

DIE STATIK DER HOCHBAU-CONSTRUCTIONEN.

---

1. Abschnitt.

Grundlagen.

Die Statik der Hochbau-Constructionen ist die Lehre vom Gleichgewichte der Hochbauten; sie untersucht, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Bauwerke und deren Theile im Gleichgewichte sind und bleiben; sie bestimmt danach die denselben zu gebenden Constructionsformen.

r.  
Vor-  
bemerkungen.

Die Statik der Bauconstructions, wohl auch Baumechanik genannt, hat hauptsächlich zwei Aufgaben zu erfüllen: sie hat erstens die Abmessungen aller Theile der Bauwerke so zu bestimmen, daß dieselben mit Sicherheit den auf sie einwirkenden Kräften widerstehen können; sie hat zweitens für die einzelnen Constructions zweckmäßige Formen zu ermitteln.

Die Lösung der ersten Aufgabe erheischt, daß jeder Constructionstheil genügend stark, auch für die ungünstigsten Falle wirkenden Kräfte, angeordnet wird. Die dazu nöthigen Abmessungen sind wesentlich von der für die ganze Construction gewählten Form abhängig. Durch günstige Wahl dieser Form ist es möglich, an Material zu sparen, ohne die Sicherheit zu verringern. Die Ermittlung derjenigen Form, bei welcher die verlangte Sicherheit mit geringstem Materialaufwande, oder, was annähernd dasselbe befragt, mit geringstem Kostenaufwande erreicht wird, ist die zweite Aufgabe der Statik der Bauconstructions.

---

Literatur.

Bücher über »Statik der Bauconstructions«.

- EYTELWEIN. Handbuch der Statik fester Körper. Mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architektur. Berlin 1826.
- NAVIER, L. M. H. *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines.* Paris 1826. — Deutsche Bearbeitung (3. Aufl.) von G. WESTPHAL und A. FÖPPL. Hannover 1881.
- MOSELEY, H. *The mechanical principles of engineering and architecture.* London 1843. — Deutsch von H. SCHEFFLER. Braunschweig 1845.
- WEISBACH, J. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. II. Theil, 1. Abth.: Statik der Bauwerke. Braunschweig 1847. — 5. Aufl. von G. HERMANN. 1882.
- RIEDLIN, C. Anweisung und Berechnung des Mauerwerkes und der am häufigsten vorkommenden Dachstühle. München 1856.
- REBHANN, G. Höhere Ingenieurwissenschaften. Wien. I. Bd.: Theorie der Holz- und Eisenconstructions mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1856. — II. Bd.: Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1876.

- BRESSE. *Cours de mécanique appliquée. 1re partie: Résistance des matériaux et stabilité des constructions.* Paris 1859. — 3. Aufl. 1880.
- BEHSE, W. H. Die Berechnung der Festigkeit von Holz- und Eisenconstruktionen ohne höhere mathematische Vorkenntnisse. Leipzig 1864.
- CULMANN, K. Die graphische Statik. Zürich 1866. — Von der 2. Aufl. nur Bd. I (Zürich 1875) erschienen.
- HEINZERLING, F. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Construktionen. Zum Gebrauch beim Berechnen von Brücken- und Hochbauten. Berlin 1867. — 2. Aufl. 1876.
- HEINZERLING, F. Grundzüge der constructiven Anordnung und statischen Berechnung der Brücken- und Hochbau-Construktionen. Leipzig 1870.
- WENCK, J. Die Baumechanik etc. Leipzig 1870. — 2. Aufl. 1882. — Neue Titelausg. 1884.
- COLLIGNON, E. *Cours élémentaire de mécanique (statique).* Paris 1870.
- OTT, K. v. Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. Prag 1870. — 3. Aufl. 1874.
- BAUSCHINGER, J. Elemente der graphischen Statik. München 1871.
- OTT, K. v. Vorträge über Baumechanik. Prag. I. Theil: Die Statik des Erdbaues, der Futtermauern und der Gewölbe. 1871. (3. Aufl. 1888.) — II. Theil: Die Zug-, Druck- und Schubfestigkeit, resp. Elasticität sammt deren Anwendung. 1876. (2. Aufl. 1878.)
- KOPKA, C. Die Bau-Mechanik. Leipzig 1872.
- HOLZHEY, E. Vorträge über Baumechanik. Wien 1872—76.
- LEVY, M. *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris 1874.
- CREMONA, L. *Elementi di calcolo grafico.* Torino 1874. — Deutsch von M. CURTZE. Leipzig 1875.
- RITTER, A. Lehrbuch der höheren Mechanik. II. Theil: Ingenieur-Mechanik. Hannover 1875. Deutsche bautechnische Taschenbibliothek. 9. Heft: Die Baumechanik. Von W. JEEP. Leipzig 1876.
- DU BOIS, A. J. *Elements of graphical statics etc.* New York 1876.
- ROLLA, L. *Elementi di statica grafica etc.* Milano 1876.
- CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics, comprising: I. Stability of structures. II. Strength of materials.* London 1877.
- EDDY, H. T. *New constructions in graphical statics.* New York 1877. — Deutsche vom Verfasser verm. u. verb. Ausgabe. Leipzig 1880.
- KLASEN, L. Graphische Ermittlung der Spannungen in den Hochbau- und Brücken-Construktionen. Leipzig 1878.
- ZUCCHETTI, F. *Statica grafica, sua teoria ed applicazioni.* Torino 1878.
- RANKINE, W. J. M. *Manual of civil engineering.* 12. Aufl. London 1877. — Deutsch von F. KREUTER. Wien 1879.
- HUMBER, W. *Sandy book for the calculation of strains on girders and similar structures.* 3. edit. London 1879.
- WENCK, J. Die graphische Statik etc. Berlin 1879.
- CAIN, W. *Theory of solid and braced elastic arches, applied to arch bridges and roofs in iron, wood, concrete, or other material. Graphical analysis.* New York 1879.
- WITTMANN, W. Statik der Hochbau-Construktionen. Berlin. I. Theil: Steinconstruktionen. 1879. — II. Theil: Holzconstruktionen. 1882. — III. Theil: Eisenconstruktionen. 1884.
- CLARKE, G. S. *The principles of graphic statics.* London 1880. — 2. Aufl. 1888.
- ORLANDER, E. *A new method of graphic statics applied to the construction of wrought-iron girders.*
- MÜLLER-Breslau, F. B. Elemente der graphischen Statik der Bauconstruktionen für Architekten und Ingenieure. Berlin 1881. — 2. Aufl. 1887.
- ALBERT, F. Die technische Mechanik im Hochbau. Plauen 1881.
- CHALMERS, J. B. *Graphical determination of forces in engineering structures.* London 1881.
- CROFTON, M. W. *Lectures on the elements of applied mechanics.* London 1881.
- BELLOT. Die wichtigsten Lehren der Baumechanik. Leipzig 1882.
- HINTZ, L. Die Baustatik etc. Weimar 1882.
- STELZEL, K. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger. Graz 1882.
- PETERSEN, J. Lehrbuch der Statik fester Körper. Deutsche Ausg. von R. v. FISCHER-Benzon. Kopenhagen 1882.

- MAURER, M. *Statique graphique appliquée aux constructions, toitures, planchers, poutres etc.* Paris 1882. — 2. Aufl. 1885.
- GRAHAM, R. H. *Graphic and analytic statics in theory and comparison etc.* London 1883. (New York 1887.)
- WILDA, E. *Statik fester Körper.* Brünn 1884.
- JENTZEN, E. *Baummechanik mit besonderer Rücksicht auf die Berechnung der Träger und Stützen aus Holz und Eisen etc.* Hamburg 1886.
- FLAMANT, A. *Stabilité des constructions, résistance des matériaux.* Paris 1886.
- Praktische Unterrichtsbücher für Bautechniker. III. Die Festigkeitslehre und die Statik im Hochbau. Von H. DIESENER. Halle 1886.
- HAUSSER, A. E. & L. CUNQ. *Statique graphique appliquée etc.* Paris. Erscheint seit 1886.
- SCHLOTKE, J. *Lehrbuch der graphischen Statik.* Hamburg 1887.
- RITTER, W. *Anwendungen der graphischen Statik.* Zürich. Erscheint seit 1888.

## 1. Kapitel.

### Allgemeines.

Für die Lösung der zwei in Art. 1 bezeichneten Aufgaben ist die Kenntniss derjenigen Kräfte nöthig, welche bei den verschiedenartigen möglichen Belastungszuständen im Inneren der Constructionen entstehen, d. h. der sog. inneren Kräfte oder Spannungen, die wohl auch widerstehende Kräfte genannt werden. Die inneren Kräfte aber stehen wiederum in einem ganz bestimmten Verhältniss zu den von außen auf die Constructionen wirkenden Kräften, zu den sog. äusseren Kräften, welche auch als die angreifenden Kräfte bezeichnet werden.

2.  
Äuftere  
und innere  
Kräfte.

Eine jede statische Untersuchung zerfällt deshalb zunächst in zwei Theile: in die Ermittlung der äusseren Kräfte, bezw. der für den zu untersuchenden Constructionstheil ungünstigsten äusseren Kräfte, und in die Ermittlung der inneren Kräfte oder Spannungen, welche durch die äusseren Kräfte hervorgerufen werden.

Die äusseren Kräfte lassen sich in zwei Hauptgruppen theilen:

1) Die Belastungen. Dieselben sind beim Beginne der Untersuchung nur zum Theile bekannt; die Eigengewichte z. B. sind zunächst noch unbekannt, da erst die vorzunehmende Berechnung die genauen Abmessungen und damit die Gewichte fest stellen soll. Meistens sind aber ähnliche Constructionen ausgeführt und bekannt, und nach diesen kann das Eigengewicht annähernd bestimmt werden.

2) Die Auflager- oder Stützendrücke derjenigen festen Punkte, welche die zu betrachtenden Constructionen stützen. Dieselben sind meistens von vornherein nicht gegeben und sind nach den Gesetzen der Statik, bezw. der Elasticitätslehre zu ermitteln.

Da die Statik der Bauconstructionen sich nur mit solchen Körpern beschäftigt, welche unter der Einwirkung der äusseren Kräfte im Gleichgewichte sind, so kann man für die sämmtlichen äusseren Kräfte, welche auf eine Construction wirken, die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen und mittels der so gefundenen Gleichungen die unbekanntesten äusseren Kräfte, die Stützendrücke, ermitteln. Man führt die letzteren deshalb als vorläufig unbekannteste Kräfte ein und stellt die Gleichgewichtsbedingungen auf. So lange die Kräfte in einer Ebene wirken, wie es in den hier zu betrachtenden Fällen meistens stattfindet, giebt es drei Gleichgewichtsbedingungen, also auch drei Gleichungen für die Ermittlung der Unbekannten. Aus drei Gleichungen kann man aber nur drei Unbekannte finden; sind also mehr als drei Unbekannte vorhanden, so genügt die angegebene Methode nicht mehr. Die Gleichungen für die Stützen-

3.  
Ermittlung  
der äusseren  
Kräfte.

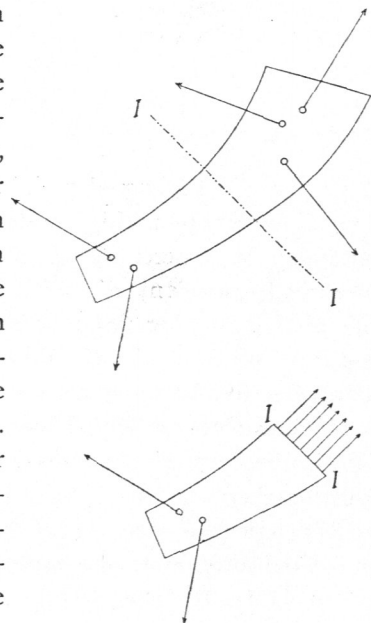
drücke dürfen demnach nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, wenn die Aufgabe auf dem angegebenen Wege lösbar sein soll; anderenfalls ist zur Ermittlung derselben die Elasticitätslehre zu Hilfe zu nehmen.

4.  
Ermittlung  
der inneren  
Kräfte.

Nachdem die sämtlichen äusseren Kräfte gefunden sind, müssen die inneren Kräfte oder Spannungen aufgesucht werden. Das hierbei einzuschlagende Verfahren ist folgendes.

Man denkt sich durch den Körper an derjenigen Stelle, an welcher man die inneren Kräfte kennen lernen will, eine Ebene  $II$  (Fig. 1) hindurchgelegt und untersucht nur den Theil an der einen Seite dieser Ebene; hier möge der Theil links von  $II$  betrachtet werden. Auf diesen Theil werden von dem an der anderen Seite der Ebene  $II$  liegenden Körpertheile gewisse innere Kräfte übertragen, welche denselben im Vereine mit den auf ihn wirkenden äusseren Kräften im Gleichgewichte halten; denn nicht nur der ganze Körper, sondern auch jeder Theil desselben muss unter der Einwirkung aller auf ihn wirkenden Kräfte, der äusseren und der inneren, im Gleichgewichte sein. Bringt man demnach die inneren Kräfte am linken Körpertheile an, so kann man auf die sämtlichen jetzt auf diesen Theil wirkenden Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden und aus diesen die nach Grösse und Richtung unbekannt inneren Kräfte ermitteln. Wie oben, stehen auch hier, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, nur drei Bedingungsgleichungen zu Gebote; deshalb ist auch hier die Ermittlung der unbekannt inneren Kräfte auf diesem Wege nur möglich, wenn dieselben nicht mehr als drei Unbekannte enthalten. Selbstverständlich ist das Ergebnis das gleiche, ob man den Körpertheil an der einen oder anderen Seite der Ebene  $II$  untersucht.

Fig. 1.



Die aus Vorstehendem sich ergebende Regel wird auch wohl folgendermassen ausgedrückt: Man lege durch den Körper einen Schnitt  $II$ , denke den Theil an der einen Seite des Schnittes fortgenommen und bringe an dem übrig bleibenden Bruchstück alle Kräfte an, welche vor dem Durchschneiden auf dasselbe wirkten, d. h. die äusseren Kräfte und die an der Schnittstelle von dem anderen Bruchstück übertragenen inneren Kräfte. Alsdann befindet sich dasselbe in demselben Zustande wie vor dem Durchschneiden, d. h. im Gleichgewichte; man stelle nun für diese Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf.

#### a) Grundgesetze der Statik fester Körper.

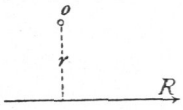
Ogleich die Statik fester Körper im Allgemeinen hier als bekannt vorausgesetzt werden kann, sollen im Folgenden doch einige der wichtigsten anzuwendenden Sätze kurz angeführt werden, damit über die gemachten Annahmen keine Unklarheit herrsche.

5.  
Statische  
Momente.

1) Satz des statischen Momentes. Bekanntlich ist das statische Moment einer Kraft  $R$  in Bezug auf einen Punkt  $o$  (Fig. 2) das Product aus der Grösse der

Kraft  $R$  in den senkrechten Abstand der Richtung dieser Kraft vom Punkte  $o$ , d. h. das statische Moment von  $R$  in Bezug auf den Punkt  $o$  ist  $M = R r$ .

Fig. 2.



Dabei wird der senkrechte Abstand  $r$  der Krafrichtung vom Punkte  $o$  der Hebelsarm der Kraft  $R$  für  $o$  genannt.

Aus dieser Erklärung folgt, daß die statischen Momente stets Producte von Kräften und Längen sind. Die Maßeinheiten, in denen sie ausgedrückt werden, sind demnach Producte aus Längen- und Kräfteinheiten. Ist die Kraft in Kilogrammen, die Länge in Centimetern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Kilogramm-Centimetern; ist die Kraft in Tonnen, die Länge in Metern angegeben, so ergibt sich das statische Moment in Tonnen-Metern<sup>1)</sup> etc.

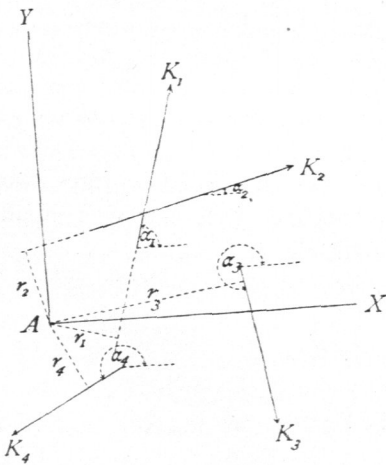
Die Kraft  $R$  hat das Bestreben, die Ebene um den als fest gedachten Punkt  $o$ , bezw. um eine im Punkte  $o$  senkrecht zur Kraftebene errichtete Axe zu drehen, hier also nach links. Wenn die statischen Momente mehrerer in derselben Ebene liegenden Kräfte aufzustellen sind, so ist zu beachten, daß die verschiedenen Kräfte allgemein verschiedene Drehrichtungen haben. Welche von diesen als positiv eingeführt wird, ist gleichgültig; ist aber die eine Drehrichtung als positiv angenommen, so ist die entgegengesetzte als negativ einzuführen.

Da Anfänger sich leicht bezüglich der für ein Moment einzuführenden Drehrichtung irren, so ist die Angabe der folgenden Regel wohl nicht überflüssig. Man denke sich den Hebelsarm durch eine Kurbel ersetzt, deren Axe mit der Drehaxe der statischen Momente zusammenfällt; die Drehrichtung der Kurbel ist auch diejenige des Momentes der Kraft.

Der in Folgendem häufig anzuwendende Satz des statischen Momentes lautet: Das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene, in welcher die Kräfte liegen, ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Dieser Satz giebt oft ein bequemes Mittel zur Ermittlung der Unbekannten. Wählt man den Punkt, in Bezug auf welchen man das statische Moment aufstellt, auf der Richtungslinie der Mittelkraft, so hat die letztere in Bezug auf diesen Punkt den Hebelsarm Null, also auch das statische Moment Null. Für diesen besonderen Fall heißt der obige Satz: Die algebraische Summe der statischen Momente einer

Fig. 3.



Reihe von Kräften in Bezug auf einen auf der Richtungslinie der Mittelkraft liegenden Punkt ist gleich Null.

2) Satz vom Gleichgewichte der Kräfte. Derselbe lautet: Die an einem Körper angreifenden, in einer Ebene liegenden Kräfte sind im Gleichgewichte, wenn die algebraische Summe der in zwei senkrecht zu einander stehende, sonst beliebige Richtungen fallenden Seitenkräfte je gleich Null ist und außerdem die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene gleich Null ist.

Man zerlege demnach sämtliche Kräfte ( $K_1, K_2, K_3 \dots$  in Fig. 3) nach zwei zu einander senkrechten Richtungen, von denen die

6.  
Gleichgewicht  
der  
Kräfte.

<sup>1)</sup> Ein Tonnen-Meter ist gleich 100 Tonnen-Centimetern und gleich 100000 Kilogramm-Centimetern. Danach kann ein Moment, welches in der einen Einheit, etwa in Tonnen-Metern, berechnet ist, leicht in eine andere Einheit, etwa Kilogramm-Centimeter, umgerechnet werden.

eine ganz willkürlich angenommen werden kann. Alsdann erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für die sämtlichen Kräfte die Gleichungen:

$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0, \quad \Sigma (K \sin \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma (K r) = 0.$$

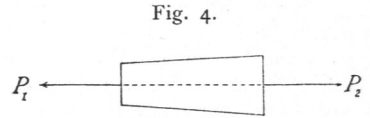
Hier ist  $A$  als Momentenpunkt angenommen; es hätte indefs auch jeder beliebige andere Punkt der Kraftebene gewählt werden können.

In sehr vielen Fällen ist die Mehrzahl aller äußeren Kräfte lothrecht gerichtet; alsdann empfiehlt es sich, die Kräfte  $K_1, K_2, K_3 \dots$  nach der wagrechten und lothrechten Richtung zu zerlegen. In diesem Falle heißen die Bedingungsgleichungen, wenn wiederum alle Kräfte in einer Ebene liegen: Die an einem Körper angreifenden Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn

- $\alpha$ ) die algebraische Summe der wagrechten Seitenkräfte gleich Null ist,
- $\beta$ ) die algebraische Summe der lothrechten Seitenkräfte gleich Null ist,
- $\gamma$ ) die algebraische Summe der statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Ebene, gleich Null ist.

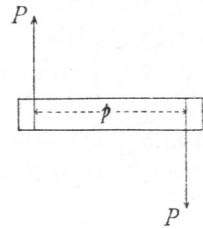
7.  
Zwei Kräfte  
auf einen Körper  
wirksam;  
Kräftepaar.

3) Zwei auf einen Körper wirkende Kräfte halten denselben nur dann im Gleichgewicht, wenn beide der Größe nach genau gleich, dem Sinne nach genau einander entgegengesetzt sind und mit ihren Richtungslinien zusammenfallen (Fig. 4); denn nur dann sind alle drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.



Haben zwei Kräfte  $P$  (Fig. 5) parallele Richtung, gleiche Größe und entgegengesetzten Sinn, fallen sie aber mit ihren Richtungslinien nicht zusammen, so ist allerdings jede der beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, nicht aber die dritte. Man nennt zwei solche Kräfte ein Kräftepaar und versteht unter dem Momente des Kräftepaares das Product aus der Größe der Kraft  $P$  in den senkrechten Abstand der beiden Richtungslinien der Kräfte; d. h. es ist das Moment  $M = P \rho$ .

Fig. 5.



Es ist wohl zu beachten, daß die Summe der statischen Momente beider zu dem Kräftepaar vereinten Kräfte für jeden beliebigen Punkt der Ebene die gleiche Größe  $M = P \rho$  hat. In den Berechnungen kommt vielfach das (unter Umständen vorläufig noch unbekannt) Moment  $M$  eines Kräftepaares vor; wird alsdann für einen beliebigen Punkt der Ebene die algebraische Summe der statischen Momente aufgestellt, so ist, wo auch der Punkt liege, der Beitrag des Kräftepaares mit dem Werthe  $M$  einzuführen.

8.  
Drei Kräfte  
auf einen Körper  
wirksam.

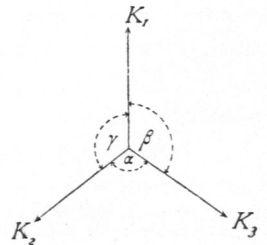
4) Drei auf einen Körper wirkende Kräfte sind nur dann im Gleichgewichte, wenn sich ihre Richtungslinien in einem Punkte schneiden, jede der drei Kräfte absolut genommen genau eben so groß ist, wie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte, und mit der betreffenden Mittelkraft einen Winkel von 180 Grad einschließt.

5) Wenn drei in derselben Ebene liegende Kräfte, welche sich in einem Punkte schneiden, im Gleichgewichte sind, so verhalten sich die Kräfte zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Die drei Kräfte  $K_1, K_2$  und  $K_3$  (Fig. 6) befinden sich sonach im Gleichgewicht, wenn

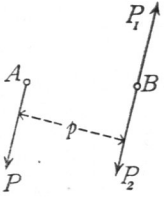
$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Fig. 6.



6) Eine in irgend einem Punkte  $A$  (Fig. 7) angreifende Kraft  $P$  kann stets ersetzt werden durch eine nach einem beliebigen anderen Punkte  $B$  parallel verschobene Kraft  $P$  von gleicher GröÙe, gleicher Richtung und gleichem Sinne mit der gegebenen, und ein Kräftepaar, dessen Moment dem Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt  $B$  nach GröÙe und Drehrichtung gleich ist.

Fig. 7.

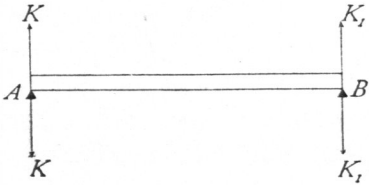


Denn es wird nichts geändert, wenn im Punkte  $B$  zwei Kräfte,  $P_1$  und  $P_2$ , angebracht werden, welche der gegebenen Kraft in GröÙe und Richtung gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt sind. Zwei dieser drei Kräfte,  $P$  und  $P_1$ , ergeben ein Kräftepaar, welches für jeden Punkt der Ebene, also auch für  $B$ , das Moment  $M = Pp$  und gleiche Drehrichtung hat, wie die ursprünglich gegebene Kraft; die dritte Kraft  $P_2$  ist eben die parallel sich selbst verschobene Kraft  $P$ . Jede Kraft  $P$  wirkt also auf einen nicht auf ihrer Richtung liegenden Punkt, dessen senkrechter Abstand von der Kraft gleich  $p$  ist, mit einem Drehmoment  $Pp$  und außerdem so, als ob sie in ihm selbst angriffe.

7) Gesetz der Wechselwirkung. Dasselbe lautet: Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, so erleidet er durch diesen Körper eine Kraft, welche der von ihm ausgeübten der GröÙe nach genau gleich, der Richtung nach genau entgegengesetzt ist.

9.  
Gesetz  
der Wechsel-  
wirkung.

Fig. 8.



Dieses Gesetz wird in der Folge sehr häufig angewendet werden. Es kommt unter Anderem bei den Auflagern der Träger in Betracht. Ein Träger  $AB$  (Fig. 8) übt durch sein Eigengewicht und die wirkenden Belastungen auf die Auflagerpunkte  $A$  und  $B$  die Drücke  $K$  und  $K_1$  aus; dieselben sind nach unten gerichtet. Genau eben so groß sind die Gegendrücke, welche die Auflager auf die Träger ausüben. Diese sind nach oben gerichtet, da sie den ersteren Drücken  $K$  und  $K_1$  genau entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Betrachtet man nur den Träger, so hat man die nach oben wirkenden Kräfte  $K$  und  $K_1$  — als Stützendrücke — einzuführen; betrachtet man die Auflager, so sind die nach unten gerichteten Drücke  $K$  und  $K_1$  der Untersuchung zu Grunde zu legen.

## b) Grundlagen für die graphische Behandlung baustatistischer Aufgaben.

Die Aufgaben der Statik der Bauconstructions können nicht nur durch Rechnung (auf analytischem Wege), sondern auch durch Zeichnung (auf graphischem Wege) gelöst werden. Die graphische Behandlung hat manche Vortheile. Dieselbe führt in vielen Fällen rascher und leichter zum Ziele und gewährt fast immer eine klarere Uebersicht über die Wirkung der Kräfte, als die Rechnung.

10.  
Graphische  
Methode.

In den folgenden Untersuchungen werden meistens beide Wege eingeschlagen werden. Damit über die bei der graphischen Behandlung vorauszusetzenden Begriffe volle Klarheit herrsche und um Wiederholungen zu vermeiden, sollen die Grundlagen für die graphische Behandlung hier kurz vorgeführt werden. Dabei wird die Annahme gemacht, dass sämtliche Kräfte in einer Ebene wirken.

1) Kräfte an einem Angriffspunkte. Die an einem Punkte angreifenden Kräfte können durch ihre Resultirende oder Mittelkraft ersetzt werden. Um diese Mittelkraft nach GröÙe und Richtung zu erhalten, construirt man das sog. Kraftpolygon.

11.  
Kraft-  
polygon.

Das Kraftpolygon für eine Anzahl von Kräften ist derjenige Linienzug, welchen man erhält, wenn man sämtliche Kräfte nach irgend einem Maßstabe so an einander reiht, daß die Größe, die Richtung und der Sinn einer jeden Kraft in diesem Linienzuge mit der Größe, der Richtung und dem Sinne der gegebenen Kraft übereinstimmt und daß der Anfangspunkt jeder Kraft mit dem Endpunkte der vorhergehenden Kraft zusammenfällt.

Der Maßstab für das Auftragen der Kräfte kann beliebig angenommen werden; doch sind sämtliche Kräfte nach demselben Maßstabe aufzutragen.

Um das Kraftpolygon für die Kräfte  $K_1, K_2, K_3, K_4$  zu erhalten, welche im Punkte  $A$  (Fig. 9) angreifen, trage man zunächst von einem beliebig anzunehmenden Punkte  $\alpha$  aus nach irgend einem Maßstabe so viele Kräfteeinheiten ab, wie  $K_1$  enthält, und zwar nach einer Richtung  $\alpha\beta$ , welche mit derjenigen von  $K_1$  übereinstimmt. Ist etwa  $K_1 = 20\text{ t}$  und der Maßstab so gewählt, daß  $1\text{ cm} = 20\text{ t}$  bedeutet, so würde man von  $\alpha$  aus  $1\text{ cm}$  abzutragen haben. Man ziehe also durch  $\alpha$  eine Linie parallel zur Richtung von  $K_1$  und trage auf dieser Linie  $\alpha\beta = K_1$  ab. Daran trage man  $K_2$ ; zu diesem Zwecke ziehe man durch  $\beta$  eine Linie parallel zur Richtung von  $K_2$  und trage auf dieser Linie  $\beta\gamma = K_2$  ab. In derselben Weise verfähre man weiter und erhält so  $\gamma\delta = K_3, \delta\epsilon = K_4$ . Alsdann ist  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$  das Kraftpolygon für die Kräfte  $K_1, K_2, K_3, K_4$ .

Es ist oben angegeben, daß der Sinn der Kraft im Kraftpolygon mit dem der gegebenen Kraft übereinstimmen muß. In der gegebenen Kraft ist der Sinn durch einen Pfeil ausgedrückt, so daß Unklarheit über denselben nicht bestehen kann; im Kraftpolygon ergibt sich der Sinn ebenfalls unzweideutig, wenn man die Kräfte stets so aufträgt, daß die Richtung vom früheren Buchstaben des Alphabetes bis zum höheren Buchstaben desselben mit der Pfeilrichtung der gegebenen Kraft übereinstimmt. Die Kraft  $\alpha\beta$  wirkt also im Sinne von  $\alpha$  nach  $\beta$ , nicht im Sinne von  $\beta$  nach  $\alpha$ .

Die Größe, die Richtung und der Sinn der Mittelkraft aller an einem Punkte  $A$  (Fig. 9) angreifenden Kräfte wird erhalten, indem man den Anfangspunkt des für diese Kräfte konstruirten Kraftpolygons mit dessen Endpunkte verbindet.

In Fig. 9 giebt also  $\alpha\epsilon$  die Größe, die Richtung und den Sinn der Mittelkraft der vier Kräfte  $K_1, K_2, K_3, K_4$  an.

Die Mittelkraft der beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  wird nach dem bekannten Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch die Diagonale des aus diesen beiden Kräften konstruirten Parallelogramms dargestellt, d. h. es stellt in Fig. 10  $ac$  die Mittelkraft von  $K_1$  und  $K_2$  nach Größe und Richtung dar, wenn  $ab = K_1, ad = K_2$  ist. Die Diagonale  $ac$  theilt das Parallelogramm  $abcd$  in zwei congruente Dreiecke; es wird also genügen, das Dreieck  $abc$  zu konstruieren, in welchem  $ab = K_1$  und  $bc = K_2$  ist. Alsdann ist die dritte Seite  $ac$  des Dreieckes gleich der Mittelkraft  $R_{1-2}$  von  $K_1$  und  $K_2$ . Das Dreieck  $abc$  ist aber nach der oben gegebenen Erklärung das Kraftpolygon für die beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , und  $ac$  verbindet den Anfangspunkt  $a$  desselben mit dem Endpunkte  $c$ . Für zwei Kräfte ist damit obiger Satz bewiesen.

Kommt eine dritte Kraft  $K_3$  hinzu, so ist die Mittelkraft  $R_{1-2}$  von  $K_1$  und  $K_2$  mit  $K_3$  zu vereinen, um die Resultirende  $R_{1-3}$  von  $K_1, K_2$  und  $K_3$  zu erhalten. Ist  $K_3 = ae$ , so konstruere man das Parallelogramm  $acfe$ , und ziehe die Diagonale  $af$  desselben; die letztere ist die gesuchte Mittelkraft. Auch hier genügt es, um  $af$  zu erhalten, nur das Dreieck  $acf$  zu zeichnen. Man erhält also die Mittelkraft  $R_{1-3}$ , indem man an den Endpunkt von  $R_{1-2} = ac$  die Kraft  $K_3$  nach Größe und Richtung gleich  $cf$  anträgt und  $a$  mit  $f$  verbindet. Der Linienzug  $abcfe$  ist aber nach obiger Erklärung das Kraftpolygon für die drei Kräfte  $K_1, K_2$  und  $K_3$  und  $af$  die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte.

Fig. 9.

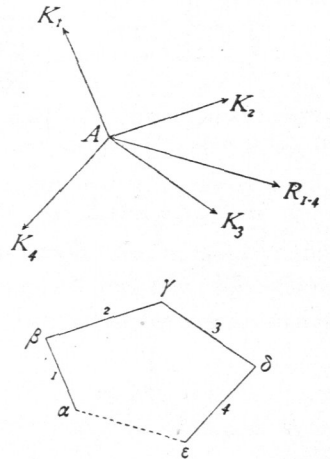
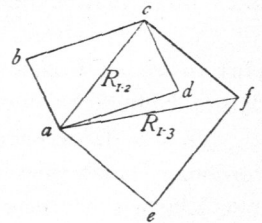


Fig. 10.



12.  
Satz I.



Damit ist der Beweis unseres Satzes auch für drei Kräfte geliefert. In derselben Weise kann er ohne Schwierigkeit für eine beliebige Anzahl von Kräften geführt werden.

Das Kraftpolygon ist nur eine Hilfsfigur, welche wohl Größe, Richtung und Sinn der Mittelkraft, nicht aber deren Lage in der Ebene anzeigt. Die Lage derselben ist aber nicht zweifelhaft, sobald man außer der Richtung der Kraft einen Punkt kennt, durch welchen die Kraft hindurchgeht. Die Richtung wird hier durch das Kraftpolygon gegeben. Der Punkt ist auch bekannt; denn die Mittelkraft aller Kräfte muß durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt derselben, d. h. durch  $A$  (Fig. 9), gehen. Zieht man also durch  $A$  eine Linie parallel zu  $\alpha \varepsilon$ , so ergibt diese die Mittelkraft nach Lage und Richtung; die Größe derselben ist  $\alpha \varepsilon$ .

Zu jedem Kraftpolygon gehört als nothwendige Ergänzung ein Kräftemaßstab, der nie vergessen werden soll.

Wenn die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist das Kraftpolygon eine geschlossene Figur.

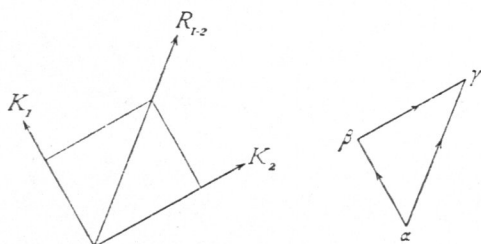
13.  
Satz II.

Sind die auf einen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist ihre Mittelkraft gleich Null; dieselbe wird aber nach Satz I durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte dargestellt. Diese Verbindungslinie muß also für den Fall des Gleichgewichtes gleich Null sein; es muß demnach der Anfangspunkt des Kraftpolygons mit dessen Endpunkte zusammen fallen, d. h. das Kraftpolygon muß eine geschlossene Figur sein.

Der Sinn der Mittelkraft ist vom Anfangspunkte des aus den Seitenkräften konstruirten Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet; der Umfassungssinn des ganzen Polygons mit Einschluß der Mittelkraft erleidet also am Endpunkte der Einzelkräfte eine Unterbrechung.

14.  
Satz III.

Fig. 11.



Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, die Mittelkraft zweier Kräfte aufzufuchen. Ist in Fig. 11  $\alpha \beta = K_1$  und  $\beta \gamma = K_2$ , so haben beide den durch die Pfeile angedeuteten Umfassungssinn, welcher, wenn noch eine beliebige Anzahl von Kräften hinzukommt, immer derselbe bleibt, d. h. er ist stets vom Anfangspunkte des Kraftpolygons nach dem Endpunkte desselben gerichtet. Der Sinn der Resultirenden  $R_{1-2} = \alpha \gamma$  ist aber, wie sich aus der Parallelogramm-Construction in Fig. 11 ergibt, von  $\alpha$  nach  $\gamma$  gerichtet; er ist also dem Umfassungssinn der Einzelkräfte direct entgegengesetzt. Damit ist der Satz für

zwei Kräfte bewiesen. Jede dritte Kraft  $K_3$  läßt sich aber mit  $R_{1-2}$  in derselben Weise, wie bei  $K_1$  und  $K_2$  gezeigt, zusammenfassen; es handelt sich dabei auch stets nur um zwei Kräfte, und es gilt deshalb das Gesagte auch für  $R_{1-2}$  und  $K_3$ , d. h. für  $K_1, K_2, K_3$ . Die Mittelkraft der durch das Kraftpolygon  $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$  dargestellten Kräfte (Fig. 9) ist  $\alpha \varepsilon$ , der Sinn ist von  $\alpha$  nach  $\varepsilon$  gerichtet; der Umfassungssinn erleidet so nach bei  $\varepsilon$  eine Unterbrechung.

Sind die an einem Punkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist für das ganze Kraftpolygon der Umfassungssinn derselbe.

15.  
Satz IV.

Denn alsdann ist die Resultirende gleich Null, und diese ist nach Satz III die einzige Kraft, welche einen anderen Umfassungssinn hat, als die übrigen Kräfte. Diese einzige Kraft fällt hier fort; mithin haben in diesem Falle alle Kräfte denselben Umfassungssinn.

2) Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten. Wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte an verschiedenen Punkten desselben angreifen, so ist zunächst die Ermittlung der Größe und Richtung der Mittelkraft genau, wie unter 1 angegeben, vorzunehmen.

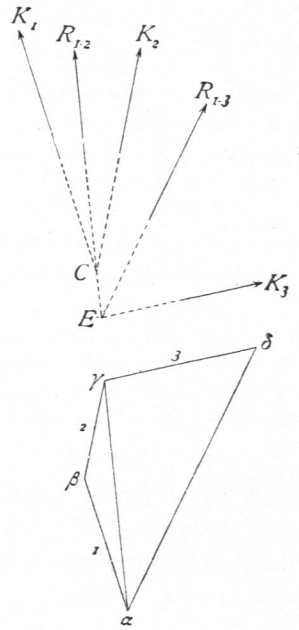
16.  
Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten.

Denn man kann (Fig. 12) zunächst die beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  auf ihren Richtungslinien beliebig verschieben, also auch bis zu dem Schnittpunkte  $C$  derselben. Für die beiden im Punkte  $C$  angreifenden Kräfte liegt nun die Aufgabe genau so, wie oben entwickelt ist. Ist  $K_1 = \alpha \beta$  und  $K_2 = \beta \gamma$ , so ist  $\alpha \gamma$  die Mittelkraft  $R_{1-2}$  von  $K_1$  und  $K_2$ .

Diese Mittelkraft  $R_{1-2}$  greift in  $C$ , dem Schnittpunkte der beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , an und hat die Richtung, welche durch  $\alpha \gamma$  fest gelegt ist, d. h. sie ist parallel zu  $\alpha \gamma$ . Um jetzt die Mittelkraft von

$R_{1-2}$  und  $K_3$ , d. h. diejenige von  $K_1, K_2, K_3$  zu finden, verfährt man genau so, wie bei der Zusammenfassung von  $K_1$  und  $K_2$ . Man verschiebt  $R_{1-2}$  und  $K_3$  bis zum Schnittpunkte  $E$  ihrer Richtungslinien; in diesem muß die gefuchte Mittelkraft  $R_{1-3}$  angreifen. Die Zusammenfassung von  $R_{1-2}$  ( $= \alpha \gamma$  im Kraftpolygon) und  $K_3$  ( $= \gamma \delta$  im Kraftpolygon) kann nun wiederum genau in der oben gezeigten Weise erfolgen, indem man  $\gamma \delta = K_3$  an  $\gamma$  anträgt und  $\alpha \delta$  zieht.  $\alpha \delta$  giebt die Gröfse und Richtung der Mittelkraft  $R_{1-3}$  von  $K_1, K_2, K_3$  an; dieselbe geht durch den Punkt  $E$ . In der gleichen Weise kann man auch bei mehreren Kräften weiter verfahren.

Fig. 12.



Wenn die Gröfse und Richtung der Mittelkraft gefunden ist, ist auch die Lage derselben bekannt, sobald ein Punkt bekannt ist, durch welchen sie gehen muß; denn durch diesen Punkt läßt sich nur eine Parallele zu der im Kraftpolygon gefundenen Richtung der Mittelkraft legen. Ein solcher Punkt ist in Fig. 12 bei  $R_{1-2}$  der Punkt  $C$ , bei  $R_{1-3}$  der Punkt  $E$  etc.

17.  
Seil-  
polygon.

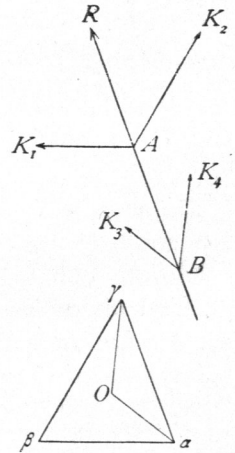
Bei einer großen Anzahl von Kräften würde die gezeigte Ermittlung der Lage der Mittelkraft sehr umständlich fein; deshalb hat man zur Erleichterung eine Hilfsconstruction eingeführt, das sog. Seilpolygon. Dasselbe ergibt sich durch die folgende Betrachtung.

Wie man die Gröfse und Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  in der dritten Seite  $\alpha \gamma$  (Fig. 13) des für die beiden Kräfte construirten Kraftpolygons  $\alpha \beta \gamma$ , hier der Schlußseite des Kraftdreiecks, findet, so kann man auch irgend eine gegebene Kraft  $R$  als Mittelkraft zweier Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  auffassen. Diese beiden Kräfte müssen nur zwei Bedingungen genügen, und zwar:

Fig. 13.

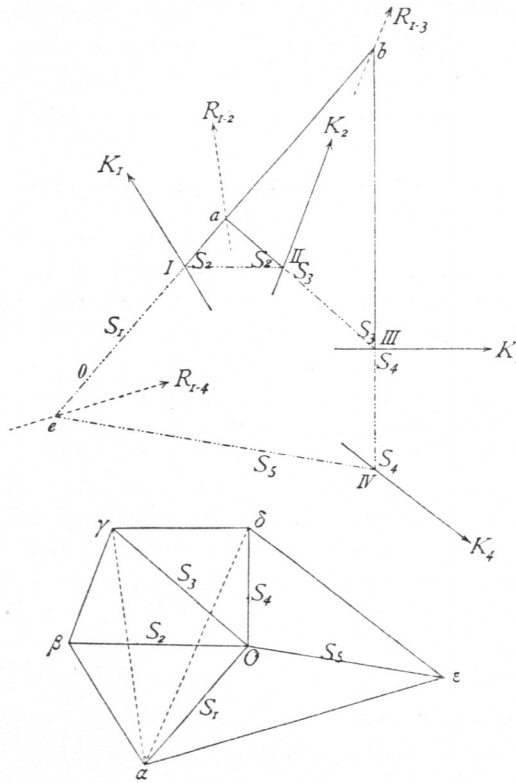
- a) Das aus ihnen construirte Kraftpolygon muß als dritte Seite die gegebene Kraft nach Gröfse und Richtung enthalten, und
- β) die beiden Kräfte müssen sich auf einem Punkte der gegebenen Krafrichtung schneiden.

Man kann also  $R$  als Mittelkraft der beiden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  auffassen, die im Kraftpolygon durch bezw.  $\alpha \beta$  und  $\beta \gamma$  dargestellt sind und deren Richtungslinien sich auf dem Punkte  $A$  der Krafrichtung  $R$  schneiden. In gleicher Weise kann  $R$  auch als Mittelkraft der beiden Kräfte  $K_3$  und  $K_4$  angesehen werden, denen das Kraftdreieck  $\alpha O \gamma$  entspricht, die also im Kraftpolygon durch bezw.  $\alpha O$  und  $O \gamma$  dargestellt werden und deren Richtungslinien sich im Punkte  $B$  der gegebenen Krafrichtung schneiden. Man kann demnach die gegebene Kraft  $R$  sowohl durch die Kräfte  $K_1$  und  $K_2$ , wie durch  $K_3$  und  $K_4$  ersetzen. Daraus folgt, daß man für die Zerlegung einer gegebenen Kraft den Punkt  $O$  ganz beliebig, den Punkt  $B$  auf der Richtungslinie der gegebenen Kraft beliebig wählen kann.



Ist nun eine größere Anzahl von Kräften  $K_1, K_2, K_3, K_4 \dots$  gegeben (Fig. 14), so kann man zunächst  $K_1$  in der angegebenen Weise zerlegen.  $K_1$  werde im Kraftpolygon durch  $\alpha \beta$  dargestellt und möge in  $\alpha O = S_1$  und  $O \beta = S_2$  zerlegt werden. Nach Früherem ist, da  $K_1$  den Sinn von  $\alpha$  nach  $\beta$  hat,  $S_1$  von  $\alpha$  nach  $O$ ,  $S_2$  von  $O$  nach  $\beta$  gerichtet. Als Schnittpunkt dieser beiden Seitenkräfte von  $K$  kann der Punkt  $I$  auf der Richtungslinie von  $K_1$  beliebig angenommen werden. Ferner kann  $K_2$ , welches im Kraftpolygon durch  $\beta \gamma$  dargestellt wird, ebenfalls in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit  $\beta \gamma$  zusammen ein Dreieck bilden müssen. Die Spitze des Dreiecks kann wiederum beliebig gewählt werden; man kann also den Punkt  $O$  als diese Spitze annehmen. Sodann erhält man als die beiden Seitenkräfte von  $K_2$  ( $= \beta \gamma$ ) die Kraftlinien  $\beta O$  und  $O \gamma$ . Die erste dieser Seitenkräfte ist nach Gröfse und Richtung

Fig. 14.



der zweiten Seitenkraft von  $K_1$  genau gleich, da diese  $O\beta$  war.  $S_2 = \beta O$  hat den Sinn von  $\beta$  nach  $O$ ,  $S_3 = O\gamma$  den Sinn von  $O$  nach  $\gamma$ . Wählt man jetzt als Zerlegungspunkt der Kraft  $K_2$  den Punkt  $II$ , in welchem die Richtungslinie der Kraft  $K_2$  von der zweiten Seitenkraft  $S_2$  der Kraft  $K_1$  geschnitten wird, so greifen in diesem Punkte die beiden Kräfte  $S_2$  und  $S_3$  an. In der Richtungslinie  $II$  wirken also die beiden Kräfte  $S_2$ , deren eine in  $I$ , deren andere in  $II$  angreift. Beide sind, wie eben entwickelt ist, der Größe nach einander gleich; sie haben dieselbe Richtung, aber entgegengesetzten Sinn, heben sich also gegenseitig auf. Die beiden gegebenen Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  sind also durch vier neue Kräfte ersetzt, nämlich durch  $S_1, S_2, S_2, S_3$ ; zwei von diesen Kräften heben einander auf, nämlich die beiden  $S_2$ ; es bleiben also zwei Kräfte  $S_1$  und  $S_3$ , welche die gegebenen Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  vollständig ersetzen. Die Mittelkraft von  $K_1$  und  $K_2$  ist demnach derjenigen von  $S_1$  und  $S_3$  gleich in der Größe, in der Richtung, im Sinn und in der Lage. Die Mittelkraft von  $S_1$  und  $S_3$  geht aber durch den Schnittpunkt  $a$  der Richtungslinien derselben; durch diesen Punkt  $a$  muß also auch die Mittelkraft von  $K_1$  und  $K_2$  gehen.

Verfährt man nun mit der dritten Kraft  $K_3$  eben so, wie mit  $K_2$ , d. h. zerlegt man  $K_3$  in zwei Seitenkräfte so, daß der Punkt  $O$  als Spitze des Kraftdreiecks für die Zerlegung von  $K_3 = \gamma\delta$

gewählt wird, so werden die beiden Seitenkräfte  $S_3 = \gamma O$  und  $S_4 = O\delta$  sein. Die erste dieser beiden Seitenkräfte ist wiederum gleich der zweiten Seitenkraft von  $K_2$ , hat aber entgegengesetzten Sinn. Wählt man ferner als Zerlegungspunkt von  $K_3$  den Punkt  $III$ , in welchem die Richtungslinie von  $K_3$  durch die Richtungslinie der Seitenkraft  $S_3$  der Kraft  $K_2$  geschnitten wird, so wirken in der Linie  $II III$  zwei Kräfte  $S_3$ , welche einander wiederum aufheben. Die Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  sind jetzt durch sechs Kräfte ersetzt, nämlich durch  $S_1, S_2, S_2, S_3, S_3, S_4$ , von denen sich die vier mittleren, die beiden  $S_2$  und die beiden  $S_3$ , gegenseitig aufheben, so daß nur  $S_1$  und  $S_4$  übrig bleiben. Die Mittelkraft von  $S_1$  und  $S_4$  ist also auch diejenige von  $K_1, K_2$  und  $K_3$ . Daraus folgt, daß die Mittelkraft von  $K_1, K_2$  und  $K_3$  durch den Schnittpunkt der Kraftrichtungen  $S_1$  und  $S_4$ , also durch den Punkt  $b$  geht.

Verfährt man so weiter, so erhält man einen Linienzug  $O I II III IV \dots$ , welchen man das Seilpolygon nennt. Aus der vorstehenden Erklärung der Entstehung ergibt sich folgender Satz:

Die Mittelkraft einer Anzahl auf einander folgender Kräfte geht durch den Schnittpunkt der Richtung derjenigen Seilpolygonseite, welche der ersten dieser Kräfte vorhergeht, mit der Richtung derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte dieser Kräfte folgt.

Denn die in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte heben sich sämtlich gegenseitig auf, und es bleiben nur die in den äußeren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte übrig, deren Mittelkraft mit derjenigen der gegebenen Kräfte in jeder Beziehung übereinstimmt<sup>2)</sup>.

Den Punkt  $O$  (Fig. 14) nennt man den Pol des Seilpolygons.

Durch das Kraft- und Seilpolygon ist die Mittelkraft ganz beliebig in einer Ebene wirkender Kräfte bestimmt. Die Größe, die Richtung und den Sinn derselben

18.  
Satz V.

<sup>2)</sup> Kehrt man die Richtungen der in einem Eckpunkte des Seilpolygons wirkenden zwei Seitenkräfte  $S$  um, so halten sich dieselben offenbar mit der auf den Eckpunkt wirkenden Kraft  $K$  im Gleichgewicht. In jedem Eckpunkte eines Seilpolygons befindet sich demnach die äußere Kraft  $K$  mit den im entgegengesetzten Sinne genommenen Spannungen  $S$  im Gleichgewicht.

giebt das Kraftpolygon, die Lage in der Ebene giebt das Seilpolygon an, da dasselbe einen Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft ergibt. Zieht man durch diesen eine Parallele zu der mit Hilfe des Kraftpolygons gefundenen Richtung der Mittelkraft, so erhält man die wirkliche Lage derselben, über welche ein Zweifel nicht mehr herrschen kann, da durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Richtung möglich ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß Kraft- und Seilpolygon nicht nur die Mittelkraft der sämtlichen wirkenden Kräfte, sondern auch einer beliebigen Gruppe dieser Kräfte ergeben. So ist die Mittelkraft von  $K_1$  und  $K_2$  (Fig. 14) nach Größe und Richtung gleich  $\alpha \gamma$  und geht durch  $a$ . Zieht man also durch  $a$  eine Linie parallel zu  $\alpha \gamma$ , so erhält man diese Mittelkraft  $K_{1-2}$ . So ist ferner die Mittelkraft von  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  nach Größe und Richtung gleich  $\alpha \delta$  und geht durch  $b$ ; eine durch  $b$  parallel zu  $\alpha \delta$  gezogene Linie ergibt  $K_{1-3}$ . Die Mittelkraft von  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_4$  ist nach Größe und Richtung gleich  $\alpha \varepsilon$  und geht durch  $e$  etc.

19.  
Satz VI.

Wenn die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, so ist sowohl das Kraftpolygon, wie auch das Seilpolygon eine geschlossene Figur.

Daß das Kraftpolygon in dem angegebenen Falle eine geschlossene Figur sein muß, geht aus dem Früheren hervor; denn es ist nachgewiesen, daß das Kraftpolygon für an verschiedenen Punkten angreifende Kräfte genau eben so konstruiert wird und genau dieselbe Bedeutung hat, wie für an einem Punkte angreifende Kräfte. Es muß also nach Satz II das Kraftpolygon eine geschlossene Figur sein, auch wenn die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen.

Daß sich auch das Seilpolygon schließen muß, ergibt sich folgendermaßen.

Konstruiert man das Seilpolygon für eine beliebige Anzahl von Kräften, so heben sich, wie oben auseinandergesetzt, die sämtlichen in den mittleren Seilpolygonseiten wirkenden Kräfte auf, und es bleiben als einzig wirkende Kräfte diejenigen übrig, welche in den beiden äußersten Seilpolygonseiten wirken, d. h. diejenige, welche der ersten Kraft  $K_1$  vorangeht, und diejenige, welche auf die letzte Kraft  $K_n$  folgt, also  $S_1$  und  $S_{n+1}$  (Fig. 15). Diese beiden Kräfte ersetzen alle gegebenen Kräfte  $K_1, K_2, K_3 \dots K_n$ .

Die letzteren sind nach der Voraussetzung im Gleichgewicht; folglich müssen auch  $S_1$  und  $S_{n+1}$  im Gleichgewicht sein. Gleichgewicht zwischen zwei Kräften ist aber nur möglich, wenn ihre Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. Es muß also diejenige Seilpolygonseite, welche der ersten Kraft  $K_1$  vorhergeht, mit derjenigen Seilpolygonseite, welche auf die letzte Kraft  $K_n$  folgt, zusammenfallen, d. h. das Seilpolygon muß eine geschlossene Figur sein.

Die schließende Seilpolygonseite nennt man die Schlußlinie des Seilpolygons.

In der Statik der Bauconstructionen kommt sehr häufig der Fall vor, daß alle wirkenden Kräfte parallel sind. In diesem Falle wird das Kraftpolygon eine Gerade. Sind diese Kräfte im Gleichgewicht, so schließt sich nach Satz VI das Kraftpolygon; es fallen also dann Anfangs- und Endpunkt des Kraftpolygons auch hier zusammen.

Für neben stehenden Balken  $AB$  (Fig. 16) sei im Kraftpolygon  $P_1 = \alpha \beta$ ,  $P_2 = \beta \gamma$ ,  $P_3 = \gamma \delta$ ; das Kraftpolygon muß sich schließen, wenn die außerdem noch wirkenden Kräfte  $D_1$  und  $D_0$ , die Stützendrücke, an  $\delta$  angetragen werden, d. h. es müssen  $D_0$  und  $D_1$ , welche, eben so wie

Fig. 15.

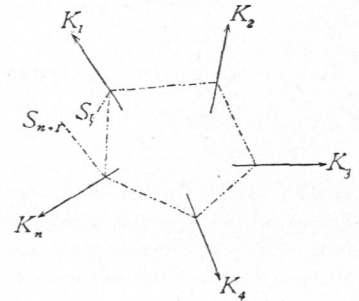
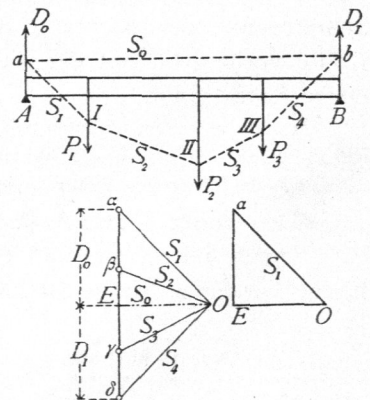


Fig. 16.



$P_1, P_2, P_3$ , lothrecht sind, mit  $\delta \alpha$  zusammenfallen, und der Endpunkt von  $D_0$  muß auf  $\alpha$  fallen. Unbekannt ist zunächst noch der Punkt  $E$  im Kraftpolygon, welcher die Grenze zwischen  $D_1$  und  $D_0$  bildet. Da aber Gleichgewicht stattfindet, so muß sich auch das Seilpolygon schließen, welches für einen beliebigen Pol und die fünf Kräfte  $P_1, P_2, P_3, D_1, D_0$  construirt wird. Es sei der Pol  $O$ , das Seilpolygon  $I II III$  und  $a$  der Schnittpunkt der ersten Seilpolygonseite mit der Richtungslinie von  $D_0$ ,  $b$  der Schnittpunkt der letzten Seilpolygonseite mit der Richtungslinie von  $D_1$ ; alsdann müssen nach dem Satze VI die vor  $D_0$  liegende und die auf  $D_1$  folgende Seilpolygonseite, d. h.  $S_0$  und  $S_{n+1}$  zusammenfallen; es muß also  $a b$  die schließende Seilpolygonseite, d. h. die Schlußlinie des Seilpolygons sein.

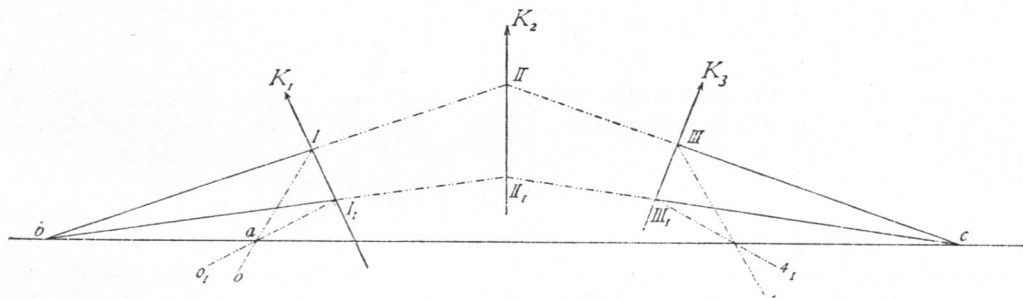
Nach der Erklärung des Seilpolygons in Art. 17 (S. 12) stellen die von den Ecken des Kraftpolygons nach dem Pol  $O$  laufenden Strahlen die in den Seilpolygonseiten auftretenden Kräfte oder, wie man sagt, die Spannungen im Seilpolygon vor, natürlich in demselben Maßstabe, in welchem die Kräfte  $P$  aufgetragen sind. Im Punkte  $a$  des Seilpolygons halten sich nun folgende Kräfte das Gleichgewicht: der Stützendruck  $D_0$ , die Spannung in der Seilpolygonseite  $a I$  und diejenige in der Schlußlinie  $a b$  (beide in dem gleichen Sinne, wie in Fußnote 2 [S. 13] genommen). Von allen diesen drei Kräften sind die Richtungen bekannt, von einer — der Seilpolygonspannung in  $a I$  — auch die Größe; dieselbe ist gleich  $\alpha O$ . Man kann also für diese drei Kräfte das Kraftpolygon, hier das Kraftdreieck, construiren, indem man durch den einen Endpunkt der bekannten Kraft  $\alpha O$ , durch  $a$ , eine Parallele zur Richtung von  $D_0$ , durch den anderen Endpunkt, durch  $O$ , eine Parallele zur Schlußlinie  $a b$  zieht. Dann ist  $O E \alpha$  das gefuchte Kraftdreieck,  $E \alpha = D_0$  und  $O E$  gleich der Seilspannung in der Schlußlinie. Gewöhnlich benutzt man zu dieser Construction unmittelbar das Kraftpolygon  $\alpha \dots \delta$ . Selbstverständlich ist dann auch sofort  $\delta E = D_1$ , da  $D_0 + D_1 = P_1 + P_2 + P_3$  ist.

Hieraus ergibt sich die Regel: Die Stützendrücke bei einem Träger auf zwei Stützen mit nur lothrechten Kräften werden erhalten, indem man für einen beliebigen Pol  $O$  das Seilpolygon construirt, die Schlußlinie und parallel zu dieser eine Linie durch den Pol zieht; letztere theilt die Kraftlinie in zwei Theile, welche nach Größe und Richtung die Stützendrücke darstellen.

Construirt man für eine Anzahl von Kräften aus zwei verschiedenen Polen die entsprechenden Seilpolygone, so liegen die sämtlichen Schnittpunkte der gleich-

20.  
Satz VII.

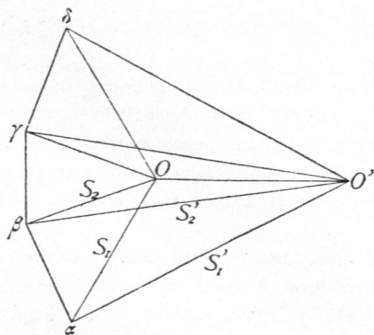
Fig. 17.



vielen Seilpolygonseiten auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie beider Pole parallel ist.

Das aus einem beliebigen Pole  $O$  (Fig. 17) construirte Seilpolygon sei  $o I II III a$ , das aus einem anderen Pole  $O'$  construirte sei  $o_1 I_1 II_1 III_1 a_1$ . Alsdann schneiden sich die beiden ersten Seiten  $o I$  und  $o_1 I_1$  in  $a$ , die beiden zweiten Seiten  $I II$  und  $I_1 II_1$  in  $b$ , die dritten Seiten  $II III$  und  $II_1 III_1$  in  $c$  etc. Die sämtlichen Punkte  $a, b, c, d \dots$  liegen auf einer geraden Linie, welche zu der Verbindungslinie der Pole, d. h. zu  $OO'$  parallel ist.

Nach der Erklärung des Seilpolygons ist  $K_1 = \alpha \beta$  im ersten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte  $S_1$  und  $S_2$  zerlegt, deren



Größe und Richtung sich im Kraftpolygon zu bezw.  $\alpha O$  und  $O\beta$  ergibt; dieselbe Kraft ist im zweiten Seilpolygon in zwei Seitenkräfte  $S_1'$  und  $S_2'$  zerlegt, deren Größe und Richtung bezw.  $\alpha O'$  und  $O'\beta$  ist. Denkt man nun den Sinn der beiden Seitenkräfte  $S_1'$  und  $S_2'$  umgekehrt, so sind diese beiden Kräfte die Seitenkräfte einer Kraft  $K_1$ , welche mit der gegebenen Kraft  $K_1$  nach Größe und Richtung genau übereinstimmt, deren Sinn aber demjenigen der gegebenen gerade entgegengesetzt ist. Diese neue Kraft  $K_1$  muß sich also mit der gegebenen Kraft  $K_1$  im Gleichgewicht halten; folglich müssen auch die vier Seitenkräfte dieser beiden Kräfte  $K_1$  im Gleichgewicht sein. Verbindet man  $S_1$  und  $S_1'$  zu einer,  $S_2$  und  $S_2'$  zur anderen Mittelkraft, so geht die erstere durch den Schnittpunkt  $a$  dieser beiden Kräfte, die zweite durch den Schnittpunkt  $b$  der beiden Kräfte  $S_2$  und  $S_2'$ . Beide Mittelkräfte halten sich im Gleichgewichte, sie müssen also in eine gerade Linie fallen; dieselbe ist durch die beiden Punkte  $a$  und  $b$ , durch welche beide Mittelkräfte gehen müssen, bestimmt.

Nun ist die Mittelkraft von  $S_1$  und  $S_1'$  nach Größe und Richtung die Schlußlinie des Kraftpolygons  $O\alpha O$ , d. h.  $O'O$ . Die Richtungslinie der Mittelkraft ist also parallel zu  $O'O$ , d. h. die Linie  $ab$  ist parallel zu  $O'O$ , zur Verbindungslinie der beiden Pole.

Genau in derselben Weise ist es un schwer zu beweisen, daß der Schnittpunkt  $b$  von  $S_2$  und  $S_2'$  mit dem Schnittpunkte  $c$  von  $S_3$  und  $S_3'$  auf einer zu  $O'O$  parallelen Geraden liegt, d. h. auf der Linie  $ab$ , da durch  $b$  zu  $O'O$  nur eine Parallele möglich ist, womit der obige Satz bewiesen ist.

## 2. Kapitel.

### Aeußere Kräfte, Schwerpunkte, statische und Trägheitsmomente.

#### a) Belastungen.

Als Belastungen der Constructionen treten auf:

- 1) das Eigengewicht,
- 2) die Nutzlast,
- 3) die Schneelast und
- 4) der Winddruck.

#### 1) Eigengewicht der Construction.

21.  
Eigengewichte.

Das Eigengewicht der Construction ist beim Beginne jeder Berechnung nur angenähert bekannt. Für die gewöhnlichen Anordnungen genügt es, die aus den vorhandenen Bauwerken ermittelten Erfahrungswerte bei der Berechnung einzuführen. Meistens kann man das Eigengewicht mit hinreichender Genauigkeit als gleichmäßig über die ganze Ausdehnung (des Trägers, der Balkendecke, des Daches etc.) vertheilt annehmen.

Neben stehend (unter  $\alpha$ , a) sind die Eigengewichte einiger wichtiger Baustoffe und (unter  $\alpha$ , b) diejenigen von verschiedenen Bautheilen angegeben, und zwar in der Größe, wie sie vom Berliner Polizei-Präsidium nach einer Bekanntmachung vom 21. Februar 1887 den Berechnungen zu Grunde gelegt werden. Die Zusammenstellung (unter  $b$ ) »Eigengewichte und Belastung von Bautheilen« enthält in der letzten Spalte auch die Nutzlast, welche erst im folgenden Artikel besprochen werden soll; es scheint aber dennoch zweckmäßig, die betreffenden Angaben hier fogleich mit zu machen.

Die Angaben der Tabellen unter  $\alpha$  genügen in sehr vielen Fällen nicht; insbesondere sind die Angaben über Eigengewichte der Dächer nicht ausreichend. Bei denselben ist das Eigengewicht gar nicht von den anderen, zum Theile schief wirkenden Lasten getrennt. Die Tabellen unter  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  geben einige Vervollständigungen.

a) Berechnungsannahmen des Berliner Polizei-Präfidiums.

(Bekanntmachung vom 21. Februar 1887.)

a) Eigengewichte der Baumaterialien.

Material	Gewicht für 1 cbm	Material	Gewicht für 1 cbm
Erde und Lehm . . . . .	1600	Granit und Marmor . . . . .	2700
Backfeinmauerwerk aus vollen Steinen . . . . .	1600	Kiefernholz . . . . .	650
porösen Steinen . . . . .	1300	Eichenholz <sup>3)</sup> . . . . .	800
Lochfeinen . . . . .	1100	Eifen . . . . .	7500
Sandfeinmauerwerk . . . . .	2400	Beton . . . . .	2000
	Kilogr.		Kilogr.

b) Eigengewichte und Belastung von Bautheilen.

Angabe	Eigengewicht für 1 qm	Eigengewicht und Nutzlast für 1 qm
Balkenlage in Wohnhäusern . . . . .	250	500
» » Fabrik- und Lagergebäuden . . . . .	250	750
» » Getreidespeichern, einschl. der Belastung, zum Nachweis . . . . .	—	850—1000
Gewölbte Decke aus porösen Steinen in Wohnhäusern . . . . .	350	600
» » in Fabrikgebäuden, einschl. der Belastung . . . . .	—	1000
» » unter Durchfahrten und befahrbaren Höfen, einschl. der Belastung . . . . .	—	1250
Wellblechdecken, einschl. der Belastung, zum Nachweis . . . . .	—	500—1000
Gewölbte Treppen . . . . .	500	1000
Dachflächen in der wagrechten Projection gemessen, einschl. Schnee- und Winddruck, bei Metall- oder Glasdeckung gemäfs der Neigung . . . . .	—	125—150
desgl. bei Schieferdeckung . . . . .	—	200—240
desgl. bei Ziegeldeckung . . . . .	—	250—300
desgl. bei Holzcementdeckung . . . . .	—	350
Steile Manfarden-Dächer . . . . .	—	400
	Kilogr.	Kilogr.

β) Eigengewichte von Holzbalkendecken<sup>4)</sup>.

22. Decken.

Bezeichnung der Confection	Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte				Bemerkung
	0,90 m		1,20 m		
	Balkenstärke in Centim.				
	20 X 25	25 X 30	20 X 25	25 X 30	
Balken mit Fußbodendielen . . . . .	61	81	56	66	Das Gewicht der Windelböden erhöht sich bei einer Zunahme der Balkenhöhe von je 1 cm um ca. 10 kg für 1 qm Deckenfläche.
Einfache Caffetten-Decke ohne Stuck . . . . .	122	142	112	132	
Einfache Caffetten-Decke mit halbem Windelboden und Stuck . . . . .	279	330	305	376	
Geftreckter Windelboden mit Lehm . . . . .	203	228	198	213	
Halber Windelboden . . . . .	254	305	279	345	
Ganzer Windelboden . . . . .	355	406	380	447	
	Kilogr. für 1 qm Deckenfläche.				

<sup>3)</sup> Nach genauen Ermittlungen wiegt 1 cbm Fichtenholz, lufttrocken, im Winter gefchlagen: 550 kg, 1 cbm Lärchenholz, desgl. 730 kg.

(Siehe Wochschr. d. öft. Ing.- u. Arch.-Ver. 1887, S. 277.)

<sup>4)</sup> Nach: HEINZLING, F. Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbau-Confectionen. 2. Aufl. Berlin 1876. S. 58 u. ff.

7) Eigengewichte der Decken mit eisernen Trägern<sup>5)</sup>.  
(Mittelwerthe.)

Bezeichnung der Construction	Gewicht für 1 qm Deckenfläche
Eiserne Balken, 0,9 bis 1,2 m von einander entfernt, einschl. Dielung, Deckenputz, Sandausfüllung auf etwa halbe Höhe der Träger	260
Eiserne Balken, 1,0 bis 1,5 m von einander entfernt, mit zwischengespannten Kappengewölben aus porigen Steinen	250
Eiserne Balken, Abstand wie vor, mit Eisenwellblech-Ausfüllung der Zwischenräume, in den Wellen Beton	150
Dasselbe, jedoch 8 cm hohe Sandausfüllung über dem Beton	300
Eiserne Balken, Abstand wie vor, über den Zwischenräumen <i>Monier</i> -Platten, je nach der Ausfüllung der Zwischenfache	170—300
Eiserne Balken, Abstand wie vor, Ausfüllung der Zwischenräume mit <i>Klette's</i> Holz-Asphaltdecke auf Wellblech oder <i>Zorès</i> -Eisen, mit Fußboden und Deckenschalung <sup>6)</sup>	170—180
Eiserne Balken, System <i>Klette</i> , glatte Putzdecke, Dielenfußboden, Ausfüllung auf Fehlboden von Holz	310
Dasselbe mit Gewölben aus Lochsteinen, Dielenfußboden, Hinterfüllung	320
Dasselbe, Ausfüllung: Schlacken-Beton auf <i>Monier</i> -Platten, Cement-Estrich, glatte Cementbeton-Decke <sup>7)</sup>	330
	Kilogr.

23.  
Dächer.

8) Eigengewichte der Dächer.

Die Eigengewichte der Dächer setzen sich zusammen aus dem Gewichte der Dachdeckung nebst Zubehör, dem Gewichte der Pfetten, Sparren, des Windverbandes etc. und aus dem Gewichte der Binder. Der erste Theil ist beim Beginn der Berechnung für die Flächeneinheit schräger Dachfläche ziemlich genau bekannt und von der Weite des Daches unabhängig; auch der zweite Theil ist, wenn die Binderentfernung einigermaßen fest steht, leicht zu ermitteln.

Der dritte dagegen ist vorläufig unbekannt, kann aber nach ausgeführten, ähnlichen Constructionen geschätzt und demnach vorläufig angenommen werden; derselbe ist übrigens den beiden ersten Werthen gegenüber meistens gering.

Für die erste Berechnung kann man die nachfolgenden vorläufigen Annahmen über das Eigengewicht der Dächer<sup>8)</sup> machen; eine nachherige Gewichtsrechnung muß ergeben, ob diese Annahmen entsprechend waren oder ob eine zweite Rechnung durchzuführen ist.

Eigengewichte der Dächer (für 1 qm schräger Dachfläche).

Holzdächer		Metalldächer	
Art des Daches	Mittl. Gewicht	Art des Daches	Mittl. Gewicht
Einfaches Ziegeldach	102	Asphaltdach mit Fliesenunterlage	102
Doppel- u. Kronenziegeldach	127	Steinpappendach	30
Falzziegeldach	72	Rohr- und Strohdach ohne Lehm	61
Gewöhnliches Schieferdach	76	Rohr- und Strohdach mit Lehm	76
<i>Dorn's</i> ches Lehmdach	61 bis 76	Zink- u. Eisenblechdach auf Holzschalung	41
Holzcementdach	164		
Asphaltdach mit Lehmunterlage	61 bis 76		
	Kilogr.		Kilogr.
		Schiefer auf Winkelleisen	45
		Ebenes Eisenblech auf Winkelleisen	25
		Eisenwellblech auf Winkelleisen	20
		Ebenes Zinkblech auf Schalung u. Profileisen	48
		Zinkwellblech auf Winkelleisen	15
		Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneisen	35—40
			Kilogr.

5) Nach: Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 134 u. ff.

6) Nach: Deutsche Bauz. 1883, S. 397.

7) Nach: Deutsche Bauz. 1886, S. 297.

8) Nach: Deutsches Bauhandbuch. Berlin. Bd. I. 1879. S. 229. — Bd. II. 1880. S. 127.

HEINZERLING, F. Der Eisen-Hochbau der Gegenwart. Aachen 1876—78. Heft I, S. 9.

TETMAJER, L. Die äußeren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhlconstruktionen. Zürich 1875. S. 8.



Die Zahlen der vorstehenden Tabelle enthalten die Eigengewichte der Dachbinder noch nicht, sondern nur die Gewichte der Deckmaterialien einschl. Hilfsmaterial, der Lattung, bezw. Schalung, der Sparren und der Pfetten.

Für die Dachbinder können folgende Gewichtsannahmen gemacht werden:

a) Holzdächer (für 1 qm schräger Dachfläche):

- Dachbinder, stehende oder liegende, mit allem Zubehör an Holztheilen, bei
  - Spannweiten von 7,5 bis 15 m . . . . . 7 bis 13 kg
  - einfache Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von 10 bis 18 m . . . . . 12 » 18 kg
  - combinirte Spreng- und Hängeböcke, desgl., bei Spannweiten von etwa 20 m . . . . . 20 » 24 kg
  - frei tragende Dachbinder verschiedener Constructionsformen, desgl., bei 10 bis 18 m Spannweite . . . . . 20 » 30 kg

b) Eifendächer (für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche):

- bei leicht construirten Dachstühlen . . . . . 14 » 20 kg
- bei schwer construirten Dachstühlen . . . . . 20 » 30 kg.

Da es oft bequemer ist, die Belastungen aus der überdeckten Grundfläche statt aus der schrägen Dachfläche zu ermitteln, so sind in der folgenden Tabelle die Eigengewichte der Dächer, auschl. des Gewichtes der Dachbinder, für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche, und zwar für die verschiedenen vorkommenden Dachneigungen (*h* bezeichnet die Höhe, *L* die Stützweite des Daches) angegeben.

Eigengewichte der Dächer, auschl. des Gewichtes der Dachbinder  
(für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche).

Art des Daches:	$\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
<b>a) Holzdächer:</b>										
Einfaches Ziegeldach . . . . .		144	122	114	—	—	—	—	—	—
Doppel- und Kronenziegeldach . . . . .		180	152	142	—	—	—	—	—	—
Falzziegeldach . . . . .		102	87	81	77	76	75	74	—	—
Gewöhnliches Schieferdach . . . . .		108	91	85	82	—	—	—	—	—
Asphaltdach mit Lehmunterlage . . . . .		106	91	84	81	79	78	77	77	77
» » Fliesenunterlage . . . . .		144	122	114	110	107	106	105	104	104
Steinpappdach . . . . .		42	36	34	32	32	31	31	31	30
Zink- und Eifenblechdach auf Holzschalung . . . . .		58	49	46	44	43	42	42	42	42
<b>b) Metaldächer:</b>										
Schiefer auf Winkeleifen . . . . .		64	54	50	48	—	—	—	—	—
Ebenes Eifenblech auf Winkeleifen . . . . .		35	30	28	27	26	26	26	26	26
Eifenwellblech auf Winkeleifen . . . . .		28	24	23	22	21	21	21	21	20
Ebenes Zinkblech auf Schalung und Profileifen . . . . .		68	58	54	52	51	50	49	49	49
Zinkwellblech auf Winkeleifen . . . . .		21	18	17	16	16	16	15	15	15
Glas auf Winkel-, bezw. Sproffeneifen . . . . .		57	48	45	43	—	—	—	—	—

Kilogramm.

Beim Holzcementdach hat das Dach eine so geringe Neigung (etwa 1:20), das man als Belastung für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche unbedenklich den Werth der Tabelle auf S. 18 (unter  $\delta$ ), d. i. 164 kg annehmen kann.

2) Nutzlast.

Die Nutzlasten sind hauptsächlich bei den Decken-Constructions von Wichtigkeit; sie bestehen in der Belastung durch Menschen, ungünstigstenfalls durch Menschengedränge in öffentlichen Sälen, Theatern, Concert- und Ausstellungssälen, Gerichtsräumen, Schulzimmern etc., in der Belastung durch Waaren in Speichern, durch Bücher in Bibliotheken u. dergl. mehr. Dabei ist für die Berechnung auf die Lage der Nutzlast Rücksicht zu nehmen und zu beachten, das nicht für alle Theile

der tragenden Construction die Belastung des ganzen Raumes die gefährlichste ist, das vielmehr theilweise Belastung für viele Theile wesentlich ungünstiger ist. Demnach muß bei der Berechnung für jeden Theil die gefährlichste mögliche Belastungsart aufgesucht und diese der Berechnung zu Grunde gelegt werden. Weiter ist zu beachten, das die Belastung mit Erschütterungen, selbst mit Stößen verbunden sein kann. Wenn eine große Versammlung sich plötzlich erhebt oder niedersetzt, wenn beim Beginne der Schule die Säle sich schnell füllen, wenn am Schlusse einer Vorstellung der Saal rasch entleert wird, wenn ein Tanzsaal bestimmungsgemäß benutzt wird; so treten Erschütterungen und Stöße auf, welche den Einfluß der Last wesentlich vergrößern können und auf welche zweckmäßig Rücksicht genommen wird. Es ist üblich, die stofsweise wirkenden Belastungen mit einem Coefficienten, welcher größer als 1 ist, multiplicirt in die Berechnung einzuführen. Für Hochbauten empfiehlt es sich, diesen Coefficienten mit 1,2 anzunehmen.

25. <sup>Zahlenangaben.</sup> Bezüglich der Nutzlasten können bei den Berechnungen folgende Annahmen zu Grunde gelegt werden:

Nutzlast für 1 qm Grundfläche			
in Wohnräumen . . . . . » Tanzsälen . . . . . » Heufpeichern <sup>9)</sup> . . . . .	150 250 500	       Kilogr.	in Haferpeichern und Fruchtböden <sup>9)</sup> . . . . . » Waarenpeichern <sup>10)</sup> . . . . . durch Menschengedränge . . . . .
			480 bis 500 760 400 Kilogr.

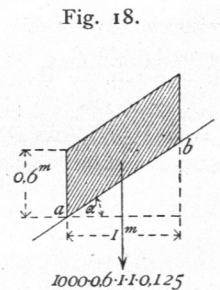
In den Speichern wird je nach der Waare, welcher der Speicher dienen soll, die größte Belastung verschieden sein, und es ist deshalb zuvor über die Bedingungen, unter welchen die Waare gelagert wird (Höhe, Breite, Gewicht etc.), Erkundigung einzuziehen.

Für Bibliotheken kann das spezifische Gewicht der Bücher im Mittel zu 0,6 angenommen werden; weiter kann der Rauminhalt der Repositorien als nur zur Hälfte gefüllt berechnet werden, so das 1 cbm Rauminhalt der Büchergestelle 300 kg schwer gesetzt werden kann. Auf eine stärkere Bestellung mit Büchern ist in deutschen Bibliotheken nicht zu zählen<sup>11)</sup>.

### 3) Schneelast.

26. <sup>Schneelast.</sup>

Die Schneelast kommt nur bei den Dächern in Frage. Als größte Schneehöhe, welche ungünstigstenfalls in unserem Klima fällt, ohne das mittlerweile eine Befreitung des gefallenen Schnees möglich ist, kann man etwa 0,6 m annehmen; das spezifische Gewicht des Schnees beträgt etwa 0,125; mithin ist das größte Gewicht der Schneelast für 1 qm der wagrechten Projection (Fig. 18) 0,125 · 0,6 · 1000 = 75 kg. Diese Zahl ist innerhalb gewisser Grenzen von der Dachneigung unabhängig. Handelt es sich dagegen um die größte Schneebelastung für 1 qm der schrägen Dachfläche, so kann dieselbe wie folgt ermittelt werden.



Die Last von 75 kg kommt auf  $\overline{ab}$  Quadrat-Meter der Dachfläche; da  $\overline{ab} = \frac{1}{\cos \alpha}$  ist, so kommt auf 1 qm der schrägen Dachfläche eine Schneelast

$$\sigma = \frac{75}{\overline{ab}} = 75 \cos \alpha.$$

<sup>9)</sup> Siehe: FRANGENHEIM. Der Hauptbahnhof der Kölnischen Straßenbahn-Gesellschaft zu Köln. Deutsche Bauz. 1887, S. 421.

<sup>10)</sup> Für den Seine-Speicher zu Paris wurden die Nutzlasten wie folgt berechnet: im I. Obergeschofs mit 1500 kg, im II. Obergeschofs mit 1250 kg, im III. bis V. Obergeschofs mit je 1000 kg und im VI. Obergeschofs mit 800 kg für 1 qm Lagerung von Mehl und Getreide (siehe: Centralbl. d. Bauverw. 1884, S. 509).

<sup>11)</sup> Nach: TRIEDMANN, v. Die Universitäts-Bibliothek in Halle a. S. Zeitchr. f. Bauw. 1885, S. 338.

Für die verschiedenen Verhältnisse der Firfthöhe  $h$  zur Stützweite  $L$  ergeben sich demnach folgende

Größte Belastungen  $\sigma$  durch Schneedruck  
für 1 qm schräger Dachfläche:

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\alpha =$	45°	33° 41'	26° 40'	21° 50'	18° 25'	16°	14°	12° 30'	11° 20'
$\sigma =$	(53)	62	67	70	71	72	73	73	73 Kilogr.

Für 1 qm wagrechter Projection der Dachfläche beträgt die ungünstigste Schneebelastung 75 kg.

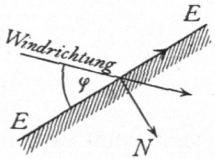
Wenn die Dachneigung so steil ist, daß  $\frac{h}{L} > \frac{1}{2,8}$  ist, so bleibt der Schnee nicht mehr liegen, gleitet vielmehr ab; für derartige Dachneigungen braucht man also auf Schneelast gar keine Rücksicht zu nehmen. Deshalb ist in der Tabelle der Werth von  $\sigma$ , welcher sich für  $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$  ergeben hat, eingeklammert.

4) Winddruck.

Der Winddruck ist von hervorragender Bedeutung sowohl für die Dächer, wie für hohe Mauern, Schornsteine etc. In der Technik ist vor Allem wichtig, zu wissen, welchen Druck der Wind auf eine Ebene  $EE$  (Fig. 19) ausübt, die feinen Strom unter einem spitzen Winkel  $\varphi$  schneidet.

27.  
Winddruck.

Fig. 19.



Dieser Druck kann nur senkrecht zu der Ebene gerichtet sein; denn der Druck zwischen zwei sich berührenden Körpern kann höchstens um einen Winkel von der Senkrechten zur Berührungsfläche abweichen, welcher gleich ist dem Reibungswinkel. Zwischen der Dachfläche und der sie umspielenden Luft findet keine Reibung statt; der Reibungswinkel ist hier also gleich Null; mithin ist der Druck zwischen der Dachfläche und der Luft stets senkrecht zur Dachfläche gerichtet. Es kann sonach nur diejenige Seitenkraft des Winddruckes, welche senkrecht zur Dachfläche gerichtet ist, durch einen Gegendruck

der Dachfläche aufgehoben werden, d. h. auf die Dach-Construction wirken; die andere Seitenkraft des Winddruckes hat auf die Dach-Construction keinen Einfluß.

Bis vor Kurzem wurde allgemein angenommen, der senkrechte Druck  $N$  auf die Ebene  $EE$  sei der zweiten Potenz von  $\sin \varphi$  proportional; neuere theoretische Untersuchungen<sup>12)</sup> und praktische Versuche haben jedoch nachgewiesen, daß man der Wirklichkeit wesentlich näher kommt, wenn man einführt

$$N = P \sin \varphi, \dots \dots \dots 1.$$

in welcher Gleichung  $P$  die Größe des Druckes ist, welche der Wind auf eine senkrecht getroffene Fläche ausübt. Man kann setzen

$$P = \frac{v^2 F \gamma}{g}, \dots \dots \dots 2.$$

mithin

$$N = \frac{v^2 F \gamma}{g} \sin \varphi \dots \dots \dots 3.$$

In diesen Gleichungen bedeutet:  $F$  den Flächeninhalt der vom Winde getroffenen Fläche,  $v$  die Geschwindigkeit des Windes (in Met. für die Secunde),  $\gamma$  das Gewicht von 1 cbm Luft (in Kilogr.) und  $g$  die Beschleunigung des freien Falles = 9,81 m.

<sup>12)</sup> Vergl.: LOESSL, F. v. Studie über aerodynamische Grundformeln an der Hand von Experimenten. Zeitchr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1881, S. 103.  
GERLACH, E. Einige Bemerkungen über den Widerstand, den eine ebene Platte und ein Keil von einer gleichförmig strömenden Flüssigkeit erfährt. Civiling. 1885, S. 73 ff.  
Normaldruck des Windes. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 203.

Die Formeln stimmen mit den Ergebnissen von Versuchen gut überein. Auf theoretischem Wege erhält man die Formel

$$N = \left( \frac{\pi}{4 + \pi \sin \varphi} \right) \sin \varphi \frac{\gamma}{g} F v^2 \dots \dots \dots 4.$$

Für  $\varphi = 90$  Grad erhält man aus dieser Gleichung

$$P = \frac{\pi}{4 + \pi} \cdot \frac{\gamma}{g} F v^2 \dots \dots \dots 5.$$

Gleichung 4 unterscheidet sich demnach von Gleichung 3 dadurch, daß sie statt des Factors 1 den Bruch  $\frac{\pi}{4 + \pi \sin \varphi}$  enthält. Der aus Gleichung 5 für  $P$  unter der Annahme bestimmter Windgeschwindigkeiten  $v$  berechnete Werth stimmt aber gar nicht mit den üblichen, der Wirklichkeit gut entsprechenden Annahmen über den Druck, welcher gegen eine senkrecht getroffene Fläche vom Winde ausgeübt wird, überein. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, bis diese Frage weiter geklärt ist, nach den zuerst angeführten Formeln 2 und 3 zu rechnen.

Für 15 Grad C. und 760 mm Barometerstand ist  $\frac{\gamma}{g} = 0,12458$ , also rund

$$P = 0,125 F v^2,$$

demnach der Winddruck für 1 qm senkrecht getroffener Fläche

$$p = 0,125 v^2.$$

Nimmt man als größte Windgeschwindigkeit  $v = 30$  m an, so wird rund

$$p = 120 \text{ Kilogr.}$$

und

$$n = p \sin \varphi = 120 \sin \varphi \text{ Kilogr. } \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots 6. \end{array} \right\}$$

28.  
Dachflächen.

a) Winddruck auf Dachflächen. Die Windrichtung schließt nach den gemachten Beobachtungen einen Winkel von nahezu 10 Grad mit der wagrechten Ebene ein. Dieser Winkel möge  $\beta$ , der Winkel der Dachfläche gegen die Wagrechte  $\alpha$  genannt werden; dann ist nach Fig. 20 der Winkel der Windrichtung mit der Dachfläche  $\varphi = (\alpha + \beta)$  und demnach der auf 1 qm schräger Dachfläche entfallende senkrechte Winddruck

$$v = p \sin (\alpha + \beta) = 120 \sin (\alpha + 10^\circ). \quad 7.$$

Aus Gleichung 7 ergeben sich für die verschiedenen Dachneigungen die in folgender Tabelle angeführten Werthe für  $v$ .

Senkrechte Belastungen  $v$  durch Winddruck für 1 qm schräger Dachfläche.

Für $\frac{h}{L} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\alpha =$	45°	33°41'	26°40'	21°50'	18°25'	16°	14°	12°30'	11°20'
abgerundet $v =$	98	83	72	63	57	53	49	46	44 Kilogr.

Zerlegt man den Normaldruck  $v$  in eine lothrechte und eine in die Richtung der Dachfläche fallende Seitenkraft (Fig. 21), so wird die erstere für 1 qm der Dachfläche  $v = \frac{v}{\cos \alpha}$  und für 1 qm wagrechte Projection der Dachfläche

$$v = \frac{v}{\cos^2 \alpha} = \frac{120 \sin (\alpha + 10^\circ)}{\cos^2 \alpha} \dots \dots \dots 8.$$

Fig. 20.

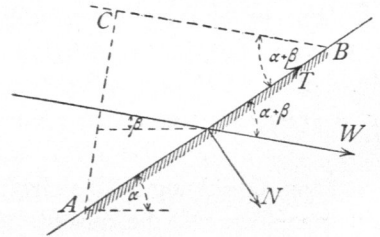
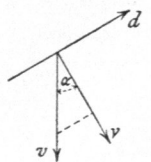


Fig. 21.

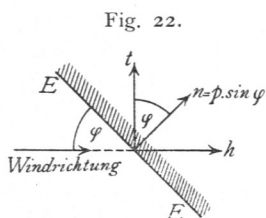


Die Werthe für  $v$  sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Für	$\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$v =$	196	120	90	73	64	57	52	48	46 Kilogr.

β) Winddruck gegen Mauerflächen. Bei Auffuchung des auf lothrechte oder schwach geneigte Mauern wirkenden Winddruckes wird zweckmäfsig von der Neigung der Windrichtung gegen die wagrechte Ebene abgesehen und der Winddruck als wagrechte Kraft eingeführt; der Fehler hat gröfsere Sicherheit zur Folge.

29.  
Mauerflächen.



Der senkrechte Druck des Windes gegen eine Mauerfläche  $EE$  (Fig. 22), welche den Winkel  $\varphi$  mit der Windrichtung bildet, ist für die Flächeneinheit

$$n = p \sin \varphi;$$

die Seitenkraft von  $n$ , welche in die Richtung des Windes fällt, ist alsdann

$$h = n \sin \varphi = p \sin^2 \varphi,$$

während die Seitenkraft, welche senkrecht zur Windrichtung wirkt, die Gröfse hat

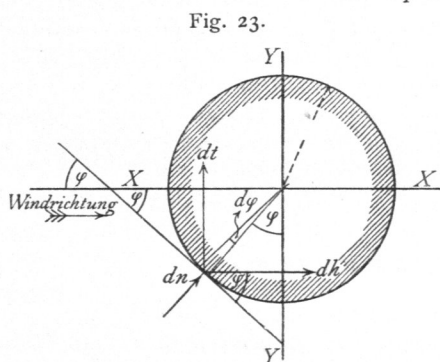
$$t = p \sin \varphi \cos \varphi.$$

Die erstere Seitenkraft ist besonders dann wichtig, wenn es sich um Bauteile handelt, welche im Grundrifs nach einem Vielecke, einem Kreise, einer Ellipse etc. geformt sind, so bei Schornsteinen, Thürmen etc. Bei ebenen Mauern ist der Berechnung stets als ungünstigste Windbelastung diejenige zu Grunde zu legen, bei welcher der Wind die Mauer senkrecht trifft.

a) Winddruck gegen eine ebene Mauer. Wenn die getroffene Fläche  $F$  Quadr.-Met. enthält, so ist

$$N = p F = 120 F \text{ Kilogr.}$$

Als Angriffspunkt der Mittelkraft kann der Schwerpunkt der getroffenen Fläche eingeführt werden.



b) Winddruck gegen einen Kreisylinder. Es soll der Winddruck ermittelt werden, welcher auf die Längeneinheit der Höhe, also das steigende Meter wirkt. Gegen das Bogentheilchen  $ds$ , dessen Tangente mit der  $X$ -Axe den Winkel  $\varphi$  (Fig. 23) bildet, wirkt der Normaldruck

$$dn = p \cdot ds \cdot \sin \varphi = p r d\varphi \cdot \sin \varphi.$$

Die senkrecht zur Windrichtung wirkende Seitenkraft von  $dn$  wird durch eine gleich grofse, entgegengesetzt wirkende aufgehoben, welche auf den symmetrisch zur  $XX$ -Axe liegenden Bogentheil wirkt; die andere Seitenkraft ist

$$dh = dn \sin \varphi = p r \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Die gesammte Kraft, welche ein Umsturz-Moment erzeugt, ist für die Höheneinheit offenbar

$$H = \int_0^{\pi} p r \sin^2 \varphi d\varphi = 2 pr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi,$$

fonach

$$H = pr \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots 9.$$

Wird  $p = 120$  kg eingeführt, fo ist die Kraft  $H$  für das steigende Meter

$$H = 188,4 r = \infty 190 r \text{ Kilogr.},$$

worin  $r$  in Metern einzusetzen ist.

Die Kraft  $H$  liegt in der lothrechten Ebene der Axe  $XX$  und greift in halber Höhe des Cylinders an.

c) Winddruck gegen ein regelmässiges achteitiges Prisma (Fig. 24). Die Breite des umschriebenen Quadrates sei  $B$ , die Seitenlänge der achteckigen Grundfläche sei  $b$ ; dann ist  $b = 0,414 B$ . Der Winddruck gegen die senkrecht getroffene Fläche ist für die Längeneinheit der Höhe

$$H_1 = p b,$$

derjenige gegen die unter 45 Grad getroffenen Seitenflächen je

$$N = p b \sin 45^\circ,$$

und die in die Windrichtung fallende Seitenkraft von  $N$  ist

$$H_2 = p b \sin^2 45^\circ = \frac{p b}{2}.$$

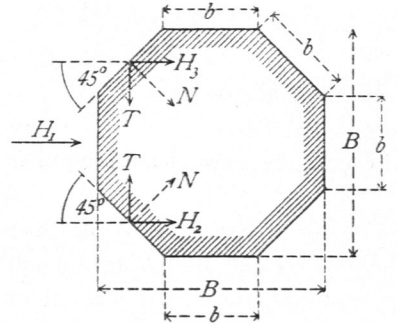
Eben so groß ist  $H_3$ ; mithin wird die gesammte Kraft, welche ein Umsturz-Moment erzeugt, für das steigende Meter sein

$$H = H_1 + H_2 + H_3 = 2 p b.$$

Die Mittelkraft aller  $H$  greift, wie oben, in halber Höhe des Prismas an und liegt in der durch die Axe des Prismas und  $H_1$  bestimmten lothrechten Ebene.

Die bisher ganz allgemein und auch in vorstehenden Entwicklungen gemachte Annahme einer gleichmässigen Vertheilung des Winddruckes über eine ebene getroffene Fläche scheint nach den neueren Versuchen und theoretischen Ermittlungen nicht ganz richtig zu sein; demnach ist es auch nicht ohne Weiteres richtig, dass die Mittelkraft durch den Schwerpunkt der getroffenen Fläche geht. Es scheint, dass der Druck an den Rändern am kleinsten ist und nach der Mitte der Ebene hin zunimmt. Bis über die Gefetzmässigkeit genauere Angaben vorliegen, wird man jedoch für die Zwecke des Hochbaues unbedenklich die vorgeführten Annahmen den Berechnungen zu Grunde legen können.

Fig. 24.



**b) Schwerpunkte und statische Momente.**

1) Schwerpunkte von ebenen Figuren.

Um den Schwerpunkt einer beliebigen ebenen Figur zu finden, genügt es, zwei Linien zu bestimmen, auf deren jeder der Schwerpunkt liegen muss; alsdann ist der Schnittpunkt beider Linien der gefuchte Schwerpunkt. Werden in der Ebene, in welcher die betreffende Figur liegt, zwei Coordinaten-Axen  $OX$  und  $OY$  beliebig angenommen, fo erhält man die Abstände  $x_0$  und  $y_0$  des Schwerpunktes von den beiden Axen  $OY$  und  $OX$  aus den Gleichungen

$$x_0 = \frac{\int x df}{F} \text{ und } y_0 = \frac{\int y df}{F}, \dots \dots \dots 10.$$

in denen  $F$  die ganze Querschnittsfläche,  $df$  den Flächeninhalt eines beliebigen Theilchens mit den Coordinaten  $x$  und  $y$  bedeutet und die Summirung über die ganze Fläche auszudehnen ist. Die vorstehenden beiden Gleichungen können hier aus der

30. Grundgleichungen.

Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden. Man kann statt der unendlich kleinen Theilchen  $df$  Flächentheile  $f$  von endlicher Gröfse einführen, also die obigen Gleichungen schreiben:

$$x_0 = \frac{\Sigma (f x)}{F} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\Sigma (f y)}{F}, \dots \dots \dots 11.$$

wenn  $x$  und  $y$  die Schwerpunkts-Coordnaten der Flächentheile  $f$  bedeuten.

Die Zähler der Gleichungen nennt man die statischen Momente der Fläche, bezogen auf die  $Y$ - und  $X$ -Axe; denn denkt man in jedem Theile der Fläche den Inhalt desselben als Kraft senkrecht zur Ebene der Figur wirkend, so sind die statischen Momente dieser Kräfte für die beiden Axen eben die Zählergrößen obiger Gleichungen.

Aus den Schwerpunktsgleichungen folgt:

α)  $x_0$  wird gleich Null, wenn der Zähler  $\Sigma (f x)$ , bezw.  $\int x df$  gleich Null wird, d. h. für eine Axe, für welche das statische Moment der Fläche gleich Null wird. Der Schwerpunkt liegt demnach auf einer solchen Axe. Dasselbe gilt natürlich für  $y_0$ , so dass man allgemein sagen kann: Jede Axe, für welche das statische Moment einer Fläche gleich Null ist, geht durch den Schwerpunkt der Fläche, ist also, wie man sagt, eine Schwerpunktsaxe.

31.  
Folgerungen.

Man suche daher zwei Axen auf, für welche die statischen Momente gleich Null sind; alsdann ist deren Schnittpunkt auch der Schwerpunkt.

β) Liegt eine Figur symmetrisch zu einer Axe  $XX$ , so ist das statische Moment  $\int y df$  der Figur für diese Axe gleich Null; denn jedem Flächentheilchen  $f_1$  im Abstände  $y_1$  von der Axe entspricht ein eben so großes Theilchen  $f_1$  im Abstände  $-y_1$  von der Axe; der Beitrag beider Theile zum statischen Momente ist also  $f_1 y_1 - f_1 y_1 = 0$ . Das Gleiche gilt von je zwei anderen Theilen, so dass also das gefammte statische Moment gleich Null wird. Daraus folgt: Jede Symmetrie-Axe einer Fläche ist eine Schwerpunktsaxe.

Hat sonach ein Querschnitt eine Symmetrie-Axe, so ist nur noch die Lage des Schwerpunktes auf derselben zu bestimmen; hat ein Querschnitt zwei Symmetrie-Axen, so ist der Schnittpunkt beider auch der Schwerpunkt.

γ) Nach Gleichung 10 ist  $F x_0 = \int x df$ . Ist es möglich, die ganze Fläche in eine Anzahl Gruppen  $F_1, F_2, F_3 \dots$  zu zerlegen, von deren jeder der Schwerpunktsabstand  $(x_1, x_2, x_3 \dots)$  bekannt ist, so muss für diese sein

$$F_1 x_1 = (\int x df)_1, \quad F_2 x_2 = (\int x df)_2, \quad F_3 x_3 = (\int x df)_3, \dots 12.$$

in welchen Ausdrücken sich die Einzelintegrale auf die einzelnen Gruppen beziehen. Dann ist sonach

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n,$$

und es wird

$$x_0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F} \dots \dots \dots 13.$$

Es ist sehr oft möglich, die gegebene Figur in Rechtecke, bezw. solche kleinere Figuren zu zerlegen, deren Schwerpunkte bekannt sind und alsdann mit Hilfe obiger Formel die Lage des Gesamtschwerpunktes zu finden.

δ) Der Schwerpunkt  $S$  zweier Flächen  $F_1$  und  $F_2$  (Fig. 25) mit den Schwerpunkten  $s_1$  und  $s_2$  liegt auf der Verbindungslinie  $s_1 s_2$  beider Schwerpunkte. Nennt man nämlich den Abstand des Gesamtschwerpunktes von dieser Verbindungslinie  $y_0$ ,

so ist  $F y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$ . Die Abstände  $y_1$  und  $y_2$  der beiden Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  von derselben Axe sind aber gleich Null, weil die Axe durch diese Schwerpunkte gelegt ist. Demnach ist für diese Axe  $F y_0 = 0$ , also auch  $y_0 = 0$ .

Hieraus folgt weiter, daß, wenn die Schwerpunkte noch weiterer Flächen auf dieser Linie liegen, der Gesamtschwerpunkt gleichfalls auf derselben liegt; kann man also eine Fläche in eine Anzahl Streifen zerlegen, deren Schwerpunkte auf einer geraden Linie liegen, so befindet sich auch der Schwerpunkt der gesammten Fläche auf dieser Linie.

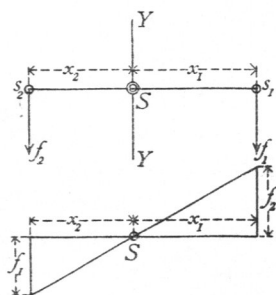
Die Lage des Schwerpunktes auf der Linie  $s_1 s_2$  (Fig. 25) ist leicht zu finden. Werden die Abstände desselben von  $s_1$  und  $s_2$  mit bezw.  $+x_1$  und  $-x_2$  bezeichnet, so muß für eine senkrecht zu  $s_1 s_2$  durch den Schwerpunkt  $S$  gelegte Axe  $Y Y$  sein

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Daraus ergibt sich die nachfolgende Construction.

Man errichte in  $s_1$  eine Senkrechte, welche  $f_2$  Flächeneinheiten in beliebigem Maßstabe enthält, in  $s_2$  eine Senkrechte, jedoch nach entgegengesetzter Seite, welche  $f_1$  Flächeneinheiten in demselben Maßstabe enthält, und verbinde die Endpunkte; alsdann schneidet diese Verbindungslinie die Axe  $s_1 s_2$  im Schwerpunkte  $S$ .

Fig. 25.



## 2) Schwerpunkte von einfachen Figuren.

32.  
Regelmäßige  
Figuren.

α) Schwerpunkt eines Quadrates, Rechteckes, Parallelogrammes, Kreifes und einer Ellipse. Jede dieser Figuren hat wenigstens zwei Symmetrie-Axen, bezw. Halbierungslinien, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt sich befindet.

Demnach liegt er beim Rechteck und Quadrat in der Mitte der Höhe und Breite, beim Parallelogramm im Schnittpunkte der Diagonalen und beim Kreife und bei der Ellipse im Mittelpunkte.

33.  
Dreieck.

β) Schwerpunkt eines Dreieckes (Fig. 26).

Zerlegt man die Dreiecksfläche durch Linien, welche einer Seite ( $AB$  in Fig. 26) parallel sind, in eine Anzahl sehr schmaler Streifen, so liegt der Schwerpunkt eines jeden Streifens in der Mitte seiner Breite, und nach der Folgerung unter δ in Art. 31 liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Streifen. Der Schwerpunkt liegt also auf der Linie  $CD$ , welche die Mitte  $D$  einer Dreiecksseite mit der gegenüber liegenden Ecke ( $C$ ) verbindet. Aus demselben Grunde liegt er auch auf der Linie  $AE$ , wenn  $CE = EB$  ist. Der Schwerpunkt  $S$  ist der Schnittpunkt beider. Da aber  $DE$  und  $AC$  parallel sind, so ist

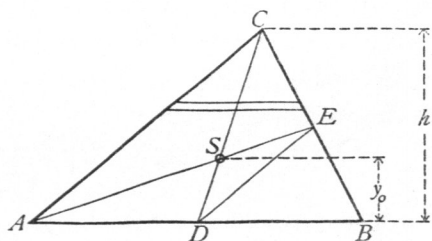
$$\frac{DS}{SC} = \frac{DE}{CA} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{DS}{SC} = \frac{SC}{CD} = \frac{2}{3}.$$

Daraus folgt, daß der senkrechte Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der Grundlinie  $AB$  des Dreieckes ein Drittel der Höhe ist, d. h. es ist

$$y_0 = \frac{h}{3}.$$

Da jede Seite des Dreieckes als Grundlinie angesehen werden kann, so liegt  $S$  auch auf einer Parallelen zu  $BC$ , deren senkrechter Abstand ein Drittel desjenigen beträgt, in welchem  $A$  von  $BC$  liegt. Das Gleiche gilt von  $AC$ , bezw.  $B$ . Mittels dieses Gesetzes können daher leicht zwei Linien gezeichnet werden, auf denen der Schwerpunkt liegt.

Fig. 26.

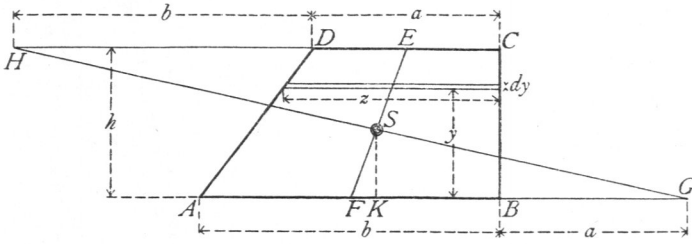




γ) Schwerpunkt eines Parallel-Trapezes (Fig. 27).

34.  
Parallel-Trapez.

Fig. 27.



Der Schwerpunkt des Trapezes in Fig. 27 liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte E und F, welche die beiden parallelen Seiten halbiren. Ferner ist

$$F y_0 = \int y \, df.$$

Nennt man die Breite eines Streifens z und dessen Höhe dy, so ist

$$df = z \, dy, \quad z = b - \frac{b-a}{h} y \quad \text{und} \quad F = (a + b) \frac{h}{2};$$

fonach

$$F y_0 = \int_0^h \left( b y - \frac{b-a}{h} y^2 \right) dy = \frac{b h^2}{2} - \frac{(b-a) h^3}{3},$$

und

$$y_0 = \frac{h}{3} \frac{(2a + b)}{(a + b)}.$$

Daraus ergibt sich folgende Construction.

Man halbire die beiden parallelen Seiten in E und F, trage  $BG = a$  und  $DH = b$  nach rechts, bzw. links in den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten auf und ziehe  $HG$ ; alsdann ist der Schnittpunkt von  $HG$  mit  $EF$  der Schwerpunkt S. Denn es ist

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2} + b + \frac{a}{2}} = \frac{2a + b}{3(a + b)}, \quad \text{aber auch} \quad \frac{\overline{SF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{SK}}{h};$$

mithin ist

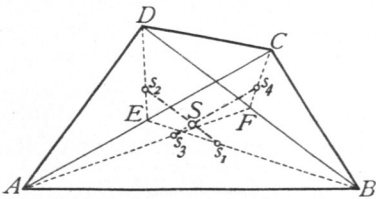
$$\frac{\overline{SK}}{h} = \frac{2a + b}{3(a + b)} \quad \text{und} \quad \overline{SK} = \frac{h}{3} \frac{(2a + b)}{(a + b)} = y_0.$$

Der Punkt S ist also in der That der Schwerpunkt.

δ) Schwerpunkt eines unregelmäßigen Viereckes (Fig. 28).

35.  
Unregelmäßiges Viereck.

Fig. 28.



Um den Schwerpunkt des unregelmäßigen Viereckes  $ABCD$  zu bestimmen, ziehe man die Gerade  $AC$  und ermittle die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  der beiden Dreiecke  $ACB$  und  $ACD$ , wie unter β gezeigt; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie  $s_1 s_2$ . Nun ziehe man  $BD$  und ermittle die Schwerpunkte  $s_3$  und  $s_4$  der beiden Dreiecke  $ABD$  und  $BCD$ ; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auch auf der Linie  $s_3 s_4$ . Demnach ist der Schnittpunkt der beiden Linien  $s_1 s_2$  und  $s_3 s_4$  der gefuchte Schwerpunkt.

In ganz ähnlicher Weise kann man weiter verfahren, wenn es sich um den Schwerpunkt eines Vieleckes handelt, welches in Dreiecke zerlegt werden kann. Doch wird in einem solchen Falle vielfach das unten vorzuführende graphische Verfahren bequemer sein.

ε) Schwerpunkt eines Kreisabschnittes (Fig. 29).

36.  
Kreisabschnitt.

Der ganze zum Kreisabschnitt gehörige Winkel sei  $2\alpha$ ; die Halbierungslinie des Winkels ist eine Symmetrie-Axe, enthält also den Schwerpunkt; es ist somit nur noch der Abstand desselben vom Kreismittelpunkte oder, was dasselbe befragt, von einer durch diesen senkrecht zur Winkelhalbirenden gelegten Axe  $XX$  zu suchen.

Für den zu einem Bogenstück  $ds = r \, d\varphi$  gehörigen Theil des Abschnittes (Fig. 29), welcher als

Dreieck aufgefasst werden kann, ist der Schwerpunktsabstand von der Axe  $XX$ :  $y = \frac{2}{3} r \cos \varphi$ , der Flächeninhalt:

$$df = ds \frac{r}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2};$$

mithin ist

$$y_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} y df}{m} = \frac{2 \int_0^{\alpha} y df}{m} = \frac{2}{3} r^3 \frac{\int_0^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{r^2 \alpha}$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \dots \dots \dots 14.$$

Für den Halbkreis wird  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  und  $\sin \alpha = 1$ , sonach

$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0,425 r.$$

Für den Viertelkreis ist  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , daher  $y_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0,6 r$ .

Für den Sechstelkreis ist  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , mithin  $y_0 = \frac{2}{\pi} r = 0,637 r$ .

§) Schwerpunkt eines Kreisabschnittes (Fig. 30).

Der Schwerpunkt des Kreisabschnittes liegt zunächst wieder auf der Winkelhalbierenden; ferner ist aber nach der Folgerung  $\delta$  in Art. 31, wenn  $F$  der Flächeninhalt des Kreisabschnittes  $ACBm$ ,  $y$  der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von  $XX$  ist, wenn ferner  $f_1$  und  $f_2$  die Flächeninhalte des Kreisabschnittes  $ACB$ , bzw. des Dreieckes  $ABm$  und  $y_1$ , bzw.  $y_2$  die Schwerpunktsabstände dieser Flächen von  $XX$  sind,

$$F y = f_1 y_1 + f_2 y_2 \text{ oder } y = \frac{F y_1 - f_2 y_2}{f_1}.$$

Nun ist  $F = r^2 \alpha$ ,  $y = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$  und  $f_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$ ;

ferner

$$y_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \text{ und } f_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

mithin wird

$$y = \frac{\frac{2}{3} r \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}} \dots \dots \dots 15.$$

η) Schwerpunkt einer Parabelfläche (Fig. 31).

Die Gleichung der Parabel  $AmB$  ist, bezogen auf  $O$  als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen,

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{y}{h}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche  $ABm$  liegt zunächst auf der Symmetrie-Axe  $YY$ ; der Abstand desselben von  $XX$  ist

$$y_0 = \frac{\int y df}{F} = \frac{\int y dy}{\int dy}.$$

Es ist  $df = 2x dy$ ,  $y = \frac{h x^2}{\lambda^2}$  und  $dy = \frac{2x h}{\lambda^2} dx$ , also  $df = \frac{4x^2 h}{\lambda^2} dx$ , somit

$$y_0 = \frac{\frac{4h^2}{\lambda^4} \int_0^{\lambda} x^4 dx}{\frac{4h}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} x^2 dx} = \frac{h}{\lambda^2} \frac{3}{5} \lambda^2 = \frac{3}{5} h.$$

Fig. 29.

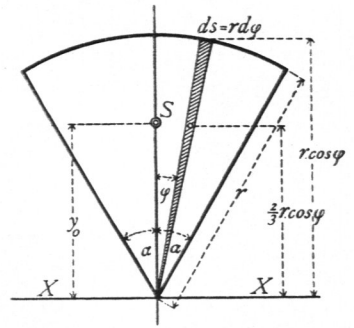


Fig. 30.

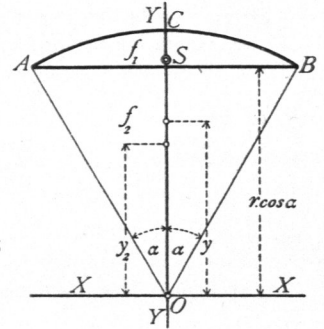
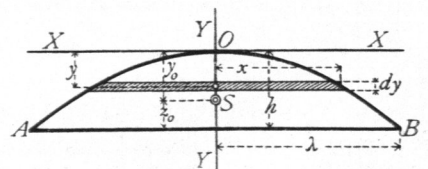


Fig. 31.



37.  
Kreisabschnitt.

38.  
Parabelfläche.

Der Schwerpunkt liegt also vom Scheitel  $O$  um

$$y_0 = \frac{3}{5} h \dots \dots \dots 16.$$

von der Linie  $AB$  um

$$x_0 = \frac{2}{5} h \dots \dots \dots 17.$$

entfernt.

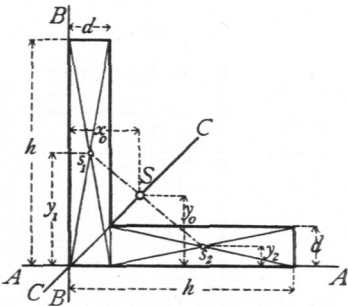
3) Schwerpunkte von Querschnittsflächen,

die aus einfachen Figuren zusammengesetzt sind.

a) Schwerpunkt des gleichschenkeligen Winkeleifens (Fig. 32). Auf

39.  
Winkeleifens.

Fig. 32.



die Ausrundung im Winkel und die Abrundung der Ecken soll keine Rücksicht genommen werden; dieselbe kann sowohl bei dieser, wie bei den folgenden Querschnittsformen meistens unbeachtet gelassen werden.

Der Abstand des Schwerpunktes  $S$  von  $AA$ , bzw.  $BB$  ist

$$y_0 = x_0 = \frac{\sum (fy)}{F} = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Hierin ist  $f_1$  der Flächeninhalt des lothrecht,  $f_2$  derjenige des wagrecht gezeichneten Schenkels, bei letzterem nach Abzug des Flächentheiles, der mit dem lothrechten Schenkel zusammenfällt;  $y_1$  und  $y_2$  sind die Abstände der Schwerpunkte von  $AA$ .

Eine angenäherte, fast stets genügend genaue Formel wird folgendermaßen gefunden<sup>13)</sup>. Es ist

$$y_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (h-d) d \frac{d}{2}}{2 d h - d^2} = \frac{h^2 + (h-d) d}{2 (2 h - d)} = \frac{h^2 + h d - d^2}{2 (2 h - d)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{h}{2} + \frac{3}{4} d - \frac{d^2}{8 h} \right].$$

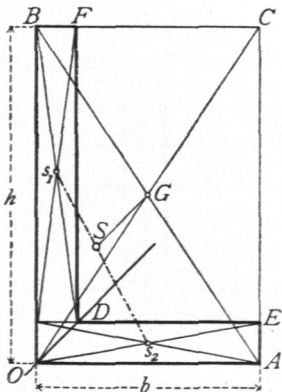
Innerhalb der für  $\frac{d}{h}$  vorkommenden Grenzen liegt  $\frac{d^2}{2 \cdot 8 h}$  zwischen 0,0125 und 0,00625, hat etwa den Mittelwerth 0,009. Wird dieser eingeführt, so erhält man

$$y_0 = x_0 = \frac{h}{4} + 0,366 d.$$

Sehr leicht kann der Schwerpunkt durch Construction gefunden werden.

Man zerlege den Querschnitt in zwei Rechtecke, ermittle deren Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$ , die nach Art. 32 (unter  $\delta$ ) die Schnittpunkte der Diagonalen sind; dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie  $s_1 s_2$ ; da er auch auf der Symmetrie-Axe  $CC$  liegt, so ist der Schnittpunkt  $S$  der genannten beiden Linien der gefuchte Schwerpunkt.

Fig. 33.



Beispiel. Es sei die Schenkellänge  $h = 10$  cm und die Dicke  $d = 1$  cm; alsdann ist  $f_1 = 10$  qcm,  $f_2 = 9$  qcm,  $y_1 = 5$  cm und  $y_2 = 0,5$  cm; fonach

$$y_0 = \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 0,5}{10 + 9} = 2,87 \text{ cm} = x_0.$$

Die angenäherte Formel giebt

$$y_0 = 2,5 + 0,366 = 2,866 \text{ cm} = x_0.$$

$\beta$ ) Schwerpunkt des ungleichschenkeligen Winkeleifens (Fig. 33).

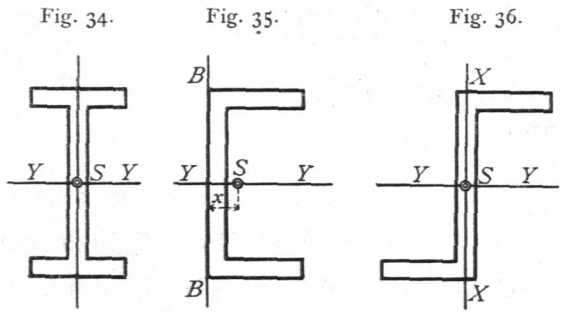
Hier ist keine Symmetrie-Axe vorhanden; man muß also  $x_0$  und  $y_0$  getrennt berechnen. Es ist

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}.$$

Die Construction des Schwerpunktes ist in ähnlicher Weise möglich, wie unter  $\alpha$ <sup>13)</sup>. Man ermittelt zunächst  $s_1$  und  $s_2$ , wie oben; alsdann liegt der Gesamtschwerpunkt auf  $s_1 s_2$ . Der Querschnitt kann

<sup>13)</sup> Siehe: ZIMMERMANN. Ueber Winkeleifens-Querschnitte. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 33.

ferner als Differenz der beiden Rechtecke  $OACB$  und  $DECF$  betrachtet werden; der Schwerpunkt liegt also auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser beiden Rechtecke; da diese Schwerpunkte jedoch sehr nahe zusammenfallen, so ergibt sich die Richtung der Verbindungslinie nicht genügend genau. Nun muß aber die Verbindungslinie zur Linie  $OD$  parallel sein; man ziehe also durch den Schwerpunkt  $G$  des umschriebenen Rechteckes  $OACB$  die Parallele zu  $OD$ ; alsdann ist der Schnittpunkt dieser mit  $s_1 s_2$  der gefuchte Schwerpunkt.



40.  
I-Eifen.

γ) Schwerpunkt des I-Eifens (Fig. 34).

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt beider Symmetrie-Axen.

41.  
C-Eifen.

δ) Schwerpunkt des C-Eifens (Fig. 35 u. 37).

Der Schwerpunkt liegt auf der wagrechten Symmetrie-Axe im Abstände  $x_0$  von  $BB$ ;  $x_0$  ist nach obiger Gleichung aufzufinden, durch Construction wie folgt. Die wagrechte Symmetrie-Axe theilt das C-Eifen in zwei Theile, deren jeder einen Winkeleifen-Querschnitt darstellt. Man ermittelt deren Schwerpunkte  $s_3$  und  $s_4$ ; wie eben gezeigt wurde, ist der Gesamtschwerpunkt der Schnittpunkt der Linie  $s_3 s_4$  mit der Symmetrie-Axe.

42.  
Z-Eifen.

ε) Schwerpunkt des Z-Eifens (Fig. 36).

Der Schwerpunkt fällt mit demjenigen des lothrechten Rechteckes, des sog. Steges, zusammen; denn sowohl für die Axe  $XX$ , wie für die Axe  $YY$  ist das statische Moment der beiden wagrechten Rechtecke zusammen gleich Null; dieselben sind also ohne Einfluß auf die Schwerpunktslage. Dabei ist vorausgesetzt, daß dieselben gleichen Flächeninhalt haben.

43.  
T-Eifen.

ζ) Schwerpunkt des T-Eifens (Fig. 38 und 39).

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie-Axe im Abstände  $y_0$  von der Axe  $AA$ , und es ist

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2}{f_1 + f_2}$$

Durch Construction ist derselbe folgendermaßen zu finden. Man zerlege den Querschnitt in drei Rechtecke, ein lothrecht und zwei wagrechte. Die Schwerpunkte seien  $s_1, s_2, s_3$ . Das lothrechte und das eine wagrechte Rechteck bilden zusammen einen Winkeleifenquerschnitt, dessen Schwerpunkt  $s_4$ , wie unter β angegeben, zu finden ist. Dann liegt der Gesamtschwerpunkt auf der Linie  $s_3 s_4$ , ferner auch auf der lothrechten Symmetrie-Axe, also auf dem Schnittpunkt  $S$  dieser beiden Linien.

44.  
Statisches  
Moment.

#### 4) Graphische Ermittlung der statischen Momente und der Schwerpunkte von Flächen.

Wenn die Figur, deren statisches Moment, bzw. deren Schwerpunkt ermittelt werden soll, eine unregelmäßige Form hat, so ist die graphische Behandlung der Aufgabe zu empfehlen.

Man zerlege die ganze Figur in Streifen, welche derjenigen Axe parallel laufen, für welche das statische Moment gefucht wird (Fig. 40). Es seien die Flächeninhalte der einzelnen Streifen  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$ , die Abstände der Schwerpunkte derselben von der Axe  $XX$  bzw.  $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ ; alsdann ist das statische Moment der ganzen Fläche nach Obigem

$$M = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots + f_n y_n$$

Fig. 37.

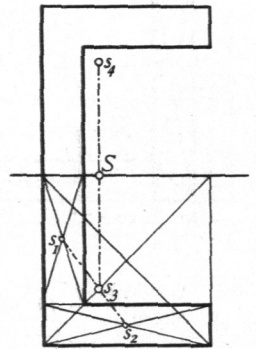


Fig. 38.

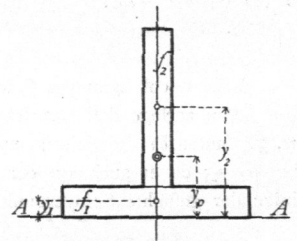


Fig. 39.

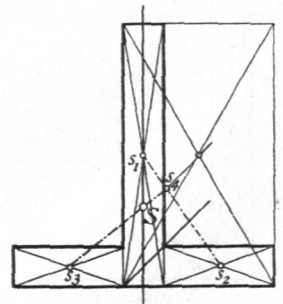
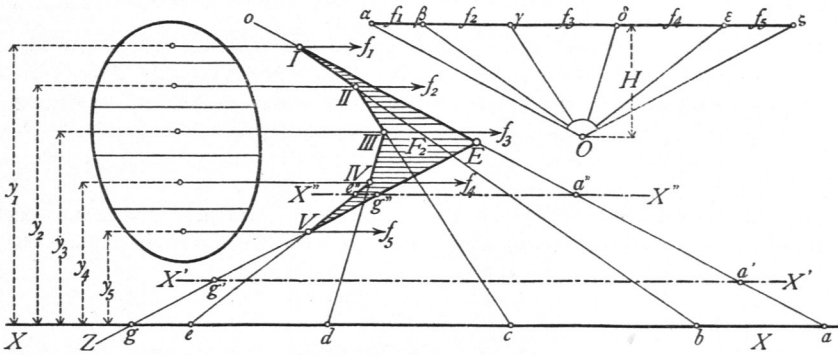


Fig. 40.



Man führe nun die einzelnen Flächengrößen als parallel zur Axe  $XX'$  wirkende Kräfte ein, welche in den Einzelschwerpunkten angreifen, füge sie zu einer Kraftlinie zusammen, indem man sie nach einem beliebigen, jedoch für alle gleichen Maßstabe aufträgt. Es sei  $\alpha\beta = f_1, \beta\gamma = f_2, \gamma\delta = f_3 \dots$ . Nun nehme man im Abstände  $H$  von dieser Kraftlinie einen Pol  $O$  an und construiere das den Werthen  $f_1, f_2, f_3 \dots$  und diesem Pol entsprechende Seilpolygon  $o I II III \dots$ . Verlängere man die Seilpolygon-Seiten, welche die erste Kraft  $f_1$  begrenzen, bis zum Schnitte mit der Axe  $XX'$ , so erhält man ein Dreieck  $Iab$ , und es ist

$$\triangle Iab \sim \triangle O\alpha\beta,$$

da die Seiten dieser Dreiecke einander bzw. parallel sind; in Folge dessen ist

$$\frac{\overline{ab}}{y_1} = \frac{\overline{\alpha\beta}}{H} = \frac{f_1}{H}, \text{ d. h. } H \cdot \overline{ab} = f_1 y_1.$$

Der Abschnitt  $\overline{ab}$  der die Kraft  $f_1$  begrenzenden Seilpolygon-Seiten auf der Axe  $XX'$  multiplicirt mit dem Polabstand  $H$  giebt sonach das statische Moment von  $f_1$  für diese Axe.

Eben so ist  $\triangle IIbc \sim \triangle Ob\gamma;$

also 
$$\frac{\overline{bc}}{y_2} = \frac{\overline{\beta\gamma}}{H} = \frac{f_2}{H}, \text{ } H \cdot \overline{bc} = f_2 y_2 \text{ und } H \cdot \overline{cd} = f_3 y_3 \text{ u. f. w.}$$

Das statische Moment der ganzen Fläche für die Axe  $XX'$  ist daher gleich dem Product aus dem Stück  $ag$ , welches von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf der Axe  $XX'$  abgechnitten wird, und dem Polabstand  $H$ , oder es ist

$$H \cdot \overline{ag} = \Sigma (fy).$$

Für die Anwendung ist zu beachten: Die Abschnitte  $ab, bc, cd \dots$  auf der Axe  $XX'$  liegen in den Dreiecken  $Iab, IIbc \dots$ , bedeuten demnach Längen; die Werthe von  $H$  dagegen sind auf dieselbe Einheit zu beziehen, wie die Größen  $f_1, f_2, f_3 \dots$ , bedeuten also Flächen. Daher ist  $H$  auf dem Flächenmaßstabe,  $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd} \dots$  hingegen sind auf dem Längenmaßstabe zu messen.

Bei der Zerlegung der betreffenden Figur in parallele Streifen müssen dieselben so schmal gewählt werden, dass man mit genügender Genauigkeit die einzelnen Streifen als Rechtecke, Parallelogramme, Paralleltrapeze, überhaupt als solche einfache Figuren ansehen kann, deren Flächeninhalte und Schwerpunktlagen leicht bestimmt werden können.

Handelt es sich um das statische Moment der Fläche für die Axe  $X'X''$ , so ist dasselbe offenbar gleich  $H \cdot \overline{a'g'}$ . Rückt aber die Axe zwischen die Kräfte  $f$ , etwa nach  $X''X'''$ , so ist zunächst das statische Moment der oberhalb liegenden Flächentheile gleich  $H \cdot \overline{a''e''}$ ; im statischen Momente der gesammten Fläche ist aber auch der Beitrag der an der anderen Seite der Axe gelegenen Theile enthalten, welche einen negativen Beitrag liefern, weil die  $y$ -Werthe für dieselben von der Axe  $X''X'''$  aus nach unten gerechnet werden müssen; die von der Axe nach oben gerechneten Werthe der  $y$  sind ja positiv eingeführt. Demnach liefert hier  $f_5$  ein statisches Moment gleich  $-H \cdot \overline{g''e''}$ , und es ist daher das statische Moment der ganzen Fläche, bezogen auf die Axe  $X''X'''$ , gleich  $H \cdot \overline{a''g''}$ .

Demnach ist allgemein nachgewiesen: Das statische Moment einer Fläche  $F$ , bezogen auf eine Axe  $XX'$ , wird erhalten, wenn man das von den beiden äußersten Seilpolygon-Seiten auf dieser Axe ab-

geschnittene Stück ( $ag$ , bzw.  $a'g'$ ,  $a''g''$ ) mit dem Polabstand  $H$  multiplicirt. Dabei muß das Stück  $ag$  auf dem Längenmaßstabe, der Polabstand  $H$  auf dem Flächenmaßstabe gemessen werden, nach welchem die Werthe von  $f$  aufgezeichnet sind.

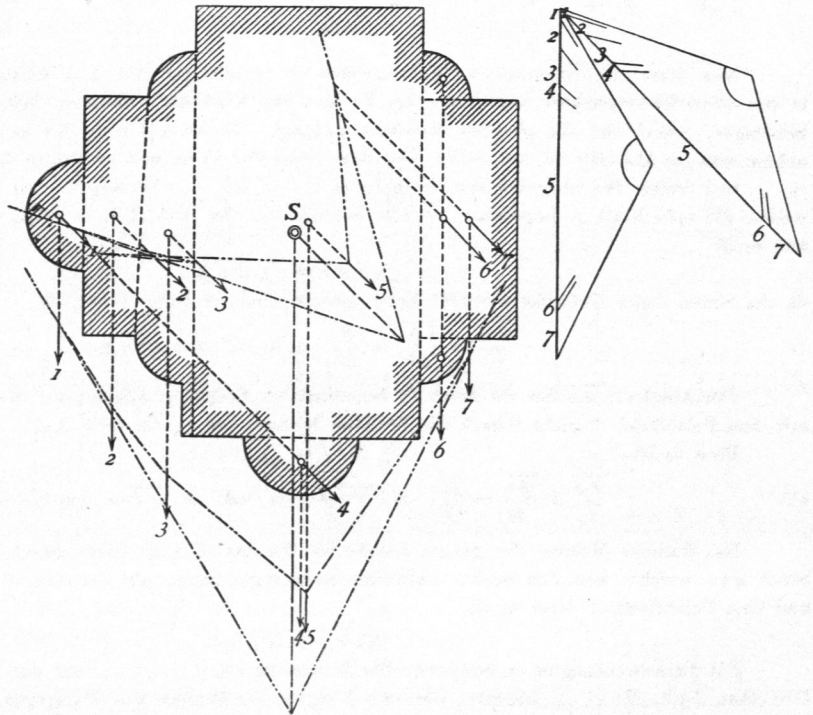
45.  
Schwerpunkt.

Rückt die Axe  $XX$  weiter nach oben, so wird das von den äußersten Seilpolygon-Seiten auf derselben abgeschnittene Stück immer kleiner; geht die Axe durch den Schnittpunkt  $E$  der äußersten Seilpolygon-Seiten, so ist das abgeschnittene Stück gleich Null; also wird auch das statische Moment in Bezug auf diese Axe gleich Null; dieselbe ist also eine Schwerpunktsaxe. Hieraus folgt: Die durch den Schnittpunkt  $E$  der äußersten Seilpolygon-Seiten parallel zu  $XX$  gelegte Axe enthält den Schwerpunkt der Fläche.

Das soeben gefundene Ergebniss folgt auch mit Nothwendigkeit aus nachstehender Ueberlegung. Da die Flächen als Kräfte eingeführt sind, so kann man annehmen, diese Kräfte seien die Gewichte der einzelnen Theile einer an allen Stellen gleich starken Platte, welche dieselbe Form hat, wie die gegebene

Fläche, und in eben solche Theile getheilt ist, wie diese. Um die wirklichen Gewichte zu erhalten, braucht man nur alle Werthe  $f$  mit demselben Factor  $\gamma$ , dem Gewichte der Flächeneinheit, zu multipliciren. Da man aber die Platte aus beliebigem Material hergestellt und beliebig stark annehmen kann, so ist  $\gamma$  ganz beliebig, kann also auch gleich 1 gesetzt werden; die Werthe  $f$  können demnach auch als die Gewichte selbst angesehen werden. Die Mittelkraft aller dieser parallel gerichteten Kräfte geht demnach durch den Schwerpunkt der Fläche; sie geht aber auch durch den Schnittpunkt der äußersten

Fig. 41.



Seilpolygon-Seiten und ist der Richtung der anderen Kräfte parallel. Die durch diesen Schnittpunkt parallel zur Axe  $XX$  gezogene Linie ist also die Mittelkraft nach Richtung und Lage und geht durch den Schwerpunkt. Das Gleiche gilt von jeder anderen beliebigen Lage, welche für die Richtung der Axe, also auch der Kräfte  $f$  angenommen wird. Man kann demnach leicht noch eine zweite Axe finden, auf welcher der Schwerpunkt liegt; der Schnittpunkt beider Axen ist dann der gesuchte Schwerpunkt.

Die gezeigte graphische Ermittlung des Schwerpunktes ist besonders bei unregelmäßigen Querschnitten empfehlenswerth; Fig. 41 zeigt diese Bestimmung für den Querschnitt eines Vierungspfegers.

### c) Trägheitsmomente.

46.  
Trägheitsmoment.

Wird jedes Theilchen  $df$  einer gegebenen Querschnittsfläche  $F$  mit dem Quadrate seines senkrechten Abstandes  $u$  von einer Axe  $AA$  multiplicirt und die Summe aller dieser Producte hergestellt, so erhält man einen Ausdruck

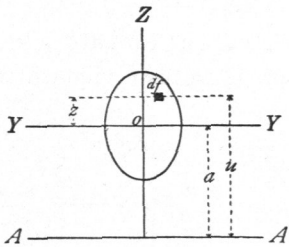
$$\mathcal{I} = \int u^2 df,$$

welchen man das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche  $F$  für die Axe  $AA$  nennt. Die Trägheitsmomente haben eine sehr große Wichtigkeit in der Elasticitätslehre; es sollen deshalb die wichtigsten Sätze über dieselben hier vorgeführt und zugleich die Trägheitsmomente für eine Reihe häufig vorkommender Querschnittsformen entwickelt werden. Am Fusse von  $\mathcal{F}$  soll als Zeiger angegeben werden, auf welche Axe das Trägheitsmoment bezogen ist;  $\mathcal{F}_A$  bedeutet demnach: das Trägheitsmoment bezogen auf die Axe  $AA$ .

Das Trägheitsmoment eines Querschnittes, bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsaxe parallele Axe, ist gleich dem Trägheitsmomente für diese Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus der Querschnittsfläche in das Quadrat des Abstandes beider Axen.

47.  
Trägheitsmomente für zur Schwerpunktsaxe parallele Axen.

Fig. 42.



Geht die Axe  $YY$  (Fig. 42) durch den Schwerpunkt der Fläche, so ist demnach

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_Y + F a^2.$$

Nach der Erklärung des Trägheitsmomentes ist

$$\mathcal{F}_A = \int u^2 df.$$

Die Summirung soll alle Flächentheile  $df$  umfassen; die Integration ist also über den ganzen Querschnitt auszudehnen. Nun ist

$$u = a + z \quad \text{und} \quad u^2 = a^2 + 2 a z + z^2,$$

$$\text{also } \mathcal{F}_A = \int u^2 df = a^2 \int df + 2 a \int z df + \int z^2 df.$$

Es ist jedoch  $\int df = F$  und  $\int z^2 df = \mathcal{F}_Y$ , ferner nach der Lehre vom Schwerpunkt  $\int z df = 0$ , weil  $YY$  eine Schwerpunktsaxe ist, mithin in der That

$$\mathcal{F}_A = F a^2 + \mathcal{F}_Y \dots \dots \dots 18.$$

Im Folgenden sollen für einige häufiger vorkommende Querschnittsformen die Trägheitsmomente rechnerisch ermittelt werden.

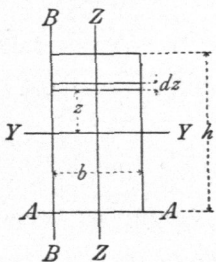
a) Trägheitsmoment für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 43).

Für diesen ist, bezogen auf die Schwerpunktsaxe  $YY$ ,

$$\mathcal{F}_Y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 df.$$

48.  
Trägheitsmomente für: Rechteckige Querschnitte.

Fig. 43.



Da für alle Theile eines zu  $YY$  parallelen Streifens  $z$  dieselbe Größe hat, so kann man  $df = b dz$  setzen, und es wird

$$\mathcal{F}_Y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \left[ \frac{b z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[ \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{b h^3}{12} \dots 19.$$

Das Trägheitsmoment für eine Axe  $AA$ , welche mit einer Kante des Rechteckes zusammenfällt, ist nach Gleichung 18

$$\mathcal{F}_A = \frac{b h^3}{12} + b h \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{b h^3}{3}.$$

Für eine zu  $YY$  normal stehende Schwerpunktsaxe  $ZZ$  ist nach Obigem

$$\mathcal{J}_Z = \frac{h b^3}{12}$$

und für die Kante  $BB$  ist

$$\mathcal{J}_B = \frac{h b^3}{3}$$

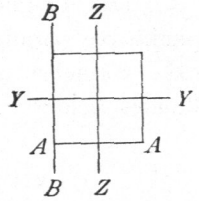
Man kann dies in Worten folgendermaßen ausdrücken: Das Trägheitsmoment eines Rechteckes für eine zu einer der Seiten parallele Schwerpunktsaxe ist gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch zwölf; für eine mit einer Kante des Rechteckes zusammenfallende Axe ist das Trägheitsmoment dagegen gleich dem Producte: Breite mal dritte Potenz der Höhe, dividirt durch drei. Als Breite gilt die Abmessung des Rechteckes in der Richtung der betreffenden Axe, als Höhe die zu der ersten fenkrechte Abmessung.

Mit Zuhilfenahme dieses Ergebnisses kann man leicht für eine große Zahl von Querschnitten der Praxis die Trägheitsmomente finden.

Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten; ist dessen Seitenlänge  $b = h = d$ , so wird (Fig. 44)

$$\mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_Y = \frac{d^4}{12} \text{ und } \mathcal{J}_A = \mathcal{J}_B = \frac{d^4}{3}$$

Fig. 44.



49.  
Symmetrische  
I u. E-förmige  
Querschnitte.

β) Trägheitsmomente für aus Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte. Die für das Rechteck gefundenen Werthe von  $\mathcal{J}$  werden vielfach angewendet, um für zusammengesetzte Querschnitte die Trägheitsmomente zu finden.

Das Trägheitsmoment des Querschnittes in Fig. 45 ist gleich der Differenz des Trägheitsmomentes des ganzen Rechteckes  $abcd$  weniger dem Trägheitsmoment des Rechteckes  $efig$ , d. h. es ist

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} B H^3 - \frac{1}{12} B h^3 = \frac{B}{12} (H^3 - h^3)$$

Für den symmetrischen I-förmigen (Fig. 46) und für den E-förmigen Querschnitt (Fig. 47) ergibt sich hiernach

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{12} \left\{ b [h^3 - (h - 2t)^3] + d(h - 2t)^3 \right\}$$

Dieser für die Berechnung unbequeme Ausdruck kann wesentlich vereinfacht werden. Wird der Abstand der Schwerpunkte des oberen, bezw. unteren Rechteckes mit  $\mathfrak{h}$  bezeichnet, also  $h - t = \mathfrak{h}$  gesetzt und im letzten Gliede obigen Ausdruckes statt  $h - 2t$  (nicht ganz genau, jedoch mit kleinem Fehler)  $\mathfrak{h}$  eingeführt, so ist

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} b t (h^2 - 2 h t + t^2) + \frac{1}{6} b t^3 + \frac{d \mathfrak{h}^3}{12}$$

Wir setzen  $b t = f$ ; alsdann wird

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f (h - t)^2 + \frac{f t^2}{6} + \frac{d \mathfrak{h}^3}{12}$$

$\frac{f t^2}{6}$  ist gegen das erste Glied sehr klein und kann ohne Bedenken vernachlässigt werden; dann ist der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{2} f \mathfrak{h}^2 + \frac{d \mathfrak{h}^3}{12} = \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \left( f + \frac{d \mathfrak{h}}{6} \right) \dots \dots \dots 20.$$

Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche  $f$  des oberen Rechteckes im Schwerpunkt desselben vereinigt, also im Abstände  $\frac{\mathfrak{h}}{2}$  von der Axe  $YY$ , und eben so die des unteren Rechteckes in dem bez. Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$i = 2 f \left( \frac{\mathfrak{h}}{2} \right)^2 = \frac{f \mathfrak{h}^2}{2}$$

Dies ist aber der erste Theil unseres obigen Ausdruckes 20 für  $\mathcal{J}_Y$ ; der zweite Theil des Ausdruckes stellt demnach den Beitrag dar, welchen der Steg zum Trägheitsmoment leistet. Mit ziemlich

Fig. 45.

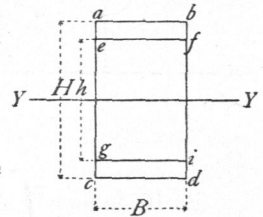
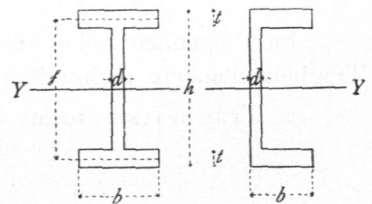


Fig. 46.

Fig. 47.

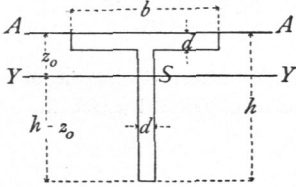




genauer Annäherung erhält man demnach das Trägheitsmoment des symmetrischen I-förmigen Querschnittes, indem man die Querschnittsfläche des oberen und unteren Gurtes vermehrt um je  $\frac{1}{8}$  der Querschnittsfläche des Steges (bis zu den Gurtfchwerpunkten gerechnet), im Schwerpunkt des oberen und unteren Gurtes vereinigt denkt und dafür das Trägheitsmoment aufsucht.

Wird beim T-förmigen Querschnitt (Fig. 48) der Abstand des Schwerpunktes von der durch die eine Kante gelegten Axe  $AA$  mit  $z_0$  bezeichnet, so ist nach der Schwerpunktslehre

Fig. 48.



$$F z_0 = d(b-d) \frac{d}{2} + d h \frac{h}{2}, \text{ ferner } F = (b-d)d + dh.$$

Sonach ist

$$z_0 = \frac{(b-d)d^2 + dh^2}{2[(b-d)d + dh]} = \frac{(b-d)d + h^2}{2(b-d) + 2h},$$

und das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe  $YY$

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1}{3} [d(h-z_0)^3 + dz_0^3 + (b-d)z_0^3 - (b-d)(z_0-d)^3].$$

Das Trägheitsmoment für die Axe  $AA$  ist

$$\mathcal{J}_A = \frac{1}{3} [dh^3 + (b-d)d^3].$$

Für den unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt (Fig. 49) ist, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält,

$$z_0 = \frac{\frac{d h \cdot h}{2} + (b-d)t \left(h - \frac{t}{2}\right) + \frac{(B-d)t^2}{2}}{dh + (b-d)t + (B-d)t} = \frac{d h^2 + (b-d)t(2h-t) + (B-d)t^2}{2[dh + (b-d)t + (B-d)t]}$$

$$\text{und } \mathcal{J}_Y = \frac{1}{3} [b(h-z_0)^3 + Bz_0^3 - (b-d)c^3 - (B-d)(z_0-t)^3].$$

Fig. 49.

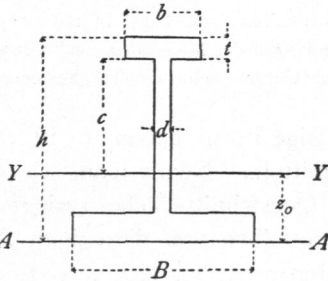
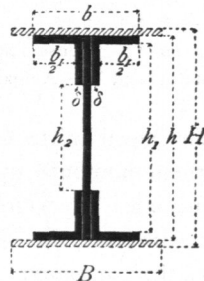


Fig. 50.



Bei den Querschnitten der Blechträger (Fig. 50) liegt der Schwerpunkt in halber Höhe. Alsdann ist, falls nur das lothrechte Blech und die 4 Winkelleifen vorhanden sind, für die durch den Schwerpunkt gelegte wagrechte Axe

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3 - 2 \delta h_2^3).$$

Falls noch Blechplatten vorhanden sind, ermittelt man deren Trägheitsmomente am besten besonders und zählt sie zum Trägheitsmoment des Querschnittes ohne Deckplatten. Das Trägheitsmoment dieser Deckplatten (Fig. 50) ist alsdann

$$\mathcal{J} = \frac{1}{12} B (H^3 - h^3).$$

γ) Trägheitsmoment für kreisförmige Querschnitte (Fig. 51).

Der Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes sei  $r$ , der Durchmesser  $d$ . Es soll zuerst das Trägheitsmoment der oberen Halbkreisfläche für die Axe  $YY$  bestimmt werden. Man zerlege die Kreisfläche in schmale Ringe, deren Mittelpunkte mit demjenigen der gegebenen Flächen zusammenfallen, und bestimme zunächst das Trägheitsmoment einer solchen Ringfläche. Der Halbmesser eines solchen Ringes sei  $\rho$ , seine sehr geringe Breite sei  $d\rho$ . Der Flächeninhalt eines Theilchens  $df$  dieser Ringfläche, welches zum Mittelpunktswinkel  $d\varphi$  gehört, ist  $df = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$ , und dessen Trägheitsmoment bezogen auf die Axe  $YY$

50.  
T-förmige  
Querschnitte.

51.  
Unsymmetrische  
I-förmige  
Querschnitte.

52.  
Blechträger-  
Querschnitte.

53.  
Kreisförmige  
Querschnitte.

$$d(i) = y^2 \cdot df = \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \rho^3 d\rho \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Das Trägheitsmoment des halben Ringes wird erhalten, indem man für alle Theile  $df$  desselben  $d(i)$  aufsucht, d. h. indem man zwischen den Grenzen  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \pi$  integrirt, wobei natürlich  $\rho$  und  $d\rho$  als Festwerthe (Constante) zu betrachten sind, da sie für alle Theilchen des Ringes gleiche Gröfse haben. Man erhält

$$i = \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \rho^3 d\rho \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_0^\pi = \frac{\rho^3 d\rho \cdot \pi}{2}.$$

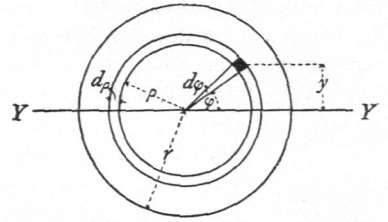
Um aus diesem Trägheitsmomente einer halben Ringfläche dasjenige der halben Kreisfläche zu erhalten, beachte man, daß die letztere sich aus lauter halben Ringflächen zusammensetzt; demnach ist

$$\frac{\mathcal{I}}{2} = \Sigma(i) = \int_0^r \rho^3 d\rho \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} r^4,$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Kreisfläche für die Axe  $Y Y$

$$\mathcal{I} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \dots \dots \dots 21.$$

Fig. 51.



54.  
Masseinheit für  
die Trägheits-  
momente.

Bei allen Angaben von Trägheitsmomenten ist das Folgende wohl zu beachten. Die Masseinheit der Trägheitsmomente ist die Längeneinheit in der vierten Potenz (also entweder: Meter zur vierten, oder Centimeter zur vierten, oder Millimeter zur vierten Potenz etc.); denn jeder Theil des Trägheitsmomentes, also auch das Ganze ist das Product einer Fläche in das Quadrat einer Länge. Es ist deshalb stets mit der ziffermäßigen Gröfse auch die Masseinheit des Trägheitsmomentes anzugeben. Meistens geschieht dies allerdings nicht; doch ist streng darauf zu achten, daß diese Vorschrift befolgt werde, weil sonst leicht große Fehler gemacht werden.

Um ein Trägheitsmoment, welches in  $\text{cm}^4$  angegeben ist, in ein solches zu verwandeln, dessen Masseinheit  $\text{mm}^4$  sind, muß man mit  $10^4 = 10000$  multipliciren; umgekehrt ist mit  $10^4 = 10000$  zu dividiren, wenn ein in  $\text{mm}^4$  gegebenes Trägheitsmoment in eines mit der Masseinheit  $\text{cm}^4$  verwandelt werden soll.

Für die Statik und die Aufgaben derselben empfiehlt es sich, die Trägheitsmomente in  $\text{cm}^4$  anzugeben.

55.  
Graphische  
Ermittlung der  
Trägheits-  
momente.

Wenn die Querschnitte eine unregelmäßige Form haben, so ist es oft vortheilhaft, die Trägheitsmomente graphisch zu ermitteln. Nennt man, wie oben, die einzelnen Flächentheile, in welche die ganze Querschnittsfläche zerlegt wird,  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$ , die Abstände der Schwerpunkte derselben von derjenigen Axe  $XX$ , für welche das Trägheitsmoment gesucht wird, bezw.  $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ , so ist

$$\mathcal{I} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = \Sigma(f y^2) = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots$$

$$\mathcal{I} = f_1 y_1 \cdot y_1 + f_2 y_2 \cdot y_2 + f_3 y_3 \cdot y_3 + \dots$$

Nun sind  $f_1 y_1, f_2 y_2, f_3 y_3 \dots$  die statischen Momente der einzelnen Flächentheile für die Axe  $XX$ ; setzt man  $f_1 y_1 = m_1, f_2 y_2 = m_2, f_3 y_3 = m_3 \dots$ , so wird

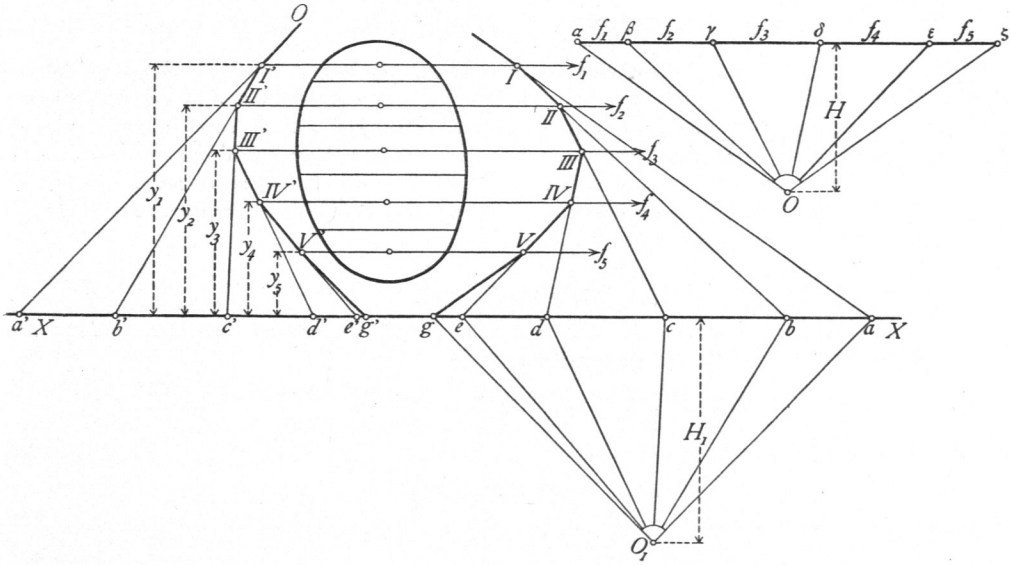
$$\mathcal{I} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots$$

56.  
Culman'sches  
Verfahren.

Man braucht also nur mit den Werthen  $m_1, m_2, m_3 \dots$  genau so zu verfahren, wie oben (in Art. 44, S. 30) mit den Werthen  $f_1, f_2, f_3 \dots$ , um die statischen Momente von  $m_1, m_2, m_3 \dots$ , d. h. die Trägheitsmomente zu erhalten. Darauf beruht das nachfolgende von Culman angegebene Verfahren (Fig. 52).

Man zerlege den Querschnitt in Streifen, die zu derjenigen Axe parallel sind, für welche das Trägheitsmoment gesucht wird, und ermittle zunächst, wie oben (in Art. 44) gezeigt, die statischen Momente für die Axe  $XX$ . Die Stücke  $a b, b c, c d \dots$  sind den statischen Momenten proportional. Man nehme nun einen neuen Pol  $O_1$  an, ziehe die Strahlen  $O_1 a, O_1 b, O_1 c \dots$  und construire für die Kräfte  $m_1, m_2, m_3 \dots$ , die in denselben Linien wirkend angenommen werden, wie die  $f_1, f_2, f_3 \dots$ , das zugehörige Seilpolygon  $O I' II' III' \dots g' \dots$ . Werden die Seilpolygonseiten über die Eckpunkte hinaus bis zu den Schnittpunkten mit der Axe  $XX$  verlängert, so ist

Fig. 52.



$$\triangle I' a' b' \sim \triangle O_1 a b, \text{ also } \frac{a' b'}{y_1} = \frac{a b}{H_1}.$$

Es ist aber (siehe Art. 44, S. 31)

$$\overline{a b} = \frac{f_1 y_1}{H}, \text{ mithin } a' b' = \frac{f_1 y_1^2}{H H_1} = \frac{i_1}{H H_1} \text{ und } i_1 = H H_1 \overline{a' b'}.$$

Eben so ergibt sich

$$\triangle II' b' c' \sim \triangle O' b c, \text{ mithin } \frac{b' c'}{y_2} = \frac{b c}{H_1} = \frac{f_2 y_2}{H H_1} \text{ und } b_1' c' = \frac{f_2 y_2^2}{H H_1} = \frac{i_2}{H H_1},$$

sonach  $i_2 = H \cdot H_1 \cdot \overline{b' c'}$ ; eben so  $i_3 = H \cdot H_1 \cdot \overline{c' d'}$  . . . . .

Man erhält demnach

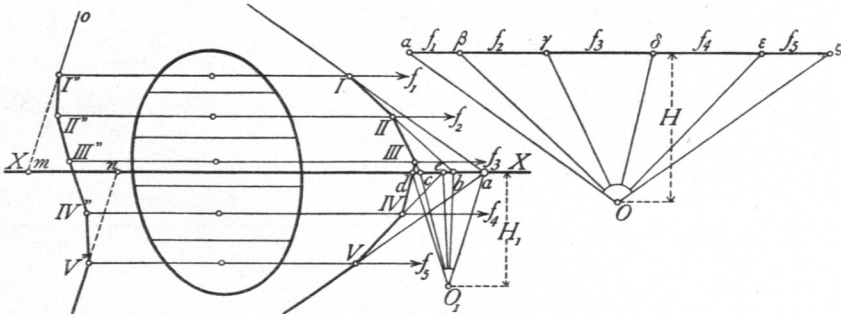
$$\mathcal{J} = \Sigma (i) = H H_1 [a' b' + b' c' + c' d' + \dots] = H H_1 \overline{a' g'}.$$

Das Trägheitsmoment der Fläche  $F$  für eine Axe  $XX$  ist also gleich dem von den äußersten Seiten des Seilpolygons  $O I' II' III' \dots$  auf der Axe abgechnittenen Stücke  $\overline{a' g'}$ , multiplicirt mit dem Producte der beiden Polabstände  $H$  und  $H_1$ .

Genau eben so, wie oben bei den statischen Momenten (siehe Art. 44) nachgewiesen ist, ergibt sich auch hier, daß die Strecke  $\overline{a' g'}$  und  $H_1$  auf dem Längenmaßstabe,  $H$  auf demjenigen Flächenmaßstabe zu messen ist, nach welchem  $f_1, f_2, f_3 \dots$  aufgetragen sind; das Ergebnis ist jedoch das gleiche, wenn  $\overline{a' g'}$  auf dem Flächenmaßstabe,  $H$  und  $H_1$  auf dem Längenmaßstabe gemessen werden.

Es sei ein Querschnitt in natürlicher Größe aufgezeichnet,  $H = 5 \text{ cm}$  und  $H_1 = 5 \text{ cm}$ ; ferner seien

Fig. 53.



$f_1, f_2, f_3 \dots$  in einem Maßstabe aufgetragen, in welchem  $1 \text{ cm} = 10 \text{ qcm}$  ist; alsdann wird, wenn  $\overline{a'g'} = 4,6 \text{ cm}$  ist,

$$\mathcal{J} = 4,6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^4.$$

Wenn die Axe  $XX$  eine Schwerpunktsaxe ist (Fig. 53), so sind zunächst die statischen Momente genau wie oben gezeigt zu ermitteln; die statischen Momente der oberhalb von  $XX$  liegenden Flächentheile haben entgegengesetzten Sinn, wie diejenigen der unterhalb von  $XX$  liegenden Flächen, weil die Hebelsarme verschiedene Vorzeichen haben. Der Sinn der einzelnen Momente ist  $a b, b c, c d, d e, e a$ ; Anfangspunkt  $a$  und Endpunkt  $a$  fallen zusammen. Wird jetzt der Pol  $O_1$  angenommen, so sind die Strahlen  $O_1 a, O_1 b, O_1 c, O_1 d, O_1 e, O_1 a$ ; der letzte Strahl fällt mit dem ersten zusammen. Als Seilpolygon erhält man  $O I'' I I'' \dots V''$ , und es ist

$$\mathcal{J}_S = H \cdot H_1 \cdot \overline{mn}.$$

Ein anderes Verfahren hat *Mohr* angegeben.

Wenn die statischen Momente nach dem in Art. 44 (S. 30) vorgeführten Verfahren konstruiert sind (Fig. 52), so ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $I a b$

$$\varphi_1 = \frac{\overline{a b} \cdot y_1}{2} = \frac{f_1 y_1}{H} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{f_1 y_1^2}{2 H} = \frac{i_1}{2 H}$$

und der Flächeninhalt des Dreiecks  $I I b c$

$$\varphi_2 = \frac{\overline{b c} \cdot y_2}{2} = \frac{f_2 y_2}{H} \cdot \frac{y_2}{2} = \frac{f_2 y_2^2}{2 H} = \frac{i_2}{2 H}.$$

Eben so kann man für jeden Flächenteil  $f$  nachweisen, daß sein Trägheitsmoment für eine Axe  $XX$  gleich ist dem Flächeninhalte des Dreiecks, welches von der Axe und den das betreffende Flächentheilchen begrenzenden Seilpolygonseiten eingeschlossen ist, multiplicirt mit dem doppelten Polabstand. Es ist also

$$i_1 = 2 H \varphi_1, \quad i_2 = 2 H \varphi_2, \quad i_3 = 2 H \varphi_3 \dots \dots$$

$$\text{und } \mathcal{J} = \Sigma (i) = 2 H \Sigma (\varphi) = 2 H F_1,$$

wenn  $F_1 = \Sigma (\varphi)$  ist.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsaxe (Fig. 53), so bleibt Alles gültig, und es wird

$$\mathcal{J}_S = 2 H F_2,$$

wenn  $F_2$  den Flächeninhalt der Figur  $I I I I V V a I$  bedeutet.

Handelt es sich um das Trägheitsmoment eines Querschnittes für eine beliebige, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe, so kann man dasselbe aus demjenigen für die parallele Schwerpunktsaxe nach Art. 47 ermitteln; dieses letztere ist aber im Vorstehenden nur für sehr einfache Querschnittsformen und selbst bei diesen nur für einige wenige Lagen der Axen rechnerisch bestimmt. Für beliebig liegende Axen, also beispielsweise beim Rechteckquerschnitt für eine Axe, welche keiner Seite parallel ist, wird die Berechnung meist recht umständlich. Dagegen ist die Ermittlung sehr bequem, wenn man das gesuchte Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktsaxe durch diejenigen für zwei andere Schwerpunktsachsen ausdrückt, welche einen beliebigen, zweckmäßigen rechten Winkel mit einander bilden. Die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten zweier senkrecht zu einander stehender Schwerpunktsachsen und demjenigen für eine andere Axe ergeben sich folgendermaßen.

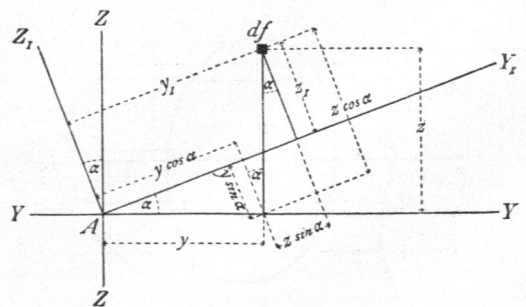
Das Trägheitsmoment eines Querschnittes für die beliebige Axe  $A Y_1$  (Fig. 54), welche den Winkel  $\alpha$  mit der Axe  $Y Y$  einschließt, ist nach Art. 47 (S. 33)

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \int z_1^2 d f;$$

Nach Fig. 54 ist

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

Fig. 54.



57.  
Mohr'sches  
Verfahren.

58.  
Trägheits-  
momente für  
verschiedene  
Schwerpunkts-  
achsen.

folglich

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \int z^2 \cos^2 \alpha \, df + \int y^2 \sin^2 \alpha \, df - \int 2 y z \sin \alpha \cos \alpha \, df.$$

Die Integration ist über den gefamnten Querschnitt auszudehnen; für die ganze Integration ist aber  $\alpha$  constant, also

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \cos^2 \alpha \int z^2 \, df + \sin^2 \alpha \int y^2 \, df - \sin 2 \alpha \int y z \, df.$$

Nun ist

$$\int z^2 \, df = \mathcal{F}_Y = \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \int y^2 \, df = \mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_1;$$

mithin, wenn man noch  $\int y z \, df = H$  setzt,

$$\mathcal{F}_{Y_1} = \mathcal{F} \cos^2 \alpha + \mathcal{F}_1 \sin^2 \alpha - H \sin 2 \alpha \dots \dots \dots 22.$$

Das Trägheitsmoment für die Axe  $A Z_1$  wird erhalten, indem man an Stelle von  $\alpha$  den Winkel einführt, welchen  $A Z_1$  mit  $Y Y$  bildet, d. h.  $90 + \alpha$ . Dann ergibt sich

$$\mathcal{F}_{Z_1} = \mathcal{F}_1 \cos^2 \alpha + \mathcal{F} \sin^2 \alpha + H \sin 2 \alpha \dots \dots \dots 23.$$

Die beiden Gleichungen 22 u. 23 geben die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Lage der Schweraxen an. Besonders wichtig ist die Lage der Axen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird.  $\mathcal{F}_{Y_1}$  wird ein Maximum für den Werth von  $\alpha$ , für welchen

$$\frac{d \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha} = - 2 \mathcal{F} \cos \alpha \sin \alpha + 2 \mathcal{F}_1 \sin \alpha \cos \alpha - 2 H \cos 2 \alpha = 0,$$

d. h. für welchen  $(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \sin 2 \alpha = 2 H \cos 2 \alpha$  wird. Es ist also

$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2 H}{\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}} \dots \dots \dots 24.$$

Dieser Gleichung genügen zwei Winkelgrößen  $2 \alpha$ , welche um 180 Grad aus einander liegen, da  $\text{tg} (180 + 2 \alpha) = \text{tg } 2 \alpha$  ist. Es giebt also zwei Axen, für welche ein Maximum, bezw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet, und diese beiden Axen bilden mit der angenommenen Axe  $Y Y$  die Winkel  $\alpha_{max}$ , bezw.  $90 + \alpha_{max}$ ; diese beiden Axen stehen senkrecht zu einander. Ob Maximum oder Minimum für die eine oder andere Axe stattfindet, ergibt die zweite Differentiation.

Es ist 
$$\frac{d \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha} = (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \sin 2 \alpha - 2 H \cos 2 \alpha,$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha + 4 H \sin 2 \alpha.$$

Setzt man statt  $\alpha$  den um 90 Grad abweichenden Werth  $(90 + \alpha)$  ein, so ist

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d^2 \alpha} = + 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos (180 + 2 \alpha) + 4 H \sin (180 + 2 \alpha),$$

$$\frac{d^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{d \alpha^2} = - 2 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}) \cos 2 \alpha - 4 H \sin 2 \alpha.$$

Die zweiten Ableitungen sind also für zwei Winkel, welche um 90 Grad verschieden sind, der Größe nach gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen; entspricht demnach dem Winkel  $\alpha$  das Maximum, so tritt für den Winkel  $(90 + \alpha)$  das Minimum des Trägheitsmomentes ein.

Es folgt daraus der Satz: In jedem Querschnitt ist eine Schwerpunktsaxe vorhanden, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum, eine andere, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird. Beide Axen stehen zu einander senkrecht.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen. Diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum wird, nennt man die erste Hauptaxe, diejenige, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum wird, heißt die zweite Hauptaxe.

Wir bezeichnen oben  $\int y z df = H$ ; setzt man entsprechend  $H_1 = \int y_1 z_1 df$ , führt man ferner für  $z_1$  den oben gefundenen Werth und endlich nach Fig. 54 für  $y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha$  ein, so wird

$$H_1 = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha) (z \cos \alpha - y \sin \alpha) df,$$

$$H_1 = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int y z df + \frac{\sin 2 \alpha}{2} \left( \int z^2 df - \int y^2 df \right),$$

$$H_1 = H \cos 2 \alpha + \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1). \quad \dots \quad 25.$$

$H_1$  wird gleich Null für  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_1) \sin 2 \alpha = -2 H \cos 2 \alpha$ , fonach für

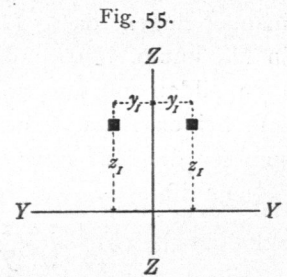
$$\operatorname{tg} 2 \alpha = - \frac{2 H}{\mathcal{F} - \mathcal{F}_1} = \frac{2 H}{\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}}.$$

Dies ist derselbe Werth, für welchen nach Gleichung 24 Maximum, bzw. Minimum des Trägheitsmomentes stattfindet. Für die Hauptaxen ist fonach

$$H_1 = \int y_1 z_1 df = 0.$$

Für viele Querschnitte ist hierdurch ein bequemes Kennzeichen zur Bestimmung der Hauptaxen gefunden. Man suche diejenigen Axen, für welche  $H_1 = 0$  ist; dann sind die gefundenen Axen die Hauptaxen. Es genügt, eine Hauptaxe zu suchen, da ja die andere nach Früherem stets einen Winkel von 90 Grad mit derselben einschließt.

Bei sämtlichen zu einer oder mehreren Axen symmetrisch liegenden Querschnitten sind die Symmetriaxen auch zugleich die Hauptaxen. Denn sei etwa die  $Z$ -Axe eine Symmetrieaxe, so entspricht jedem  $df$  mit den Coordinaten  $y_1, z_1$  ein  $df$  mit den Coordinaten  $-y_1, z_1$  (Fig. 55). Die Beiträge der beiden  $df$  zu  $H_1$  sind also  $df \cdot y_1 z_1 - df \cdot y_1 z_1 = 0$ .



Genau eben so ist es mit sämtlichen übrigen Querschnittstheilen; die Summe der Beiträge je zweier symmetrisch liegender Flächentheile ist gleich Null, so dass also auch die Gesamtsomme  $H_1 = \int y_1 z_1 df = 0$  ist.

Bei den in Fig. 56 bis 60 dargestellten Querschnitten sind die Hauptaxen angegeben. In den im vorhergehenden Halbbande dieses »Handbuches« mitgetheilten Tabellen über die »Deutschen Normal-Profile für Walzeisen« sind die Trägheitsmomente

Fig. 56.

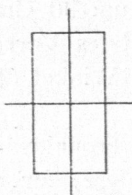


Fig. 57.

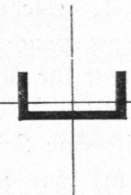


Fig. 58.



Fig. 59.

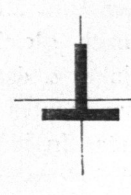
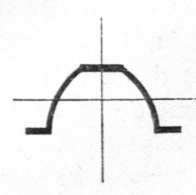


Fig. 60.



für solche Axen mit aufgenommen worden, welche beim Berechnen von Hochbau-  
Constructions eine Rolle spielen.

Wählt man die Hauptaxen als Axen der  $Y$  und  $Z$  (Fig. 55), so ist für diese  
nach Obigem  $\int y z df = H = 0$ ; mithin ist, wenn man das Trägheitsmoment in Be-  
zug auf die eine Hauptaxe mit  $A$ , dasjenige in Bezug auf die andere mit  $B$  be-  
zeichnet, in den Gleichungen 22 und 23 für  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}_1$  bezw.  $A$  und  $B$ , so wie für  
 $H = 0$  einzusetzen. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{Y_1} &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \\ \mathcal{F}_{Z_1} &= A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha \\ H_1 &= (A-B) \frac{\sin 2\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 26.$$

60.  
Wahl der  
Hauptaxen  
als Axen der  
 $Y$  und  $Z$ .

Sind  $A$  und  $B$ , d. h. die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A,$$

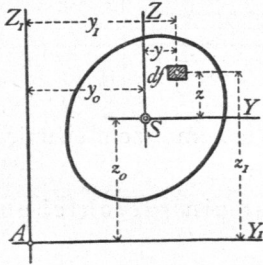
d. h.  $\mathcal{F}_{Y_1}$  ist alsdann von  $\alpha$  unabhängig, also für jedes  $\alpha$  gleich  $A$ .

Hieraus folgt: Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich groß, so sind  
alle Trägheitsmomente gleich groß.

Bei vielen statischen Untersuchungen ist es wichtig, die Lage der Hauptaxen  
und die Größe der Werthe von  $A$  und  $B$  zu kennen. Für die Ermittlung dieser  
Werthe aber bedarf man nach vorstehenden Entwicklungen der Kenntniß von  
 $H = \int y z df$ . Man nennt  $H$  das Centrifugalmoment des Querschnittes für die  
Axen  $A Y$  und  $A Z$ .

61.  
Centrifugal-  
momente.

Fig. 61.



Legt man durch einen beliebigen Punkt  $A$  in der  
Ebene eines Querschnittes (Fig. 61) und durch den Schwer-  
punkt  $S$  desselben je zwei parallele Axen  $A Y_1$  und  $A Z_1$ ,  
bezw.  $S Y$  und  $S Z$ , bezeichnet man die Coordinaten des  
Schwerpunktes für die ersten beiden Axen mit  $z_0$  und  $y_0$ ,  
die Centrifugalmomente für die Axenpaare bezw. mit  $H_1$   
und  $H$ , so ist

$$H_1 = H + F y_0 z_0.$$

Denn es ist

$$H_1 = \int y_1 z_1 df, \quad y_1 = y + y_0 \quad \text{und} \quad z_1 = z + z_0, \quad \text{also}$$

$$H_1 = \int (y + y_0) (z + z_0) df = \int y z df + y_0 \int z df + z_0 \int y df + y_0 z_0 \int df.$$

Nun ist  $\int y z df = H$ ,  $\int df = F$ ,  $\int z df = 0$  und  $\int y df = 0$ ; die

letzteren beiden Werthe ergeben sich, weil  $S Y$  und  $S Z$  Schwerpunktsaxen sind  
(vergl. Art. 31, S. 25, unter  $\alpha$ ). Es wird somit

$$H_1 = H + F y_0 z_0. \dots \dots \dots 27.$$

Wenn die Schwerpunktsaxen Hauptaxen sind, so ist  $H = 0$ , demnach

$$H_1 = F y_0 z_0. \dots \dots \dots 28.$$

Diese Formel ist sehr bequem. Soll beispielsweise das Centrifugalmoment für  
die Axen  $A Y_1$  und  $A Z_1$  (Fig. 62) und den Rechtecksquerschnitt ermittelt werden,

deffen Seiten parallel zu den Axen find, fo lege man durch den Schwerpunkt zwei den ersteren bezw. parallele Axen  $S Y$  und  $S Z$ ; alsdann wird

$$H_1 = F y_0 z_0.$$

Fällt etwa  $A$  mit einer Ecke zufammen, fo wird

$$H_1 = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Beispiel. Es soll das Centrifugalmoment eines ungleichschenkeligen Winkeleifens (Fig. 63) für zwei durch dessen Schwerpunkt gelegte Axen ermittelt werden, welche den Winkeleifenschenkeln parallel find.

Zerlegt man den Querschnitt in zwei Rechtecke, deren eines den ganzen lothrechten Schenkel enthält, deren anderes den wagrechten Schenkel nach Abzug des schon beim ersten mitberechneten Rechteckes in der Ecke bildet, und nennt man die Flächeninhalte  $F_1$  und  $F_2$ , fo wie die Abstände der Einzelschwerpunkte von den Axen bezw.  $y_0', z_0', y_0'', z_0''$ , fo ist

$$H = F_1 y_0' z_0' + F_2 y_0'' z_0''.$$

Es sei die Länge des großen und kleinen Schenkels bezw. 12 und 8 cm, die Stärke beider Schenkel 1,0 cm (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) und der Abstand des Schwerpunktes von der äußeren Kante des langen, bezw. kurzen Schenkels 1,97 cm, bezw. 3,97 cm; alsdann ist

$$H = 12 \cdot 1 \cdot 1,97 (6 - 3,97) + 7 \cdot 1 \cdot 3,97 (4,5 - 1,97) = 97,26 \text{ cm}^4.$$

Die Einheit, in welcher die Centrifugalmomente erhalten werden, ist dieselbe, wie bei den Trägheitsmomenten, und es wird auf das hierüber in Art. 54 (S. 36) Gefagte verwiesen. Besondere Aufmerksamkeit ist aber hier auf die Vorzeichen der Coordinaten  $y_0$  und  $z_0$  zu verwenden. In obigem Beispiel sind für das erste Rechteck beide positiv, für das zweite Rechteck beide negativ einzuführen; das Product ist hier also für jedes der Theilrechtecke positiv.

Für einige häufiger vorkommende Querschnittsformen sollen im Nachstehenden die Maximal- und Minimal-Trägheitsmomente ermittelt werden.

α) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein gleichschenkeliges Winkeleifen (Fig. 64).

Hauptaxen sind die Symmetrieaxe  $Y_1 V_1$ , welche den Winkel halbirt, und die zu dieser im Schwerpunkte senkrechte Axe  $Z_1 Z_1$ . Die erstere bildet mit der Axe  $Y Y$  den Winkel  $\alpha = 45$  Grad. Somit ist nach Gleichung 22

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \mathcal{J}_Y \cos^2 \alpha + \mathcal{J}_Z \sin^2 \alpha - H \sin 2 \alpha$$

und, da  $\alpha = 45$  Grad ist,

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} - H.$$

Die Werthe auf der rechten Seite vorstehender Gleichung sind leicht zu finden.

Für ein Winkeleifen mit 10 cm Schenkellänge, 1 cm Schenkelfstärke (Deutsches Normal-Profil Nr. 10) ist  $y_0 = z_0 = 2,87$  cm; mithin

$$\mathcal{J}_Y = \mathcal{J}_A - F z_0^2 \text{ und } \mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_B - F y_0^2;$$

$$\mathcal{J}_Y = \frac{1 \cdot 10^3}{3} + \frac{9 \cdot 1^3}{3} - (10 + 9) \cdot 1 \cdot 2,87^2 = 179,83 \text{ cm}^4; \text{ eben so groß ist } \mathcal{J}_Z = 179,83 \text{ cm}^4;$$

$H = -10 \cdot 1 \cdot (5 - 2,87) (2,87 - 0,5) - 9 \cdot 1 \cdot (5,5 - 2,87) (2,87 - 0,5) = -106,58 \text{ cm}^4.$   
(Die Werthe der  $y$  und  $z$  sind nach rechts, bezw. oben als positiv eingeführt.) Es wird fonach

$$\mathcal{J}_{Y_1} = 179,83 + 106,58 = 286,41 \text{ cm}^4$$

Fig. 62.

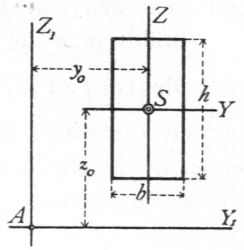


Fig. 63.

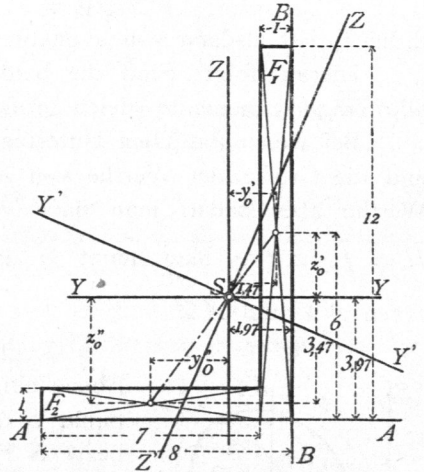
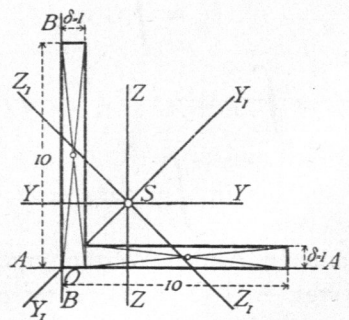


Fig. 64.



62.  
Maximal- u.  
Minimal-  
Trägheits-  
momente für:  
Winkeleifen.



und  $\mathcal{J}_{Z_1} = \mathcal{J}_Y \sin^2 \alpha + \mathcal{J}_Z \cos^2 \alpha + H \sin 2\alpha = \frac{\mathcal{J}_Y + \mathcal{J}_Z}{2} + H = 179,83 - 106,58 = 73,25 \text{ cm}^4$ .

Mithin ist  $\mathcal{J}_{Y_1} = A = 286,41 \text{ cm}^4$  (Maximum),  
 $\mathcal{J}_{Z_1} = B = 73,25 \text{ cm}^4$  (Minimum).

**β) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein ungleichschenkeliges Winkeleifen (Fig. 63).**

Zunächst ist die Lage der Haupttaxen aufzufuchen. Da hier keine Symmetrie-Axe vorhanden ist, so ist dieselbe nach Formel 24

$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2H}{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}}$$

zu berechnen.

Für das in Fig. 63 dargestellte Winkeleifen (Deutsches Normal-Profil Nr. 8/12) ist

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_Y = \mathcal{J}_A - Fz_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 12^3 + 7,0 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 3,97^2 = 278,87 \text{ cm}^4,$$

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_B - Fy_0^2 = \frac{1}{3} [1,0 \cdot 8^3 + 11 \cdot 1,0^3] - (12 + 7) 1,0 \cdot 1,97^2 = 100,59 \text{ cm}^4,$$

$$H = 97,26 \text{ cm}^4 \text{ (siehe Art. 61, S. 41).}$$

Hiernach ist  $\text{tg } 2 \alpha_{max} = \frac{2 \cdot 97,26}{100,59 - 278,87} = -1,09109$ .

Nun ist, wenn man  $2 \alpha_{max} = 180 - 2 \beta$  setzt,  $\text{tg } 2 \alpha_{max} = -\text{tg } 2 \beta$ ; somit  $\text{tg } 2 \beta = 1,09109$  und  $2 \beta = 47^\circ 29' 40''$ , woraus  $\beta = 23^\circ 44' 50''$ ; mithin

$$\alpha_{max} = 90 - \beta, \text{ bzw. } 180 - \beta.$$

Hieraus ergibt sich  $\alpha_{max} = 156^\circ 15' 10''$  und  $\alpha_{min} = 66^\circ 15' 10''$ .

Die Axen  $Y' Y'$  und  $Z' Z'$  sind demnach die Haupttaxen; man erhält nach Gleichung 22

$$\mathcal{J}_{Y_1} = \mathcal{J} \cos^2 156^\circ 15' 10'' + \mathcal{J}_1 \sin^2 156^\circ 15' 10'' - H \sin 312^\circ 30' 20'',$$

$$= \mathcal{J} \cos^2 23^\circ 44' 50'' + \mathcal{J}_1 \sin^2 23^\circ 44' 50'' + H \sin 47^\circ 29' 40'' = 321,43 \text{ cm}^4 = A;$$

$$\mathcal{J}_{Z_1} = \mathcal{J} \cos^2 66^\circ 45' 10'' + \mathcal{J}_1 \sin^2 66^\circ 15' 10'' - H \sin 47^\circ 29' 40'' = 57,80 \text{ cm}^4 = B.$$

**γ) Maximal- und Minimal-Trägheitsmoment für ein Z-Eifen.**

Die Ermittlung soll für das Deutsche Normal-Profil Nr. 12 (Fig. 65) vorgenommen werden.

Es ist  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_Y = \frac{0,7 \cdot 12^3}{12} + 2 \left[ \frac{5,3 (6^3 - 5,1^3)}{3} \right] = 395,3 \text{ cm}^4,$

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_Z = \frac{10,2 \cdot 0,7^3}{12} + 2 \left[ \frac{(5,65^3 + 0,35^3)}{3} \cdot 0,9 \right] = 108,53 \text{ cm}^4,$$

$$H = 0 - 0,9 \cdot 5,3 \cdot 5,55 \cdot 3,0 \cdot 2 = -158,84 \text{ cm}^4,$$

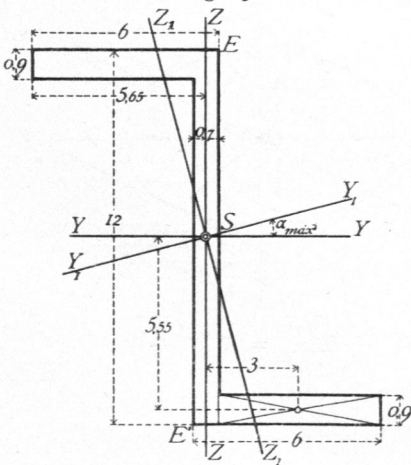
$$\text{tg } 2 \alpha_{max} = -\frac{2 \cdot 158,84}{108,53 - 395,3} = \frac{2 \cdot 158,84}{286,77} = 1,1078, \text{ woraus } 2 \alpha_{max} = 47^\circ 56';$$

somit  $\alpha_{max} = 23^\circ 58'$  und  $\alpha_{min} = 113^\circ 58'$ .

$$\mathcal{J}_{Y_1} = 395,3 \cdot \cos^2 23^\circ 58' + 108,53 \cdot \sin^2 23^\circ 58' + 158,84 \cdot \sin 47^\circ 56' = 465,9 \text{ cm}^4 = A,$$

$$\mathcal{J}_{Z_1} = 395,3 \cdot \sin^2 23^\circ 58' + 108,53 \cdot \cos^2 23^\circ 58' - 158,84 \cdot \sin 47^\circ 56' = 38,1 \text{ cm}^4 = B.$$

Fig. 65.



Bedeutet  $\mathcal{J}$  das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe, so kann man  $\mathcal{J} = F R^2$  setzen, in welcher Gleichung  $F$  die Querschnittsfläche bedeutet. Es ist dann

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{F}},$$

und es wird  $R$  der Trägheitsradius für die betreffende Axe genannt. Beispielsweise würden sich die Trägheitsradien für die Haupttaxen aus den Gleichungen:

$$A = F R_1^2 \text{ und } B = F R_2^2 \text{ zu}$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{A}{F}} \text{ und } R_2 = \sqrt{\frac{B}{F}}$$

ergeben.

63.  
Z-Eifen.

64.  
Trägheits-  
radius.

65.  
Ellipse  
der Trägheits-  
momente.

Die den Gleichungen 22 und 23 entsprechende Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mit der Veränderung des Winkels  $\alpha$  kann man graphisch veranschaulichen, indem man vom Schwerpunkte aus auf jeder Axe eine Länge abträgt, welche dem Trägheitsmomente für diese Axe entspricht. Wählt man die Haupttaxen als Coordinatenaxen und trägt auf jeder Axe  $\frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}}}$  ab, in welcher Gleichung  $K$  eine zunächst beliebige Constante,  $\mathcal{F}$  das Trägheitsmoment für die betreffende Axe bedeutet, so erhält man als Endpunkt eines *Radius vector* etwa den Punkt  $P$  (Fig. 66). Alsdann ist

$$r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K}.$$

Nach Gleichung 26 ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha = \frac{A y^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{K^2} + \frac{B z^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{K^2}.$$

$$K^2 = A y^2 + B z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{y^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{B}}\right)^2} \dots \dots \dots 29.$$

Gleichung 29 ist die Gleichung der Curve für die Punkte  $P$ ; die Endpunkte der *Radii vectores* liegen also auf einer Ellipse, deren beide Halbaxen  $\frac{K}{\sqrt{A}}$  und  $\frac{K}{\sqrt{B}}$  sind;  $\frac{K}{\sqrt{A}}$  ist der *Radius vector* auf der Hauptaxe  $O Y$ ,  $\frac{K}{\sqrt{B}}$  derjenige auf der Hauptaxe  $O Z$ .

Man nennt diese Ellipse die Ellipse der Trägheitsmomente. Dieselbe kann für jeden beliebigen Punkt der Ebene als Mittelpunkt construirt werden; gehen sämtliche Axen, wie hier, durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so nennt man dieselbe die Centraellipse.

Der Werth  $K$  kann beliebig angenommen werden. Durch passende Wahl dieses Werthes kann man erreichen, daß der senkrechte Abstand einer Schwerpunktsaxe und der zu ersterer parallelen Tangente an die Ellipse gleich dem Trägheitsradius für die betreffende Schwerpunktsaxe, daß also  $e$  (Fig. 66) der Trägheitsradius für die Axe  $Y_1 Y_1$  ist.

Alsdann ist

$$\mathcal{F}_{Y_1} = F e^2.$$

Der für  $K$  zu diesem Zwecke zu wählende Werth ergibt sich wie folgt. Zieht man die vier Tangenten, welche dem Durchmesser  $Y_1 Y_1$  und dem zugehörigen conjugirten Durchmesser  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$  entsprechen, so schließen dieselben bekanntlich eine Fläche ein, welche  $= 4 a b$  ist. Diese Fläche ist aber auch  $= 4 r e$ ; daher ist  $a b = r e$  und

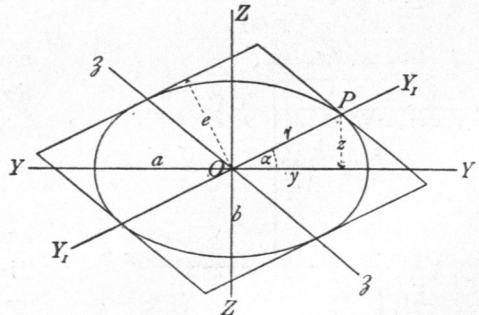
$$e = \frac{a b}{r}.$$

Nun ist  $a = \frac{K}{\sqrt{A}}, b = \frac{K}{\sqrt{B}}, r = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}$ , also  $e = \frac{K^2 \sqrt{\mathcal{F}_{Y_1}}}{K \sqrt{A B}} = K \sqrt{\frac{\mathcal{F}_{Y_1}}{A B}}.$

Soll  $e$  gleich dem Trägheitsradius für  $Y_1 Y_1$  sein, so muß  $F e^2 = \mathcal{F}_{Y_1}$  sein, d. h.

$$\mathcal{F}_{Y_1} = F e^2 = \frac{F K^2 \mathcal{F}_{Y_1}}{A B} \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{F K^2}{A B};$$

Fig. 66.



daher

$$K = \sqrt{\frac{AB}{F}}.$$

Wird also  $K = \sqrt{\frac{AB}{F}}$  gewählt, so ist für jede Axe der Trägheitsradius ohne Weiteres durch Ziehen der parallelen Tangente und Abmessen des senkrechten Abstandes dieser beiden Linien zu ermitteln. Sodann ist  $a$  der Trägheitsradius für die  $Z$ -Axe,  $b$  der Trägheitsradius für die  $Y$ -Axe, d. h.  $A = Fb^2$  und  $B = Fa^2$ .