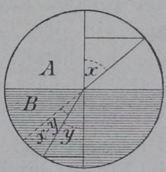
I. Kapitel.

Elemente der geometrischen Optik in Bezug auf ihre Anwendung auf photographische Linsen.

Wenn ein Lichtstrahl von einem Medium A oder dem leeren Raum, in ein anderes Medium B übergeht (s. Fig. 1), welche Medien von einer ebenen Trennungsfläche begrenzt sind, so erleidet er in dem Augenblicke, wo er die Trennungsfläche beider Medien passirt, eine Ablenkung von seinem bisherigen Wege. Diese Ablenkung wird verursacht durch die Verschiedenheit der Molecularkräfte beider Medien. Es sei der Winkel des einfallenden Strahls im Medium A, mit der Normalen der Trennungsfläche beider Medien = x; und der Winkel des abgelenkten Strahles mit derselben Normalen = y, so steht der Sinus dieser beiden Winkel x und y in einem constanten Verhältniss. In Zeichen $\frac{\sin x}{\sin y} = n$, welche Grösse wir mit n bezeichnen, wenn unter dem Medium A der leere Raum oder Luft verstanden wird. Das Medium B kann irgend ein anderes Medium sein. Die Ablenkung des Lichtstrahls von seinem Wege ist dann gleich der Differenz der beiden Winkel x und y, also $\measuredangle x - \measuredangle y = a$ oder gleich der von der Molecularkraft des Medium B geleisteten Arbeit. Diese Arbeit a hängt von der Wellenlänge des angewandten Lichtes ab, d. h. je kürzer die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist, um so grösser wird die von der Molecularkraft geleistete Arbeit a sein. So wird z. B. ein violetter Lichtstrahl mehr von seiner Bahn abgelenkt wie ein rother. Da hieraus eine Trennung des weissen Lichtes in seine Farben entsteht, so ist dieser Umstand der Grund der Farbenaberration der Linsen, die wir später werden kennen lernen. Aus dem Umstand hin-

Fig. 1.

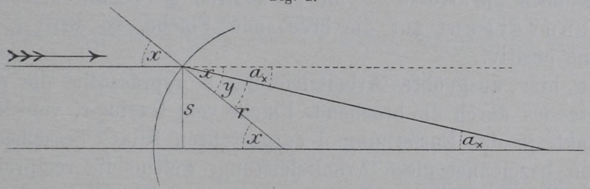


gegen, das die Sinus und nicht die Winkel selbst in einem constanten Verhältniss stehen, entsteht die sogenannte sphärische Aberration, die wir später werden kennen lernen, zum bei weitem grössten Theil und entfällt nur ein verhältnissmässig kleiner Theil der Natur der Kreislinie zur Last.

Um nun die Vorgänge der Strahlenbrechung in Linsen und Linsensystemen genauer kennen zu lernen, betrachten wir zuerst (zur Vereinfachung) diesen Vorgang an einer einzigen sphärischen Trennungsfläche zweier Medien, z. B. Luft und Glas, und gehen dann zu den Linsensystemen dadurch über, dass wir die Linsen und Linsensysteme aus einzelnen Flächen zusammensetzen. Um schliesslich wieder einen leicht fassbaren Begriff von der Leistung eines Systems solcher Flächen, resp. Linsen zu erhalten, suchen wir dann eine einfache Fläche oder Linse auf, welche denselben optischen Effect wie das ganze System verrichtet und nennen solche alsdann das Aequivalent oder die äquivalente Linse des ganzen Systems.

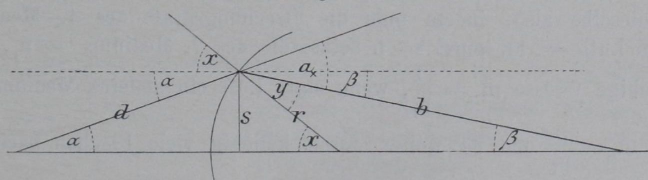
Um uns eine klare Vorstellung von dem Wesen der Lichtbrechung zu machen, führten wir (ähnlich wie in der Mechanik) den Begriff der Kraft und der von dieser verrichteten Arbeit ein. Es ist ja auch in der That eine Kraft (welche, wie erwähnt, den Molecülen der brechenden Medien innewohnt), die den Lichtstrahl von seiner Bahn ablenkt und das Quantum der Ablenkung, welche diese Kraft verrichtet, nannten wir die von der Molecularkraft ausgeübte Arbeit. Diese Arbeit, welche wir mit a bezeichneten, wird z. B. dargestellt in Fig. 1 durch die Differenz des Einfalls- und Brechungswinkels. Ist das Verhältniss der Winkel $y : x = 1 : n$ (falls die Winkel so klein gedacht werden, dass man Bogen und Sinus verwechseln kann), so ist $x = n$; $y = 1$; sonach $x - y = n - 1$, welches wir wieder mit a bezeichnen wollen und nach Obigem, die verrichtete Arbeit bezeichnet, welche durch die Brechungskraft n für verschwindend kleine Winkel geleistet wird. Setzen wir jedoch $a_* =$ der optischen Arbeit, welche für Winkel von endlicher Grösse geleistet wird, so ist $a_* = \sin x \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, No. 1, weil $n \cdot \sin y = \sin x$ ist. Um nun die Arbeitsleistung einer sphärischen Trennungsfläche zweier Medien zu bestimmen, wie solche im Hauptschnitt, d. h. in einer durch die optische Axe des Systems gelegten Ebene stattfindet, zu bestimmen; wobei zu beachten ist, dass die optische Axe eines Systems die Verbindungslinie sämmtlicher Kugelcentra ist, welche zugleich sämmtliche Kugelscheitel durchstösst. Ferner, dass man für ein unendlich kleines Element des Kreises dessen Tangente setzen kann. Betrachten wir nun Fig. 2, so sieht man, dass die Einfallshöhe des Strahls die halbe Sehne s des Kreises vom Radius = r ist, sonach $\frac{s}{r} = \sin x$ ist, da-

Fig. 2.



her $a_* = \frac{s}{r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Setzt man nun, wenn die Winkel so klein sind, dass die Bögen für ihre Sinus und Tangenten gesetzt werden können, s der Maasseinheit gleich (welche man sich beliebig klein denken kann, so erhält man $\sin x = \frac{1}{r}$, wofür wir $\mathfrak{r}$ setzen wollen und setzen ferner $\frac{1}{n} = m$; $\frac{1}{n_1} = m_1$ etc. für die aufeinander folgenden Medien, so erhalten wir die durch die sphärische Fläche für parallel einfallende Strahlen geleistete Arbeit $a = \mathfrak{r}\,(1 - m)$, No. 2, und welche man nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise die reciproke Flächenbrennweite nennen kann. Bewegt sich der leuchtende Punkt aus unendlicher Ferne zur brechenden Fläche, so fällt das Licht nicht mehr parallel auf dieselbe, sondern divergent. Es sei die Entfernung des leuchtenden Punktes = d, Fig. 3, so tritt jetzt an die Stelle des

Fig. 3.



sin x, der Sinus des Winkels $x + \alpha$ und nennen wir wieder die verrichtete optische Arbeit $= a_*$ so ist: $a_* = \sin(\alpha + x)\,(1 - m)$, No. 3. Setzen wir hier die Werthe für $\sin\alpha = \frac{s}{d} = \frac{1}{d}$ und bezeichnen dies mit $\mathfrak{d}$ und für x seinen obigen Werth $\frac{s}{r} = \mathfrak{r}$, so erhalten wir $a = (\mathfrak{d} + \mathfrak{r})\,(1 - m) = \mathfrak{d} + \mathfrak{r} - m\mathfrak{d} - m\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,(1 - m) - m\mathfrak{d}$.

Wie man sieht, besteht der erste Theil dieser Formel aus $\mathfrak{r}\,(1 - m)$, der reciproken Flächenbrennweite für parallel einfallende Strahlen, zu welcher für die Divergenz des Lichtes des leuchtenden Punktes noch die Grösse $-\, m\mathfrak{d}$ zu addiren ist. Fällt das Licht dagegen convergent auf die brechende Fläche, so wird $\mathfrak{d}$ negativ, daher $m\mathfrak{d}$ positiv.

Die hier ausgeübte Arbeitsleistung a repräsentirt die reciproke Bildweite des durch die brechende Fläche vom Radius r, vom leuchtenden Punkt, in der Entfernung d dargestellten Bildes desselben.

Man bezeichnet diese Arbeitsleistung, welche die reciproke Bildweite des Punktes in der Entfernung d darstellt mit b, wenn direct gemeint und $^1/b = \mathfrak{f}$, wenn reciprok, daher $\mathfrak{f} = \mathfrak{r}\,(1 - m) - m\mathfrak{d}$, No. 4, ist.

Man kann nun leicht die optische Arbeit, welche durch ein beliebiges Linsensystem geleistet wird, durch Zusammensetzen aller dieser Flächen bestimmen, indem man das Bild des ersten leuchtenden Punktes erzeugt von der ersten Fläche als Object für die zweite Fläche nimmt. Ich bemerke noch, dass man die Maassstabseinheit für s so klein setzen kann, wie man will, so dass man sich dieselbe gerade im Verschwinden denken kann und dann sieht man leicht, dass die Formeln No. (1), (2), (3) und (4) den Strahlengang, also die Bildörter auf der Axe für unendlich wenig gegen die Axe geneigte Strahlen angeben. Den Ausdruck $\frac{s}{r} = \mathfrak{r}$ kann man passend die Flächenkraft nennen, welche also proportional der Kürze des Radius ist. Um daraus also die Kraft der Brennweite einer solchen Fläche abzuleiten (welche je nach den angewandten Materialien sehr verschieden sein kann), hat man für dieselbe also, indem man die Brechungskraft des 1. Mediums (wenn Luft = 1), sonst = n setzt; die des 2. Mediums $= n_1$, also die obige Grösse $m = \frac{1}{n_1}$, wenn statt Luft ein anderes Medium, so wird $m = \frac{n}{n_1}$ und so weiter durch beliebig viele Flächen nach der Regel, dass in dem Bruch der Zähler den Index des vorhergehenden Mediums bildet und der Nenner aus dem Index des nachfolgenden Mediums besteht. Alle Indices auf Luft oder das Vacuum = 1 bezogen. Setzt man nun für ein Flächensystem, dessen Flächenscheitel die Entfernungen $q_1\ q_2\ q_3$ etc. haben mögen für parallel einfallendes Licht $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{r}_1\ (1 - m_1)$, und sucht hierzu für die 2. Fläche $\mathfrak{f}_2$, so erhält man dieselbe durch Substitution in die Gleichung $\mathfrak{f} = \mathfrak{r}\,(1 - m) - m\mathfrak{d}$, wo aber $\mathfrak{d}$ aus $\frac{1}{^1/\mathfrak{f}_1 - q_1}$ besteht und entwickelt, so erhält man

$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{r}_2 \ (1 - m_2) + m_2 \left(\frac{1}{{}^1/\mathfrak{f}_1 - q_1}\right)$, hieraus ergiebt sich $\mathfrak{f}_2 =$ $\mathfrak{r}_2 (1 - m_2) + \frac{m_2 \ \mathfrak{f}_1}{1 - \mathfrak{f}_1 \ q_1}$; setzt man nun die Flächenbrennweite $= \varphi$, so hat man folgende Formel für n Flächen und parallel einfallendes Licht: No. 5.

$$\mathfrak{f}_1 = \varphi_1$$
$$\mathfrak{f}_2 = \varphi_2 + \frac{m_2 \cdot \mathfrak{f}_1}{1 - \mathfrak{f}_1 \cdot q_1}$$
$$\mathfrak{f}_3 = \varphi_3 + \frac{m_3 \cdot \mathfrak{f}_2}{1 - \mathfrak{f}_2 \cdot q_2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\mathfrak{f}_n = \varphi_n + \frac{m_n \cdot \mathfrak{f}_{n-1}}{1 - \mathfrak{f}_{n-1} \cdot q_{n-1}}$$

$\mathfrak{f}_n$ bedeutet also hier die letzte Bildweite im letzten Medium (das keineswegs identisch mit dem 1. Medium zu sein braucht).

Es seien nun die Brechungsexponenten der aufeinander folgenden Medien $= n \ n_1 \ n_2 \ n_3 \ldots n_n$, so ist

$$\frac{n}{n_1} = m_1$$
$$\frac{n_1}{n_2} = m_2$$
$$\frac{n_2}{n_3} = m_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{n_{n-1}}{n_n} = m_n$$

Man hat ferner die Relation $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_n = 1$, wenn erstes und letztes Medium gleich sind; im andern Fall $= m_n$. Eine Relation, welche als Rechnencontrolle für diese Grössen benutzt werden kann.

Ferner seien die reciproken Radien $= \mathfrak{r}_1 \ \mathfrak{r}_2 \ \mathfrak{r}_3 \ldots \mathfrak{r}_n$ so sind

$$\varphi_1 = \mathfrak{r}_1 \ (1 - m_1)$$
$$\varphi_2 = \mathfrak{r}_2 \ (1 - m_2)$$
$$\varphi_3 = \mathfrak{r}_3 \ (1 - m_3)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\varphi_n = \mathfrak{r}_n \ (1 - m_n)$$

Liegt der Scheitel dieser Fläche gegen das einfallende Licht, so sind dieselben positiv, andernfalls negativ zu nehmen.

Die Vorzeichen der Bilder sind conform dem Vorzeichen der Radien, wenn dieselben auf der Seite der Krümmungscentren liegen.

Wollen wir nun die äquivalente Brennweite des ganzen Systems kennen lernen, so verfährt man analog mit dem ganzen System wie mit der ersten Fläche. Die äquivalente Brennweite, welche wir mit $E_* = {}^1/e_*$ bezeichnen, ist durch die Entfernung des letzten Bildes gemessen von dem Fusspunkt der Ordinate, welche vom Schnittpunkt des verlängerten parallel einfallenden Strahls mit dem letzten aus dem System austretenden Strahl auf die Axe gefällt wird, wo s die als verschwindend klein gedachte Einheit gesetzt ist und E_* daher das Aequivalent und $^1/\mathfrak{f}_n$ die letzte Scheitelbrennweite darstellt. Den Fusspunkt der Ordinate auf der Axe nennen wir $= \mathit{E}_*$. Durch Rechnung erhalten wir dies Aequivalent aus der Betrachtung der Proportionalität der verschwindend kleinen Dreiecke, welche die Einfallshöhe und Strahlenlänge nach der Brechung an jeder Fläche bilden und erhält hieraus die Formel:

$$E_* = \frac{1}{\mathfrak{f}_n \cdot \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 \cdots \mathfrak{z}_{n-1}} \qquad \text{No. 6}$$

$$\text{wo } \begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= 1 - \mathfrak{f}_1\, \mathfrak{q}_1 \\ \mathfrak{z}_2 &= 1 - \mathfrak{f}_2\, \mathfrak{q}_2 \\ \mathfrak{z}_3 &= 1 - \mathfrak{f}_3\, \mathfrak{q}_3 \\ &\vdots \\ \mathfrak{z}_{n-1} &= 1 - \mathfrak{f}_{n-1} \cdot \mathfrak{q}_{n-1} \end{aligned}$$

Also diejenigen Glieder dieser Gleichungen bedeuten, welche Functionen der Grössen $\mathfrak{q}_1\ \mathfrak{q}_2\ \mathfrak{q}_3 = \mathfrak{q}_{n-1}$ sind. Der Punkt E_* wird nun von dem letzten Scheitel aus gemessen, erhalten durch die Gleichung:

$$^1/\mathfrak{f}_n - E_* = \mathit{E}_* \qquad \text{No. 7.}$$

Um nun zu erfahren, wie sich ein solches System verhält, wenn man dasselbe umwendet, d. h. wenn man das Licht parallel von der Seite der letzten Scheitelbrennweite einfallen lässt, so erhält man unter Benutzung vorstehender Formeln, wenn man die Vorzeichen sämmtlicher $\mathfrak{r}$ umkehrt und die Grössen $\mathfrak{q}$, welche immer positiv sein müssen, ungeändert lässt (da keine Linse mit negativer Decke vorhanden sein kann) und die Grösse $m_1\ m_2\ m_3 \ldots m_n$ reciprok nimmt, so erhält man für $\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2\ \mathfrak{f}_3 \ldots \mathfrak{f}_n$ und für $\mathfrak{z}_1\ \mathfrak{z}_2\ \mathfrak{z}_3 \ldots \mathfrak{z}_{n-1}$ arithmetisch von den vorherigen verschiedene Werthe. Die Flächenbrennweiten $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \ldots \varphi_n$ werden in Folge der Aenderung der Grösse m_1 etc. gleichfalls von den vorigen verschiedene Werthe erhalten. Berechnet man nun hieraus nach den Formeln No. 6 und No. 7 den Werth von E und E, welches die entsprechenden Grössen von E_* und E_* sind und man findet dann, dass, wenn das erste und letzte Medium identisch sind, dass $E = E_*$ wird, d. h. dass beim Umwenden des Systems die optische Arbeit desselben ungeändert bleibt, also die Bildgrösse const., welche nichts weiter als ein Resultat der optischen Arbeit ist, indem die Bildgrösse der optischen Arbeit umgekehrt proportional ist. Z. B., es sei Object und Bild gleich gross, so ist die optische Arbeit $= 1$, ist das Bild M mal grösser wie das Object, so ist die optische Arbeit $= \frac{1}{M}$, ist das Bild M mal kleiner wie das Objekt, so ist die genannte optische Arbeit $= M$.

Wie man leicht sieht, ist das reciproke Aequivalent eines Systems das Maass seiner optischen Arbeit für parallel einfallendes Licht. Dies Maass ist also gegeben durch die Entfernung des Punktes E zum entsprechenden letzten Bilde und die E_* zu dem ihm zugehörigen Bilde.

Diese Punkte E und E_* sind nun identisch mit den Gaussschen Cardinalpunkten; im Fall das erste und letzte Mittel verschieden sind jedoch mit den Knotenpunkten des Prof. Listing. Wie Sachkenner sehen werden, ist dieses Resultat hier auf einem ganz andern Wege gefunden, wie Gauss es gefunden hat, und haben daher auch die Endformeln eine von den Gaussischen ganz verschiedene Form. Man wird im Laufe der Entwickelung nun sehen, warum diese Formen für den vorliegenden Zweck geeigneter sind wie die Gaussischen, wenn man nämlich die Beschränkung, welche bei Gauss und auch bis zu diesem Punkte hier stattfindet (dass man sich auf unendlich kleine Oeffnungen und unendlich wenig zur Axe geneigte Strahlenbündel beschränkt), aufhebt; so werden wir sehen, dass diese Form die einfachste Weiterentwickelung giebt. Wie man aus dem Vorhergehenden ersieht, sind diese Formeln, so lange man sich auf centrirte sphärische Flächen beschränkt, allgemeingültig und kann man alle Fälle, welche vorkommen können, durch entsprechende Substitution daraus ableiten; zumal da bei diesen Formeln, ausser obiger Beschränkung nichts als zu klein vernachlässigt ist! Wie man ferner sieht, erhält man durch die Grössen $1/\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{b}_1$ $1/\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{b}_2$ $1/\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{b}_3 \ldots$ und in der zweiten Lage des Systems $1/\mathfrak{f}^*_1 = \mathfrak{b}^*_1$ $1/\mathfrak{f}^*_2 = \mathfrak{b}^*_2$ $1/\mathfrak{f}^*_3 = \mathfrak{b}^*_3 \ldots$ ohne weitere Rechnung die Lage sämmtlicher Bilder des Linsensystems, ohne dass man nöthig hat, wie bei Gaussformeln mühsam von Linse zu Linse fortzuschreiten, um immer neue Systeme mit neuen Cardinalpunkten zu bilden, bis man endlich an die letzten Grössen angelangt ist! Selbst wenn man den Eulerschen Algorithmus bildet, ist die Rechnung noch sehr weitläufig (weil eben vielmehr berechnet wird wie nöthig ist). Ausserdem erhält man nicht direct die Lage der obigen Bilder, von welchen es kaum bekannt zu sein scheint, dass, wie wir später sehen werden, der ganze Aplanatismus der Linsensysteme in und ausser der Axe sowohl für die Strahlen im Hauptschnitt als auch für die windschiefen Strahlen in verhältnissmässig einfachen Zusammenhang steht. (Zumal wenn man den hier sonst nicht gebräuchlichen Begriff der optischen Arbeit in erweiterter Form zur Anwendung bringt).

Bevor wir jedoch dazu übergehen, wollen wir von den unendlich vielen Anwendungen, welche diese Formeln darbieten, eine Anzahl allgemein nützlicher herausgreifen und weiter ausführen. An diesen

Beispielen wird der geehrte Leser leicht ersehen, dass Jeder, der nur elementare Kenntnisse der Mathematik besitzt, sich leicht beliebige Fragen auf diesem Gebiet durch Substitution und Auflösung der Gleichungen beantworten kann. Führt man für die Brechungsindices $n\, n_1 \ldots n_n$ die Grösse -1 ein, so erhält man alle auf die katoptrischen Systeme bezüglichen Fälle beantwortet. Lässt man diese Werthe von $n\, n_1$ etc. und -1 entsprechend abwechseln, so erhält man die Fragen für katadioptrische Systeme beantwortet. Von diesen letzteren macht man z. B. auch Anwendung auf photographische Systeme, welche den Lichtfleck betreffen. Zu bemerken ist noch, dass man den ersten Strahl, welcher auf ein System fällt, auch nach obigen Formeln geneigt zur Axe, etwa aus einem Punkte in der Entfernung d_1 vom ersten Linsenscheitel auffallen lassen kann und hat dann für $\mathfrak{f}_1 = \varphi_1 \mp m_1\, \mathfrak{d}_1$ zu setzen. Wir werden später sehen, dass diese Modification der Formel die Brücke zu den geneigt zur Axe liegenden Strahlen bildet. Verlegt man diesen Punkt d_1 in den Punkt E eines Linsensystems, so divergirt der Strahl bei seinem Austritt aus dem System (parallel zu seiner ersten Richtung im System) aus dem Punkt E_*. Der Strahl hat also seine Richtung (in diesem Fall) nicht geändert, er ist nur parallel mit sich selbst (um den Betrag der Grösse $E_* - E$) auf der Axe des Systems verschoben worden. Natürlich nur unter obiger Voraussetzung unendlich kleiner Oeffnungen und kleiner Neigungswinkel zur optischen Axe. Setzt man in obiger Formel die Grössen $q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_{n-1} = 0$, so erhält man den Strahlengang in einem System aneinander liegender brechender Flächen; ein Fall, der in der Praxis nicht zu realisiren ist!

Für die Praxis haben indess die Fälle, wo zwei brechende Flächen eine Glaslinse bilden, ein hervorragendes Interesse. Setzen wir daher unter Benutzung der obigen Gleichungen:

$$\mathfrak{f}_1 = r_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{No. 8.}$$

$$\mathfrak{f}_2 = r_2\,(1 - n) + n \,.\, \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{z}_1}$$

wo $\mathfrak{z}_1 = 1 - \mathfrak{f}_1\, q_1$ ist, so wird das Aequivalent E, das wir in diesem Fall immer mit p_1 etc. bezeichnen wollen:

$$p_1 = \frac{1}{\mathfrak{f}_2 \,.\, \mathfrak{z}_1} \qquad E_* = \frac{1}{\mathfrak{f}_2} - p_1$$

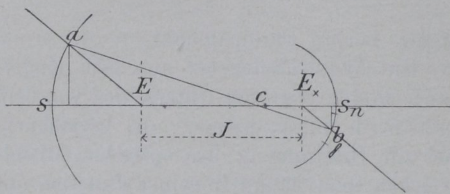
welches der 2. Cardinalpunkt dieser Linse ist. Nach den obigen Formeln müssten wir nun die Linse umkehren. Wir brauchen dies jedoch bei der einfachen Linse nicht, da die Lage der beiden Cardinalpunkte im Verhältniss der Flächenkräfte der Linse stehen muss, wenn der Cardinalstrahl durch jede Fläche gleich stark abgelenkt werden soll; wir haben daher für:

$$E = \frac{r_2}{r_1} E_* \qquad \text{No. 9.}$$

Nennt man die Entfernung beider Cardinalpunkte $= i$, so ist $i = q + E_* - E$. No. 10. Die Aequivalente der aus zwei Kugelsegmenten bestehenden Linsen wollen wir zum Unterschied von dem Aequivalent von Linsensystemen mit $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ bezeichnen. Es mag noch hier die Formel zur Bestimmung des optischen Mittelpunkts einer Linse stehen, welchen man häufig in seiner Function mit der Function der Cardinalpunkte verwechselt hat; indem man verkehrter Weise die Brennweite p_1 darnach bestimmt hat. Dieser optische Mittelpunkt einer Linse ist das Aehnlichkeits-Centrum der beiden die Linse bildenden Kreissegmente, daher er gebildet wird durch den Durchschnitt der Verbindungslinie zweier paralleler Radien der Linsenflächen, mit der Axe. Aus dem Vorstehendem folgt, dass dieser optische Mittelpunkt keinerlei Aberration unterworfen ist, während seine beiden Bilder, die Cardinalpunkte, sowohl der sphärischen als auch der chromatischen Aberration unterliegen. Es sei die Distance des optischen Centrums vom Scheitel der ersten Fläche gemessen $= t$, so ist $t = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \cdot q_1$ No. 11. Der optische Mittelpunkt hat in einer Linse oder Linsensystem in Bezug auf den genannten Strahlengang dieselbe Function wie das Loch in der Lochcamera. Ohne diese Eigenschaft wäre es unmöglich, optische Linsen zu Messinstrumenten zu verwenden. Der alte Astronom Hevel, dem dies entgangen war, hatte deswegen kein Vertrauen zu Messungen mit dem Fernrohr und zog seine Betrachtungen, am Diopter mit blossem Auge gemacht, deswegen vor.

Auch Linsensysteme besitzen ein solches optisches Centrum, von welchem die beiden Cardinalpunkte die Bilder sind. Dieser Punkt ist für den Aplanatismus der Axen der schiefen Kegel sehr wichtig. Sollen diese Nebenaxen frei von Aberration sein, so müssen dieselben sich alle in diesem Punkt schneiden, andernfalls entsteht ein Abweichungskörper an dieser Stelle und das ausgedehnte Bild eines Gegenstandes ist proportional, den Dimensionen dieses Abweichungskörpers, fehlerhaft. Gauss leugnet die Existenz dieses Punktes auf pag. 19 und 20 seiner dioptrischen Untersuchungen. Man findet die Lage dieses dioptrischen Centrums in einem beliebigen Linsensystem durch folgende Construction: Fig. 4 sind die nach obigen Formeln gefundenen Cardinalpunkte E und E_*. Nimmt man nun einen beliebigen Cardinalstrahl und verbindet dessen Schnittpunkte mit der ersten und letzten Fläche des Systems durch eine gerade Linse a b, so ist der Punkt c, wo diese Linie die Axe schneidet, das gesuchte **optische Centrum**. Man hat daher zur Berechnung desselben bei unendlich kleiner Neigung des Cardinalstrahls, wenn die Linie sc die Entfernung des optischen Centrums vom 1. Flächenscheitel s bedeutet und J die Entfernung beider Cardinalpunkte, so ist

Fig. 4.



$$\mathrm{sc} = E\left(1 + \frac{J}{E - E_*}\right) \qquad \text{No. 12.}$$

wo das Vorzeichen von E_* aus der Formel No. 7 zu beachten ist.

Wegen der Wichtigkeit, welche der Fall der Combination zweier Flächen zu einer Linse und nachher die Combination von Linsen zu Systemen verdienen, wollen wir jetzt einige der wichtigsten Anwendungen der vorhergehenden Formeln auf diese Fälle machen.

Fig. 5.

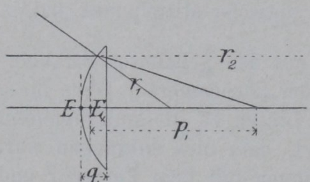
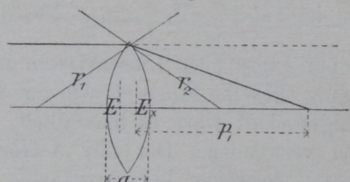


Fig 6.



1. Beispiel, Fig. 5. Es habe eine convexplane Linse die Radien

$r_1 = 5$ $\qquad \mathfrak{r}_1 = 0{,}2 \qquad q_1 = 0{,}5$

$r_2 = \infty \qquad \mathfrak{r}_2 = 0 \qquad$ Index $n = 1{,}5$ alsdann wird

$\mathfrak{f}_1 = 0{,}2\ (1 - {}^2/_3) = 0{,}06667$

$$\mathfrak{f}_2 = 0 + \frac{0{,}1000}{1 - 0{,}06667\ .\ 0{,}5} = 0{,}10344, \text{ sonach } {}^1/\mathfrak{f}_2 = 9{,}667$$

$\mathfrak{z}_1 = 0{,}96667 \qquad p_1 = 10{,}000 \qquad E_* = -\ 0{,}333$

$E = 0$

Wie man sieht, wird p_1 bei planconvex Linsen n i c h t durch die Glasdicke geändert.

2. Für eine gleichschenklig biconvexe Linse, Fig. 6, sei

$r_1 = -\ r_2 = 5$ und $-\ 5 \qquad q = 0{,}5$

$\mathfrak{r}_1 = 0{,}2 \qquad \mathfrak{r}_2 = -\ 0{,}2 \qquad$ Index $n = 1{,}5$ dann ist

$\mathfrak{f}_1 = 0{,}2\ (1 - {}^2/_3) = 0{,}06667$

$$\mathfrak{f}_2 = -0{,}2\,(1 - 1{,}5) + \frac{0{,}10000}{0{,}96667} = 0{,}20344, \text{ sonach } {}^1/\mathfrak{f}_2 = 4{,}9154$$

$\mathfrak{z}_1 = 0{,}96667$ $\quad$ $\mathfrak{p}_1 = 5{,}0849$ $\quad$ $E_* = -0{,}1695$

$E = 0{,}1695$

Die Einführung der Glasdicke verlängert hier die Brennweite, welche für $\mathfrak{q}_1 = 0$ $\mathfrak{p}_1 = 5.000$ wäre. Nehmen wir bei der biconvex gleichschenkligen Linse die Glasdicke $\mathfrak{q}_1$ so gross wie die Summe beider Radien, so erhalten wir die Brechung in einer Vollkugel.

3. Beispiel, Fig. 7. Wir haben alsdann:

$r_1 = -r_2 = 5$ und -5 $\quad$ $q_1 = 10$ $\quad$ Index $= 1{,}5$

$\mathfrak{r}_1 = 0{,}2$ $\quad$ $\mathfrak{r}_2 = -0{,}2$

$\mathfrak{f}_1 = 0{,}2\,(1 - {}^2/_3) = 0{,}06667$

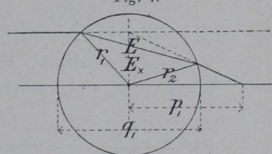
$$\mathfrak{f}_2 = -0{,}2\,(1 - 1{,}5) + \frac{0{,}10000}{0{,}3333} = 0{,}4000 \qquad {}^1/\mathfrak{f}_2 = 2{,}5$$

$\mathfrak{z}_1 = 0{,}3333$ $\quad$ $\mathfrak{p}_1 = 7{,}5$ $\quad$ $E_* = -5$

$E = 5$

Hieraus ersieht man, dass beide Cardinalpunkte mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfallen, und zeigt dies Beispiel recht auffällig, welch beträchtlichen Fehler man begeht, wenn man (wie es zuweilen vorkommt) die letzte Scheitelbrennweite (also hier 2,5) statt der Aequivalentenbrennweite (hier = 7,5) setzt. Würde man die Dicke $\mathfrak{q}_1$ noch so weit steigern, dass $\mathfrak{q}_1 = \frac{2}{\mathfrak{f}_1}$ beträgt, so würde eine solche Linse ein sogenanntes teleskopisches System darstellen, welches eine Vergrösserung = 1 hat und welches beim Durchsehen ein umgekehrtes Bild entfernter Gegenstände wie ein astronomisches Teleskop liefert. — Man kann diese Beispiele, wie man leicht sieht, noch sehr vermehren. Ich will den geehrten Leser aber nicht damit ermüden und nur noch als besonders wichtig für die Photographie die Menisceu mit positiver und negativer Brennweite behandeln. Die Erstern geben von einem entfernten Gegenstande ein umgekehrtes reelles Bild (ein solches, das man auf einen Schirm auffangen kann) und die Letzteren ein aufrechtes virtuelles Bild (dieses lässt sich nicht auf einen Schirm auffangen, es kann nur mit dem Auge betrachtet werden).

Fig. 7.



4. Beispiel. Positiver Meniscus, Fig. 8.

$r_1 = 5$ $\quad$ $\mathfrak{r}_1 = 0{,}2$ $\quad$ $\mathfrak{q}_1 = 0{,}5$

$r_2 = 8$ $\quad$ $\mathfrak{r}_2 = 0{,}125$ $\quad$ $n = 1{,}5$ $\quad$ ${}^1/\mathfrak{f}_2 = 24{,}426$

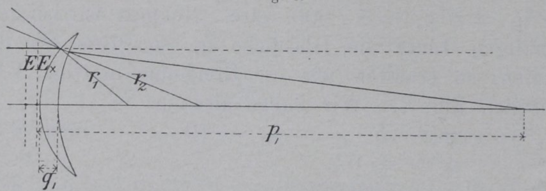
$\mathfrak{f}_1 = 0{,}2\,(1 - {}^2/_3) = 0{,}06667$

$$\mathfrak{f}_2 = 0{,}125\ (1 - 1{,}5) + 1{,}5\ .\ \frac{0{,}06667}{0{,}96667} = 0{,}04094$$

$$\mathfrak{z}_1 = 1 - 0{,}06667\ .\ 0{,}5 = 0{,}96667 \qquad \mathfrak{p}_1 = 25{,}268$$

$$E_* = -\ 0{,}842 \qquad E = -\ 0{,}526$$

Fig. 8.



Die Brennweite für $\mathfrak{q}_1 = 0$ ist $\mathfrak{p}_1 = 26{,}667$, daher hier verkürzt.

5. Beispiel. Negativer Meniscus, Fig. 9.

$$\mathfrak{r}_1 = 8 \qquad \mathfrak{r}_1 = 0{,}125 \qquad \mathfrak{q}_1 = 0{,}5$$

$$\mathfrak{r}_2 = 5 \qquad \mathfrak{r}_2 = 0{,}200 \qquad \mathfrak{n} = 1{,}5 \qquad {}^1/\mathfrak{f}_2 = -\ 27{,}650$$

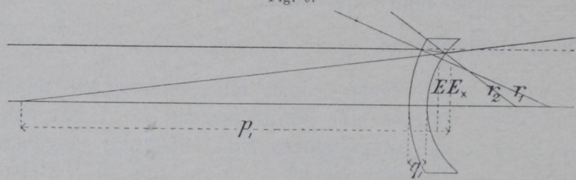
$$\mathfrak{f}_1 = 0{,}125\ (1 - {}^2/_3) = 0{,}04167$$

$$\mathfrak{f}_2 = 0{,}2\ (1 - 1{,}5) + 1{,}5\ .\ \frac{0{,}04167}{0{,}97916} = -\ 0{,}036165$$

$$\mathfrak{z}_1 = 1 - 0{,}04167\ .\ 0{,}5 = 0{,}97916 \qquad \mathfrak{p}_1 = -\ 28{,}240$$

$$E_* = 0{,}590 \qquad E = 0{,}944$$

Fig. 9.

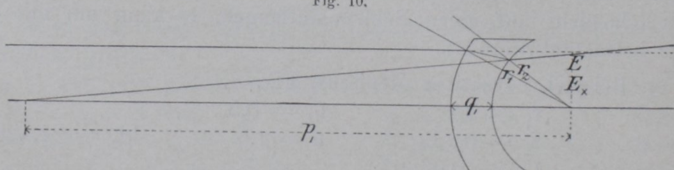


Die Brennweite für $\mathfrak{q}_1 = 0$ ist hier $= -\ 26{,}667$, daher hier durch den Einfluss der Glasdicke verlängert.

6. Beispiel. Negativer Meniscus, Fig. 10.

Lässt man $\mathfrak{q}_1$ im vorigen Beispiel auf die Grösse von $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 = 3$ wachsen, so erhält man eine aus zwei concentrischen Kugelschalen

Fig. 10.



bestehende Linse. Es herrscht noch theilweise die irrige Meinung, dass solche Linse analog einer Planparallelplatte wirkt. Wie wir sehen werden, ist dies **nicht** der Fall. Diese Linse hat eine negative Brennweite und fallen ihre beiden Cardinalpunkte mit ihrem optischen Centrum in dem Krümmungscentrum der beiden Kugelschalen zusammen.

$r_1 = 8$ $\quad \mathfrak{r}_1 = 0{,}125$ $\quad q_1 = 3$

$r_2 = 5$ $\quad \mathfrak{r}_2 = 0{,}200$ $\quad n = 1{,}5$ $\quad {}^1/\mathfrak{f}_2 = -35{,}014$

$\mathfrak{f}_1 = 0{,}125\,(1 - {}^2/_3) = 0{,}04167$

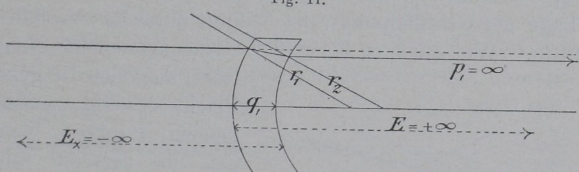
$$\mathfrak{f}_2 = 0{,}2\,(1 - 1{,}5) + 1{,}5 \cdot \frac{0{,}04167}{0{,}8750} = -0{,}02856$$

$\mathfrak{z}_1 = 1 - 0{,}04167 \cdot 3 = 0{,}8750$ $\quad p_1 = -40{,}016$

$E_* = -5{,}002$ $\quad E = -8{,}003$

Will man dagegen eine solche Linse erzeugen, welche ähnlich einem Planglas eine **unendliche** Brennweite hat, so hat man 7. Beispiel, Fig. 11.

Fig. 11.



$$\mathfrak{f}_2 = 0 \text{ alsdann wird } \frac{1}{\mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{z}_1} = p_1 = \infty$$

$$\text{setzt man } \mathfrak{r}_2 = x, \text{ so ist } x = -\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{z}_1}\left(\frac{n}{1-n}\right) \qquad \text{No. 13.}$$

Es sei nun:

$r_1 = 8$ $\quad \mathfrak{r}_1 = 0{,}125$ $\quad q_1 = 3$ $\quad p_1 = \infty$

$r_2 = {}^1/x$ $\quad n = 1{,}5$

$\mathfrak{f}_1 = 0{,}125\,(1 - {}^2/_3) = 0{,}04167$ $\quad x = 0{,}14287 = \mathfrak{r}_2$

$\mathfrak{z}_1 = 1 - 0{,}04167 \cdot 3 = 0{,}8750$ $\quad {}^1/x = r_2 = 6{,}999$

$\mathfrak{f}_2 = 0{,}000$ $\quad E = +\infty$ $\quad E_* = -\infty$

Nimmt im Beispiel No. 7 die Grösse q_1 ab und folgt der Radius r_2 der Bedingung, dass p_1 immer $= \infty$ sein soll, so wird $r_1 = r_2$, wenn $q_1 = 0$ wird. Für eine Linse **ohne** Dicke war also die sonst fehlerhafte obige Voraussetzung richtig. Man erkennt ferner leicht aus dem Vorhergehenden, dass durch Einführung der Glasdicken (durch welche das Glied $\mathfrak{z}_1$ von 1 verschieden wird), convexplane, concavplane Linsen in ihrer Brennweite ungeändert bleiben. Ein Fall, der recht ersichtlich ist, wenn man die Planfläche gegen das einfallende Licht kehrt, wodurch $\mathfrak{f}_1 = 0$ wird. Man kann hieraus die Regel ableiten, dass, je länger der 1. dem parallel einfallenden Licht zugekehrte Radius ist, je kleiner der Einfluss der Glassdicken wird. Wir sahen, dass bei Biconvexlinsen die Glasdicken die Brennweite verlängern, und zwar bei beträchtlichen Glasdicken so bedeutend, dass die Brennweite unendlich werden kann (also ähnlich einer Planplatte wirkt). Bei Biconcavlinsen wird jedoch die Brennweite, wie wir im 8. Beispiel sehen werden, verkürzt. Fig. 12.

$r_1 = -5 \qquad \mathfrak{r}_1 = -0{,}2 \qquad q_1 = 0{,}5$

$r_2 = 5 \qquad \mathfrak{r}_2 = 0{,}2 \qquad n = 1{,}5 \qquad {}^1/\mathfrak{f}_2 = -5{,}0813$

$\mathfrak{f}_1 = -0{,}2\,(1 - {}^2/_3) = -0{,}06667$

$$\mathfrak{f}_2 = 0{,}2\,(1 - 1{,}5) + 1{,}5 \,.\, \frac{-0{,}06667}{1{,}03333} = -0{,}1968$$

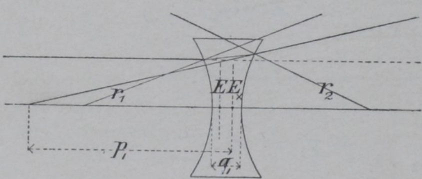
$\mathfrak{z}_1 = 1 + 0{,}06667 \,.\, 0{,}5 \qquad p_1 = -4{,}9175$

$E = 0{,}164 \qquad E_* = -0{,}164$

Für $q_1 = 0$ wäre $p_1 = -5{,}000$ gewesen.

Die Lage der Cardinalpunkte ist bedingt durch das Verhältniss der Flächenkräfte. Wir sehen z. B. in der Planconvex- oder Planconcavlinse, dass sich die gekrümmte Fläche des ihr zunächst liegenden Punktes bemächtigt hat, da derselbe mit dem Scheitel dieser Fläche zusammenfällt. Bei den Meniscen sind die Punkte meist so stark nach der Richtung der kraftvollsten Fläche gezogen, dass sie wenigstens zum Theil ausserhalb (nach der Richtung dieser Fläche) der Linse liegen. Zuweilen genügt es für den Vorgang der Brechung, in Linsen und Linsensystemen die Glasdicken zu vernachlässigen, also $q_1\ q_2 \ldots = 0$ zu setzen. Dagegen die gegenseitigen Entfernungen zu berücksichtigen. Zweck dieses Verfahrens ist natürlich die Vereinfachung der Formeln und der Betrachtungen. Dass derartige Linsen natürlich nur Gedankendinge sind und sich niemals mit der Wirklichkeit decken, ist wohl ausser Frage. Man kann aber mit Vortheil bei den so erhaltenen Formeln die Linsen mit Glasdicken nachträglich wieder einführen, indem man die Radien der Linsen so berechnet, dass die dickenlose und die dicke Linse gleiche Brennweite haben. Wenn man dann deren gegenseitige Entfernungen wieder auf die Punkte E und E_* bezieht, statt auf die Linsenscheitel und die

Fig. 12



Grössen i_1 i_2 ... als Nichts rechnet, so bleibt der Strahlengang in beiden Fällen ungeändert. Wir erhalten nun aus der Gleichung No. 8 durch Setzen der Grösse $q_1 = 0$ und nach einigen Umformungen $f_2 = (n - 1)(r_1 - r_2)$. Es war aber $n - 1 = a =$ der optischen Arbeit und nennen wir die Brennweite einer unendlich dünnen Linse $= {}^1/p_1$, so ist $p_1 = a\,(r_1 - r_2)$ No. 14, wo $r_1 - r_2$ die Differenz der Flächenkräfte darstellt, wenn die Kugelsegmente gleich gerichtet sind, und die Summe, wenn sie ungleich gerichtet sind. Die Grösse p_1 stellt jetzt die optische Kraft der Linse dar. Verbindet man zwei oder mehrere Linsen mit einander (in Berührung), so ist die Summe aller Linsenkräfte gleich der reciproken äquivalenten Brennweite eines solchen Systems. Sonach $e_* = p_1 + p_2 + p_3 \ldots p_n$ No. 15, wo natürlich bei etwa vorkommenden Zerstreuungs- (negativ) Linsen das Vorzeichen zu berücksichtigen ist. Sind diese Linsen jedoch durch Zwischenräume getrennt, so verhalten sich die Linsenkräfte ganz analog den vorher behandelten Flächen-Brennweiten. Setzen wir daher die Linsen-Brennweiten wie vorher $= p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$, deren Distancen $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n$ und die jedesmalige Scheitelbildweite, so bald eine neue Linse zur ersten, ersten und zweiten etc. hinzutritt $= s_1\ s_2\ s_3 \ldots s_n$ und die Distancen der vorhergehenden Scheitelbildweite s_{n-1} zur neu hinzutretenden Linse in der Distance t_n von der nächst vorhergehenden Linse $= \delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \ldots \delta_n$ so erhalten wir das Aequivalent des ganzen Systems $E_* = p_1 \left\{\frac{s_1 . s_2 . s_3 . \ldots s_n}{\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 . \ldots \delta_n}\right\}$ No. 16 und die Lage des letzten, 2ten Cardinalpunktes von dem letzten Linsenscheitel $= E_* = s_n - E_*$ No. 17. Zur Auffindung des 1ten Cardinalpunktes kehrt man das System wieder um wie vorher.

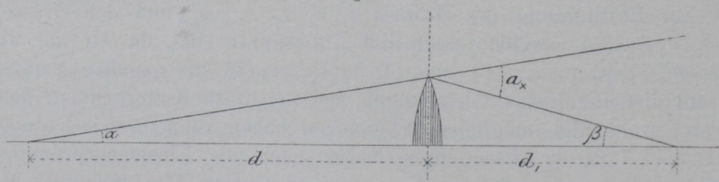
Zur Bestimmung der Grössen $s_1\ s_2\ s_3 \ldots s_n$ und den Grössen $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \ldots \delta_n$, welche sämmtlich Unbekannte sind, da wir nur die Grössen $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ und $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n$ als gegeben voraussetzen, dienen folgende Gleichungen, bei denen zu bemerken ist, dass p_1 etc. wohl alle möglichen Vorzeichen haben können, nicht aber $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n$ da diese ihrer Natur nach als Linsenentfernungen immer positiv sein müssen. Eine, wie es scheint, fast gar nicht bekannte Ausnahme, durch welche diese Grössen t_1 etc. zuweilen sogar negativ werden können, kommt dann vor, wenn man, wie eben bemerkt, nachträglich dicke Linsen einführt, deren Cardinalpunkte so weit ausserhalb der Linsen liegen, dass bei physischer Berührung der Linsenscheitel die Grössen t_1 etc. negativ werden können. Da dieser Fall bei photographischen Linsen häufiger vorkommt, so verdient er besondere Beachtung. Die Gleichungen zur Auffindung der Unbekannten sind nun:

No. 18.

$$\begin{aligned} p_1 - t_1 &= \delta_1 \\ s_1 - t_2 &= \delta_2 \\ s_2 - t_3 &= \delta_3 \\ s_3 - t_4 &= \delta_4 \\ &\vdots \\ s_{n-1} - t_n &= \delta_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_1 &= \frac{\delta_1 \cdot p_2}{\delta_1 + p_2} \\ s_2 &= \frac{\delta_2 \cdot p_3}{\delta_2 + p_3} \\ s_3 &= \frac{\delta_3 \cdot p_4}{\delta_3 + p_4} \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= \frac{\delta_{n-1} \cdot p_n}{\delta_{n-1} + p_n} \end{aligned}$$

Die Herleitung der Formeln für die Grösse $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \ldots\ \delta_n$ ist leicht ersichtlich und die obige Gleichung für E_* und E und E_* ganz den bisherigen analog. Es erübrigt nur noch, den Nachweis der in der Optik sehr wichtigen Grundformel $s_1 = \frac{\delta_1 \cdot p_2}{\delta_1 + p_2}$ zu führen. Es wird diese Formel die Formel der conjugirten Vereinigungsweiten genannt. Wir haben vorher gesehen, dass die Kraft einer einfachen Linse $\mathfrak{p}_1 = a\,(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)$ nur von Kräften der Brechungskraft und der Summe der Flächenkräfte der Kugelabschnitte abhängt, welche die Linse bilden, also was auch immer die Distance des Objectes sein mag, von welchem die Linse mit Hülfe ihrer Kraft ein Bild formirt, die Kraft der Linse wird immer constant bleiben. Betrachtet man Fig. 13, so stellt der Winkel a_* die von der Linse geleistete constante optische Arbeit dar, welche an dem einfallenden Strahl d

Fig. 13.



geübt wird, welcher dadurch nach der Brechung in die Lage von d_1 gebracht wird. Man sieht leicht, dass die Winkel $\alpha + \beta = a_*$ sind und setzen wir wieder die Einfallshöhe gleich der Einheit, so ist $\sin \alpha = \frac{1}{d} = \mathfrak{d}$ und $\sin \beta = \frac{1}{d_1} = \mathfrak{d}_1$. Da nun bei so kleinem Winkel die Winkel und Sinus nicht mehr differiren, so kann man setzen: $\alpha + \beta = \mathfrak{p}_1 = a_*$, da $\mathfrak{p}_1$ die einer Linse innewohnende Arbeits- (Ablenkungskraft) ist, und hat man dann $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{d} + \mathfrak{d}_1$ oder $\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1$.

No. 19. Formt man diese Gleichung durch Fortschaffen der reciproken Grössen um, so erhält man obige Gleichung $d_1 = \frac{d \,.\, p_1}{d - p_1}$, welche durch Substitution in die vorher benutzte Gleichung in $s_1 = \frac{\delta_1 \,.\, p_2}{\delta_1 + p_2}$ übergeht, da δ_1 hier als negativ bei der Entwickelung der anderen Gleichung auftritt. Setzt man $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1$, so ist $\mathfrak{p}_1 = 2\,\mathfrak{d}$, also $\frac{\mathfrak{p}_1}{2} = \mathfrak{d}$, so zeigt dieses an, dass die Distance $^1/\mathfrak{d} = d$, wenn dieselbe $2\,p_1$ beträgt, eine Strahlenvereinigung in derselben Entfernung auf der anderen Seite der Linse bewirkt. Es stehen alsdann Object und Bild um die 4 fache Brennweite der Linse von einander ab.

Setzt man $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1$, so wird $\mathfrak{d}_2 = 0$, also $d = \infty$, d. h. die Strahlen, welche der leuchtende Punkt aussendet, werden dann parallel gemacht. Setzt man dagegen $-\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1$, so wird $\mathfrak{d}_1 = 2\,\mathfrak{p}$, es wird dann $d_1 = \frac{p_1}{2}$ d. h. Strahlen, die auf eine positive Linse fallen und nach deren Brennpunkt derselben zielen, convergiren nach der Brechung nach der halben Brennweite. Setzt man wieder $-2\mathfrak{d} = \mathfrak{p}$, so wird $\mathfrak{d}_1 = 3\,\mathfrak{p}_1$, also $d_1 = \frac{p_1}{3}$ d. h. Strahlen, die convergent auf eine positive Linse fallen und nach der halben Brennweite convergiren, werden nach der Brechung nach dem 3. Theil der Brennweite convergiren. Diese Vorgänge kann nun Jeder leicht selbst weiter führen, da die Sache ja ausserordentlich einfach liegt und hat man für negative Linsen nur das Vorzeichen zu beachten, um auch diese Verhältnisse analog dem Obigen zu entwickeln. Hat man demnach mit den dickenlosen Linsen ein beliebiges Linsensystem berechnet, welches irgend welche der später zu behandelnden Aberrationen in 1 ter Approximation corrigirt, und zugleich eine damit verbundene bestimmte Lage der Cardinalpunkte des ganzen Systems besitzt und man wünscht, zum Zweck einer weiteren Näherung, ausser den bisher in Betracht gezogenen Linsen**distancen** auch die Linsen**dicken** einzuführen, so kann man wie folgt rechnen: es sei $\frac{1}{\mathfrak{p}_1 - \frac{a^2}{n}(q_1\, r_1\, r_2)} = \pi$

und $N_1 + q_1 = N_2$

$$E_1 = N_1 + r_2 \left(\frac{a}{n}\, q_1\, \pi\right)$$
$$E_2 = N_2 - r_1 \left(\frac{a}{n}\, q_1\, \pi\right) \qquad \text{No. 20.}$$

Es bedeutet hier $\mathfrak{p}_1$ die reciproke Brennweite der dickenlosen Linse, $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ die reciproken Radien derselben, n den Brechungsindex, $n - 1 = a$ und q_1 die einzuführende Linsendicke auf der Axe gemessen, N_1 und N_2 die Abscissen der Linsenscheitel, d. h. die Schnittpunkte der Linsenflächen mit der Axe. π die durch die Dicke veränderte Brennweite von $^1/\mathfrak{p}_1 = p_1$; E_1 und E_2 die Cardinalpunkte der Linse von ihren resp. Scheiteln N_1 und N_2 gemessen. Hat man auf diese Weise π erhalten und will wieder auf p_1 reduciren, so kann man dies (unter der Voraussetzung), dass π nicht viel von p_1 verschieden ist, hinreichend genau, indem man den Maassstab entsprechend ändert. Folgendes Beispiel mag zur Erläuterung dienen: $n = 1{,}5$ $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = 0{,}1$ $\mathfrak{p}_1 = 0{,}1$ $q_1 = 0{,}2$ cm, alsdann wird $\pi = 10{,}033$ cm da $^1/\mathfrak{p}_1 = 10{,}00$ cm war, so ist die Brennweite durch Einführung der Dicke nur um $0{,}033$ cm gewachsen. Es sei $N_1 = 0$, so ist $N_2 = 0{,}2$; $E_1 = 0{,}0669$ und $E_2 = -0{,}1331$. Multiplicirt man jetzt alle Dimensionen mit $\frac{p_1}{\pi}$, so erhält man hinreichend nahe alle Elemente für die ursprüngliche Brennweite der dickenlosen Linse. Es sind demnach $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = 0{,}10033$ also $^1/\mathfrak{r}_1 = 9{,}967$ statt vorher $= 10$; $q_1 = 0{,}1993$; $E_1 = 0{,}0667$; $E_2 = -0{,}1326$; $N_2 = 0{,}1993$.

In ähnlicher Weise kann also jedes noch so complicirte Linsensystem nachträglich durch Einführung der Linsendicken behandelt werden. Sind die Linsendicken sehr klein, so geben diese Formeln, die nur mit der Differenz zu rechnen gestatten, genauere Resultate, wie die directen Formeln. Vorstehende Elemente werden jedenfalls genügen, selbst einen ganz uneingeweihten Leser (wenn er nur Gleichungen 1. Grades behandeln kann) zu befähigen, das Vorhergehende zu verstehen und durch Anwendung desselben mir weiter zu folgen. Das Nächste, was jetzt folgen würde, wären die Aberrationen, d. h. eigentlich die Abweichungen von dem vorher Vorgetragenen, die man in die chromatische und sphärische in der Regel einzutheilen pflegt. Diese sind jedoch, wenn man sich nicht auf einen leuchtenden Punkt in der Axe beschränken will, gänzlich unzureichend. Wir haben ausser obigen Aberrationen noch die Anomalien der geneigt zur Axe liegenden Strahlenbündel in einem System zu betrachten und die Verzerrungen, welche ein optisches Bild durch fehlerhaftes Arrangement der Aufstellung der Objecte ausgesetzt ist. Indess ehe ich dazu übergehe, habe ich zum bessern Verständniss des Folgenden einen ebenso unscheinbaren als wichtigen Gegenstand näher zu betrachten, der meist sehr stiefmütterlich behandelt worden ist. Ja den die Bücher über Physik im Allgemeinen ignoriren. Erst in neuester Zeit hat derselbe durch die Arbeiten des Professor Abbe auf diesem Gebiete mehr Aufmerksamkeit auf sich gezogen! Ich meine das Diaphragma in seiner Bedeutung als Ein- und Austrittspupille. Jeder praktische Photograph weiss, wie sehr ein mangelhaftes optisches Bild durch richtiges Diaphragmiren verbessert werden kann! Aber ebenso kann man das Bild eines ganz vortrefflichen Apparates durch verkehrtes Diaphragmiren sehr verschlechtern! Beim Diaphragma, das bekanntlich nur einen Schirm mit einer, meist kreisförmigen Oeffnung darstellt, ist natürlich von einer optischen Kraft desselben gar keine Rede. Es lenkt natürlich keine Lichtstrahlen von ihrem Wege ab, man kann ihm also in dieser Hinsicht keine corrigirende Kraft beilegen; dieist = 0. Es kommt nun auf zweierlei beim Diaphragma an. Erstens auf seine Oeffnung im Verhältniss zur Aequivalentbrennweite des Apparats und zweitens auf seine Stellung zum Linsensystem. Der Einfluss seiner Stellung zum Linsensystem zerfällt wieder in zwei Theile: erstens in Bezug auf die verschiedene Helligkeit, welche für gerade und schiefe Lichtkegel eintritt und zweitens seine Wirkung in Bezug auf die Qualitätsänderungen, welche dasselbe im Bilde hervorbringt. Das Diaphragma soll gleichsam wie ein Sieb auf die Strahlenkegel einwirken, d. h. es soll die mangelhaften Strahlenkegel von den guten gleichsam absieben oder trennen, aber ohne von den guten Strahlen mit fort zu nehmen. Ausserdem soll es dieses mit einem Maximum seiner Oeffnung leisten, damit das Bild so lichtstark wie möglich bleibt!

Prof. Abbe hat sehr passend das Diaphragma eines optischen Apparates mit der Pupille des menschlichen Auges verglichen, welche ja auch dieselbe Function im Auge hat wie das Diaphragma im optischen Apparat! Man kann auch das Diaphragma betrachten als das sehr erweiterte Loch einer Lochcamera, dessen Erweiterung nur durch Hinzufügung von Glaslinsen ermöglicht ist. Wir wollen nun den Radius des im Allgemeinen kreisförmig ausgedrehten Diaphragmas mit ε bezeichnen und stellt demnach $\frac{2\,\varepsilon}{E}$ den gebräuchlichen Bruch z. B. $\mathfrak{F}/8$ oder irgend eine andere entsprechende Ziffer dar. Wir werden indess bald sehen, dass dies Verhältniss in der Regel nur für einen Strahlencylinder gilt, dessen Axe mit der optischen Axe des ganzen Apparates zusammenfällt und ist die Visirscheibe alsdann für ein Object in unendlicher Ferne eingestellt. Es ergiebt sich von selbst, dass die Lichtintensität ι des ganzen Apparates mit dem Quadrat von $2\,\varepsilon$ steigt, da in diesem Verhältniss das Quantum der Lichtstrahlen, welche zur Visirscheibe gelangen, wächst, wenn man von den Verlusten durch Absorption und Reflexion an den Linsen absieht. Der wichtigste Punkt für die Bildqualität ist jedoch die Lage des Diaphragmas im Linsensystem. Das Diaphragma kann nun zwischen dem Object und dem Linsensystem stehen (wie z. B. in der Landschaftslinse), oder es kann im Linsensystem selbst stehen oder zwischen dem Linsensystem und der Visirscheibe. Letzteres wohl ein seltener Fall. Wo das Diaphragma aber auch stehen mag, immer entwirft das Linsensystem von dem Diaphragma ein Bild desselben und kein Lichtstrahl kann vom Object zur Visirscheibe gelangen, der ausserhalb dieses optischen Bildes der Pupille des Systems, wie wir von jetzt an das Diaphragma (nach Prof. Abbe) nennen werden, fällt!

Man könnte nun wohl einwenden, wie ist es aber, wenn man gar kein Diaphragma im Apparat hat? Dann muss man untersuchen, welche Linsenfassung (wenn sonst kein Hinderniss vorhanden ist) die sogenannte stellvertretende Pupille bildet. Prof. Abbe unterscheidet die Ein- und Austrittspupille eines Apparates. Die Eintrittspupille ist diejenige, welche auf das Object Bezug hat und die Austrittspupille ist diejenige, welche Bezug auf das Bild hat. Man könnte nun wohl fragen, wo kommen die zwei Pupillen her, wenn nur ein Diaphragma vorhanden ist? Liegt das Diaphragma ausserhalb des Linsensystems und zwar zwischen Object und Linsensystem, so bildet das Diaphragma selbst die Eintrittspupille; die Austrittspupille wird dann durch das vom gesammten Linsensystem erzeugte Bild des Diaphragmas dargestellt und man hat alsdann die Entfernung dieses Pupillenbildes und seine Grösse bei Beurtheilung der Wirkung des vom Object entworfenen Bildes in Betracht zu ziehen. Die vorhergehenden Formeln ermöglichen es immer mit Leichtigkeit, dies bestimmen zu können. Liegt dagegen das Diaphragma zwischen den Linsen des Systems, so entwirft der Theil des Systems, welcher zwischen dem Object und dem Diaphragma liegt, ein Bild des Diaphragmas, welches alsdann die Eintrittspupille bildet, während der zwischen dem Diaphragma und der Visirscheibe befindliche Theil des Systems ein Bild des Diaphragmas entwirft, welches dann die Austrittspupille darstellt. Liegt das Diaphragma aber zwischen dem Linsensystem und der Visirscheibe, so bildet das Diaphragma selbst die Austrittspupille und das Bild des Diaphragmas erzeugt durch das ganze Linsensystem, bildet die Eintrittspupille. Die natürlichste Stelle des Diaphragmas (wo es seiner ursprünglichen Bestimmung gemäss als Substitut der Lochcamera hingehörte) ist im optischen Centrum des ganzen Linsensystems (siehe Formel No. 12). In diesem Fall fallen die Bilder desselben, welche die Ein- und Austrittspupille bilden, mit den beiden Cardinalpunkten des Systems zusammen und es können dann nur winkelrichtige Strahlenkegel zur Formirung des Bildes zur Wirkung kommen (wenn man entweder von der geringen den Cardinalstrahlen anhaftende Aberrationen absieht oder dieselben compensirt hat). Es ist dies auch in der That meistens die Stellung, welche das Diaphragma zumal in symmetrischen Systemen einnimmt. In diesem Fall ist die Beleuchtung des Bildes für die schiefen Kegel auch meistens die möglichst beste, wenn man nicht durch eine übelangebrachte Oekonomie die Linsen so klein gemacht hat, dass die Fassungsränder derselben schon bei mässiger Schiefe bereits die Ein- oder Austrittspupille theilweise wegblenden! Es ist jedoch nicht immer der Fall, dass sich diese beste Stellung des Diaphragmas realisiren lässt. Nehmen wir z. B. den Fall, das Linsensystem bestehe aus einem einfachen Achromat, wie z. B. die Landschaftslinse. Es müsste bei den gewönlichen Landschaftslinsen das Diaphragma alsdann nahe dem Linsenscheitel stehen, welcher der Visirscheibe zugewendet ist. Setzt man es aber an diesen Platz, so ist die Distortion des Bildes natürlich eine sehr geringe, aber das Bild ist ausser der Mitte des Feldes nicht zu gebrauchen, da die Bedingungen (welche wir später kennen lernen) nicht erfüllt sind. Man ist daher genöthigt, das Diaphragma zwischen Object und Linse zu stellen, in erhebliche Entfernung (gegeben durch die Erfüllung der genannten Bedingungen) und wirkt dann das Diaphragma selbst als Eintrittspupille. Das von dem Achromat erzeugte virtuelle Bild dieses Diaphragmas dient dann als Austrittspupille. Verfolgt man dieses, so wird man finden, dass dasselbe meistens sehr bald durch die Linsenfassung des Achromaten erst theilweise, dann gänzlich verdeckt wird, womit natürlich die starke Lichtabnahme gegen den Rand des Feldes zusammenhängt. Viel günstiger würde sich dieser Fall gestalten, wenn das Diaphragma (welches hier die Eintrittspupille bildet) in einem stärker brechenden Medium (z. B. irgend einer farblosen stark brechenden Flüssigkeit) befindlich wäre. Je weiter in diesem Fall das Diaphragma von der Linse entfernt ist, je weiter liegt auch dessen virtuelles Bild (die Austrittspupille) von demselben entfernt. Würde man z. B. das Diaphragma in den Brennpunkt der Linse, vor derselben setzen, so würde die Austrittspupille bereits in unendlicher Ferne von der Linse sich befinden! Man kann die Lichtabnahme schon sehr gut schätzen, wenn man das virtuelle Bild der Blende an Grösse und Distance als ein wirkliches Diaphragma ansieht und den Linsenrand als zweites Diaphragma nimmt. In der Bildmitte hindert natürlich das erste Diaphragma nicht das zweite, sobald aber der Kegel schief auffällt, findet ein gegenseitiges Abblenden beider Diaphragmen statt, welches eine mehr oder weniger bedeutende Lichtabnahme zur Folge hat! Die Regeln für die beste Stellung des Diaphragmas im Linsensystem vermögen wir erst dann zu entwickeln, wenn wir die Anomalien der schiefen Strahlenkegel kennen gelernt haben, da diese es sind, welche in Bezug auf die zu erreichende Maximalqualität des Bildes eines gegebenen Systems die Stellung und Grösse des Diaphragmas regeln.

Wir gehen jetzt unter Anwendung unserer bisher entwickelten Formeln zum Studium der chromatischen Aberration der Linsensysteme über.

Bevor wir jedoch dieses Kapitel schliessen, kann ich nicht umhin, diejenigen der geehrten Leser, welche wenig oder gar nicht sich mit der mathematischen Physik beschäftigt haben, darauf aufmerksam zu machen, dass es zuweilen vorkommt, dass sonst sehr geachtet dastehende Journale Abhandlungen aufnehmen, welche dazu geeignet sind, Irrthümer zu verbreiten, und den Lernenden nur schädigen können. Als Beispiel will ich hier nur eine Abhandlung von E. Gundlach anführen, die in dem „American Annual of Photography" befindlich ist und betitelt „The Equivalent Focus not a Constant". Diese Ueberschrift, die also im Widerspruch mit einem der Fundamentalgesetze der geometrischen Optik steht, muss jeden Fachmann, dem sie zu Gesicht kommt, stutzig machen! Die äquivalente Brennweite eine Variable? Wenn man die Abhandlung liest, so sieht man übrigens sofort, was den Verfasser, dessen Kenntnisse darnach sich nicht über die Gesetze der Vereinigungsweite einer dickenlosen Linse erstrecken, zu diesem Irrthum verleitet hat! Da ihm die Lehre über die vorhin vorgetragene Theorie der Hauptpunkte gänzlich unbekannt sein muss, so fällt er schon bei dem ersten Versuch, die äquivalente Brennweite zweier dickenloser Linsen zu bestimmen, hinein! Er überträgt seine Kenntniss des optischen Mittelpunktes einer Linse ohne Weiteres auf ein System von zwei dickenlosen Linsen in Distance, indem er stillschweigend annimmt, dass die Cardinalstrahlen einer Linse, wenn sie mit einer zweiten Linse verbunden wird, eine solche Anhänglichkeit an ihren „bisherigen Wohnort" haben, dass sie ihn nicht verlassen, sich also im ganzen System gleichfalls im optischen Mittelpunkt der ersten Linse kreuzen!

Da ihm darnach die Kenntniss fehlt, dass die Hauptpunkte die Bilder des optischen Mittelpunktes in der einfachen dicken Linse sind, so darf man sich allerdings nicht wundern, dass ihm die Lage derselben in einem System von zwei Linsen unbekannt geblieben ist! Auf diesem fehlerhaften Fundament errichtet er nun das ganze Gebäude seiner durch und durch fehlerhaften Arbeit!

Worüber man sich aber wundern muss, ist, dass ein so grober Verstoss gegen die Elementarsätze der geometrischen Optik von dem Editor des genannten Journals übersehen worden ist und die questionirte Arbeit dadurch ihrem verdienten Schicksal entgangen ist, in den Papierkorb der Redaction zu wandern!