelbe ift durch die beiden Punkte $a$ und $b$, durch welche beide Mittelkräfte gehen müffen, beftimmt.

Nun ift die Mittelkraft von $S_1$ und $S_1'$ nach Gröfse und Richtung die Schlufslinie des Kraftpolygons $O' \alpha O$, d. h. $O' O$. Die Richtungslinie der Mittelkraft ift alfo parallel zu $O' O$, d. h. die Linie $a b$ ift parallel zu $O' O$, zur Verbindungslinie der beiden Pole.

Genau in derfelben Weife ift es unfchwer zu beweifen, dafs der Schnittpunkt $b$ von $S_2$ und $S_2'$ mit dem Schnittpunkte $c$ von $S_3$ und $S_3'$ auf einer zu $O O'$ parallelen Geraden liegt, d. h. auf der Linie $a b$, da durch $b$ zu $O O'$ nur eine Parallele möglich ift, womit der obige Satz bewiefen ift.

## 2. Kapitel.

# Aeufsere Kräfte, Schwerpunkte, ftatifche und Trägheitsmomente.

### a) Belaftungen.

Als Belaftungen der Conftructionen treten auf:

1) das Eigengewicht,
2) die Nutzlaft,
3) die Schneelaft und
4) der Winddruck.

#### 1) Eigengewicht der Conftruction.

21. Eigengewichte.

Das Eigengewicht der Conftruction ift beim Beginne jeder Berechnung nur angenähert bekannt. Für die gewöhnlichen Anordnungen genügt es, die aus den vorhandenen Bauwerken ermittelten Erfahrungswerthe bei der Berechnung einzuführen. Meiftens kann man das Eigengewicht mit hinreichender Genauigkeit als gleichmäfsig über die ganze Ausdehnung (des Trägers, der Balkendecke, des Daches etc.) vertheilt annehmen.

Neben ftehend (unter α, a) find die Eigengewichte einiger wichtiger Bauftoffe und (unter α, b) diejenigen von verfchiedenen Bautheilen angegeben, und zwar in der Gröfse, wie fie vom Berliner Polizei-Präfidium nach einer Bekanntmachung vom 21. Februar 1887 den Berechnungen zu Grunde gelegt werden. Die Zufammenftellung (unter b) »Eigengewichte und Belaftung von Bautheilen« enthält in der letzten Spalte auch die Nutzlaft, welche erft im folgenden Artikel befprochen werden foll; es fcheint aber dennoch zweckmäfsig, die betreffenden Angaben hier fogleich mit zu machen.

Die Angaben der Tabellen unter α genügen in fehr vielen Fällen nicht; insbefondere find die Angaben über Eigengewichte der Dächer nicht ausreichend. Bei denfelben ift das Eigengewicht gar nicht von den anderen, zum Theile fchief wirkenden Laften getrennt. Die Tabellen unter β, γ und δ geben einige Vervollftändigungen.