Mit diesem Werthe h wird A nach (r^*) gefunden:

$$\begin{aligned}
\log h &= 3.81772 \\
\log \operatorname{tg} w' &= 9.85264 \\
\log \operatorname{tg} w'' &= 8.91994 \\
\hline
\log h \operatorname{tg} w' &= 3.67036 \quad \ldots\ldots \quad 4681''.2 = 1^0\ 18'\ 1''.2 \\
\log h \operatorname{tg} w'' &= 2.73766 \quad \ldots\ldots \quad 546\ .6 = 0^0\ \ 9'\ 6''.6.
\end{aligned}$$

Nach der ersten Gleichung (r^*) ist:

$$\begin{aligned}
h \operatorname{tg} w' &= \ \ 1\ \ 18\ \ \ 1\ .2 \\
A_0 &= 62^0\ 51'\ 17''.8 \\
\gamma' &= 25\ \ 21\ \ \ 1\ .0 \\
\hline
& \ \ \ 89^0\ 30'\ 20''.0 \\
C_1 &= \qquad 5\ \ 33\ .0 \\
\hline
A &= 89^0\ 24'\ 47''.0 \\
360 - A &= 270^0\ 35'\ 13''
\end{aligned}$$

Das Azimuth a des irdischen Objectes ist bestimmt durch:

$a = 360 - A + A_2$, also:

$$\begin{aligned}
360^0 - A &= 270^0\ 35'\ 13'' \\
A_2 &= \ \ 46\ \ 44\ \ 47 \\
\hline
a &= 317^0\ 20'\ \ 0''
\end{aligned}$$

Die nach den verbesserten Näherungsformeln abgeleiteten Werthe für die Höhe und das Azimuth des irdischen Objectes stimmen mit den nach den strengen Formeln gerechneten sehr nahe überein, u. zw. ist die Abweichung in der Höhe 32 und im Azimuthe 2 Secunden; letztere Abweichung ist übrigens geringer, als jener Fehler, welcher der Messung des Winkels mit dem Sextanten anhaften wird.

ZEHNTES CAPITEL.

BESTIMMUNG DES LÄNGENUNTERSCHIEDES ZWEIER ORTE AUF DER OBERFLÄCHE DER ERDE.

232. Der Längenunterschied zweier Orte auf der Oberfläche der Erde ist der Winkel, welchen die Meridiane beider Orte an den Polen miteinander bilden, gleich dem zwischen den beiden Meridianen liegenden Bogen des Aequators, daher auch — wie schon in §. 34 nachgewiesen wurde — gleich dem Unterschiede der Ortszeiten an den beiden Orten in demselben absoluten Momente. Bezeichnen wir daher mit u_o und u_w die in demselben Momente an beiden Orten stattfindenden Uhrzeiten, mit x_o, x_w die Uhrcorrectionen gegen Ortszeit, mit L den Längenunterschied beider Orte, so ist, wenn wir die Länge von West gegen Ost positiv zählen:

$$L = (u_o + x_o) - (u_w + x_w), \tag{300}$$

oder:

$$L = (u_o - u_w) + (x_o - x_w). \tag{301}$$

Die Lösung der Aufgabe erfordert daher einerseits möglichst genaue Zeitbestimmungen an jedem der beiden Orte zur Ermittelung des Standes der Uhren gegen Ortszeit, sowie des täglichen Ganges derselben mittelst einer der im VII. Capitel vorgetragenen Methoden; andererseits die Bestimmung des Unterschiedes der Ortszeiten in einem und demselben absoluten Momente. Je nach Verschiedenheit der zu letzterem Zwecke in Anwendung gebrachten Mittel ergeben sich verschiedene Methoden der Längenbestimmung.

233. Zur Bestimmung des Unterschiedes der Ortszeiten in demselben absoluten Momente könnte zunächst die Beobachtung solcher Erscheinungen am Himmel benützt werden, welche an allen Orten der Erde, wo sie überhaupt sichtbar sind, in demselben Augenblicke gesehen werden. Solche Erscheinungen sind die Mondfinsternisse und die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. Da nämlich bei dem Eintritte des Mondes in den Erdschatten oder der Jupitersmonde in den Schattenkegel des Jupiter, das Sonnenlicht den Monden wirklich entzogen wird, so werden Anfang und Ende einer solchen Finsterniss, sowie auch die Ein- und Austritte der Flecken auf der Oberfläche des Erdmondes von allen Orten der Erde aus in demselben Augenblicke gesehen, indem die Zeit, welche das Licht braucht, um den Halbmesser der Erde zu durchlaufen, verschwindend klein ist. In Folge des allmäligen Ueberganges des Halbschattens in den Kernschatten finden aber diese Erscheinungen nicht plötzlich statt und gewährt daher die Beobachtung derselben nur geringe Genauigkeit. Bei den Mondfinsternissen erscheint aus dem erwähnten Grunde der Schatten der Erde auf der Mondscheibe nur schlecht begrenzt, so dass die Unsicherheit in der Auffassung der Zeit der einzelnen Phasen eine Zeitminute und darüber beträgt. Eine etwas grössere Genauigkeit wird durch Beobachtung des ersten Jupiterstrabanten, dessen Bewegung um den Jupiter am schnellsten ist, erreicht werden, wenn die Beobachter an beiden Stationen sich gleich starker Fernrohre bedienen, eine gleiche Anzahl von Ein- und Austritten beobachten und aus den so erlangten Resultaten das Mittel nehmen. Indessen wird man auch bei Anwendung dieser Vorsichtsmassregeln eine erhebliche Genauigkeit des Endresultates nicht erwarten dürfen.

Benzenberg hat zur Bestimmung des Längenunterschiedes die Beobachtung des Momentes des Verschwindens von Sternschnuppen vorgeschlagen, welche allerdings einer grösseren Schärfe fähig ist. Da man jedoch im Voraus nicht weiss, wann und in welcher Gegend des Himmels eine Sternschnuppe erscheint, so werden sich selbst bei Beobachtung einer beträchtlichen Anzahl derselben nur wenige als identisch feststellen lassen, zu deren Auffindung man überdies bereits eine genäherte Kenntniss des Längenunterschiedes bedarf.

234. Weit vortheilhafter und genauer ist die Beobachtung von irdischen oder künstlichen Signalen. Liegen die beiden Orte, deren Längendifferenz bestimmt werden soll, einander so nahe, dass die an einem derselben oder an einem Zwischenpuncte gegebenen Signale von beiden Orten aus gesehen werden können, so gibt nach Gl. (300) die Beobachtung eines jeden Signals einen Werth für den Längenunterschied. Da die Signale rasch aufeinander folgen können und die Operation an verschiedenen Tagen beliebig oft wiederholt werden kann, so lässt sich auf diesem Wege eine erhebliche Genauigkeit des Endresultates erzielen.

Als solche künstliche Signale schlug man zuerst Nachtfeuer vor, welche durch geeignete Vorrichtungen in gewissen aufeinander folgenden Intervallen geblendet wurden. Das durch das Blenden erfolgte Verschwinden des Lichtes gab das gemeinschaftliche Signal ab.*) Weil aber für grössere Entfernungen das Feuer zu gross sein musste, die zur Blendung desselben nothwendigen Einrichtungen zu schwerfällig und in der Handhabung zu umständlich waren, so gab man die Signale mittels der Nachtfeuer bald wieder auf. Nach mehrfach missglückten Versuchen mit anderen künstlichen Signalen, wie: Feuer-Raketen, Kanonen- und Minenfeuer, kam man auf das einfachste Mittel, nämlich auf das Entzünden einer Quantität gewöhnlichen Schiesspulvers bei Nacht (Blickfeuer). Die Flamme erscheint und verschwindet so plötzlich, dass der Eintritt dieser Erscheinung, das Signal, bis auf den Bruchtheil einer Zeitsecunde aufgefasst werden kann.

Bei Tage bedient man sich zu diesem Zwecke des Heliotrops, eines von Gauss erfundenen Instrumentes, mittelst dessen die Sonnenstrahlen mit Hilfe eines ebenen Spiegels nach einem gegebenen entfernten Puncte dirigirt werden können, welche, von letzterem aus gesehen, in der Richtung der Strahlen ein Sonnenbild erscheinen lassen; durch Verdecken des Spiegels verschwindet dasselbe plötzlich und der Moment des Verschwindens dient als Signal. Das Heliotroplicht ist unter günstigen Umständen mit blossem Auge noch auf Entfernungen von 40 bis 70 Kilometer, im Fernrohre auf 100 Kilometer und darüber sichtbar. Bei grösserer Entfernung der beiden Orte, deren Längenunterschied bestimmt werden soll, werden dieselben durch Einschaltung von mehreren Zwischenpuncten, an welchen die Signale gegeben werden, miteinander verbunden.

Es seien (Fig. 97) A_w und A_o die beiden Orte, deren Längendifferenz $= L$ zu bestimmen ist, A_o östlich von A_w; S, S_1, S_2, S_3 und A, A_1, A_2 Zwischenstationen, so gewählt, dass die in den Stationen S, S_1, S_2, S_3 gegebenen Signale beziehungsweise von den Puncten A_w und A, A und A_1, A_1 und A_2,

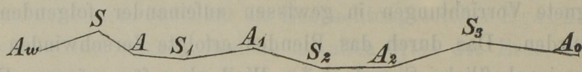
*) Solcher Signale bediente sich der französische Akademiker Picard auf seiner Reise nach Dänemark, um im Jahre 1671 den Längenunterschied zwischen der damals schon theilweise zerstörten Sternwarte Tycho-Brahe's auf der Insel Huen (der Uranienburg) und dem astronomischen Thurme in Kopenhagen zu bestimmen.

A_2 und A_0 aus sichtbar sind und von den daselbst befindlichen Beobachtern an ihren Uhren beobachtet werden können. Es werde nun ein Signal

gegeben in S: beobachtet in A_w zur Zeit T_w, in A zur Zeit t
„ „ S_1: „ „ A „ „ t_1, „ A_1 „ „ t_1'
„ „ S_2: „ „ A_1 „ „ t_2, „ A_2 „ „ t_2'
„ „ S_3: „ „ A_2 „ „ t_3, „ A_0 „ „ T_0.

Bezeichnet man mit l, l_1 l_2 l_3 die Längenunterschiede beziehentlich zwischen den Puncten A_w und A, A und A_1, A_1 und A_2, A_2 und A_0 und nimmt

Fig. 97.



man an, dass die obigen Zeiten durch Berücksichtigung des Uhrstandes bereits auf Ortszeit gebracht seien, so bestehen zufolge der Gl. (300) die Relationen:

$$l = t - T_w$$
$$l_1 = t_1' - t_1$$
$$l_2 = t_2' - t_2$$
$$l_3 = T_0 - t_3,$$

aus welchen durch Addition, da $l + l_1 + l_2 + l_3 = L$ ist, der Längenunterschied zwischen den Orten A_w und A_0,

$$L = T_0 - (t_1 - t) - (t_2 - t_1') - (t_3 - t_2') - T_w, \tag{302}$$

hervorgeht. Hier bedeuten T_0 und T_w die an den Endstationen an verschiedenen Uhren und von verschiedenen Beobachtern aufgefassten Zeiten, während $t_1 - t$, $t_2 - t_1'$, $t_3 - t_2'$ kurze Zeitintervalle sind, deren jedes aus Beobachtungen desselben Beobachters an derselben Uhr erhalten wird. Hieraus erhellt, dass nur an den Endstationen genaue Zeitbestimmungen zur Ermittlung des Standes und Ganges der Uhren behufs Reduction der beobachteten Uhrzeiten auf Ortszeit erfordert werden, während für die auf den Zwischenstationen A, A_1, A_2 befindlichen Uhren die Kenntniss des Uhrganges genügt, um die beobachteten Differenzen der Uhrzeiten auf Stern- oder mittlere Zeit reduciren zu können. Diese Uhrgänge können durch Vergleichung der Zeiten der an aufeinanderfolgenden Tagen beobachteten Signale selbst abgeleitet und kleine Fehler derselben dadurch eliminirt werden, dass an den verschiedenen Tagen die Signale abwechselnd in der Richtung von West nach Ost und umgekehrt gegeben werden.

Dieses Verfahren zur Ermittlung des Längenunterschiedes war bis zu der Zeit, wo durch Benützung des elektrischen Telegraphen, falls die beiden Stationen durch eine Leitung verbunden sind, die Erreichung einer noch grösseren Schärfe in der Bestimmung der Längendifferenz ermöglicht wurde, das genaueste und daher namentlich auch für geodätische Zwecke in Anwendung.

Beispiel. Nach dieser Methode wurde im Jahre 1822 die Längenbestimmung zwischen der Sternwarte in Wien und jener in München (Bogenhausen) durchgeführt. Die Signale wurden gegeben auf dem Schneeberge bei Wiener Neustadt, gegen 66 Kilometer von Wien und gegen 130 Kilometer vom Pöstlinberge bei Linz entfernt und auf dem Untersberge bei Salzburg gegen 120 Kilometer von Linz und gegen 112 Kilometer von München entfernt. Die Signale vom Untersberge wurden in München und auf dem Pöstlinberge und die Signale vom Schneeberge auf letztgenanntem Puncte und in Wien beobachtet.

Am 19. August 1822 ergaben sich für das Signal V folgende Daten:

München (A_w) Signal empfangen vom Untersberge um	Pöstlinberg (A) Signal empfangen vom Untersberge um	Pöstlinberg (A) Signal empfangen vom Schneeberge um	Wien (A_0) Signal empfangen vom Schneeberge um
$u_w = 19^h\ 25^m\ 3^s.50$	$u = 9^h\ 48^m\ 59^s.00$	$u_1 = 9^h\ 43^m\ 17^s.00$	$u_0 = 19^h\ 39^m\ 13^s.48$

Die Uhr am Pöstlinberge ging nach mittlerer Zeit; aus correspondirenden Sonnenhöhen wurde von Canonicus David die Correction der Uhr, wie folgt, gefunden:

$$19.\ \text{August}\ 0^h \quad x = -\ 3^m\ 35^s.5$$
$$20.\ \text{August}\ 0^h \quad x = -\ 3\ \ 53\ .0,$$
$$\text{mithin stündlicher Gang} \quad \Delta x = -\ \ 0^s.7292.$$

Die Zeitbestimmungen an den Endstationen ergaben als Correction der nach Sternzeit gehenden Uhren:

in Bogenhausen	19. August $17^h\ 42^m$	$x_w = +\ 8^s.28$	stündlicher Gang
	20. August 17 56	$x_w' = +\ 8\ .46$	$\Delta x_w = +\ 0^s.0074$
in Wien	19. August $18^h\ \ 3^m$	$x_0 = -\ 39^s.19$	stündlicher Gang
	20. August 18 49	$x_0' = -\ 40\ .88$	$\Delta x_0 = -\ 0^s.0682$

Aus den Zeitbestimmungen auf dem Pöstlinberge ergibt sich, dass $24^h\ 0^m\ 17^s.5$ Uhrzeit $= 24^h\ 3^m\ 56^s.56$ Sternzeit sind, dass demnach 1 Stunde Pöstlinberger Uhrzeit $= 1.00253^h$ Sternzeit ist.

Mit Rücksicht hierauf und auf die ausgemittelten Uhrstände und Uhrgänge hat man folgende Ortszeiten:

	für München	für Wien	für Pöstlinberg
Uhrzeit ...	$u_w = 19^h\ 25^m\ \ 3^s.50$	$u_0 = 19^h\ 39^m\ 13^s.48$	$u = 9^h\ 48^m\ 59^s.00$
Uhrcorrection	$x_w = +\ \ \ 8.29$	$x_0 = -\ \ 39.30$	$u_1 = 9\ 43\ 17.00$
Ortszeit ...	$T_w = 19^h\ 25^m\ 11^s.79$	$T_0 = 19^h\ 38^m\ 34^s.18$	$u_1 - u = -\ 5^m\ 42^s.00$ mittl. Zeit
			$t_1 - t = -\ 5^m\ 42^s.86$ Sternzeit.

Es ist sonach im gegebenen Falle aus den Daten des Signals V: Längenunterschied

$$L = T_0 - T_w - (t_1 - t),$$

also nach Einsetzung der Zahlenwerthe:

$$L = 19^m\ 5^s.25.$$

An den drei Tagen 19., 20. und 21. August 1822 wurden 24 Signale gegeben und beobachtet, aus denen sich der Längenunterschied zwischen der Sternwarte in Wien und in Bogenhausen mit $19^m\,5^s.214$ ergeben hat.*)

235. Wenn, wie dies bei Längenbestimmungen der Fall ist, das Zusammenwirken mehrerer Beobachter erfordert wird, so ist noch auf eine Fehlerquelle Rücksicht zu nehmen, welche daher rührt, dass, wie die Erfahrung gelehrt hat, verschiedene Beobachter die Zeit des Eintrittes einer und derselben Erscheinung im Allgemeinen nicht in demselben Momente auffassen. Der Unterschied zwischen den beiden Zeitmomenten, in welchen zwei Beobachter den Eintritt einer Erscheinung, z. B. den Durchgang eines Sternes durch einen Faden, das Aufblitzen und Verschwinden eines Signals u. s. w., beobachten, wird die persönliche Gleichung der beiden Beobachter genannt; ihr Betrag liegt meistens zwischen o und wenigen Zehnteln einer Zeitsecunde, kann aber erfahrungsmässig auf 1^s und darüber steigen. Sie ist offenbar gleich der Differenz der absoluten persönlichen Fehler jedes der beiden Beobachter, d. i. des Unterschiedes der beiden Momente, in welchen der Beobachter die Erscheinung auffasst und letztere thatsächlich eintritt.

Bezeichnet man diese absoluten persönlichen Fehler zweier Beobachter A und B für Beobachtungen irgend einer Art mit p_A und p_B, und nimmt dieselben positiv, wenn die Beobachter die Ercheinung zu früh auffassen; ferner mit P_{A-B} die persönliche Gleichung zwischen den beiden Beobachtern, positiv, wenn der Beobachter A die Erscheinung später auffasst, als jener B, in welchem Falle offenbar $p_A < p_B$ sein muss, so ist:

$$P_{A-B} = p_B - p_A. \tag{303}$$

Wird, wie dies bei Längenbestimmungen, wenn irgend möglich, immer der Fall ist, die Zeit aus Meridiandurchgängen von Sternen (VII. Capitel, 4. Abschnitt) abgeleitet, so handelt es sich um die Beobachtung von Fadenantritten, für welche Gattung von Erscheinungen der absolute persönliche Fehler p eines Beobachters mittelst besonderer selbstregistrirender Apparate (sogenannter Zeitcollimatoren), welche Fadendurchgänge von Sternen künstlich nachzuahmen gestatten, bestimmt werden kann. Bei der Aufgabe der Längenbestimmung wird jedoch nicht die Kenntniss der absoluten persönlichen Fehler, sondern nur der persönlichen Gleichung der zwei Beobachter an den Endstationen erfordert; die persönlichen Fehler der bei der im vorhergehenden Paragraphe behandelten Methode auf den Zwischenstationen A, A_1, A_2 befindlichen Beobachter haben auf die Differenzen $t_1 - t$, $t_2 - t_1' \ldots$ in Gl. (302) offenbar keinen Einfluss.

*) Ueber die Differenz der geographischen Länge zwischen Wien und München. Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. III. Theil. 1823.

Das einfachste Verfahren zur Bestimmung der persönlichen Gleichung zweier Beobachter für Fadendurchgänge von Sternen besteht in der Beobachtung von Sterndurchgängen am Passage-Instrumente in der Art, dass zuerst der eine Beobachter die Durchgänge durch die dem Mittelfaden vorausgehenden, sodann der andere Beobachter die Durchgänge durch die auf den Mittelfaden folgenden Seitenfäden beobachtet; werden sodann die an den Seitenfäden beobachteten Zeiten auf den Mittelfaden reducirt, und sind t_A, t_B die respectiven Mittel für jeden der beiden Beobachter, so ist, weil $t_A + p_A = t_B + p_B$ sein muss, zufolge der Gl. (303):

$$P_{A-B} = t_A - t_B. \tag{304}$$

Auf diese Art wird eine genügende Anzahl von Sterndurchgängen beobachtet und aus den durch die einzelnen Durchgänge erlangten Resultaten das Mittel genommen.

Um den Einfluss kleiner Fehler in den angewendeten Werthen der Fadendistanzen zu eliminiren, sind die Durchgänge von beiden Beobachtern abwechselnd in umgekehrter Reihenfolge zu beobachten.

Die persönliche Gleichung für die Beobachtung von Signalen ergibt sich gleichfalls nach Gl. (304), wenn t_A und t_B die von beiden Beobachtern von demselben Orte und an derselben Uhr beobachteten Zeiten eines Signals bedeuten.

Wie ein Blick auf die Gl. (174) [S. 366] zeigt, wird von einem Beobachter A, dessen absoluter persönlicher Fehler für Fadenantritte p_A ist, die Zeit u um p_A zu klein, den Uhrstand x also um denselben Betrag zu gross erhalten und es ist daher, wenn x_A den aus den Beobachtungen dieses Beobachters hervorgehenden Uhrstand bedeutet, der wahre, von dem persönlichen Fehler befreite Uhrstand $x = x_A - p_A$. Für einen zweiten Beobachter B ist in gleicher Weise: $x = x_B - p_B$, somit $x_A = x_B + (p_A - p_B)$, d. i. mit Rücksicht auf Gl. (303):

$$x_A = x_B - P_{A-B}\,, \tag{305}$$

wo P_{A-B} die persönliche Gleichung zwischen beiden Beobachtern ist, positiv, wenn der Beobachter A die Fadenantritte später auffasst als jener B. Diese Gleichung dient dazu, um die von dem Beobachter B bestimmten Uhrstände auf jene des Beobachters A zu reduciren.*)

---

*) Bessel war der Erste, welcher auf die Differenzen aufmerksam gemacht hat, welche zwischen den von verschiedenen Beobachtern an demselben Instrumente aufgefassten Durchgangszeiten statthaben. Der bekannte Astronom Maskelyne hatte bereits 1795 in den Annalen der Greenwicher Sternwarte erwähnt, dass sein Gehilfe Dr. Kinnebrook sich „nach und nach angewöhnt“ habe, die Durchgänge der Gestirne an den Fäden des Passage-Instrumentes um 0.5 bis 0.8 Secunden später zu beobachten, als er selbst. Maskelyne erkannte nicht die wahre Ursache dieser Differenz, sondern glaubte, Kinnebrook befolge bei dem Beobachten eine ihm eigenthümliche, unregelmässige Methode und wurde hierin noch mehr durch den Umstand bestärkt, als die

236. Kehren wir nun zu der im vorigen Paragraphe behandelten Methode der Längenbestimmung zurück. Nehmen wir an, auf der östlichen Station befinde sich der Beobachter A, auf der westlichen der Beobachter B. Reduciren wir die Beobachtungen des letzteren auf jene des Beobachters A, so erfordert die Zeit T_w in Gl. (302) rücksichtlich des Uhrstandes zufolge der Gl. (305) die Correction $-P^{(*)}_{A-B}$, wenn mit $P^{(*)}_{A-B}$ die persönliche Gleichung zwischen beiden Beobachtern für Antritte bezeichnet wird; ferner rücksichtlich der Beobachtung der Signale die Correction $p_B - p_A = P^{(s)}_{A-B}$, wenn p_A, p_B die absoluten persönlichen Fehler, $P^{(s)}_{A-B}$ die persönliche Gleichung zwischen beiden Beobachtern für Beobachtung von Signalen bedeuten. Hieraus folgt, dass die Differenz $T_0 - T_w$, also auch der nach Gl. (302) berechnete Längenunterschied die Correction:

$$\varDelta L = P^{(*)}_{A-B} - P^{(s)}_{A-B} \tag{306}$$

erfordert, beide persönliche Gleichungen positiv genommen, wenn der Beobachter A die Fadenantritte, respective Signale später auffasst, als jener B.

Dieser Ausdruck zeigt, dass $\varDelta L = o$ wird, also der Einfluss der persönlichen Gleichungen verschwindet, wenn dieselben für die Beobachtung von Fadenantritten und Signalen gleichen Werth haben, was jedoch im Allgemeinen keineswegs der Fall ist.

Anderseits gibt der Ausdruck zu erkennen, dass der Einfluss der persönlichen Gleichungen auf das Endresultat der Längenbestimmung eliminirt wird, wenn die Beobachter an den Endstationen in Mitte der programmgemäss auszuführenden Beobachtungsreihen die Stationen wechseln, vorausgesetzt, dass die persönlichen Gleichungen während der Dauer der ganzen Operation constant geblieben sind. Denn bezeichnet man die nach Gl. (302) ohne Rücksicht auf die persönlichen Gleichungen berechneten Werthe des Längenunterschiedes, je nachdem der Beobachter A oder jener B sich auf der östlichen Station

---

Differenz in der Zeit beim Auffassen der Durchgangszeiten zwischen ihm und seinem Gehilfen sich mit der Zeit veränderlich zeigte. Auch andere Beobachter suchten diese Thatsache durch eine fehlerhafte Beobachtungsweise zu erklären. Bessel erkannte die Ursache dieser Erscheinung, stellte sofort Untersuchungen an und fand aus den vergleichenden Beobachtungen zwischen sich und dem Astronomen Walbeck im Jahre 1820 eine Differenz im Auffassen der Durchgangszeiten von 1.4, mit Argelander eine solche von 1.22 Zeitsecunden. Die Vergleichungen von Bessel's und Struve's Beobachtungen ergaben als persönliche Gleichung:

1814.8 . . .	B. — St.	=	— $0^s.04$
1821.1 . . .	„ „	=	— 0 .80
1823.5 . . .	„ „	=	— 1 .02
1834.5 . . .	B. — St.	=	— 0 .77

Es ist dieses ein auffallendes Beispiel über die Veränderlichkeit der persönlichen Gleichung.

befand, mit L_{AO} und L_{BO}, so ist der wahre Längenunterschied L zufolge der Gl. (306) im ersten Falle:

$$L = L_{AO} + P^{(*)}_{A-B} - P^{(s)}_{A-B}, \qquad (a)$$

im zweiten Falle:

$$L = L_{BO} + P^{(*)}_{B-A} - P^{(s)}_{B-A},$$

oder, da allgemein $\quad P_{B-A} = - P_{A-B}$ ist:

$$L = L_{BO} - P^{(*)}_{A-B} + P^{(s)}_{A-B} \qquad (b)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (a) und (b) erhält man nun:

$$L = \tfrac{1}{2}(L_{AO} + L_{BO}), \qquad (307)$$

und überdies durch Subtraction derselben Gleichungen:

$$P^{(*)}_{A-B} - P^{(s)}_{A-B} = \tfrac{1}{2}(L_{BO} - L_{AO}). \qquad (308)$$

Dieses Verfahren, den Einfluss der persönlichen Gleichung durch Beobachterwechsel zu eliminiren, wird immer mit Vortheil angewendet werden, wenn die Umstände es gestatten. Es ist jedoch auch in diesem Falle zu empfehlen, den Betrag derselben vor Beginn und nach Abschluss der Operation direct zu bestimmen, weil dadurch einerseits für die Constanz der persönlichen Gleichung während der Dauer der ganzen Operation, anderseits durch die Uebereinstimmung des direct bestimmten Werthes mit dem aus der Längenbestimmung selbst nach Gl. (308) hervorgehenden für die Richtigkeit derselben eine Controle gewonnen wird.

237. Ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Orte besteht in der unmittelbaren Uebertragung der Zeit von dem einen Orte zum anderen mittelst tragbarer Uhren oder Chronometer. Gesetzt, es sei durch genaue Zeitbestimmung der Stand x_0 des Chronometers zur Uhrzeit u_0 gegen die Ortszeit in A_0, so wie dessen täglicher Gang $= g$ in 24^h Uhrzeit bestimmt. Der Chronometer wird nun nach dem Orte A_w gebracht und daselbst wieder der Stand x_w desselben zur Uhrzeit u_w gegen Ortszeit in A_w bestimmt. Es ist dann zur Uhrzeit u_w:

$$\text{Ortszeit in } A_w\colon\ T_w = u_w + x_w$$
$$\text{„} \quad \text{„} \ A_o\colon\ T_o = u_w + x_o + (u_w - u_o)\, g,$$

wo $(u_w - u_o)$ die zwischen den beiden Zeiten u_o und u_w verflossene Zeit, ausgedrückt in Tagen zu je 24 Chronometerstunden, bedeutet. Durch Subtraction der beiden Gleichungen ergibt sich der Längenunterschied:

$$L = T_o - T_w = x_o - x_w + (u_w - u_o)\, g. \qquad (309)$$

Der Ausdruck bleibt unverändert, wenn der Transport des Chronometers von der westlichen Station A_w nach der östlichen A_o stattfindet, in welchem Falle $u_w - u_o$ negativ wird.

Hiebei wurde vorausgesetzt, dass der Gang des Chronometers unverändert, also auch während des Transportes derselbe geblieben ist, wie er durch längere Beobachtung am Ausgangsorte bestimmt wurde, was im Allgemeinen nicht der Fall sein wird. Erfahrungsmässig ist der Gang der Chronometer während des Transportes — und auf diesen kommt es wesentlich an — mehr oder weniger verschieden von jenem, welcher denselben in ruhendem Zustande zukommt. Um nun ersteren so genau als es die Umstände gestatten, zu finden, lässt man, nach dem Vorgange von W. Struve, auf die erste Reise, z. B. von A_0 nach A_w, eine zweite in entgegengesetzter Richtung folgen, nachdem noch unmittelbar vor der Abreise von A_w neuerdings der Stand des Chronometers $= x_w'$ zur Uhrzeit u_w' gegen Ortszeit in A_w bestimmt worden ist und bestimmt endlich sofort nach der Rückkehr nach A_0 wieder den Stand des Chronometers $= x_0'$ zur Uhrzeit u_0' gegen Ortszeit von A_0. Für die erste Reise hat man dann die Gl. (309), für die zweite, unter der Voraussetzung, dass der Gang während des Transportes auf der Hin- und Rückreise derselbe war, die Gleichung:

$$L = x_0' - x_w' + (u_w' - u_0')\, g.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\tau = u_w - u_0, \quad \tau' = u_0' - u_w',$$

wo τ und τ' die Zeitdauer der ersten und zweiten Reise bedeuten, so folgt aus beiden Gleichungen durch Elimination von g:

$$L = \frac{\tau\,(x_0' - x_w') + \tau'\,(x_0 - x_w)}{\tau + \tau'}. \tag{310}$$

Zur numerischen Rechnung ist es bequemer, zuerst den durch Elimination von L resultirenden Werth des täglichen Ganges des Chronometers:

$$g = \frac{(x_0' - x_0) - (x_w' - x_w)}{\tau + \tau'} \tag{311}$$

zu berechnen, durch dessen Substitution in die Gl. (309) sich dann L ergibt. Man erkennt leicht, dass in diesem Ausdrucke von g der Zähler die Aenderung des Uhrstandes während der Dauer des Transportes auf der Hin- und Rückreise, der Nenner aber diese Transportdauer selbst bedeutet.

Ist an der Ankunftsstation nur eine Bestimmung des Chronometerstandes gemacht, wie dies bei sehr kurzem Aufenthalte der Fall sein kann, so wird in obigen Gleichungen $u_w' = u_w$ und $x_w' = x_w$, oder $u_0' = u_0$ und $x_0' = x_0$, je nachdem die erste Reise von der Station A_0 oder von jener A_w aus erfolgte.

Beispiel. Zur Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen der Sternwarte in Pulkowa und Altona wurden im Jahre 1843 die folgenden Beobachtungen an dem der mittleren Zeit folgenden Chronometer Hauth 31 gemacht;

Reise von Pulkawa nach Altona:

Pulkowa: $u_0 =$ Mai 19, $21^h.54$; $x_0 = + 0^h \; 6^m \; 38^s.10$,
Altona: $u_w =$ Mai 24, $22 \, .66$; $x_w = - 1 \; 14 \; 39 \, .92$.

Reise von Altona nach Pulkowa:

Altona: $u_w' =$ Mai 26, $10^h.72$; $x_w' = - 1^h \; 14^m \; 36^s.77$,
Pulkowa: $u_0' =$ Mai 31, $0 \, .00$; $x_0' = + 0 \; 7 \; 9 \, .58$.

Man hat nun:

$$x_0' - x_0 = + 31^s.48, \quad x_w' - x_w = + 3^s.15;$$

$$\tau = u_w - u_0 = 5^d \, 1^h.12 = 5^d.047, \quad \tau' = u_0' - u_w' = 4^d \, 13^h.28 = 4^d.553,$$

$$g = \frac{31^s.48 - 3^s.15}{5.047 + 4.553} = + \frac{28^s.33}{9.6} = + 2^s.951,$$

und durch Substitution dieses Werthes in die Gl. (309):

$$L = + 1^h \, 21^m \, 18^s.02 + 5.047 \times 2^s.951 = + 1^h \, 21^m \, 18^s.02 + 14^s.89 =$$
$$= + 1^h \, 21^m \, 32^s.91.$$

238. Das vorstehende Verfahren zur Berechnung von L setzt nun, wie schon bemerkt, noch voraus, dass der Gang des Chronometers während der Hin- und Rückreise constant geblieben ist. Die meisten Chronometer zeigen aber während einer längeren Zeit mehr oder weniger eine Beschleunigung oder Verzögerung ihres Ganges, in welchem Falle die wie oben berechnete Länge etwas fehlerhaft wird. Auch dieser Fehler wird jedoch sehr nahe eliminirt, wenn mindestens drei oder eine grössere Anzahl von Reisen unternommen werden, wie folgende Betrachtung zeigt.

Nehmen wir zur Vereinfachung an, dass jedesmal an der Ankunftsstation nur eine Bestimmung des Chronometerstandes gemacht und sofort die Rückreise angetreten werde, so liefern drei aufeinanderfolgende Reisen, die erste von der Station A_0 aus beginnend, folgende Daten:

1. Reise von A_0 nach A_w : u_0, x_0 ; u_w, x_w ; $u_w - u_0 = \tau$,
2. „ „ A_w „ A_0 : u_w, x_w ; u_0', x_0' ; $u_0' - u_w = \tau'$,
3. „ „ A_0 „ A_w : u_0', x_0'; u_w', x_w' ; $u_w' - u_0' = \tau''$,

wo τ, τ', τ'' die Zeitdauer der einzelnen Reisen bedeuten.

Bezeichnen wir die aus der Combination der ersten und zweiten, dann der zweiten und dritten Reise resultirenden Werthe des Längenunterschiedes beziehungsweise mit $L_{1,2}$ und $L_{2,3}$, so erhalten wir unter Voraussetzung eines gleichförmigen Uhrganges, in Gl. (310) $u_w' = u_w$, $x_w' = x_w$ setzend:

$$L_{1,2} = \frac{\tau x_0' + \tau' x_0}{\tau + \tau'} - x_w; \tag{a}$$

ferner, indem wir in derselben Gleichung an die Stelle der Grössen:

$$x_0, \; x_w, \; x_w', \; x_0', \; \tau, \; \tau'$$

die ihnen nach der jetzigen Bezeichnung entsprechenden:

$$x_0', \; x_w, \; x_w', \; x_0', \; \tau', \; \tau''$$

treten lassen:

$$L_{2,3} = -\frac{\tau' x_w' + \tau'' x_w}{\tau' + \tau''} + x_0'. \qquad (b)$$

Lassen wir nun g_0 den täglichen Gang des Chronometers zur Zeit u_0 bedeuten und bezeichnen mit 2γ die tägliche Acceleration desselben nach der Zeit u_0, mit L den wahren Werth des Längenunterschiedes, so werden die wahren Werthe der Uhrstände für die vier Epochen: u_0, u_w, u_0', u_w', mit Rücksicht darauf, dass x_w und x_w' sich auf den Meridian von A_w beziehen, zufolge des Gesetzes der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_0, \\
x_w &= x_0 + g_0\tau + \gamma\tau^2 - L, \\
x_0' &= x_0 + g_0(\tau + \tau') + \gamma(\tau + \tau')^2, \\
x_w' &= x_0 + g_0(\tau + \tau' + \tau'') + \gamma(\tau + \tau' + \tau'')^2 - L.
\end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die Glgn. (a) und (b) kommt nun, nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned}
L &= L_{1,2} - \gamma\tau\tau', \\
L &= L_{2,3} + \gamma\tau'\tau'',
\end{aligned}$$

wo $-\gamma\tau\tau'$ und $+\gamma\tau'\tau''$ die aus der Acceleration des Chronometers entspringenden Fehler der aus beiden Combinationen berechneten Werthe des Längenunterschiedes darstellen. Durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$L = \tfrac{1}{2}(L_{1,2} + L_{2,3}) + \gamma\tau'(\tau'' - \tau),$$

woraus erhellt, dass der Fehler $\gamma\tau'(\tau'' - \tau)$ des arithmetischen Mittels $\frac{1}{2}(L_{1,2} + L_{2,3})$, da γ immer sehr klein ist, unmerklich wird, wenn τ nahe gleich τ'' ist und für $\tau = \tau''$ gänzlich verschwindet. Hieraus folgt also, dass, wenn mehrere Reisen hintereinander in entgegengesetzter Richtung vorgenommen, und die Werthe von L aus je zwei aufeinanderfolgenden Reisen, abwechselnd mit der einen und der anderen Station beginnend, berechnet werden, das Mittel aus allen Resultaten frei sein wird von dem Einflusse einer gleichförmigen Beschleunigung oder Verzögerung des Ganges des Chronometers.

Bei der Längenbestimmung zwischen Pulkowa und Altona folgte auf die schon im letzten Beispiele angeführte Reise von Altona nach Pulkowa:

Altona:	u_w = Mai 26, $10^h.72$;	$x_w = -$	$1^h\ 14^m\ 36^s.77$,
Pulkowa:	u_0 = Mai 31, $0\ .00$;	$x_0 = +$	$0\ \ 7\ \ 9\ .58$,

eine Reise von Pulkowa nach Altona, wobei derselbe Chronometer Hauth 31 folgende Daten lieferte:

Pulkowa:	u_0' = Juni 3, $5^h.62$;	$x_0' = +$	$0^h\ 7^m\ 19^s.36$,
Altona:	u_w' = Juni 7, $20\ .52$;	$x_w' = -$	$1\ \ 14\ \ 0\ .35$.

Hiemit erhält man:

$$x_0' - x_0 = + 9^s.78\,, \quad x_w' - x_w = + 36^s.42\,;$$

$$\tau = u_w - u_0 \;= - 4^d\, 13^h.28 = - 4^d.553\,,$$

$$\tau' = u_0' - u_w' = - 4^d\, 14^h.90 = - 4^d.621,$$

folglich nach Gl. (311):

$$g = \frac{9^s.78 - 36^s.42}{- 4.553 - 4.621} = + \frac{26^s.64}{9.174} = + 2^s.904,$$

und durch Substitution dieses Werthes in die Gl. (309):

$$L = + 1^h\; 21^m\; 46^s.35 - 4.553 \times 2^s.904 = + 1^h\; 21^m\; 46^s.35 - 13^s.22 =$$
$$= + 1^h\; 21^m\; 33^s.13.$$

Das Mittel aus diesem Werthe und dem im vorigen Paragraphe erhaltenen ist: $L = + 1^h\, 21^m\, 33^s.02$.

239. Soll der Längenunterschied zwischen zwei Orten mit grosser Schärfe ermittelt werden, so ist es nothwendig, eine möglichst grosse Anzahl von Chronometern zu verwenden und mit denselben eine grössere Anzahl von Reisen abwechselnd in beiden Richtungen vorzunehmen. An den Endstationen werden die Chronometer mit den daselbst befindlichen Hauptuhren verglichen, deren Stand und Gang durch sorgfältige Beobachtungen an Meridian-Instrumenten bestimmt werden. Die Uhrstände sind wegen der persönlichen Gleichungen zwischen den verschiedenen Beobachtern, welche an den Zeitbestimmungen betheiligt sind, gehörig zu verbessern. Am einfachsten geschieht dies in der Art, dass, nachdem die persönlichen Gleichungen zwischen e i n e m der Beobachter und allen übrigen bestimmt sind, die aus den Beobachtungen der letzteren hervorgehenden Uhrstände durch Anbringung der persönlichen Gleichung [nach Gl. (305)] auf den ersteren Beobachter reducirt werden. Um den Einfluss der Fehler in den angewendeten Rectascensionen der Sterne auf die berechneten Uhrstände zu eliminiren, ist es zweckmässig, an beiden Stationen dieselben Sterne zu beobachten. Während der Reisen werden die Chronometer unter einander sorgfältig verglichen, um allfällige Störungen in dem Gange einzelner Chronometer zu entdecken.

Auf diese Art wurde im Jahre 1843 von W. S t r u v e der Längenunterschied zwischen den Sternwarten in Pulkowa bei St. Petersburg und Altona mit Benützung von 68 Chronometern bestimmt, und wurden vom 9. Mai bis 18. September 17 Reisen, und zwar 9 von Pulkowa nach Altona und 8 von Altona nach Pulkowa vorgenommen.*) Das von S t r u v e zur Ableitung des Endresultates angewendete Verfahren war in Kürze folgendes:

*) Expédition chronométrique exécutée entre Poulkowa et Altona pour la détermination de la longitude géographique rélative de l'observatoire central de Russie. Par F. G. W. S t r u v e. St. Pétersbourg. 1844.

Zunächst wurden für jeden Chronometer die aus je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Reisen resultirenden Werthe des Längenunterschiedes nach dem in §. 237 angegebenen Verfahren abgeleitet und aus den einzelnen Resultaten mit Rücksicht auf ihre Gewichte das Mittel genommen. Zur Berechnung der Gewichte wählte Struve die empirische Formel:

$$p = \frac{k}{T\sqrt{\tau\tau'}}, \tag{312}$$

in welcher T die Dauer der Hin- und Rückreise, die Zeit des Aufenthaltes in der Ankunftsstation inbegriffen, τ und τ' die Dauer beider Reisen und k eine willkürliche Constante bezeichnet, welche man so wählt, dass die Gewichte einfache Zahlenwerthe erhalten. Die Formel entspricht insoferne den Bedingungen der Aufgabe, als die Sicherheit, somit auch das Gewicht eines aus einer Doppelreise abgeleiteten Werthes des Längenunterschiedes offenbar um so kleiner werden muss, je grösser die Dauer T der ganzen Reise ist und je näher τ und τ' einander gleich sind, weil, wie sich leicht zeigen lässt,*) die Genauigkeit eines interpolirten Uhrstandes — und ein solcher ist $x_0 + (u_w - u_0)\,g$ in Gl. (309) — am kleinsten wird bei der Interpolation in die Mitte der Zeiten, für welche die Uhrstände gegeben sind.

---

*) Es seien x, x' die gegebenen, den Uhrzeiten u, u' entsprechenden Uhrstände, y der gesuchte, zu einer zwischen u und u' liegenden Zeit $= u + t = u' - t'$ gehörige Uhrstand, g der tägliche Gang der Uhr, so hat man, wenn t und t' in Tagen ausgedrückt sind:

$$\text{entweder: } y = x + gt, \quad \text{oder: } y = x' - gt'.$$

Der Gang einer Uhr ist aber immer zufälligen Unregelmässigkeiten unterworfen, welche offenbar bewirken, dass der interpolirte Uhrstand y minder genau sein, oder ein geringeres Gewicht haben wird, als die gegebenen Uhrstände x und x'. Bezeichnen wir daher den mittleren Fehler (d. i. die mittlere oder zufällige tägliche Variation) des täglichen Ganges mit ε, so werden, nach der Theorie der kleinsten Quadrate, $\varepsilon\sqrt{t}$ und $\varepsilon\sqrt{t'}$ die mittleren Fehler von gt und gt', und, da die Gewichte den Quadraten der mittleren Fehler verkehrt proportional sind, $\frac{k}{t}$ und $\frac{k}{t'}$ die Gewichte dieser Grössen, wo k willkürlich ist. Es ist daher:

$$y = x + gt \text{ mit dem Gewichte } \frac{k}{t},$$

$$y = x' - gt' \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \frac{k}{t'}.$$

Nimmt man nun aus diesen beiden Werthen das Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte, so kommt:

$$y = \frac{t'x + tx'}{t + t'}, \text{ mit dem Gewichte} = k\left(\frac{t + t'}{tt'}\right),$$

$$\text{oder mit dem mittleren Fehler} = \pm\,\varepsilon\sqrt{\frac{tt'}{t + t'}}.$$

Dieser Fehler wird Null für $t = o$ oder $t' = o$, und erreicht sein Maximum für $t = t'$, d. i. wenn in die Mitte der Zeiten u, u' interpolirt wird.

Lassen wir nun $l_1, l_2, \ldots . l_n$ die aus den einzelnen Doppelreisen eines Chronometers abgeleiteten Werthe des Längenunterschiedes, $p_1, p_2, \ldots . p_n$ deren nach Gl. (312) berechnete Gewichte, n die Anzahl der Doppelreisen bedeuten, so wird das arithmetische Mittel L mit Rücksicht auf die Gewichte:

$$L = \frac{[pl]}{[p]} \tag{313}$$

der wahrscheinlichste aus diesem einen Chronometer folgende Werth des Längenunterschiedes, und, wenn wir mit v die Abweichungen der einzelnen Werthe l von ihrem Mittel L, und mit ε, r den mittleren und wahrscheinlichen Fehler, mit P das Gewicht des Mittels bezeichnen:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)[p]}}, \quad r = 0.6745\,\varepsilon, \quad P = \frac{k}{\varepsilon\varepsilon}, \tag{314}$$

wo k willkürlich ist.

Sind endlich $L_1, L_2, \ldots . L_r$ die mittelst der verschiedenen Chronometer, r an der Zahl, nach Gl. (313) erhaltenen Werthe mit den nach (314) berechneten Gewichten $P_1, P_2, \ldots . P_r$, so wird der wahrscheinlichste Werth des Längenunterschiedes:

$$L_0 = \frac{[PL]}{[P]}, \tag{315}$$

und, wenn wir mit V die Abweichungen der einzelnen L von diesem Mittel, mit E und R den mittleren, beziehungsweise wahrscheinlichen Fehler von L_0 bezeichnen:

$$E = \pm \sqrt{\frac{[PVV]}{(r-1)[P]}}, \quad R = 0.6745\,E. \tag{316}$$

Als Beispiel möge der Längenunterschied zwischen Pulkowa und Altona aus dreien der 68 Chronometer der Struve'schen Expedition, nämlich Dent 1774, Hauth 31 und Kessels 1260 berechnet werden. In der ersten Spalte der folgenden Tabelle ist mit den Symbolen P^n, A^n die Combination der zwei Reisen angezeigt, aus welchen die nebenstehenden Längen gerechnet wurden; so bedeutet z. B. P^{III} die Combination der dritten Reise von Pulkowa nach Altona mit der darauf folgenden von Altona nach Pulkowa; A^{VI} die Combination der sechsten Reise von Altona nach Pulkowa mit der folgenden von Pulkowa nach Altona. Die zweite Spalte enthält die nach Gl. (312) berechneten Gewichte der einzelnen Combinationen und daraus abgeleiteten Längen, wobei Struve $k = 34560$ annahm, wenn T, τ und τ' in Stunden ausgedrückt werden, weil bei dieser Annahme für die mittleren Werthe $T = 288^h$, $\tau = \tau' = 120^h$, das Gewicht der Einheit gleich wird. Drückt man diese Zeiten in Tagen aus, so ist:

$$k = \frac{34560}{24^2} = 60$$

zu setzen.

Man hat dann z. B. für die erste von Pulkowa ausgehende Reise P^{I} und den Chronometer Hauth 31, nach §. 237:

$$T = 11^d\, 2^h.46 = 11^d.102\,, \quad \tau = 5^d.047\,, \quad \tau' = 4^d.553.$$

Mit diesen Werthen und $k = 60$ findet man nach Gl. (312) $p = 1.13$. Die am Schlusse angesetzten arithmetischen Mittel L_1, L_2, L_3 sind nach Gl. (313), die Werthe von r und P nach den Formeln (314) berechnet.

	Gewicht p	Länge aus Chronom. Dent 1774	v	Länge aus Chronom. Hauth 31	v	Länge aus Chronom. Kessels 1260	v
		$1^h\ 21^m$		$1^h\ 21^m$		$1^h\ 21^m$	
		s	s	s	s	s	s
P^{I}	1.13			32.91	+ 0.30		
A^{I}	1.06			33.13	+ 0.52	33.33	+ 1.40
P^{II}	1.10	32.51	+ 0.05	33.36	+ 0.75	32.61	+ 0.68
A^{II}	1.02	32.83	+ 0.37	33.12	+ 0.51	30.63	− 1.30
P^{III}	1.14	32.09	− 0.37	32.55	− 0.06	33.86	+ 1.93
A^{III}	1.05	32.25	− 0.21	31.56	− 1.05	34.07	+ 2.14
P^{IV}	1.19	31.69	− 0.77	32.70	+ 0.09	32.83	+ 0.90
A^{IV}	0.96	32.77	+ 0.31	34.16	+ 1.55	32.26	+ 0.33
P^{V}	1.09	32.79	+ 0.33	32.23	− 0.38	32.04	+ 0.11
A^{V}	0.80	32.54	+ 0.08	31.65	− 0.96	32.34	+ 0.41
P^{VI}	1.00	32.94	+ 0.48	33.38	+ 0.77	31.27	− 0.66
A^{VI}	1.10	31.93	− 0.53	31.97	− 0.64	30.68	− 1.25
P^{VII}	1.20	32.34	− 0.12	33.16	+ 0.55	31.28	− 0.65
A^{VII}	1.09	32.95	+ 0.49	31.78	− 0.83	29.43	− 2.50
P^{VIII}	0.76	31.86	− 0.60	30.92	− 1.69	29.76	− 2.17
A^{VIII}	0.41	33.77	+ 1.31			31.92	− 0.01
Mittel:		$L_1 = 1^h\ 21^m\ 32^s.46$		$L_2 = 1^h\ 21^m\ 32^s.61$		$L_3 = 1^h\ 21^m\ 31^s.93$	
		$n = 14;\ [p] = 13.91$		$n = 15;\ [p] = 15.69$		$n = 15;\ [p] = 14.97$	
		$[pvv] = 3.063$		$[pvv] = 9.974$		$[pvv] = 27.634$	
		$r_1 = \pm 0^s.09,\ P_1 = 59.04$		$r_2 = \pm 0^s.14,\ P_2 = 22.02$		$r_3 = \pm 0^s.24,\ P_3 = 7.58$	

Aus diesen drei Resultaten findet man nun nach (315):

$$L_0 = 1^h\ 21^m\ 30^s + \frac{2^s.46 \times 59.04 + 2^s.61 \times 22.02 + 1^s.93 \times 7.58}{59.04 + 22.02 + 7.58}\,,$$

d. i.

$$L_0 = 1^h\ 21^m\ 32^s.45$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler nach (316):

$$R = \pm\ 0^s.08.$$

Das von W. Struve aus 68 Chronometern abgeleitete Endresultat war: $L_0 = 1^h\ 21^m\ 32^s.523$ mit dem w. F. $\pm\ 0^s.039$.

240. Bestimmung des Längenunterschiedes mit Hilfe des elektrischen Telegraphen.

Sind die beiden Orte, deren Längenunterschied bestimmt werden soll, durch eine Telegraphenleitung verbunden, so bietet diese ein einfaches Mittel, um sichtbare oder hörbare Signale von einem Orte zum anderen zu übertragen, und hierauf gründet sich die Methode der telegraphischen Längenbestimmung, welche zuerst in den Vereinigten Staaten von Nordamerika zur Ausführung gebracht wurde und mit Zuhilfenahme von Chronographen oder Registrir-Apparaten (vergleiche §. 151 u. s. f.) das genaueste und zugleich einfachste Verfahren zur Bestimmung der Längendifferenz zweier Orte bildet.

Wenn mit U_o und U_w die in demselben Momente an beiden Orten stattfindenden Uhrzeiten, mit x_o und x_w die Uhrcorrectionen gegen Ortszeit bezeichnet werden, so hat man für den Längenunterschied L der beiden Orte bekanntlich die Gl. (301):

$$L = (U_o - U_w) + (x_o - x_w).$$

Man kann daher auch sagen, der Längenunterschied ist gleich der Summe der Differenzen der Uhrzeiten und der Uhrcorrectionen auf denselben absoluten Zeitmoment bezogen.

Es handelt sich nun darum, die beiden Differenzen $U_o - U_w$ und $x_o - x_w$ auszumitteln.

Zur Kenntniss der Differenz der Uhrcorrectionen führt die Beobachtung des Meridiandurchganges eines und desselben, übrigens beliebigen Fixsternes an beiden Stationen an daselbst im Meridiane aufgestellten Passage-Instrumenten. Sind nämlich T_o und T_w die wegen der Instrumentalfehler auf den Meridian reducirten Durchgangszeiten, also die Uhrzeiten der Culmination des Sternes, $\varDelta T_o$ und $\varDelta T_w$ die zu diesen Zeiten gehörigen Uhrcorrectionen gegen Sternzeit, so ist, wenn α die Rectascension des Sternes bezeichnet:

$$\alpha = T_o + \varDelta T_o = T_w + \varDelta T_w,$$

somit, unabhängig von der Rectascension:

$$\varDelta T_o - \varDelta T_w = T_w - T_o. \qquad (a)$$

Diese beiden Uhrcorrectionen beziehen sich aber nicht auf denselben absoluten Moment, sondern auf die Zeiten der Culmination, welche um den Längenunterschied, in Zeit ausgedrückt, verschieden sind. Es sei nun y_o und y_w der stündliche Gang der Uhren in beiden Stationen O und W, und man wähle z. B. die Uhrzeit T_o als den Moment, auf welche sich beide Uhrcorrectionen beziehen sollen, wodurch $x_o = \varDelta T_o$ wird. Dann ist

$$x_w = \varDelta T_w - L y_w,$$

wo L in Stunden ausgedrückt, und man hat

$$x_o - x_w = \varDelta T_o - \varDelta T_w + L y_w = T_w - T_o + L y_w,$$

und folglich vermöge der Gl. (301)

$$L = (U_o - U_w) + T_w - T_o + Ly_w. \tag{317}$$

Ebenso wäre, wenn man die Uhrcorrectionen auf die Uhrzeit T_w als absoluten Moment reducirt hätte,

$$L = (U_o - U_w) + T_w - T_o + Ly_o. \tag{318}$$

In den beiden Gl. (317) und (318) hat aber $U_o - U_w$ nicht denselben Werth, da diese Differenz sich im ersten Falle auf die Uhrzeit T_o, im zweiten Falle auf die Uhrzeit T_w als absoluten Moment bezieht.

Jeder auf diese Art an beiden Stationen beobachtete Stern gibt einen Werth von L, ohne dass hiebei die genaue Kenntniss der Rectascension des Sternes erfordert wird; da aber die beobachteten Uhrzeiten auf den Meridian reducirt werden müssen und die Kenntniss des Uhrganges gefordert wird, so müssen sich unter den beobachteten Sternen auch solche befinden, aus deren Beobachtung die Kenntniss der Instrumentalfehler und des Uhrstandes hervorgeht, mit anderen Worten, es müssen auch Fundamentalsterne zu diesen Beobachtungen gewählt werden.

Nun bleibt noch zu zeigen übrig, wie die Differenz $(U_o - U_w)$, d. i. der Unterschied der Uhrzeiten der Hauptuhren an beiden Stationen in demselben absoluten Zeitmomente, also zur Uhrzeit T_o der Uhr an der Station O, um bei der getroffenen Wahl zu bleiben, ermittelt wird. Zur Lösung dieser Aufgabe wird der elektrische Telegraph zu Hilfe genommen, u. zw. kann dieses auf zweifache Art geschehen; es wird nämlich durch geeignete Einrichtungen entweder die Differenz $U_o - U_w$ absolut $=$ Null gemacht, oder es wird der Werth $U_o - U_w$ durch unmittelbare Vergleichung beider Uhren mittelst des Telegraphen bestimmt. Der erstere Weg wird bei der Registrir-Methode, der zweite bei der Signal- und Coincidenz-Methode eingeschlagen. Signal- und Coincidenz-Methode sind demnach keineswegs wesentlich verschiedene Methoden; es werden bei beiden nur verschiedene Mittel (entweder Signale oder Coincidenzen) zur Erreichung desselben Zweckes, nämlich Ausmittlung der Differenz $U_o - U_w$, d. i. zur Vergleichung der Uhren in Anwendung gebracht.

241. Die Registrir-Methode. Nehmen wir den Fall an, die Uhren an beiden Stationen hätten genau gleiche Angabe und genau gleichen Gang, so wäre in jedem Augenblicke $U_o - U_w = 0$, und $y_o = y_w = y$; hiemit wird Gl. (317) oder (318):

$$L = T_w - T_o + Ly. \tag{319}$$

Diese Voraussetzung ist nun allerdings nicht zu erfüllen, wohl aber ist es möglich, die eine Uhr gleichsam gänzlich zu beseitigen und die Sterndurchgänge an beiden Stationen nur an „Einer" Uhr aufzufassen, wodurch offenbar derselbe Zweck erreicht wird. Werden beide Stationen durch eine telegraphische Leitung verbunden und wird an einer der beiden Stationen eine Uhr mit Registrirapparat eingeschaltet, so können beide Beobachter den Durchgang eines und desselben Sternes auf diesem Apparate registriren, d. h. an derselben Uhr oder Zeitscala auffassen, wodurch die Aufgabe gelöst ist. Wenn man nämlich die Fadenantritte eines jeden Durchganges vom Registrirapparate abliest, dann auf den Mittelfaden reducirt und die Correctionen wegen der Instrumentalfehler anbringt, so erhält man T_o und T_w in obiger Gleichung; die Differenz $T_o - T_w$ ist die Längendifferenz noch in Uhrzeit ausgedrückt; das Glied Ly ist die Correction wegen des Uhrganges.

Hiebei muss noch folgender Umstand berücksichtiget werden. Befindet sich nämlich Uhr und Registrirapparat z. B. an der östlichen Station O, so werden die am westlichen Orte W beobachteten Durchgänge in Folge der successiven Fortpflanzung des elektrischen Stromes auf der östlichen Station zu spät registrirt, also wird T_w und auch L um die Zeit τ, welche der elektrische Strom von der westlichen bis zur östlichen Station braucht, zu gross erhalten; bezeichnen wir die so erhaltene Längendifferenz mit L_o, so ist

$$L_o = T_w - T_o + Ly_o \tag{m}$$

und

$$L = L_o - \tau. \tag{320}$$

Schaltet man aber auch an der westlichen Station W eine Uhr sammt Registrirapparat ein, so können nun beide Beobachter ihre Durchgänge auf diesem Apparate, der Zeitscala mit der Uhr in W, registriren und hiebei werden nunmehr die am östlichen Orte beobachteten und auf der westlichen Station registrirten Antritte um die Stromzeit τ zu spät registrirt; es wird also T_o um die Stromzeit τ zu gross, die Längendifferenz um denselben Werth zu klein erhalten. Bezeichnen wir mit L_w die am westlichen Apparate erhaltene Längendifferenz, so ist

$$L_w = T_w - T_o + Ly_w \tag{n}$$

und

$$L = L_w + \tau. \tag{321}$$

Das Mittel: $L = \frac{1}{2}(L_o + L_w)$ ist daher von dem Einflusse der Stromzeit τ frei, freilich unter Voraussetzung, dass die Stromzeit in beiden Fällen gleich geblieben ist. Die Stromzeit τ ergibt sich aus den Gln. (320) und (321); es ist:

$$\tau = \tfrac{1}{2}(L_o - L_w). \tag{322}$$

Der auf solche Weise ermittelte Werth des Längenunterschiedes ist noch um den Betrag der persönlichen Gleichung zwischen den beiden Beobachtern zu verbessern, oder ist dieser Betrag durch den Wechsel der Beobachter zu eliminiren. (Siehe §. 235.)

In den vorstehenden Gleichungen sind T_w und T_o die wegen der Instrumentalfehler auf den Meridian reducirten Durchgangszeiten; wenn man daher die an den einzelnen Fäden auf der östlichen Station beobachteten und auf der westlichen Station registrirten Antritte auf den Mittelfaden reducirt, so muss das Mittel dieser Uhrzeit, entsprechend dem Durchgange des Sternes auf der östlichen Station auf die Durchgangszeit des Meridians dieser Station reducirt werden, was durch Anbringung der Correction der Instrumentalfehler wegen (Neigung der Drehaxe, Collimationsfehler und Azimuthalfehler) nach der in §. 171 erörterten Weise geschieht. Dasselbe gilt nun, wenn der Stern auf der westlichen Station beobachtet und auf der östlichen Station registrirt wird. Zur Ableitung der Durchgangszeit auf den Meridian der betreffenden Station aus der auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeit ist demnach die genaue Kenntniss der Instrumentalfehler erforderlich. Um dieselben genau bestimmen zu können, wird man an jedem Abende sowohl vor als auch nach den zu registrirenden Sternen eine Zeitbestimmung nach der Methode der Meridiandurchgänge bekannter Sterne ausführen; die zur eigentlichen Längenbestimmung dienenden Sterne, die Registrirsterne, erscheinen mithin von den zwei Zeitbestimmungen eingeschlossen.

Jede der beiden Zeitbestimmungen gibt die Instrumentalfehler, sowie den Uhrstand. Man wird nun erkennen können, ob diese Fehler constant geblieben sind oder nicht. Im Falle, als sie sich geändert haben, muss man dieser Aenderung bei der Reduction auf die Durchgangszeit durch den Meridian Rechnung tragen, was dadurch geschehen kann, dass man die erfolgte Aenderung der Zeit proportional nimmt. Die Uhrstände geben das Mittel für die Ableitung des Uhrganges während der Dauer der Beobachtungsreihe.

Beispiel. Zur Bestimmung der Längendifferenz zwischen Wien (Observatorium der k. k. technischen Hochschule) und Kremsmünster (Garten-Observatorium des Stiftes) im Jahre 1871 durch Professor Dr. Josef Herr und Director Dr. Franz Karlinski wurde die Registrir-Methode gewählt. Am 4. September wurden unter anderen die in folgender Tabelle angesetzten Sterne auf beiden Stationen beobachtet. Die Tabelle *A* enthält auch die scheinbaren Oerter der Sterne, sowie die Constanten:

$$J = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta}, \qquad K = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \quad \text{und} \quad C = \sec \delta.$$

A

Stern Nr.	Name des Sternes	Scheinbarer Ort incl. täglicher Aberration: Rectascension	Declination	Constante für Wien: $\log \frac{J}{15}$	$\log K$	für Kremsmünster: $\log \frac{J}{15}$	$\log K$	für beide: $\log C$
		$^{h}\ ^{m}\ ^{s}$	$^{\circ}\ '\ ''$					
7	31 Pegasi	22 15 12.442	+ 11 33 26	8.7372	9.7847	8.7380	9.7831	0.0089
8	π Aquari	18 43.658	+ 0 43 26	.6539	.8675	.6552	.8663	.0000
9	35 Pegasi	22 21 22.012	+ 4 3 0	8.6809	9.8440	8.6820	9.8427	0.0011
16	16 Piscium	23 29 50.660	+ 1 23 13	8.6594	9.8629	8.6606	9.8618	0.0001
17	ι Piscium	33 21.400	+ 4 55 55	.6877	.8376	.6889	.8363	.0016
18	77 Pegasi	23 36 50.870	+ 9 36 53	8.7231	9.8011	8.7240	9.7996	0.0061

Aus den Zeitbestimmungen hat sich ergeben:

	Für das Instrument in Wien	Für das Instrument in Kremsmünster
Neigung bei Kr. W.	$i = -2''.494$	$i = +1''.010$
Neigung bei Kr. O.	$i = -3\ .007$	$i = +0\ .030$
Collimationsfehler	$c = -0^s.174$	$c = +0^s.469$
Azimuth um $21^h.00$	$k = -0\ .7014$	$k = -1\ .532$
Stündliche Aenderung d. Azim.	$\Delta k = -0\ .0939$	$\Delta k = \ \ 0\ .000$
Stündlicher Gang d. Wiener Uhr	$g_o = -0\ .035$	$g_w = \ \ 0\ .000$

In den Tabellen 1, 2, 3 und 4 sind die einzelnen schon auf den Mittelfaden reducirten Antrittszeiten, die Mittelwerthe und die durch die Instrumentalfehler bedingten Correctionen angegeben.

Beobachtungen in Wien.

1 Beobachter: Herr.

Faden	Aus den Ablesungen am Registrirstreifen in Wien					
	Stern					
	7 K. W.	8 K. W.	9 K. W.	16 K. O.	17 K. O.	18 K. O.
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
1	22 16 26.65	22 19 —	22 22 36.30	23 31 4.93	23 34 35.30	23 38 5.04
2	.67	57.89	.32	.85	.45	4.88
3	.60	7.99	.29	.83	.46	5.00
4	.52	7.95	.15	.91	.42	5.01
5	.69	8.03	.25	.81	.44	4.79
6	.56	7.80	.28	.90	.44	4.97
7	.61	8.01	.27	.98	.54	5.05
8	.37	7.89	.10	.82	.42	5.01
9	.53	7.98	.09	.91	.46	5.09
10	.44	7.95	36.54	4.98	.45	4.70
11	.66	7.97	—	4·92	.20	4.87
12	.56	7.85	36.02	5.13	.46	4.88
13	.51	7.99	.39	4.76	.39	4.88
14	.47	7.88	.39	5.12	.45	5.00
15	22 16 26.50	22 19 58.06	22 22 36.42	23 31 4.92	23 34 35.36	23 38 4.84
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
	22 16 26.549	22 19 57.946	22 22 36.272	22 31 4·918	23 34 35·416	23 38 4.941
Ji	— 0.136	— 0.112	— 0.120	— 0.148	— 0.158	— 0.171
Cc	— 0.178	— 0.174	— 0.174	+ 0.174	+ 0.175	+ 0.176
Kk	— 0.503	— 0.609	— 0.577	— 0.687	— 0.649	— 0.597
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
$T_0 =$	22 16 25.732	22 19 57.051	22 22 35.401	23 31 4.257	23 34 34.784	23 38 4.349

2

Faden	Aus den Ablesungen am Registrirstreifen in Kremsmünster					
	Stern					
	7 K. W.	8 K. W.	9 K. W.	16 K. O.	17 K. O.	18 K. O.
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
1	22 6 10.56	22 9 —	22 12 20.48	23 20 49.10	23 24 19.56	23 27 49.02
2	.80	42.07	.47	9.30	.60	.19
3	.86	.16	.46	8.94	.57	.07
4	.78	.15	.33	9.27	.60	.06
5	.71	42.20	.45	9.06	.41	49.03
6	.87	41.98	.45	9.15	.62	48.90
7	.74	42.18	.43	9.08	.63	9.28
8	.80	.11	.28	9.00	.58	9.20
9	.71	.15	.28	—	.71	9.23
10	.63	42.13	20.35	9.06	.65	9.12
11	.85	42.18	—	9.00	.63	9.00
12	.74	.05	20.19	9.07	.59	9.21
13	.68	.18	.57	9.01	.62	9.16
14	.65	.04	.57	8.99	.63	9.04
15	22 6 10.69	22 9 42.21	22 12 20.60	23 20 49.09	23 24 19.48	23 27 49.23
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
	22 6 10.738	22 9 42.128	22 12 20.422	23 20 49.080	23 24 19.592	23 27 49.116
Ji	— 0.136	— 0.112	— 0.120	— 0.148	— 0.158	— 0.171
Cc	— 0.178	— 0.174	— 0.174	+ 0.174	+ 0.175	+ 0.176
Kk	— 0.503	— 0.609	— 0.577	— 0.687	— 0.649	— 0.597
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
T_0' =	22 6 9.921	22 9 41.233	22 12 19.551	23 20 48.419	23 24 18.963	23 27 48.525

Beobachtungen in Kremsmünster.

3

Beobachter: Karlinski.

Faden	Aus den Ablesungen am Registrirstreifen in Kremsmünster					
	Stern					
	7 K. O.	8 K. O.	9 K. O.	16 K. W.	17 K. W.	18 K. W.
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
1	22 15 9.40	22 18 40.56	22 21 18.98	23 29 46.82	23 33 17.41	23 36 46.82
2	.24	.58	18.91	.60	.21	.70
3	.22	.69	19.07	.75	.26	.56
4	.31	.49	.05	.62	.15	.61
5	.50	.68	.10	.65	.17	.57
6	.22	.83	.19	.93	.34	.74
7	.26	.60	.15	.85	.42	.72
8	.28	.68	.08	.70	.27	.50
9	.26	.63	.00	.49	.20	.52
10	.25	.58	.12	.64	.35	.75
11	.28	.64	.02	.76	.31	.72
12	.28	.90	.14	.54	.15	.59
13	.30	.67	.07	.75	.16	.86
14	.24	.72	.09	.79	.32	.85
15	22 15 9.13	22 18 40.55	22 21 19.10	23 29 46.61	23 33 17.24	23 36 46.85
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
	22 15 9.278	22 18 40.653	22 21 19.071	23 29 46.700	23 33 17.264	23 36 46.691
Ji	+ 0.002	+ 0.001	+ 0.001	+ 0.046	+ 0.049	+ 0.053
Cc	— 0.479	— 0.469	— 0.470	+ 0.469	+ 0·471	+ 0.476
Kk	— 0.930	— 1.126	— 1.066	— 1.115	— 1.051	— 0.966
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
T_w'=	22 15 7.871	22 18 39.059	22 21 17.536	26 29 46.110	23 33 16.733	23 36 46.254

4

Faden	Aus den Ablesungen am Registrirstreifen in Wien					
	Stern					
	7 K. O.	8 K. O.	9 K. O.	16 K. W.	17 K. W.	18 K. W.
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
1	22 25 —	22 28 56.51	22 31 —	23 40 2.75	23 43 33.32	23 47 2.72
2	25.17	.51	34.81	.52	.11	.62
3	.11	.62	4.99	.67	.18	.45
4	.23	.38	4.93	.52	.06	.53
5	.41	.58	5.02	.55	.09	.47
6	.09	.73	5.09	.83	.24	.65
7	.19	.53	5.05	.75	.34	.64
8	.18	.58	4.98	.60	.17	.39
9	.17	.55	4.89	.42	.13	.45
10	.17	.50	4.92	.57	.24	.64
11	.17	.55	4.92	.66	.23	.62
12	.19	.81	5.06	.47	.05	.49
13	.22	.58	4.98	.63	.08	.76
14	.16	.63	5.00	.70	.24	.74
15	22 25 25.03	22 28 56.45	22 31 35.00	23 40 2.50	23 43 33.15	23 47 2.77
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
	22 25 25.178	22 28 56.567	22 31 34.974	23 40 2.609	23 43 33.175	23 47 2.596
Ji	+ 0.002	+ 0.001	+ 0.001	+ 0.046	+ 0.049	+ 0.053
Cc	— 0.479	— 0.469	— 0.470	+ 0.469	+ 0.471	+ 0.476
Kk	— 0.930	— 1.126	— 1.066	— 1.115	— 1.051	— 0.966
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
$T_w =$	22 25 23.771	22 28 54.973	22 31 33.439	23 40 2.009	23 43 32.644	23 47 2.159

Mit diesen Daten ergibt sich die Längendifferenz auf zweifache Weise, nämlich aus den Ablesungen am Wiener Streifen und aus den Ablesungen am Kremsmünster Streifen.

Man hat: 1. Aus den Ablesungen am Wiener Streifen nach Tabelle 1 und 4:

Stern Nr.	Meridian-Durchgang		Längen-differenz
	Kremsmünster	Wien	
	h m s	h m s	m s
7	22 25 23.771	22 16 25.732	8 58.039
8	22 28 54.973	22 19 57.051	57.922
9	22 31 33.439	22 22 35.401	58.038
16	23 40 2.009	23 31 4.257	57.752
17	23 43 32.644	23 34 34.784	57.860
18	23 47 2.159	23 38 4.349	8 57.810

Mittel $= 8^m\ 57^s.903$

Correction wegen Uhrgang . . $Ly_0 =$ — 0.005

Längendifferenz exclus. Stromzeit und pers. Gl. . . $L_0 = 8^m\ 57^s.898.$

2. Aus den Ablesungen am Kremsmünster Streifen nach Tabelle 2 und 3:

Stern Nr.	Meridian-Durchgang Kremsmünster			Meridian-Durchgang Wien			Längen-Differenz	
	h	m	s	h	m	s	m	s
7	22	15	7.871	22	6	9.921	8	57.950
8	22	18	39.059	22	9	41.233		57.826
9	22	21	17.536	22	12	19.551		57.985
16	23	29	46.100	23	20	48.419		57.681
17	23	33	16.733	23	24	18.963		57.770
18	23	36	46.254	23	27	48.525	8	57.729

$$\text{Mittel} = 8^m\ 57^s.824$$

$$\text{Correction wegen Uhrgang}\ .\ .\ Ly_w = \quad 0.000$$

$$\text{Längendifferenz exclus. Stromzeit und pers. Gl.}\ .\ .\ L_w = 8^m\ 57^s.824$$

Man hat also, wenn die persönliche Gleichung zwischen Herr und Karlinski mit P_{H-K} bezeichnet wird:

$$\text{Wahre Längen-Differenz:}\ L = L_o - \tau + P_{H-K}$$

$$L = L_w + \tau + P_{H-K}$$

$$\text{Mittel:}\ L = \tfrac{1}{2}(L_o + L_w) + P_{H-K}$$

$$\text{Differenz (Stromzeit):}\ \tau = \tfrac{1}{2}(L_o - L_w).$$

Nimmt man die persönliche Gleichung zwischen den beiden Beobachtern, wie sich selbe aus einer Beobachtungsreihe von 20 Sternen ergeben hat, mit $P_{H-K} = -0^s.050$ an, und substituirt die Zahlenwerthe für L_o und L_w, so erhält man:

Oestliche Länge von Wien gegen Kremsmünster (Beobachtungspuncte):

$$L = 8^m\ 57^s.811$$

$$\text{Stromzeit:}\ \tau = 0^s.037.$$

242. Die Signal-Methode. Wird an beiden Stationen der Durchgang eines und desselben Sternes beobachtet und sind T_o und T_w die auf den Meridian reducirten Uhrzeiten des Durchganges an der östlichen und westlichen Station, ist ferner y_w der stündliche Gang der Uhr an der letzteren Station und $U_o - U_w = \Delta U$ die zur Zeit T_o stattfindende Differenz der Uhrzeiten, so hat man nach Gl. (317):

$$L = \Delta U + T_w - T_o + Ly_w, \qquad (317^*)$$

wo noch ΔU zu ermitteln ist. Dieses kann durch Signale geschehen, welche an beiden Stationen mittelst des elektrischen Telegraphen gleichzeitig wahrnehmbar, an den bezüglichen Uhren entweder nach dem Gehör aufgefasst oder auf dem Chronographen registrirt werden. Im ersten Falle werden als Signale gewöhnlich die Schläge des Relais benützt, welche an beiden Stationen nahe gleichzeitig hörbar werden, wenn auf der einen Station der Strom geschlossen wird. Nehmen wir an, auf der östlichen Station werde in irgend einem

Momente der Strom geschlossen und der Relaisschlag zur Uhrzeit U_0 an der östlichen, zur Uhrzeit U_w an der westlichen Uhr gehört. Da letzterer Moment um die Stromzeit τ verspätet ist, so entspricht der Uhrzeit U_0 die Uhrzeit $U_w - \tau$ und es ist demnach

$$\varDelta U = U_0 - U_w + \tau = \varDelta U_1 + \tau \tag{m}$$

zur Uhrzeit U_0.

Wird aber umgekehrt an der westlichen Station der Strom geschlossen und der hiedurch bewirkte Relaisschlag zur Uhrzeit U_0' an der östlichen, zur Uhrzeit U_w' an der westlichen Station gehört, so ist nunmehr U_0' um die Stromzeit verspätet, und der Uhrzeit U_w' entspricht an der östlichen Station die Uhrzeit $U_0' - \tau$: es ist somit jetzt

$$\varDelta U = U_0' - U_w' - \tau = \varDelta U_2 - \tau \tag{n}$$

zur Uhrzeit U_0'.

Im Mittel folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$\varDelta U = \tfrac{1}{2}(\varDelta U_1 + \varDelta U_2), \tag{o}$$

also unabhängig von der Stromzeit und giltig für die Zeit $\frac{1}{2}(U_0 + U_0')$.

Es ist noch zu zeigen, wie die Differenz der Uhrzeiten, welche einem bestimmten absoluten Moment, etwa der Uhrzeit U_0 der östlichen Station entspricht, auf einen anderen Moment, etwa für die Uhrzeit T_0 der östlichen Uhr reducirt werden kann. Nehmen wir an, es sei $\varDelta U_1 = U_0 - U_w$ die Differenz der Uhrzeiten beider Uhren zur Uhrzeit U_0 der östlichen Uhr gegeben; es soll nun diese Differenz, mit $\varDelta U_r$ bezeichnet, für eine andere Uhrzeit T_0 der östlichen Uhr gesucht werden.

Sind y_0 und y_w in Zeitsecunden die stündlichen Gänge beider Uhren gegen Sternzeit, so ist $y_0 - y_w$ der relative stündliche Gang beider Uhren und demnach ist $(T_0 - U_0)(y_0 - y_w)$ die gesuchte Aenderung der Differenz der Uhrzeiten in der Zwischenzeit $T_0 - U_0$, wobei letztere in Stunden auszudrücken ist. Bleibt z. B. die Uhr im Osten gegen jene im Westen zurück, in welchem Falle $y_0 - y_w$ positiv ist, so nimmt die Differenz der Uhrzeiten mit der Zeit ab, es muss demnach die zur Zeit T_0 gehörige Differenz $\varDelta U_r < \varDelta U_1$ sein, wenn $T_0 > U_0$ ist. Demnach wird sein:

$$\varDelta U_r = \varDelta U_1 - (T_0 - U_0)(y_0 - y_w). \tag{323}$$

Das zweite Glied ist die gesuchte Reduction in Zeitsecunden, wenn $T_0 - U_0$ in Stunden, y_0 und y_w in Zeitsecunden eingesetzt wird.

Werden die Signale registrirt, so ergeben sich die Differenzen $\varDelta U_1$ und $\varDelta U_2$ durch die Ablesuug der Zeiten für ein und dasselbe Signal an den beiden Registrirstreifen.

Selbstverständlich werden eine Reihe von Signalen in kurzen Zwischenräumen abwechselnd auf der einen und der anderen Station gegeben werden, welche Zwischenräume davon abhängig sein werden, ob die Signale durch das Gehör aufgefasst oder am Chronographen registrirt werden. Im ersteren Falle werden die aufeinander folgenden zu einer Reihe vereinigten Signale in etwa von 10—10 Secunden, im letzteren Falle in von Secunde zu Secunde nicht viel abweichenden Intervallen gegeben.

Die aus den einzelnen gegenseitig beobachteten Signalen abgeleiteten Uhrzeitdifferenzen, so zu einer Reihe gehören, werden zu einem Mittel vereinigt; der sich ergebende Mittelwerth der Differenz der Uhrzeiten ist dann zum Mittel der Uhrzeiten der östlichen, beziehentlich westlichen Station gehörig.

Reducirt man dieses Mittel der Differenz der Uhrzeiten auf die Zeit T_o der östlichen Uhr, so kann die Längendifferenz nach Gl. (317) berechnet werden, wobei aber noch die persönliche Gleichung zu berücksichtigen kommt.

Bei der Ausführung der Signal-Methode wird wegen der genauen Ermittlung der Differenz der Uhrstände für die Zeit des Signalwechsels oder der genauen Ermittlung der Uhrgänge für beide Uhren unerlässlich gefordert, dass jeder Signalwechsel von zwei vollständigen Zeitbestimmungen, wozu die Methode der Zeitbestimmung aus Meridian-Durchgängen bekannter Sterne fast ausschliesslich gewählt wird, eingeschlossen wird. Jede Zeitbestimmung umfasst gewöhnlich die Beobachtung von einem Polarsterne und 4—6 Zeitsternen, welche auf beide Kreislagen gleichmässig zu vertheilen sind. Wird für jeden Abend ein zweimaliger Signalwechsel in Aussicht genommen, dann werden drei vollständige aufeinander folgende Zeitbestimmungen gemacht; der erste Signalwechsel ist zwischen der ersten und zweiten Zeitbestimmung, der zweite Signalwechsel zwischen der zweiten und dritten Zeitbestimmung vorzunehmen. Im letzteren Falle wird die zweite Zeitbestimmung erweitert, indem ausser dem Polsterne acht Zeitsterne, auf beide Kreislagen gleichmässig vertheilt, beobachtet werden.

Die Zeitbestimmungen werden nur local registrirt; sie bieten das Mittel, die Instrumentalfehler und den Uhrstand genau bestimmen zu können, bezüglich die Veränderlichkeit dieser Grössen während der Beobachtungsdauer kennen zu lernen.

Sind an einem Abende zwei Signalwechsel vollzogen worden, so kann man die Resultate beider von einander gesondert oder zu Mittelwerthen vereint behandeln und zur Ableitung des Längenunterschiedes entweder die Gl. (317) unter Zuziehung von Gl. (323) oder die Gl. (301) anwenden. Im Vorstehenden ist die Ausführung der ersten Gleichungen ausführlich erörtert worden. Es soll nunmehr Gl. (301) zur Reduction in Anwendung kommen. Wenn man die zwei Signalwechsel getrennt von einander behandelt, so wird man die Uhrstände x_o, x_w durch Interpolation aus den Resultaten der ersten und zweiten, die Uhrstände x_o', x_w' aus jener der zweiten und dritten Zeitbestimmung bestimmen; man hat dann für die Längendifferenz L, wenn P die persönliche Gleichung ist, und $\varDelta U_3$, $\varDelta U_4$ für den zweiten Zeichenwechsel dasselbe bedeuten, was $\varDelta U_1$ und $\varDelta U_2$ für den ersten Zeichenwechsel sind:

für den ersten Signalwechsel: $L = \varDelta U + x_o - x_w + P$,

„ „ zweiten Signalwechsel: $L = \varDelta U' + x_o' - x_w' + P$, (301*)

wo $\varDelta U = \frac{1}{2}(\varDelta U_1 + \varDelta U_2)$ und $\varDelta U' = \frac{1}{2}(\varDelta U_3 + \varDelta U_4)$.

Wenn man die an einem Abende vollzogenen zwei Zeichenwechsel zu Mittelwerthen vereinen will, so werden die Differenzen der Uhrzeiten aus beiden

Signalwechseln, sowie die Uhrzeiten zum Mittel vereinigt; aus den durch die drei Zeitbestimmungen erhaltenen Uhrständen wird mit Rücksicht auf die Zahl der in jeder Zeitbestimmung beobachteten Zeitsterne das Mittel gebildet, von welchem unter Zugrundelegung des Mittels der stündlichen Uhrgänge, aus der ersten und zweiten, aus dieser und der dritten Zeitbestimmung abgeleitet, der Uhrstand für das Mittel der Uhrzeiten der Signalwechsel abgeleitet wird.

Erstes Beispiel. Am 24. September 1865 wurden zum Zwecke der Ermittlung der Längendifferenz zwischen Wien (Laaer Berg) und Berlin die auf beiden Stationen gegebenen Signale an den Chronographen registrirt. In Wien beobachtete Dr. E. Weiss, in Berlin Dr. W. Förster. Die Ablesung der Registrirstreifen hat die folgenden Daten ergeben:

Signale.

Gegeben in Wien.

Abgelesen in Wien	Abgelesen in Berlin	Differenz
23^h	23^h	
m s	m s	m s
29 35 64	18 6.70	11 28.94
37.58	8.60	28.98
39.19	10.19	29.00
41.50	12.56	28.94
43.21	14.27	28.94
45.10	16.20	28.90
47.31	18.36	28.95
49.39	20.42	28.97
51.74	22.79	28.95
54.48	25.52	28.96
57.50	28.56	28.94
30 0.13	31.20	28.93
2.88	33.85	29.03
5.30	36.33	28.97
7.63	38.63	29.00
10.00	40.98	29.02
12.49	43.45	29.04
15.27	46.28	28.99
17.92	48.90	29.02
20.66	51.60	29.06
25.63	56.63	29.00
27.97	58.98	28.99
30.48	19 1.45	29.03
32.75	3.79	28.96
35.24	6.28	28.96
50.71	21.73	28.98
53.22	24.28	28.94
55.44	26.51	28.93
57.68	28.75	28.93
31 0.06	31.08	28.98
2.37	33.44	28.93
4.50	35.52	28.98
6.78	37.85	28.93
9.00	40.07	28.93
31 11.31	19 42.39	11 28.92

Mittel $\Delta U_1 = 11^m\ 28^s.969$
um $23^h\ 30^m.3$ Wiener Uhrzeit

Gegeben in Berlin.

Abgelesen in Wien	Abgelesen in Berlin	Differenz
23^h	23^h	
m s	h m	m s
27 4.12	15 35.08	11 29.04
6.07	37.09	28.98
8.04	39.05	28.99
10.11	41.12	28.99
12.11	43.12	28.99
14.06	45.10	28.96
16.03	47.09	28.94
18.03	49.09	28.94
20.15	51.13	29.02
22.07	53.12	28.95
24.02	55.03	28.99
26.45	57.48	28.97
29.44	16 0.43	29.01
32.40	3.38	29.02
36.12	7.12	29.00
39.34	10.37	28.97
42.03	13.09	28.94
44.47	15.46	29.01
46.59	17.52	29.07
49.40	20.43	28.97
52.70	23.67	29.03
55.43	26.45	28.98
59.35	30.39	28.96
28 2.42	33.43	28.99
5.01	36.07	28.94
7.02	38.05	28.97
9.11	40.13	28.98
11.03	42.06	28.97
12.99	44.07	28.92
15.00	46.02	28.98
17.10	48.15	28.95
19.02	50.05	28.97
21.09	52.10	28.99
23.07	54.10	28.97
25.05	16 56.08	11 28.97

Mittel $\Delta U_2 = 11^m\ 28^s.980$
um $23^h\ 27^m.8$ Wiener Uhrzeit

Mittel: $\Delta U = 11^m\ 28^s.975$ um $23^h\ 29^m.1$ Wiener Uhrzeit.

Aus den local registrirten Sternen ist gefunden worden:

Differenz der Meridiandurchgänge zwischen Wien und Berlin am 24. September um $23^h\ 0^m.9\ (U_0)$ Wiener Zeit

$$T_w - T_o = + 0^m\ 32^s.548 - \tfrac{1}{2}(F_o - W_o) - \tfrac{1}{2}(F_w - W_w),$$

oder mit Rücksicht darauf, dass $\frac{1}{2}(F_o - W_o) = 0$, $\frac{1}{2}(F_w - W_w) = - 0^s.003$ ist,*)

$$T_w - T_o = + 0^m\ 32^s.551$$

stündlicher relativer Gang beider Uhren $y_o - y_w = - 0^s.137$

stündlicher Gang der westlichen Uhr . . . $y_w = + 0^s.001$

genäherter Werth der Längendifferenz . . . $L = 0^h.2004$.

Reducirt man die Differenz der Uhrzeiten $\varDelta U$ zu

$U_0 = 23^h\ 29^m.1$ Wiener Zeit gehörig,

auf $T_0 = 23^h\ 0^m.9$ Wiener Zeit,

so erhält man nach Gl. (323):

$$\begin{aligned} \varDelta U &= 11^m\ 28^s.975 \\ -(T_0 - U_0)(y_o - y_w) &= - \quad 0\ .064 \\ \hline \varDelta U_r &= 11^m\ 28^s.911; \end{aligned}$$

weiter ist:

$$\begin{aligned} T_w - T_0 &= \ 0\ \ 32\ .551 \\ Ly_w &= + \quad 0\ .000 \\ \hline \end{aligned}$$

nach Gl. (317*) wird somit: $L = 12^m\ 1^s.462$,

um welchen Werth Wien östlich von Berlin liegt.

Die Stromzeit ergibt sich aus $\tau = \frac{1}{2}(\varDelta U_2 - \varDelta U_1)$ mit $+ 0^s.006$.

Zweites Beispiel. Am 25. September 1868 wurden zum Zwecke der Ermittlung der Längendifferenz zwischen Wien und Fiume die folgenden Signale in Wien und Fiume gegeben und nach dem Gehör aufgefasst, u. zw. in Wien von Dr. Herr, in Fiume von Tinter.

Signale gegeben in Wien	
beobachtet	
in Wien	in Fiume
h m s	h m s
23 49 43.1	23 41 49.2
49 53.0	41 59·1
50 3.4	42 9.3
13.2	19.1
23.0	29.0
33.3	39.3
43.5	49.2
50 53.8	42 59.7
51 4.0	43 10.0
23 51 13.7	23 43 19.8

Signale gegeben in Fiume	
beobachtet	
in Wien	in Fiume
h m s	h m s
23 57 41.3	23 49 47.2
57 51.5	49 57.4
58 1.6	50 7.6
11.5	17.4
21.2	27.1
31.4	37.3
41.9	47.5
58 52.0	50 57.6
59 1.9	51 7.8
23 59 11.4	23 51 17.2

*) Die persönliche Gleichung zwischen den beiden Beobachtern ist für die Registrirbeobachtungen gefunden worden:

bei Kr. O. $F_o - W_o = \quad 0^s.000$

bei Kr. W. $F_w - W_w = -0\ .007$.

Hieraus erhält man die Einzelwerthe der Uhrzeitdifferenzen, wie folgt:

$\varDelta U_1 = 7^m\ 53^s.9$	$\varDelta U_2\ 7^m\ 54^s.1$
53 .9	54 .1
54 .1	54 .0
54 .1	54 .1
54 .0	54 .1
54 .0	54 .1
54 .3	54 .4
54 .1	54 .4
54 .0	54 .1
$7^m\ 53^s.9$	$7^m\ 54^s.2$
Mittel $\varDelta U_1 = 7^m\ 54^s.03$	$\varDelta U_2 = 7^m\ 54^s.160$
um $23^h\ 51^m.5$ Wiener Zeit	um $23^h\ 58^m.4$ Wiener Zeit;

mit diesen Mittelwerthen wird

$$\varDelta U' = 7^m\ 54^s.095 \text{ um } 23^h\ 55 \text{ Wiener Zeit}$$

$$\tau = +\ 0^s.065.$$

Aus den Zeitbestimmungen haben sich für $23^h\ 55^m$ Wiener Zeit die nachfolgenden Uhrcorrectionen ergeben:

$$x_o = +\ 3^s.013$$

$$x_w = +\ 11\ .614$$

$$x_o - x_w = -\ 8^s.601.$$

Die Längendifferenz aus den gehörten Signalen, ohne Berücksichtigung der persönlichen Gleichung, wird nach Einsetzung dieser Werthe in Gl. (301):

$$L = 7^m\ 45^s.494,$$

um welchen Werth Wien östlich von Fiume liegt.

243. Die Coincidenz-Methode. Diese Methode setzt voraus, dass auf jeder Station neben der Hauptuhr noch eine zweite Pendeluhr aufgestellt ist, welche, mit einem Contactapparate versehen, in den Linienstrom eingeschaltet werden kann, und welche derart regulirt ist, dass sie in je zwei bis drei Minuten eine Secunde gegen Sternzeit gewinnt.

Da mit dieser Uhr, der Coincidenzuhr, ein Contactapparat verbunden ist, so wird mit jedem Schlage derselben der Strom geschlossen und auf jeder Station ein hörbarer Relaisschlag zu Stande gebracht; die Coincidenzen dieser Relaisschläge mit den Hauptuhren jeder Station, etwa fünf an der Zahl werden beobachtet. Sie bieten auch ein Mittel, die Differenz der Uhrzeiten der Hauptuhren, d. i, $\varDelta U$ zu bestimmen.

Nehmen wir an, es werde die Coincidenz- oder Hilfsuhr zuerst an der östlichen Station eingeschaltet und zur Zeit C derselben eine Coincidenz an der östlichen Hauptuhr zur Zeit U_o, und zur Zeit C' der Coincidenzuhr eine

Coincidenz an der westlichen Hauptuhr um U_w beobachtet, wobei der Relaisschlag in W um die Stromzeit τ später als in O gehört wird. Zwischen den Angaben der beiden Hauptuhren und der östlichen Hilfsuhr bestehen nun die Relationen:

$$U_0 = C, \qquad U_w - \tau = C'.$$

Zwischen den beiden beobachteten Coincidenzen liegt nothwendig eine ganze Zahl, u. zw. $C' - C$ Schläge der Hilfsuhr. Sind nun n Schläge der Hilfsuhr $= n - 1$ Secunden Sternzeit, so entsprechen $C' - C$ Schlägen der Hilfsuhr $\frac{n-1}{n}(C' - C)$ Sternzeitsecunden. Da aber die Hauptuhren nicht genau der Sternzeit folgen werden, so muss dieses Intervall mit Rücksicht auf den Gang der Hauptuhren ermittelt werden. Sei nun y_w der stündliche Gang der Hauptuhr an der westlichen Station W gegen Sternzeit, so ist 1 Secunde Sternzeit $= \frac{3600}{3600 + y_w}$ Secunden der Hauptuhr in W, demnach sind $C' - C$ Schläge der Coincidenzuhr $= \frac{3600}{3600 + y_w} \cdot \frac{n-1}{n}(C' - C)$ Secunden der Hauptuhr in W. Nunmehr kann man die Uhrzeiten, also auch die Uhrdifferenz auf denselben absoluten Moment bezogen, bestimmen.

Es entsprechen dem Momente U_0 oder C die Zeiten der Hauptuhren:

U_0 . . . . in der Station O

$U_w - \tau - \frac{3600}{3600 + y_w} \frac{n-1}{n}(C' - C)$ in der Station W,

und die auf den Moment U_0 sich beziehende Differenz der Uhrzeiten beider Hauptuhren im Sinne östliche Uhr — westliche Uhr ist demnach:

$$\Delta U = U_0 - U_w + \frac{3600}{3600 + y_w} \frac{n-1}{n}(C' - C) + \tau \qquad (324)$$

Dieser Ausdruck bleibt ungeändert, es mag die Coincidenz in W früher oder später als in O beobachtet werden, d. h. es mag $C' - C$ negativ oder positiv sein.

Nachdem die Reihe der Coincidenzen durch die Einschaltung der Hilfsuhr an der östlichen Station beobachtet worden ist, wird die Coincidenzuhr an der westlichen Station, in W, eingeschaltet und die gleiche Anzahl der Coincidenzen, wie in der früheren Reihe beobachtet.

Der Ausdruck zur Ermittlung der Differenz der Uhrzeit der beiden Hauptuhren bleibt in diesem Falle bis auf das Zeichen von τ mit jenem in (324) gegebenen identisch. Da jetzt der Strom von der westlichen Hilfsuhr ausgeht, so wird das beobachtete U_0 um τ zu gross sein und man hat statt U_0 $U_0 - \tau$ in Rechnung zu nehmen, wodurch in Gl. (324) statt $+ \tau$ nunmehr $- \tau$ einzusetzen ist.

Das arithmetische Mittel aus den beiden so erlangten Werthen von $\varDelta U$ ist frei von dem Einflusse der successiven Fortpflanzung des Stromes; die Differenz derselben gibt die doppelte Stromzeit $= 2\tau$.

Nun beobachtet man, wie oben gesagt wurde, immer mehrere, etwa fünf aufeinander folgende Coincidenzen, wodurch man ebenso viele Werthe für $\varDelta U$ erhält; z. B. Coincidenzen mit der Hilfsuhr in O.:

Beobachtete Coincidenz in O.	Beobachtete Coincidenz in W.;	hieraus nach Gl. (324):		
U_0	U_w	$\varDelta U$	zur Uhrzeit	U_0
U_0'	U_w'	$\varDelta U'$	„ „	U_0'
U_0''	U_w''	$\varDelta U''$	„ „	U_0''
U_0'''	U_w'''	$\varDelta U'''$	„ „	U_0'''
U_0^{IV}	U_w^{IV}	$\varDelta U^{IV}$	„ „	U_0^{IV}

Da während der Zwischenzeit der relative Gang beider Uhren constant genommen werden muss, so werden die Aenderungen im Werthe $\varDelta U$ der Zeit proportional sein und man hat dann als Endresultat:

Mittel der Werthe $\varDelta U$ giltig für das Mittel der Uhrzeiten U_0, U_0' . . .

Um nach Gl. (324) den Werth $\varDelta U$ rechnen zu können, wird die Kenntniss von $C' - C$, d. i. die Anzahl der Schläge der Hilfsuhr, nothwendig, welche zwischen zwei in O und W beobachteten Coincidenzen liegen. Es könnte nun allerdings der Beobachter jener Station, welche die Hilfsuhr eingeschaltet hat, auch den coincidirenden Schlag der Hilfsuhr aufschreiben und es wäre das auch dem Beobachter auf der anderen Station möglich, wenn die Relaisschläge nach Verabredung mit einer bestimmten Secunde der Hilfsuhr beginnen würden, wodurch die Differenz $C' - C$ unmittelbar bekannt würde. Die Erfüllung der letzteren Forderung, nämlich die Relaisschläge nach Verabredung mit einer bestimmten Secunde der Hilfsuhr beginnen zu lassen, dürfte in der Praxis zu mannigfachen Störungen führen und es wird daher der Werth $C' - C$ auf andere Weise ermittelt.

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{3600}{3600 + y_w} = 1 - \frac{y_w}{3600} = \lambda, \tag{a}$$

welche Zahl immer sehr nahe $= 1$ ist, ferner

$$\frac{n-1}{n} = S, \tag{b}$$

wo S den Werth eines Schlages der Hilfsuhr, in Sternzeitsecunden ausgedrückt, bedeutet, so wird Gl. (324) mit Weglassung von τ

$$\varDelta U = U_0 - U_w + \lambda S\,(C' - C). \tag{324*}$$

Da es immer leicht ist, einen bis auf den Bruchtheil der Secunde genauen Werth von $\varDelta U$ zu erlangen, so kann man dann $(C' - C)$ bestimmen;

sei der Näherungswerth von $\varDelta U$ mit $\varDelta U_n$ bezeichnet und $\varDelta U = \varDelta U_n \pm x$, so hat man aus vorstehender Gleichung

$$\lambda S (C' - C) = \varDelta U_n + U_w - U_o \pm x.$$

Es ist aber $U_w + \varDelta U_n$ die aus U_w mit der genäherten Uhrzeitdifferenz $\varDelta U_n$ abgeleitete Uhrzeit auf der östlichen Station O; setzt man

$$U_w + \varDelta U_n - U_o = N \quad \text{und} \quad C' - C = m, \tag{c}$$

so hat man:

$$\lambda S m = N \pm x. \tag{325}$$

Das Product λS ist immer kleiner als 1; wird nun vorausgesetzt, dass unmittelbar aufeinanderfolgende Coincidenzen auch beobachtet sind, also keine dazwischen liegt, welche unbeobachtet geblieben ist, so wird $N < n - 1$ sein, und es ist nun klar, dass

im Falle des oberen Zeichens $m = N + 1$
„ „ „ unteren Zeichens $m = N$

sein muss.

Mit dem entsprechenden Werthe von m findet sich aus Gl. (325) die Correction x.

Ist aber $N > n - 1$ und $\dfrac{N}{n-1} = q + R$, so liegen zwischen den zwei beobachteten Coincidenzen q unbeobachtet gebliebene Coincidenzen und man hat dann in diesem Falle

$$m = N + q + 1,$$

beziehentlich:

$$m = N + q$$

zu nehmen.

Um zu einem genäherten Werthe von $\varDelta U$ zu gelangen, ist es am vortheilhaftesten und einfachsten, denselben durch einige Signale mittelst Relaisschlägen, welche an den Hauptuhren aufgefasst werden, zu ermitteln. Mit Hilfe eines genäherten Werthes des Längenunterschiedes kann man auch auf folgende Weise zur Kenntniss des Näherungswerthes $\varDelta U_n$ gelangen. Ist der genäherte Werth des Längenunterschiedes L_n und bezeichnet man die einem absoluten Momente entsprechenden Uhrcorrectionen der Hauptuhren in O und W bezüglich mit x_o und x_w, so ist für diesen Moment:

$$\varDelta U_n = L_n - (x_o - x_w) \tag{d}$$

mit der nächsten ganzen Secunde zu nehmen.

Dieses letzte Verfahren erheischt aber eine besondere Vorsicht, damit nicht N um 1^s und in Folge dessen $\varDelta U$ um λS^s fehlerhaft werde.

B e i s p i e l. Zum Zwecke der Längenbestimmung zwischen Wien und Fiume im Jahre 1868 wurden auch Coincidenzen nach dem Gehör beobachtet, u. zw. in Wien von W. T i n t e r, in Fiume von Dr. J. H e r r. Am 25. September waren die Beobachtungsdaten folgende:

Coincidenzen mit der Wiener Hilfsuhr:

in Wien	in Fiume
$U_o = 0^h\ 55^m\ 16^s$	$U_w = 0^h\ 49^m\ 10^s$
57 19	51 10
0 59 10	53 8
1 1 21	0 55 12.

Aus gehörten Signalen hat sich der Näherungswerth für die Differenz der Uhrzeiten, d. i. $\varDelta U_n$ mit $7^m\ 54^s$ ergeben. Setzt man $\varDelta U = \varDelta U_n + x$, so wird

$U_w + \varDelta U_n =$	und $U_w + \varDelta U_n - U_o = N =$
$0^h\ 57^m\ 4^s$	108
0 59 5	106
1 1 2	103
$1^h\ 3^m\ 6^s$	105

und die Gl. (325) für die einzelnen Beobachtungen angewendet gibt:

$$\lambda S m = 108 + x$$
$$\lambda S m' = 106 + x$$
$$\lambda S m'' = 103 + x$$
$$\lambda S m''' = 105 + x.$$

Für die Wiener Hilfsuhr waren 121 Schläge $= 120^s$ Sternzeit, und für die Hauptuhr in Fiume war der stündliche Gang $y_w = + 0.0079^s$; es ist somit

$$\lambda = 1 - \frac{0.0079}{3600} = 1, \quad S = \frac{120}{121} = 0.9917$$

und

$$\lambda S = 0.9917 = 1 - 0.0083.$$

Da ferner $N < 120^s$, so sind es je zwei unmittelbar aufeinander folgende Coincidenzen, welche eben zu Paaren verbunden sind; man hat also, da in der Gl. $\lambda S m = N + x$, der Werth x positiv ist, $m = N + 1$ zu nehmen, wodurch obige Gleichungen werden:

$$109\,\lambda S = 108 + x, \quad \text{d. i. mit } \lambda S = 1 - 0.0083, \ldots\ 1 - 0.905 = x$$
$$107\,\lambda S = 106 + x \qquad 1 - 0.888 = x$$
$$104\,\lambda S = 103 + x \qquad 1 - 0.863 = x$$
$$106\,\lambda S = 105 + x \qquad 1 - 0.880 = x$$

oder:

$x =$	somit $\varDelta U =$	um	
$+ 0.095$;	$7^m\ 54^s.095$	$0^h\ 55^m\ 16^s$	Wiener Zeit
0.112	54 .112	„ 0 57 19	„ „
0.137	54 .137	„ 0 59 19	„ „
0.120	7^m 54 .120	„ 1 1 21	„ „

Mittel: $\varDelta U = 7^m\ 54^s.116$ um $0^h\ 58^m\ 19^s$ Wiener Zeit.

Da die Hilfsuhr an der östlichen Station eingeschaltet war, so ist die so ermittelte Differenz der Uhrzeiten um die Stromzeit τ zu klein, so dass, abgesehen von der persönlichen Gleichung,

$$\Delta U = 7^m\,54^s.116 + \tau$$

ist.

Die Coincidenzuhr in Fiume ist an diesem Tage auch eingeschaltet gewesen und es sind die drei folgenden zusammengehörigen Coincidenzen beobachtet worden.

Coincidenzen mit der Fiumaner Hilfsuhr:

in Wien	in Fiume
$0^h\ 36^m\ 39^s$	$0^h\ 30^m\ 45^s$
38 57	33 3
$0^h\ 41^m\ 15^s$	$0^h\ 35^m\ 19^s$

Mit dem Näherungswerthe für die Differenz der Uhrzeiten $\Delta U_n = 7^m\ 54^s$ wird nunmehr

$$N = 120$$
$$= 120$$
$$= 118.$$

Für die Fiumaner Hilfsuhr waren 141 Schläge $= 140^s$ Sternzeit und für die Hauptuhr in Wien war der stündliche Gang $y_0 = + 0^s.0070$; es ist nunmehr: $\lambda = 1$, $S = 0.9929$, $\lambda S = 1 - 0.0071$. Mit Beziehung auf die Reduction der Coincidenzen mit der Wiener Hilfsuhr, hat man in diesem Falle:

$$121\,\lambda S = 120 + x$$
$$121\,\lambda S = 120 + x$$
$$119\,\lambda S = 118 + x,$$

und mit dem Werthe von λS der Reihe nach:

$x = + 0.141$ und	$\Delta U_1 = 7^m\ 54^s.141$	um $0^h\ 36^m\ 39^s$	Wiener Zeit
0.141	$54^s.141$	„ $38^m\ 57^s$	„ „
0.155	$7^m\ 54^s.155$	„ $0^h\ 41^m\ 15^s$	„ „
Mittel	$\Delta U_1 = 7^m\ 54^s.146$	um $0^h\ 38^m\ 57^s$	„ „

Da die Hilfsuhr an der westlichen Station eingeschaltet war, so ist die ermittelte Differenz der Uhrzeiten um die Stromzeit τ zu gross, so dass, abgesehen von der persönlichen Gleichung,

$$\Delta U_1 = 7^m\ 54.146 - \tau$$

ist. Wegen des fast unmerklichen relativen Ganges beider Uhren kann man beide Differenzen der Uhrzeiten direct mit einander verbinden, um die Stromzeit zu finden. Man erhält $\tau = + 0^s.015$

und $\Delta U' = 7^m\ 54^s.131$ um $0^h\ 48^m\ 38^s$ Wiener Zeit.

Aus den auf beiden Stationen ausgeführten Zeitbestimmungen hat sich für $0^h\ 48^m\ 38^s$ Wiener Zeit die Uhrcorrection x ergeben,

für die östliche Station: $x_o = +\ 3^s.018$

für die westliche Station: $x_w = +\ 11.627$,

mithin ist: $x_o - x_w = -\ 8^s.609$,

und die Längendifferenz zwischen Wien und Fiume, exclusive der persönlichen Gleichung nach der Gl. (301):

$$L = \varDelta U' + x_o - x_w,$$
$$L = 7^m\ 45^s.522.$$

Wollte man z. B. die in Wien beobachtete erste Coincidenz um $0^h\ 55^m\ 16^s$ mit der in Fiume beobachteten letzten um $0^h\ 55^m\ 12^s$ verbinden, so hätte man

Fiumaner Uhrzeit $U_w + \varDelta U_o = 1^h\ 3^m\ 6^s + x$ Wiener Uhrzeit;

beobachtete Coincidenz in Wien $U_o = 0^h\ 55^m\ 16^s$.

Es ist daher

$$N = 1^h\ 3^m\ 6^s - 0^h\ 55^m\ 16^s = 7^m\ 50^s = 470^s,$$

und
$$\lambda S m = 470 + x.$$

In diesem Falle hat man $\dfrac{N}{n-1} = \dfrac{470}{120} = 3 +$ Rest, d. h. es ist $q = 3$, es liegen demnach zwischen den zwei verbundenen Coincidenzen 3 Coincidenzen, es ist, da x positiv, $m = N + q + 1$, $m = 474$. Mit diesem Werthe m und jenem für $\lambda S = 0.9917$ des früheren Beispieles wird Gl. (325) folgende:

$$470.064 = 470 + x,$$

woraus $x = +\ 0^s.064$ und hiermit $\varDelta U = 7^m\ 54^s.064$ folgt.

244. Nachdem die drei Methoden der Längenbestimmung mit Hilfe des elektrischen Telegraphen erörtert worden sind, soll noch in allgemeinen Zügen, was auf die Wahl der Methode, auf die persönliche Gleichung und auf die elektrischen Verbindungen Bezug hat, angefügt werden.

Wenngleich die Genauigkeit des Endergebnisses immer in erster Reihe für die Wahl der Beobachtungsmethode massgebend bleibt, so wird man doch auch den andern mit dieser Methode bei der practischen Ausführung sich ergebenden Umständen Rechnung tragen müssen.

Die Registrirmethode gewährt gegenüber den beiden anderen Methoden unbestritten eine erhebliche Vermehrung des Genauigkeitsgrades, indem ja jeder Stern auf beiden Stationen beobachtet und wechselseitig registrirt schon so viele Werthe für die Längendifferenz gibt, als Fadenantritte beobachtet und registrirt worden sind. Der relative Uhrgang wird bei dieser Methode mit grosser Sicherheit erhalten. Da aber an jedem Abende eine grössere Zahl von Sternen beobachtet werden, also die Beobachtungsreihe eine lange Zeit dauert, so muss für diese Zeit auch die betreffende Telegraphenleitung der

Längenbestimmung ausschliesslich zur Verfügung gestellt werden, wozu sich die Telegraphenverwaltungen immer nur äusserst schwer entschliessen können; auch werden in langen Linien, für längere Zeit beansprucht, öftere Störungen zu befürchten sein. Das Uebereinkommen mit der Telegraphenverwaltung wird noch dadurch erschwert werden, dass, wenn man dieselben Sterne für die ganze Dauer der Längenbestimmung beibehalten will, die Telegraphenleitung in Folge des Vorrückens der Sternzeit gegen mittlere Zeit zu ungleichen Zeiten zur Verfügung gestellt werden müsste. Diesem Uebelstande könnte allerdings durch die Wahl anderer Programmsterne begegnet werden; das thut man jedoch nicht gern, weil dadurch die bei der Reduction dieser Beobachtungen ohnehin weitläufige Arbeit noch mehr vermehrt wird. Bei allen drei Methoden der Längenbestimmung mittelst des elektrischen Telegraphen sind an jedem Abende mindestens zwei Zeitbestimmungen auszuführen; bei der Signal- und Coincidenzmethode sind diese Zeitbestimmungen, indem ja die Beobachtungen der Signale und Coincidenzen nur eine kurze Zeit beanspruchen, als die eigentliche Arbeit anzusehen, während bei der Registrirmethode ausser den Zeitbestimmungen noch lange Beobachtungsreihen abzuführen sind, wodurch man von der Witterung mehr abhängig wird.

Bei der Signal- und Coincidenzmethode wird die Vergleichung der Zeitscalen meistens durch nur auf jeder Station local registrirte Zeitsbestimmungen vermittelt; die telegraphische Leitung wird daher nur für die kurze Zeit gebraucht, welche die Abgabe und der Empfang der Signale, beziehentlich der Coincidenzen und der damit im Zusammenhange stehenden Correspondenz erfordert, was als ein Vortheil anzusehen ist. Die Coincidenzmethode hat gegenüber den beiden anderen Methoden den Nachtheil, dass sie nebst den Apparaten, welche bei der Registrir- und Signalmethode nothwendig sind, noch einer zweiten Uhr an jeder Station bedarf; sie wird daher, wenn nur eine Methode zur Ermittlung der Längendifferenz angewendet wird, auch gegen die Signalmethode an Einfachheit bei der Ausführung zurückstehen. An Genauigkeit steht die Signal- und Coincidenzmethode jener der Registrirmethode nicht wesentlich nach.

Erwägt man nun alle mit den drei Methoden verbundenen Umstände, so wird man nicht umhin können, im Allgemeinen der Signalmethode gegenüber den beiden anderen Mothoden den Vorzug zu geben und das noch umsomehr, als man bei Beachtung der nöthigen Vorsichtsmassregeln, dass man nämlich an jedem Abende zwei Zeichenwechsel vornimmt, welche von Zeitbestimmungen eingeschlossen sind, dass man vor jedem Zeichenwechsel eine Abgleichung des Stromes ausführt, wohl denselben Genauigkeitsgrad wie bei der Registrirmethode wird erreichen können; denn selbst, wenn man bei letzterer Methode die Abgleichung der Ströme vor Beginn der Registrirung vornimmt, wird dieselbe für die lange Zeit, welche diese Methode erfordert, nicht anhalten und eine öftere Abgleichung im Laufe der Operation des Registrirens wird zu manchen anderen Unzukömmlichkeiten führen.

Was die persönliche Gleichung betrifft, so ist dieselbe entweder direct zu bestimmen und darnach das Endresultat um diesen Betrag zu verbessern, oder es ist der Einfluss derselben durch den Wechsel der Beobachter auf den Stationen in der Mitte der Längenbestimmungsoperation zu eliminiren. Wird die persönliche Gleichung direct bestimmt, so empfiehlt sich das schon in (§. 235) erörterte Verfahren, welches bekanntlich in der abwechselnden Registrirung der ersten und zweiten Hälfte der Fäden durch die beiden Beobachter besteht. Wenn man dann einigermassen Gewissheit haben will, dass der direct ermittelte Werth der persönlichen Gleichung mit jenem, wie er bei der Längenbestimmungsoperation wirklich statt hat, identisch sein soll, so muss man 1) nahezu so viele Sterne zur directen Bestimmung verwenden, als die Gesammtzahl der während der Längenbestimmung beobachteten Sterndurchgänge beträgt, 2) die Sterne so wählen, dass die Zenithdistanzen derselben im Mittel dem der Längenbestimmungssterne nahe gleichkommt und dass man 3) die Beobachtungen auf beide Instrumente und auch auf beide Kreislagen gleich vertheilt.

Die persönliche Gleichung kann auch dadurch ermittelt werden, dass von beiden Beobachtern an beiden Instrumenten vollständige Zeitbestimmungen ausgeführt werden; die Differenz der aus den Beachtungen beider Beobachter abgeleiteten Uhrstände gibt die persönliche Gleichung.

Wenn auch der Wechsel der Beobachter in der Mitte der Längenbestimmungsperiode zum Zwecke der Elimination der persönlichen Gleichung zur Ausführung gelangt, so wird es sich doch empfehlen, die persönliche Gleichung vor und nach der Längenbestimmungsperiode direct zu ermitteln; ergibt sich dieser Werth mit jenem aus den Längenbestimmungsbeobachtungen in Uebereinstimmung, so kann auch mit ziemlicher Sicherheit auf die Elimination des Betrages der persönlichen Gleichung in dem Endresultate geschlossen werden.

Wenn man eine der Zeit proportionale Aenderung der persönlichen Gleichung eliminiren wollte, so empfiehlt es sich, den Wechsel der Beobachter nicht inmitten der Beobachtungsperiode, sondern so vorzunehmen, dass die Beobachtungsperiode in vier Theile getheilt wird, und dass nunmehr jeder Beobachter im ersten und letzten Viertel auf derselben Station beobachtet, und dass der Wechsel zwischen diesen beiden Epochen erfolgt.

Bei der Ermittlung der Längendifferenz auf telegraphischem Wege muss den electrischen Verbindungen eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Als Hauptaufgabe hat man hiebei festzuhalten, dass bei allen Arbeiten, d. i. bei der Localregistrirung, bei der Abgabe und dem Empfange der Signale und Coincidenzen, die Ströme in gleicher Stärke und in derselben Richtung die Spulen der Elektromagnete durchlaufen, denn nur in diesem Falle wird die

Trägheit des Signalrelais dieselbe sein, dasselbe in gleicher Weise ansprechen. Die gleiche Intensität für den ankommenden als abgehenden Strom genügt für diese Forderungen noch nicht, weil erfahrungsgemäss gleich starke aber entgegengesetzte Ströme das Signal-Relais in verschiedener Weise ansprechen. Der Ausserachtlassung der Erzielung derselben Richtung des Stromes bei der Herstellung der elektrischen Verbindungen sind jene nicht selten auftretenden Resultate zuzuschreiben, welche für die Stromzeit einen negativen Werth geben.

Die gleiche Intensität für den ankommenden als abgehenden Strom wird durch eine Theilung des Stromes bewirkt; in dem einen Arme des Stromes wird das Relais mit der Tangentenboussole, in dem anderen Arme der Rheostat eingeschaltet. Mit Hilfe des letzteren kann man durch Einschaltung der Widerstände jede beliebige Stromstärke zwischen Null und der vollen Stromstärke durch das Relais senden, also auch gleiche Intensität für den ankommenden und abgehenden Strom erzielen; denn schaltet man sämmtliche Widerstände des Rheostaten aus, so wird der Strom den Weg des geringsten Widerstandes d. i. durch den Rheostat wählen und nur einen kaum merkbaren Theil der Zweigleitung mit dem Relais, welches einen verhältnissmässig grossen Widerstand entgegensetzt, abgeben. In dem Masse jedoch, als Widerstände des Rheostaten eingeschaltet werden, wird auch der Strom in der Zweigleitung mit dem Relais merkbarer werden. Jene Widerstandsgrössen, welche eben einzuschalten sind, um sowohl für den ankommenden, als auch für den abgehenden Strom dieselbe Stromstärke zu erreichen, sind für jeden Abend der Beobachtungsperiode vor Beginn der eigentlichen Beobachtungen zu ermitteln und zu notiren, um so für die wechselnden Operationen die entsprechende Bedingung für die Leitung herstellen zu können.

Um die andere Bedingung, dass der abgehende und ankommende Strom die Spulen des Elektromagneten in gleicher Richtung durchläuft, zu erreichen, kann man unter anderem auf den beiden Endstationen die entgegengesetzten Pole der Linienbatterie mit dem Erddrahte verbinden.

Die auf einer Station nothwendigen elektrischen Apparate sind:

Der Chronograph (Registrirapparat), das Relais, die Tangentenboussole, der Rheostat, der Signaltaster, eventuell ein Taster zur Bestimmung der Federnparallaxe, die nöthigen Commutatoren und die Batterien; ausserdem zur Correspondenz der Schreibapparat.

Die Uhr muss auch mit dem nöthigen Contactwerke versehen sein, durch welches alle Secunden oder, noch besser, alle geraden Secunden der Strom geschlossen, unter Umständen geöffnet wird. Die erforderlichen Batterien sind: die Linienbatterie und im allgemeinen drei Localbatterien. Die eine Localbatterie dient der localen Registrirung, die zweite zum Betriebe des Uhrankers und die dritte zum Betriebe des Signalankers. Die Verbindung der einzelnen Apparate ist so vorzunehmen, dass einerseits der Uebergang von der telegraphischen Correspondenz zum Registriren, beziehentlich zum Localregistriren und andererseits zum Signalwechsel, eventuell zur Coincidenzbeobachtung mit Leichtigkeit bewirkt werden kann. Diesem Zwecke dienen die Commutatoren.

Schematische Darstellungen für zweckentsprechende elektrische Verbindungen der bei Längenbestimmungen auf telegraphischem Wege nothwendigen Apparate finden sich in den Abhandlungen über derartig ausgeführte Längenmessungen vor. Zu empfehlen sind die von der deutschen und der österreichischen Gradmessung angewendeten Verbindungen, die in den unten angesetzten Werken ausführlich erläutert sind.*)

Längenbestimmung aus Mondculminationen.

245. Da der siderische Monat, oder die Umlaufszeit des Mondes um die Erde in Bezug auf die Fixsterne nahe $27\frac{1}{3}$ mittlere Tage beträgt, so ändert sich die Rectascension desselben durchschnittlich täglich um nahe $13^0.2$ oder stündlich um $33'$, somit sehr rasch; beobachtet man daher an demselben Tage an zwei Orten die Rectascension des Mondes zur Zeit der Culmination, so wird diese nach Massgabe des Längenunterschiedes verschieden erhalten werden und man wird aus der Differenz der beobachteten Rectascension den Längenunterschied ableiten können, wenn die Geschwindigkeit bekannt ist, mit welcher der Mond seine Rectascension ändert.

Hierauf gründet sich die Methode der Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Orte aus beobachteten Mondculminationen.

Die Aufgabe, aus dem beobachteten Durchgange des Mondes durch die Fäden eines im Meridiane aufgestellten Passage-Instrumentes die Rectascension des Mittelpunctes des Mondes zur Zeit der Culmination, oder — was dasselbe bedeutet — die Sternzeit der Culmination des Mondmittelpunctes abzuleiten, wurde bereits in §. 178 abgehandelt, daher diese Grössen hier als bekannt vorausgesetzt werden können.

Es seien nun für zwei Orte A, A', deren östliche Längen von dem Meridiane der zur Rechnung benützten Ephemeriden l, l' sein mögen, und deren gesuchter Längenunterschied daher $L = l' - l$ ist, positiv genommen, wenn A' östlich von A liegt, die Sternzeiten Θ und Θ' der Culmination des Mondmittelpunctes aus Beobachtungen gegeben. Die diesen Ortszeiten Θ, Θ' entsprechenden Zeiten des Meridians der Ephemeriden sind dann $\Theta - l$ und $\Theta' - l'$.

Es seien ferner:

$$T = \frac{\Theta + \Theta'}{2} - \frac{l + l'}{2} \tag{326}$$

*) Dr. Th. Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig 1879. — Dr. Th. v. Oppolzer. Das Schaltbrett der österr. Gradmessung. Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften. 69. Band. Mathematisch-naturw. Classe 1874.

das arithmetische Mittel dieser Zeiten, und $\alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \ldots$ die den Ephemeriden durch Interpolation für die Zeit T entnommenen Werthe der Rectascension des Mondes und ihrer Differenzialquotienten, so wird, vermöge des Taylor'schen Theorems, die irgend einer Zeit $T + \tau$ entsprechende Rectascension ausgedrückt durch:

$$\alpha + \tau \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots .$$

Setzt man daher einmal $T + \tau = \Theta - l$, dann $T + \tau = \Theta' - l'$, wodurch im ersteren Falle, wenn noch der Kürze wegen $\Theta' - \Theta = D$ gesetzt wird:

$$\tau = \Theta - l - T = - \tfrac{1}{2}(\Theta' - \Theta) + \tfrac{1}{2}(l' - l) = - \tfrac{1}{2}(D - L),$$

im zweiten Falle:

$$\tau = \Theta' - l' - T = \quad \tfrac{1}{2}(\Theta' - \Theta) - \tfrac{1}{2}(l' - l) = \quad \tfrac{1}{2}(D - L)$$

wird, so werden, wenn man den Tafelfehler der Mond-Ephemeride mit $\varDelta\alpha$ bezeichnet, die den Zeiten $\Theta - l$ und $\Theta' - l'$ des Meridianes der Ephemeriden, d. i. die den Ortszeiten Θ und Θ' entsprechenden Rectascensionen des Mondes ausgedrückt durch:

$$\alpha + \varDelta\alpha - \tfrac{1}{2}(D - L) \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{8}(D - L)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \tfrac{1}{48}(D - L)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots .$$

$$\alpha + \varDelta\alpha + \tfrac{1}{2}(D - L) \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{8}(D - L)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tfrac{1}{48}(D - L)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots .$$

Diese Rectascensionen müssen aber den beobachteten Sternzeiten Θ, Θ' der Culmination gleich sein; man hat daher die Gleichungen:

$$\Theta = \alpha + \varDelta\alpha - \tfrac{1}{2}(D - L) \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{8}(D - L)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \tfrac{1}{48}(D - L)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots,$$

$$\Theta' = \alpha + \varDelta\alpha + \tfrac{1}{2}(D - L) \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{8}(D - L)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tfrac{1}{48}(D - L)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots,$$

aus welchen, mit Vernachlässigung der stets unmerklichen Glieder höherer Ordnung, durch Subtraction, da $\Theta' - \Theta = D$:

$$D = (D - L) \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{24}(D - L)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3},$$

und hieraus:

$$D - L = \frac{D}{\frac{d\alpha}{dt}} - \frac{1}{24} \frac{(D - L)^3}{\frac{d\alpha}{dt}} \frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

folgt. Hier ist nun das zweite Glied rechter Hand stets sehr klein, daher $D - L = D : \frac{d\alpha}{dt}$ schon ein sehr genäherter Werth von $D - L$, welcher ohne merklichen Fehler im zweiten Gliede für $D - L$ substituirt werden kann. Hiedurch erhält man:

$$D - L = \frac{D}{\frac{d\alpha}{dt}} - \frac{1}{24}\frac{D^3}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^4}\frac{d^3\alpha}{dt^3},$$

und hieraus den gesuchten Längenunterschied:

$$L = l' - l = (\Theta' - \Theta)\left(1 - \frac{1}{\frac{d\alpha}{dt}}\right) + \frac{1}{24}\frac{(\Theta' - \Theta)^3}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^4}\frac{d^3\alpha}{dt^3}. \quad (327)$$

Die Auflösung der Aufgabe ist, wie man sieht, eine indirecte, indem zur Bestimmung der Zeit T nach Gl. (326), für welche Zeit die Differenzialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d^3\alpha}{dt^3}$ aus den Ephemeriden zu berechnen sind, schon eine genäherte Kenntniss der Längen beider Orte in Bezug auf den Meridian der Ephemeride erfordert wird.

So lange der Längenunterschied zwei Stunden nicht überschreitet, ist das letzte Glied in Gl. (327) ganz unmerklich, und man hat dann einfach:

$$L = l' - l = (\Theta' - \Theta)\left(1 - \frac{1}{\frac{d\alpha}{dt}}\right).$$

Drückt man $\Theta' - \Theta$ in Sternzeitsecunden aus, so muss auch für $\frac{d\alpha}{dt}$ die Bewegung des Mondes in Rectascension in einer Sternzeitsecunde, ausgedrückt in Zeitsecunden, genommen werden. Der Nautical Almanac und die Connaissance des temps geben die Rectascension und Declination des Mondes von Stunde zu Stunde mittlerer Zeit, woraus man leicht durch einfache Interpolation die Aenderung $= h$ der Rectascension des Mondes in Zeitsecunden für eine Stunde mittlerer Zeit zur Zeit T erhält; es ist dann $\frac{h}{3600}$ die Aenderung in 1^s mittlerer Zeit, somit, da 1^s Sternzeit $= 0^s.997269$ mittlerer Zeit ist, $\frac{0.997269\,h}{3600} = \frac{d\alpha}{dt}$ die Aenderung in 1^s Sternzeit. Hiemit wird:

$$L = l' - l = (\Theta' - \Theta)\left(1 - \frac{3600}{0.997269\,h}\right),$$

oder, da der Bruch im zweiten Factor immer grösser ist als 1:

$$L = l' - l = (\Theta - \Theta')\left(\frac{3600}{0.997269\,h} - 1\right). \quad (328)$$

Die an beiden Orten beobachteten Sternzeiten Θ, Θ' der Culmination des Mondes sind mit dem Einflusse der Fehler der bei der Reduction auf den Meridian angenommenen Werthe der Uhrstände und der Instrumentalfehler behaftet. Um diesen Einfluss zu beseitigen, beobachtet man nebst dem Monde noch einige Fixsterne, welche nahe im Parallel des Mondes liegen und in kurzen Zwischenzeiten vor und nach dem Monde durch den Meridian gehen. Die aus den Beobachtungen an beiden Orten abgeleiteten Rectascensions-Unterschiede zwischen Mond und jedem Stern, so wie deren Differenzen $= \Theta' - \Theta$ werden dann von dem Einflusse der erwähnten Fehler frei sein. Da zu diesem Zwecke an beiden Orten offenbar dieselben Sterne beobachtet werden müssen, so finden sich in den oberwähnten Ephemeriden für jeden Tag, an welchem der Mond beobachtet werden kann, 4 Sterne (sogenannte Mondsterne), und zwar je zwei dem Monde vorausgehende und demselben folgende, im voraus angegeben.

Der zweite Factor in Gl. (328) beträgt im Durchschnitte ungefähr 28, daher ein Fehler von $0^s.1$ im $(\Theta - \Theta')$ einen Fehler von durchschnittlich $2^s.8$ im Längenunterschiede erzeugt.

246. Beispiel. 1853, November 11, wurden zu Graz der Mond und die Mondsterne an einem kleinen mit fünf Fäden versehenen, im Meridiane aufgestellten Passage-Instrumente beobachtet, wie folgt:

Gestirn	Faden				
	I	II	III	IV	V
27 Piscium . . .	—	—	23^h 50^m $55^s.3$	51^m $22^s.1$	51^m $49^s.5$
33 „ . . .	—	57^m $7^s.2$	23 57 35 .1	58 2 .3	58 29 .8
☽ westl. Rand .	25^m $32^s.2$	25 59 .8	0 26 28 .0	26 55 .7	27 23 .5
δ Piscium . . .	—	40 21 .2	0 40 49 .2	41 16 .3	41 43 .5
20 Ceti	44 21 .0	44 48 .3	0 45 16 .3	45 43 .0	46 10 .3

Die zur Reduction dieser Beobachtungen erforderlichen Daten sind, mit Ausnahme der Declination der Sterne, bereits Seite 392 vollständig angegeben und wurde daselbst aus der Beobachtung des Mondes die Rectascension des Mond-Mittelpunctes zur Zeit der Culmination, gleich der Sternzeit Θ' der Culmination in Graz:

$$\Theta' = 0^h\ 27^m\ 47^s.15$$

abgeleitet. Für die Sterne findet man:

Stern	δ	Reduction auf den Mittelfaden				K	J
		I	II	IV	V		
27 Piscium	$-4^0\ 22'$	$54^s.85$	$27^s.82$	$26^s.96$	$54^s.34$	0.784	0.625
33 „ .	$-6\ \ 32$	55 .04	27 .92	27 .05	54 .53	0.810	0.597
δ „	$+6\ \ 47$	55 .08	27 .94	27 .07	54 .56	0.651	0.768
20 Ceti . .	$-1\ \ 57$	54 .73	27 .76	26 .90	54 .21	0.755	0.656

Hiernach ist die Reduction der Sterne und Ableitung der scheinbaren Rectascensionen derselben zur Zeit ihrer Culmination in Graz [nach Gl. (173)] folgende:

	27 Piscium	33 Piscium	δ Piscium	20 Ceti
Faden I	$23^h\,50^m$ —	$23^h\,57^m$ —	$0^s\,40^m$ —	$0^h\,45^m\,15^s.73$
II	—	$35^s.12$	$49^s.14$	16 .06
III	$55^s.30$	35 .10	49 .20	16 .30
IV	55 .14	35 .25	49 .23	16 .10
V	55 .16	35 .27	48 .94	16 .09
Mittel:	$55^s.20$	$35^s.18$	$49^s.13$	$16^s.06$
Uhr-Correct.	+ 17 .17	+ 17 .18	+ 17 .27	+ 17 .28
Kk	— 2 .22	— 2 .29	— 1 .84	— 2 .13
Ji	+ 1 .15	+ 1 .10	+ 1 .41	+ 1 .21
AR. app.	$23^h\,51^m\,11^s.30$	$23^h\,57^m\,51^s.17$	$0^h\,41^m\,5^s.97$	$0^h\,45^m\,32^s.42$

An demselben Tage wurden der Mond und die Mondsterne auf der Sternwarte zu Greenwich beobachtet. Stellt man die Beobachtungen an beiden Orten zusammen, so hat man:

	Sternzeit der Culmination. in Graz	in Greenwich
27 Piscium .	$23^h\,51^m\,11^s.30$	$23^h\,51^m\,11^s.12$
33 „ .	23 57 51 .17	23 57 50 .98
☽ Centrum	0 27 47 .15	0 29 47 .13
δ Piscium	0 41 5 .97	0 41 5 .96
20 Ceti . .	0 45 32 .42	0 45 32 .38

Hiemit ergeben sich die Differenzen:

	Graz	Greenwich	Greenwich — Graz
☽ — 27 Piscium .	+ $36^m\,35^s.85$	+ $38^m\,36^s.01$	+ $120^s.16$
☽ — 33 „ .	+ 29 55 .98	+ 31 56 .15	120 .17
☽ — δ „ .	— 13 18 .82	— 11 18 .83	119 .99
☽ — 20 Ceti . .	— 17 45 .27	— 15 45 .25	120 .02
			Mittel = + $120^s.085 = \Theta - \Theta'$.

Zur Bestimmung der Zeit T nach Gl. (326) hat man:

Grazer Sternzeit d. Culm. des Mondes in Graz	=	$0^h\,27^m.8$
Genäherter Längenunterschied	=	— 1 2 .0
Greenw. Sternzeit d. Culm. des Mondes in Graz	=	$23^h\,25^m.8$
„ „ „ „ „ „ „ Greenw.	=	0 29 .8
Mittel T	=	$23^h\,57^m.8$ Greenw. Sternzeit
Sternzeit im mittleren Mittag zu Greenwich . .	=	15 22 .1
		$8^h\,35^m.7$
Reduction auf mittlere Zeit		— 1 .4
T	=	$8^h\,34^m.3$ Greenw. mittl. Zeit.

Der Nautical Almanac gibt nun die Rectascension des Mondes:

Für 8^h Greenwich mittlere Zeit	= $0^h\,27^m\,43^s.12$		
		+ $113^s.07$	
„ 9 „ „ „	= 0 29 36 .19		— $0^s.10$
		+ 112 .97	
„ 10 „ „ „	= 0 31 29 .16		

woraus für die Zeit $T = 8^h\,34^m.3$ die Aenderung der Rectascension des Mondes in 1^h mittlerer Zeit: $h = +\,113^s.063$ folgt. Hiemit hat man:

$$\begin{aligned}
\log h &= 2.053320\\
\log 0.997269 &= 9.998813\\
&\ 2.052133\\
\log 3600 &= 3.556303\\
&\ 1.504170,\ \text{num.} = 31.9279 = \frac{3600}{0.997269\,h}\\
\log 30.9279 &= 1.49035\\
\log(\Theta - \Theta') &= 2.07949\\
\log L &= 3.56984,\quad L = l' - l = 3714^s.0 = 1^h\,1^m\,54^s.0.
\end{aligned}$$

Aus dieser Beobachtung folgt daher, da in unserem Falle $l = 0$, der Längenunterschied zwischen Graz und Greenwich $= +\,1^h\,1^m\,54^s.0$, Graz östlich von Greenwich.*)

Findet sich zu der gegebenen Beobachtung eine an demselben Tage im Meridian der Ephemeride oder an einem anderen Orte, dessen Länge genau bekannt ist, angestellte Beobachtung nicht vor, so kann man zu einer vorläufigen Berechnung des Längenunterschiedes die in den oberwähnten Ephemeriden für die Zeit des Durchganges durch den Meridian der Ephemeriden im voraus berechneten scheinbaren Rectascensionen des Mondes und der Mondsterne benützen. Für den 11. November 1853 findet man z. B. im Nautical Almanac die folgenden scheinbaren Rectascensionen oder Sternzeiten der Culmination in Greenwich angegeben:

	A. R. app. h	m	s
27 Piscium	23	51	11.09
33 „	23	57	50.97
☽ I. (westl.) Rand	0	28	44.99
δ Piscium . . .	0	41	6.05
20 Ceti	0	45	32.32.

*) Zur Berechnung des zweiten Gliedes 3ter Ordnung in Gl. (327) findet man, aus dem Nautical Almanac die Rectascensionen des Mondes von November 9, 12^h bis November 12, 12^h von 12 zu 12 Stunden entnehmend und die Differenzreihen nach dem Schema S. 106 bis zu den fünften Differenzen bildend, nach den Formeln (61) und (62) [S. 112], für 1^s Sternzeit als Einheit:

$$\log \frac{d\alpha}{dt} = 8.495830 - 10, \quad \log \frac{d^3\alpha}{dt^3} = 6.9468 - 20,$$

mit welchen Werthen, und $\Theta' - \Theta = -\,120^s.085$, das erwähnte Glied $= -\,0^s.0066$, also völlig unmerklich wird. Es wächst proportional der dritten Potenz von $(\Theta' - \Theta)$, und erreicht daher, mit denselben Werthen der Differenzialquotienten, z. B. für $L = 2^h$, 4^h und 6^h beziehungsweise den Betrag von $0^s.048$, $0^s.387$, $1^s.30$.

Ferner für die Sternzeit des Durchganges des Mondhalbmessers durch den Meridian von Greenwich: $62^s.75$,*) welche zur obigen Zeit des Durchganges des I. oder westlichen Mondrandes zu addiren ist, um die Sternzeit des Durchganges des Mond-Mittelpunctes zu erhalten. Hiemit steht die Rechnung wie folgt:

	Sternzeit der Culmination Graz	Sternzeit der Culmination Greenwich		Graz	Greenwich	Greenw. − Graz
	h m s	h m s		m s	h m	
27 Pisc.	23 51 11.30	23 51 11.09	☽ − 27 Pisc.	+ 36 35.85	+38 36.65	+ 120.80
33 „	23 57 51.17	23 57 50.97	☽ − 33 „	+ 29 55.98	+31 56.87	120.79
☽ Centr.	0 27 47.15	0 29 47.74				
δ Pisc.	0 41 5.97	0 41 6.05	☽ − δ „	− 13 18.82	−11 18.31	120.51
20 Ceti	0 45 32.42	0 45 32 32	☽ − 20 Ceti	− 17 45.27	−15 44.58	120.69

$$\text{Mittel} = +\,120.698 = \Theta - \Theta'.$$

$$\log(\Theta - \Theta') = 2.08170$$
$$\log 30.9279 = 1.49035$$
$$\log L = 3.57205, \quad L = l' - l = 3732^s.9 = 1^h\ 2^m\ 12^s.9.$$

Die Differenz ($18^s.9$) gegen den oben gefundenen Werth rührt von dem aus den Fehlern der Mondtafeln entspringenden Fehler der vorausberechneten Rectascension des Mondes her, welcher im vorliegenden Falle zu Folge der Greenwicher Beobachtung — $0^s.61$ beträgt, und im Längenunterschiede den Fehler $= +\,0.61 \times 30.93 = +\,18^s.9$ erzeugt. Da nun der Mond sammt den Mondsternen an verschiedenen Sternwarten regelmässig beobachtet wird, so wird man nachträglich immer Beobachtungen desselben während der Dauer der halben Lunation, innerhalb welche die zu berechnende Beobachtung fällt, finden, mittelst welcher sich dann die Correction der Mond-Ephemeride, so wie des bereits berechneten Längenunterschiedes ergibt.

247. Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Orte aus gemessenen Monddistanzen.

Wegen der schnellen Bewegung des Mondes unter den anderen Himmelskörpern ändert sich auch die Distanz desselben von den anderen Gestirnen ziemlich rasch; wenn nun von zwei Beobachtern unter verschiedenen Meridianen die Ortszeit aufgefasst wird, welche bei einer bestimmten Distanz des Mondes von einem anderen Gestirne statt hat, so würde, da diese Distanz gleichsam das Signal für die beiden Beobachter abgibt, der Unterschied der aufgefassten zur selben Monddistanz gehörigen Ortszeiten zur Kenntniss des Längenunterschiedes führen. Die Forderung, dass an den beiden Stationen der Augenblick an der Uhr erst dann aufgefasst werde, wenn dieselbe Entfernung des Mondes

*) Es ist dies die Grösse $\frac{R \sec\delta}{1-\lambda}$ in Gl. (191) [§. 178].

von einem bekannten Sterne sich ergibt, würde einer Beschränkung in der Anwendung dieser Methode gleich kommen. Es ist jedoch diese Forderung nicht nothwendig.

Wenn man nämlich an den beiden Stationen zu beliebiger Zeit die Distanz des Mondes von demselben Sterne misst, so kann man die Reduction der auf der einen Station ermittelten Distanz auf jene der zweiten Station vornehmen, bezüglich die Zeit ableiten, welche sich ergeben haben würde, wenn auf der einen Station genau dieselbe Distanz wie auf der anderen Station gemessen worden wäre; es hat dieses nur zur Voraussetzung, dass die Aenderung der Distanz des Mondes von dem Sterne in Bezug auf die Zeit bekannt ist.

Die Methode der Längenbestimmung aus gemessenen Monddistanzen ist für reisende Astronomen, hauptsächlich aber für die Schiffahrer von besonderer Bedeutung; ihre Ausführung verlangt keine besonderen Vorbereitungen und kann fast immer angewendet werden, wenn der Mond sichtbar ist. Zur Messung der Monddistanz, also des Winkels zwischen den Gesichtslinien nach dem Mond und der Sonne, oder einem anderen Gestirne, kann eines der in §§. 130 und 141 beschriebenen Reflexions-Instrumente verwendet werden.

Um von der zweiten Station unabhängig zu sein und um die Rechnung zu erleichtern, enthalten die nautischen Ephemeriden, die von den seefahrenden Nationen benützten astronomischen Jahrbücher, wie: Nautical Almanac, Connaissance des temps, die Distanzen des Mondes von der Sonne, von vier anderen Planeten und neun hellen Fixsternen für jede dritte Stunde desjenigen Meridianes angegeben, für welchen die Ephemeride gilt, u. z. so, wie sich die Distanzen vom Mittelpuncte der Erde aus gesehen ergeben würden.*)

Misst man dann die Distanz des Mondes von der Sonne oder von einem anderen bekannten in der Ephemeride bezeichneten Sterne zu einer bestimmten Zeit, und befreit die gemessene Distanz von der Refraction und der Parallaxe, so erhält man die wahre Distanz, wie sich dieselbe vom Mittelpuncte der Erde aus gesehen ergeben hätte. Sucht man sich nun mit den in der Ephemeride angegebenen Daten jene Zeit, welche dieser aus der gemessenen scheinbaren Distanz abgeleiteten wahren Distanz zukommt, so erhält man durch Vergleichung dieser Zeit mit der bei der Distanzmessung beobachteten Ortszeit sofort den Längenunterschied des Beobachtungsortes gegen jenen Meridian, für welchen die Ephemeride gilt.

Die scheinbare Distanz, durch die Messung an einem bestimmten Puncte auf der Oberfläche der Erde erhalten, muss von der wahren, wie sich dieselbe durch die Messung im Mittelpuncte der Erde ergeben haben würde, deswegen verschieden sein, weil einerseits die Parallaxe, allgemein genommen, das Azimuth

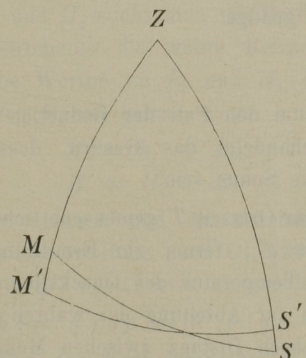
---

*) Diese vier Planeten sind: Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Die neun Sterne bekannt unter dem Namen Mondsterne, sind: α Arietis, α Tauri (Aldebaran), β Geminorum (Pollux), α Leonis (Regulus), α Virginis (Spica), α Scorpii (Antares), α Aquilae (Altair), α Piscis Australis (Fomalhaut) und α Pegasi (Markab).

und die Höhe, und weil andererseits die Refraction die Höhe der Gestirne ändert.

Sei in Fig. 98 in Z das Zenith des Beobachtungspunctes, in M' der scheinbare Ort des Mondes, in S' der scheinbare Ort der Sonne dargestellt, so entspricht der durch M' und S' gelegte grösste Kreis, also arc $M'S'$ der gemessenen, scheinbaren Distanz; sieht man vorderhand von der Wirkung der Parallaxe im Azimuthe ab, so wird, in Folge der vereinten Wirkung der Parallaxe in Höhe und der Refraction, der scheinbare Ort des Mondes und der Sonne gegen den wahren Ort eine Verschiebung in demselben Verticalkreise erfahren, demnach für den Mond in dem Verticalkreise ZM' und für die Sonne in dem Verticalkreise ZS'; da für den Mond die Höhenparallaxe grösser, für die Sonne oder einen anderen Stern aber kleiner als die Refraction ist, so wird der scheinbare Ort M' des Mondes tiefer, der scheinbare Ort S' der Sonne oder eines anderen Sternes aber höher als der wahre Ort liegen, es wird also der

Fig. 98.



wahre Ort des Mondes in M, jener der Sonne in S anzunehmen sein. Der durch M und S gelegte grösste Kreisbogen MS gibt dann die wahre Distanz zwischen Mond und der Sonne. Die Bögen MM' und SS' geben die Werthe der vereinten Wirkung der Höhenparallaxe und der Refraction für den Mond, bezüglich für die Sonne oder einen anderen Stern an.

Bei der Distanzmessung des Mondes von dem Gestirne wird man nicht die Distanz der Mittelpuncte, sondern die Distanz der inneren, also der nächsten oder die Distanz der äusseren, also der entferntesten Ränder bestimmen.

Die scheinbare Distanz des Mondcentrums von jenem des zweiten Gestirnes findet man dann durch Addition oder Subtraction der scheinbaren Halbmesser dieser Gestirne. Ist das zweite Gestirn ein Fixstern, so entfällt hiefür die Correction wegen des Halbmessers.

Zur Ermittlung der Höhenparallaxe als auch der Refraction, sowie zur Lösung der Aufgabe selbst, benöthigt man die Höhen der beobachteten Gestirne

Auf der See geht man meistens so vor, dass man vor und nach der Distanzmessung des Mondes von dem zweiten Gestirne die scheinbaren Höhen beider Gestirne misst, hiebei die Zeit notirt und auch den Stand der meteorologischen Instrumente (Barometerstand, Temperatur des Quecksilbers und Temperatur der Luft) abliest; für die Zeit der Distanzmessung kann man durch Interpolation die scheinbaren Höhen der beiden Gestirne ermitteln, weil man annehmen kann, dass während der kurzen Zeit, welche zwischen den Höhenmessungen verfliesst, die Aenderung in der Höhe der Aenderung der Zeit proportional erfolgt. Aus den scheinbaren Höhen kann man unter Berücksichtigung der Refraction und der Parallaxe die wahren Höhen der Gestirne ableiten. Man thut aber besser, die wahren und scheinbaren Höhen durch die Rechnung zu ermitteln, wozu die Positionen der beobachteten Gestirne für die der Distanzmessung entsprechende Ortszeit erforderlich sind. Um diese Positionen aus den Ephemeriden entnehmen zu können, ist die Kenntniss des Längenunterschiedes zwischen dem Meridian des Beobachtungsortes und jenem, für welchen die Ephemeride gilt, nothwendig, zu welchem Zwecke jedoch ein genäherter Werth des Längenunterschiedes genügt.

248. Es soll nun, um den Fall der Reduction der Monddistanzmessung am allgemeinsten zu behandeln, das Gestirn, dessen Distanz vom Monde beobachtet worden ist, die Sonne sein.

Gegeben ist: die zur Ortszeit T gemessene scheinbare Distanz zwischen Mond- und Sonnenrand $= d''$; ferner zur Ermittlung der wahren Refraction der Barometerstand, die Temperatur des Quecksilbers und der äusseren Luft. Die nöthigen Rechnungen zur Ableitung der wahren und scheinbaren Höhen, der scheinbaren und wahren Distanz zwischen Mond- und Sonnenmittelpunct sollen nun in der Reihenfolge erörtert werden:

1. Mit dem vorläufig angenommenen Längenunterschiede zwischen dem Beobachtungspuncte und dem Meridiane, für welchen die Ephemeride gilt, ermittelt man sich die der beobachteten Ortszeit entsprechende Zeit des Meridianes der Ephemeride und entnimmt aus derselben für diese Zeit die Positionen von Mond und Sonne, sowie die Halbmesser und die Horizontalparallaxen.

Es sei: für den Mond der Halbmesser r, die Horizontalparallaxe p,
„ die Sonne „ „ R, „ „ P.

Dann rechnet man sich nach den Glgn. des §. 16 die wahren Höhen und auch die Azimuthe beider Gestirne; für den Mond sei die Höhe h, das Azimuth a, für die Sonne H und A.

2. Berechnung der Höhenparallaxe für beide Gestirne und der Parallaxe im Azimuthe für den Mond.

Die Höhenparallaxe für den Mond könnte nach der strengen Formel (73), pag. 128, gerechnet werden; allein ohne der in vorliegender Aufgabe geforderten Genauigkeit Abbruch zu thun, wird man in der strengen Formel für $\cos(\varphi - \varphi')$ und $\cos\gamma$ die Einheit und für γ den Werth $(\varphi - \varphi')\cos a$ setzen können; führt man statt der Zenithdistanzen die Höhen ein, so erhält man aus (73) die Gleichung zur Bestimmung der Höhenparallaxe, wie folgt:

$$\operatorname{tg}(h - h') = \operatorname{tg} h_p = \frac{\varrho \sin p \cos[h + (\varphi - \varphi')\cos a]}{1 - \varrho \sin p \sin[h + (\varphi - \varphi')\cos a]}. \tag{328}$$

Für die Sonne hat man die Höhenparallaxe H_p mit hinreichender Genauigkeit gegeben durch:

$$H_p = P \cos H. \tag{328*}$$

Hiemit erhält man aus den wahren Höhen h und H die mit der Parallaxe behafteten Höhen, nämlich:

$$h_1 = h - h_p$$
$$H_1 = H - H_p.$$

Für diese Höhen h_1 und H_1 sucht man mit Berücksichtigung des Standes der meteorologischen Instrumente die wahre Refraction B_m für den Mond, B_s für die Sonne, welche Werthe an h_1 und H_1 im entsprechenden Sinne angebracht, die scheinbaren Höhen geben, u. z.

$$\left.\begin{aligned} h' &= h_1 + B_m \\ H' &= H_1 + B_s. \end{aligned}\right\} \tag{n}$$

Wäre die scheinbare Höhe h' und das scheinbare Azimuth a' gegeben, so rechnet man die Parallaxe in Höhe nach Gl. (77), pag. 130. Wenn man $\cos\gamma = 1$ und $\gamma = (\varphi - \varphi')\cos a'$ setzt, so erhält man:

$$\sin(h - h') = \varrho \sin p \cos[h' + (\varphi - \varphi')\cos a'] \tag{329}$$

Für die Bestimmung des Erdhalbmessers ϱ, welcher in Theilen des Aequatorhalbmessers ausgedrückt ist, und für die Differenz $\varphi - \varphi'$ hat man die Gleichungen:

$$\varrho = \sqrt{\frac{1 - (2 - e^2)e^2 \sin\varphi^2}{1 - e^2 \sin\varphi^2}} \tag{m)*}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \tfrac{1}{2}\,\frac{e^2}{1 - e^2 \sin\varphi^2}\sin 2\varphi \tag{n)*}$$

*) Diese beiden Relationen ergeben sich leicht mit Zuhilfenahme der Fig. 10. Bezeichnet man mit x und y die rechtwinkeligen Coordinaten des Punctes B und mit e die Excentricität der Meridianellipse, also $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, so hat man zunächst:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}}, \qquad y = \frac{a(1 - e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin\varphi^2}},$$

und hiermit:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

oder nach Einsetzung vorstehender Werthe und gehöriger Reduction:

oder auch:

$$\varrho = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin\varphi^2 + \tfrac{1}{2} e^4 \sin\varphi^2$$
$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \,(1 + e^2 \sin\varphi^2 + e^4 \sin\varphi^4).$$

Nimmt man, was für den vorliegenden Zweck vollkommen hinreicht, nur die Glieder von der Ordnung e^3 mit, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= 1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin\varphi^2 \\ \varphi - \varphi' &= \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (o)$$

Setzt man diese Werthe in Gl. (329) und nimmt für $\sin(h - h')$ und $\sin p$ den Bogen $h - h'$, bezüglich p, und für $a' = a$, so ist (329):

$$h - h' = p\,(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin\varphi^2) \cos\left(h' + \tfrac{1}{2} \frac{e^2}{\sin 1''} \sin 2\varphi \cos a\right). \qquad (329^*)$$

Der Fehler, welcher durch diese Näherung entsteht, wird, selbst wenn man $p = 1^0 = 3600''$ annimmt, kleiner als 0.18 Secunden sein.

Die Rechnung der Höhenparallaxe nach dieser Gleichung ist deswegen vom Vortheile, weil zwei Hilfstafeln gerechnet werden können, von denen die eine die Correction $\frac{e^2}{2 \sin 1''} \sin 2\varphi \,.\, \cos a$, die andere die Grösse $-\frac{e^2}{2} \sin\varphi^2$ gibt. Im Berliner nautischen Jahrbuche sind die hier genannten Correctionen in Tafel XVIII, beziehentlich Tafel XIX enthalten.

Die Parallaxe im Azimuthe für den Mond könnte nach der strengen Formel 72, pag. 127, gerechnet werden; dieselbe ist, wenn mit a das wahre,

---

$$\varrho^2 = \frac{a^2\,[1 - (2 - e^2)\, e^2 \sin\varphi^2]}{1 - e^2 \sin\varphi^2}.$$

Da in unserem Falle ϱ in Theilen von a ausgedrückt, also a als Einheit für ϱ gewählt worden ist, so hat man:

$$\varrho = \sqrt{\frac{1 - (2 - e^2)\, e^2 \sin\varphi^2}{1 - e^2 \sin\varphi^2}}.$$

Ferner hat man für den Punct B, in welchem BD die Normale ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{dx}{dy} \text{ und } \operatorname{tg}\varphi' = \frac{y}{x}.$$

Da aus der Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sich $\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$ ergibt, so hat man unter Berücksichtigung vorstehender Relationen:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{1 - e^2},$$

mithin:

$$\operatorname{tg}\varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg}\varphi.$$

Nun ist:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi'}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi'}$$

und nach Substitution des Werthes für $\operatorname{tg}\varphi'$ und entsprechender Reduction:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2} \frac{e^2}{1 - e^2 \sin\varphi^2} \sin 2\varphi.$$

mit a' das scheinbare Azimuth, mit h die wahre Höhe des Mondes bezeichnet wird, die folgende:

$$\operatorname{tg}(a' - a) = \frac{\frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos h} \sin a}{1 - \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos h} \cos a.} \tag{330}$$

Wenn man den Ausdruck für $\operatorname{tg}(a' - a)$ in eine Reihe entwickelt. so kann man, ohne der verlangten Genauigkeit Abbruch zu thun, in der Entwicklung bei dem ersten Gliede stehen bleiben, so dass man hat:

$$a' - a = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos h} \sin a. \tag{330*}$$

Der Betrag der Azimuthalparallaxe kann selbst für den Mond wegen des Productes $\sin(\varphi - \varphi') \sin p$ nicht gross werden; für die Sonne und die anderen Planeten kann des kleinen Werthes der Horizontalparallaxe wegen von der Azimuthalparallaxe Umgang genommen werden.

3. Berechnung des scheinbaren Halbmessers des Mondes und der Sonne. Nach Gl. 81, pag. 131, hat man, wenn die Höhen h und H eingeführt werden:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{scheinbarer Halbmesser des Mondes} \ldots & r' = r + r \sin p \sin h \\ \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{der Sonne} \ldots & R' = R + R \sin P \sin H \end{array}\right\} \tag{331}$$

oder auch:

$$\left.\begin{array}{l} r' = r \dfrac{\cos h'}{\cos h} \\ R' = R \dfrac{\cos H'}{\cos H} \end{array}\right\} \tag{331*) *)}$$

4. Berechnung des scheinbaren Halbmessers in der Richtung der gemessenen Distanz wegen der Formveränderung der kreisförmigen Scheibe der Sonne und des Mondes in Folge der Refraction.

Die Refraction wächst mit zunehmender Zenithdistanz; in Folge dessen wird die Refraction für das Centrum dieser Gestirne grösser sein, als für den oberen Rand und kleiner als für den unteren Rand. Mond und Sonne werden

---

*) Diese Relation folgt aus der zweiten Gleichung des Systemes (71), pag. 127, wenn man die Erde kugelförmig voraussetzt. Es war:

$$\Delta' \sin z' \cos A' = \Delta \sin z \cos A,$$

$A' = A$ gesetzt und statt der Zenithdistanzen die Höhen eingeführt, gibt:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{\cos h}{\cos h'}$$

und da $\dfrac{\Delta'}{\Delta} = \dfrac{r}{r'}$ ist, schliesslich: $r' = r \dfrac{\cos h'}{\cos h}$.

Sowohl Gl. (331) als Gl. (331*) geben den scheinbaren Halbmesser bis auf einen Bruchtheil der Bogensecunde, welcher kleiner als 0.1 ist.

daher mit Rücksicht auf den verschiedenen Werth der Refraction für den Ober- und Unterrand nicht als kreisförmige Scheiben, sondern als ovale Figuren erscheinen, in denen der verticale Durchmesser der kleinste, der horizontale Durchmesser der grösste sein wird. Wenn man die Refractions-Differenzen der einzelnen Randpuncte gegen die Horizontale des Mittelpunctes der Zenithdistanzänderung proportional annimmt, so kann man für die durch die Refraction geänderte Form der kreisförmigen Scheiben die Ellipse substituiren. Da die Refraction immer rascher zunimmt, je grösser die Zenithdistanz wird, so wird die untere Hälfte der Ellipse mehr verkürzt erscheinen, als die obere Hälfte. Die Verkürzung des verticalen Halbmessers der unteren Hälfte wird von jener des verticalen Halbmessers der oberen Hälfte so wenig verschieden sein, dass man bei Behandlung der vorliegenden Aufgabe beide verticale Halbmesser gleich annehmen kann.*)

Ist r' der durch die Parallaxe vergrösserte Halbmesser, so ist derselbe zugleich der Horizontalhalbmesser, die halbe grosse Axe der Ellipse. Ist h' die scheinbare Höhe des Centrums, so sind $h' - r'$ und $h' + r'$ die genäherten scheinbaren Höhen des unteren, beziehentlich des oberen Randes; sucht man zu diesen Höhen die zugehörigen Refractionen B_u und B_o, so ist $B_u - B_o$ die Verkürzung des verticalen Durchmessers, demnach ist der verticale Halbmesser:

$$r_v = r' - \tfrac{1}{2}(B_u - B_o)$$

oder $\frac{1}{2}(B_u - B_o) = \varDelta B$ gesetzt:

$$r_v = r' - \varDelta B.$$

Bei der Reduction des durch die Distanzmessung der Ränder erhaltenen Werthes auf die Distanz der beiden Mittelpuncte ist immer jener Halbmesser zu kennen nöthig, welcher zu jenem Puncte gehört, wo die Distanz die Ellipse schneidet.

In Fig. 99 stelle der Kreis mit dem Mittelpuncte O die Gestalt des Mondes ohne die Wirkung der Refraction, hingegen die Ellipse mit dem Mittelpuncte O die durch die Refraction abgeplattete Gestalt des Mondes dar. Bei der Messung der Distanz der einander zugekehrten oder von einander abgewendeten Ränder bestimmt man eigentlich die kürzeste Distanz zwischen den beiden Gestirnen, also jenen Bogen $SM = d''$, welcher die Ellipse in M rechtwinkelig trifft. Es soll aber die Distanz von dem Sterne S nach dem Mittelpuncte O des Mondes, d. i. $SO = d'$ bestimmt werden. Man wird aber setzen können:

---

*) Bei einer Zenithdistanz des Centrums von $85^\circ 0'$ und bei dem Halbmesser $16' 0''$ findet man die Verkürzung des oberen verticalen Durchmessers mit $23''.5$, jene des unteren verticalen Halbmessers mit $24''.4$; es ist demnach der Unterschied $0''.9$, eine Grösse, bis auf welche die Refraction bei der angenommenen Zenithdistanz nicht mehr sicher aus der Tafel zu entnehmen ist.

$$SO = d' = SM + M'O,$$

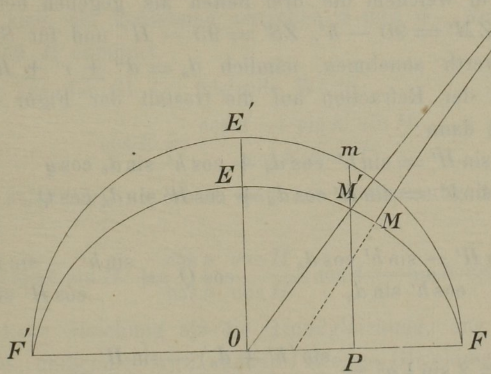
oder:

$$d' = d'' + r_0.$$

Es handelt sich somit um die Bestimmung von $OM' = r_0$. Bezeichnet man den Winkel, welchen der Bogen SO mit dem durch den Mittelpunct O gelegten Verticalkreise einschliesst, mit q, die Halbaxen der Ellipse OF, OE, mit a, beziehentlich b, und mit y und x die Coordinaten des Punctes M', und den Halbmesser OM' mit r_0, so hat man:

$$r_0^2 = x^2 + y^2 = x^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + b^2. \qquad (a)$$

Fig. 99.



Setzt man die Abplattung der Ellipse $\frac{a - b}{a} = n$, so wird $b^2 = a^2 (1 - n)^2$ und $a^2 - b^2 = a^2 (2n - n^2)$; ferner ist $x = r_0 \sin q$. Die Substitution dieser Werthe in Gl. (a) gibt:

$$r_0 = \frac{a(1 - n)}{\sqrt{1 - 2n\left(1 - \frac{n}{2}\right) \sin q^2}},$$

oder nach der Reihenentwicklung bis inclusive der Glieder mit n^2

$$r_0 = a - a n \cos q^2 - \tfrac{3}{2}\, a n^2 \sin q^2 \cos q^2. \qquad (b)$$

Nun ist aber:

$$a = r', \; a n = a - b = r' - r_v = \varDelta B, \qquad a n^2 = \frac{\varDelta B^2}{r'},$$

somit schliesslich:

$$r_0 = r' - \varDelta B \,.\cos q^2 - \tfrac{3}{2} \frac{\varDelta B^2}{r'} \sin q^2 \cos q^2. \qquad (331)$$

Von dem Gliede $\frac{3}{2}\frac{\varDelta B^2}{r'}\sin q^2\cos q^2$ wird man immer Umgang nehmen können, denn für die wahre Höhe $h = 5^0$ wird $\varDelta B = 23''$; nimmt man $r' = 15' = 900''$, $q = 45^0$ an, so wird $\frac{3}{2}\frac{\varDelta B^2}{r'}\sin q^2\cos q^2$ erst den Werth von 0.22 Secunden erreichen; man kann demnach hinreichend genau setzen:

$$r_0 = r' - \varDelta B\cos q^2, \tag{331*}$$

welche Gleichung nach den für den Mond eingeführten Bezeichnungen sofort für diesen gilt.

Für die Sonne hat man entsprechend:

$$R_0 = R' - \varDelta B\cos Q^2. \tag{332}$$

Was die Winkel q und Q betrifft, so bestimmt man selbe aus dem Dreiecke $M'ZS'$, in welchem die drei Seiten als gegeben betrachtet werden können. Es ist: $ZM' = 90 - h'$, $ZS' = 90 - H'$ und für $S'M'$ kann man einen Näherungswerth annehmen, nämlich $d_n = d'' \pm r' \pm R'$, indem man von der Wirkung der Refraction auf die Gestalt der Figur vor der Hand absieht. Man hat dann:

$$\begin{aligned}\sin H' &= \sin h'\cos d_n + \cos h'\sin d_n\cos q\\ \sin h' &= \sin H'\cos d_n + \cos H'\sin d_n\cos Q,\end{aligned}$$

und hieraus:

$$\cos q = \frac{\sin H' - \sin h'\cos d_n}{\cos h'\sin d_n}, \qquad \cos Q = \frac{\sin h' - \sin H'\cos d_n}{\cos H'\sin d_n}$$

oder:

$$1 - \cos q = 2\sin\tfrac{1}{2}q^2 = \frac{\sin(h' + d_n) - \sin H'}{\cos h'\sin d_n} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}(h' + H' + d_n)\sin\frac{1}{2}(d_n + h' - H')}{\cos h'\sin d_n}.$$

Setzt man:

$$s = \tfrac{1}{2}(h' + H' + d_n),$$

so wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}q^2 = \frac{\cos s\sin(s - H')}{\cos h'\sin d_n}$$

und analog: (333)

$$\sin\tfrac{1}{2}Q^2 = \frac{\cos s\sin(s - h')}{\cos H'\sin d_n}.$$

Hätte man die wahren Höhen und die Azimuthe der Gestirne berechnet, dann ist in dem Dreiecke MZS gegeben: $MZ = 90 - h$, $SZ = 90 - H$ und $\sphericalangle MZS = E =$ der Differenz der beiden Azimuthe und man hat aus genanntem Dreiecke:

$$\sin q = \sin E\frac{\cos H}{\sin d_n} \qquad \sin Q = \sin E\frac{\cos h}{\sin d_n}. \tag{333*}$$

5. Ermittlung der scheinbaren Distanz d' der Mittelpuncte der beiden Gestirne; es ist:

$$d' = d'' \pm (r' - \varDelta B \cos q^2) \pm (R' - \varDelta B \cos Q^2). \qquad (334)$$

6. Reduction der scheinbaren Distanz d' auf den Mittelpunct der Erde, d. i. Ermittlung der geocentrischen Distanz d.

Sieht man vor der Hand von der Azimuthalparallaxe ab, so hat man in den beiden sphärischen Dreiecken $M'ZS'$ und MZS folgende Stücke gegeben: $M'Z = 90 - h'$, $M'S = 90 - H'$, $M'S' = d'$, $MZ = 90 - h$, $MS = 90 - H$; unbekannt ist $\sphericalangle M'ZS' = E$ und die wahre Distanz $MS = d$.

Man hat nun folgende Gleichungen:

$$\text{aus } \varDelta\, M'ZS' \quad \cos d' = \sin h' \sin H' + \cos h' \cos H' \cos E \qquad (c)$$

$$\text{aus } \varDelta\, MZS \quad \cos d = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos E; \qquad (c')$$

hieraus ergibt sich die Beziehung zwischen d und d', wenn man den Azimuthalunterschied E eliminirt.

Wird der aus der Gl. (c) folgende Werth

$$\cos E = \frac{\cos d' - \sin h' \sin H'}{\cos h' \cos H'}$$

in die Gl. (c') substituirt, so erhält man zur Bestimmung der wahren Distanz die Gleichung:

$$\cos d = \sin h \sin H + \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} (\cos d' - \sin h' \sin H') \qquad (334)$$

Es gilt diese Gleichung als die Grundgleichung, aus welcher, da nach derselben nicht gerechnet wird, andere strenge Gleichungen durch zweckentsprechende Umformungen abgeleitet werden können.

Im Folgenden sollen einige Umformungen gezeigt werden.

Addirt man zu der Gl. (334)

$$0 = \cos h \cos H - \cos h \cos H,$$

so erhält man:

$$\cos d = \cos(H - h) - \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} [\cos(H' - h') - \cos d']. \qquad (335)$$

Diese Formel wurde von Richard Dunthorne im Nautical Almanac 1767 bekannt gemacht. Eine Hilfstafel unter dem Namen „Logarithmic difference“ gibt den $\log \dfrac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'}$.

Führt man statt der Höhenunterschiede die Summen der Höhen ein, so erhält man die von Lexell im Jahre 1777 vorgeschlagene Gleichung zur Reduction der Monddistanzen.

Subtrahirt man von der Gl. (334) den identischen Ausdruck

$$0 = \cos h \cos H - \cos h \cos H,$$

so folgt:

$$\cos d = -\cos(h + H) + \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \left[\cos(H' + h') + \cos d'\right], \quad (336)$$

oder auch:

$$\cos d = -\cos(H + h) + 2\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \cos\tfrac{1}{2}(H' + h' + d') \cos\tfrac{1}{2}(H' + h' - d'). \quad (336^*)$$

Für kleine Winkel ist die Bestimmung der Distanz durch den cosinus ungenau; wenn man von cosinus auf den sinus des halben Winkels übergeht, so gelangt man zu einer Formel, welche meistens bei Rechnung, insoferne man von den strengen Gleichungen überhaupt Gebrauch macht, angewendet wird.

Subtrahirt man Gl. (336*) von $1 = 1$, so kommt:

$$1 - \cos d = 1 + \cos\tfrac{1}{2}(H + h) - 2\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \cos\tfrac{1}{2}(H' + h' + d') \cos\tfrac{1}{2}(H' + h' - d'), \quad (e)$$

oder unter Berücksichtigung, dass

$$1 - \cos d = 2 \sin\tfrac{1}{2} d^2, \quad 1 + \cos\tfrac{1}{2}(H + h) = 2 \cos\tfrac{1}{2}(H + h)^2 \text{ ist,}$$

$$\sin\tfrac{1}{2} d^2 = \cos\tfrac{1}{2}(H + h)^2 \left[1 - \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \frac{\cos\frac{1}{2}(H' + h' + d') \cos\frac{1}{2}(H' + h' - d')}{\cos\frac{1}{2}(H + h)^2}\right].$$

Setzt man:

$$\sin M^2 = \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \frac{\cos\frac{1}{2}(H' + h' + d') \cos\frac{1}{2}(H' + h' - d')}{\cos\frac{1}{2}(H + h)^2}, \quad (337)$$

so wird:

$$\sin\tfrac{1}{2} d^2 = \cos\tfrac{1}{2}(H + h)^2 \cos M^2,$$

d. i.

$$\sin\tfrac{1}{2} d = \cos\tfrac{1}{2}(H + h) \cos M. \quad (338)$$

Diese Gleichung zur Berechnung der wahren Distanz wurde von Borda im Jahre 1787 veröffentlicht;*) sie hat den Vorzug, dass sie für die logarithmische Rechnung eingerichtet ist und keinen Zeichenwechsel aufweiset.

Man wird jedoch erkennen, dass wenn der Hilfswinkel M sich 90^0 nähert, was eintreten wird, wenn sowohl Distanz als auch die Höhen klein sind, die Bestimmung von M nicht die genügende Sicherheit gewährt, demnach auch der Uebergang von $\sin M$ auf $\cos M$, und somit auch d unsicher wird.

Eine Modification der Borda'schen Formel ergibt sich aus der Gl (e).

Setzt man nunmehr:

$$\sin N^2 = \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \cos\tfrac{1}{2}(H' + h' + d') \cos\tfrac{1}{2}(H' + h' - d'), \quad (339)$$

so wird dieselbe im rechten Theile übergehen in

$$1 - 2 \sin N^2 + \cos(h + H) = \cos 2N + \cos(h + H),$$

*) Borda: Description et usage du cercle de reflexion. 1787.

wodurch man erhält:

$$1 - \cos d = \cos 2N + \cos(h + H),$$

oder:

$$\sin \tfrac{1}{2} d^2 = \cos\left(\frac{h+H}{2} + N\right) \cos\left(\frac{h+H}{2} - N\right), \tag{340}$$

welche Gleichung schon von Mackay im Jahre 1783 eingeführt worden sein soll; dieselbe ist auch von Encke im Berliner astronomischen Jahrbuche 1842 angegeben worden.*)

Auch hier gilt für den Hilfswinkel N das schon oben bei der Formel nach Borda über die Bestimmung der Sicherheit des Hilfswinkels M Gesagte; allein da man von dem sinus des Hilfswinkels nicht direct auf den cosinus übergeht, so wird diese Formel gegenüber jener (338) eine grössere Sicherheit gewähren.

Ausser den hier bereits abgeleiteten Formeln zur Berechnung der wahren Monddistanz sind noch zwei andere erwähnenswerth, welche bei der Berechnung die grösste Sicherheit gewähren, und von denen die eine bei der Reduction von Distanzen kleiner als 90^0, die andere bei der Reduction der Distanzen grösser als 90^0 angewendet wird.

Für $d < 90^0$.

Aus Gl. (335) folgt, wenn man für $\cos(H' - h') - \cos d'$ den gleichen Werth $2 \sin \frac{1}{2}(d' + H' - h') \sin \frac{1}{2}(d' + h' - H')$ einführt:

$$\cos d = \cos(H - h) - 2\frac{\cos h \,.\, \cos H}{\cos h' \cos H'} \sin \tfrac{1}{2}(d' + H' - h') \sin \tfrac{1}{2}(d' + h' - H'). \tag{f}$$

Setzt man nun:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos h \ \cos H}{\cos h' \cos H'} \sin \tfrac{1}{2}(d' + H' - h') \sin \tfrac{1}{2}(d' + h' - H') &= c^2 \\ \operatorname{tg} \mu &= \frac{\sin \frac{1}{2}(H - h)}{c}, \end{aligned}\right\} \tag{341}$$

so wird Gl. (f), nachdem man dieselbe von $1 = 1$ subtrahirt, folgende Form annehmen:

$$1 - \cos d = 1 - \cos(H - h) + 2c^2,$$

oder:

$$\sin \tfrac{1}{2} d^2 = \sin \tfrac{1}{2}(H - h)^2 + c^2.$$

Wenn man nun c durch μ und $H - h$ ausdrückt, indem man den aus (341) folgenden Werth: $c = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(H - h)}{\operatorname{tg} \mu}$ setzt, so kommt:

---

*) Ueber zwei nautische Aufgaben. Berliner astronom. Jahrbuch 1842.

$$\sin \tfrac{1}{2} d^2 = \sin \tfrac{1}{2} (H - h)^2 \operatorname{cosec} \mu^2,$$

mithin:

$$\sin \tfrac{1}{2} d = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (H - h)}{\sin \mu}, \tag{342}$$

oder auch, wenn man c einführt, also nach Gl. (341) $\sin \tfrac{1}{2} (H - h = c \operatorname{tg} \mu$ setzt:

$$\sin \tfrac{1}{2} d = \frac{c}{\cos \mu}. \tag{342*}$$

Für $d > 90^0$.

Geht man von der Gl. (336*) aus, und setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} \cos \tfrac{1}{2} (H' + h' + d') \cos \tfrac{1}{2} (H' + h' - d') &= c'^2 \\ \operatorname{tg} \mu' = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (H + h)}{c'}, & \end{aligned}\right\} \tag{343}$$

so wird dieselbe, wenn man $1 = 1$ addirt, die folgende werden:

$$1 + \cos d = 1 - \cos (H + h) + 2 c'^2.$$

oder mit Rücksicht, dass

$$1 + \cos d = 2 \cos \tfrac{1}{2} d^2, \qquad 1 - \cos (H + h) = 2 \sin \tfrac{1}{2} (H + h)^2 \text{ ist,}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} d^2 = \sin \tfrac{1}{2} (H + h)^2 + c'^2.$$

Je nachdem man nun $c' = \dfrac{\sin \tfrac{1}{2} (H + h)}{\operatorname{tg} \mu'}$ oder $\sin \tfrac{1}{2} (H + h) = c' \operatorname{tg} \mu'$ einsetzt, erhält man entweder:

$$\cos \tfrac{1}{2} d = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (H + h)}{\sin \mu'} \tag{344}$$

oder:

$$\cos \tfrac{1}{2} d = \frac{c'}{\cos \mu'}. \tag{344*}$$

Die in (342) und (344) abgeleiteten Formeln bestimmen den Hilfswinkel durch die Tangente, in Folge dessen dieselben bezüglich der Schärfe der Rechnung mehr zu empfehlen sind, als die Formel nach Borda oder Mackay.

Schon Lexell*) hat diese Formeln gegeben und Bremiker**) hat die Zerlegung ebenso vorgenommen, dass sie die Wahl des sinus oder des cosinus für die genaue Bestimmung gestatten.

Zu bemerken wäre noch, dass man von $\operatorname{tg} \mu$, $\operatorname{tg} \mu'$ auf $\sin \mu$, $\sin \mu'$ oder $\cos \mu$, $\cos \mu'$ übergeht, je nachdem der sinus oder der cosinus den grösseren

---

*) Observationes circa methodum inveniendi longitudinem. Petropoli 1780.

**) Astronomische Nachrichten. 1850, Bd. 30. Bremiker: Ueber die Reduction der Monddistanzen.

Werth hat, d. h. also je nachdem μ, μ' grösser oder kleiner als 45^0 ist. Die Kenntniss des Werthes des Hilfswinkels μ, beziehentlich μ' ist aber nicht nothwendig.

7. Verbesserung der geocentrischen Distanz d wegen der Azimuthalparallaxe des Mondes.

Bei den bisherigen Rechnungen wurde auf die Parallaxe im Azimuthe für beide Gestirne keine Rücksicht genommen; es wurde angenommen, dass der Winkel E am Zenith derselbe sei, ob man die Beobachtung im Mittelpuncte der Erde oder auf der Oberfläche derselben gemacht hätte, d. h. es wurde der Unterschied der scheinbaren Azimuthe des Mondes und der Sonne dem Unterschiede der wahren Azimuthe derselben Gestirne gleich angenommen. Die Parallaxe im Azimuthe ist aber nur für den Mond von Bedeutung; für die anderen Planeten und die Sonne kann selbe ganz unberücksichtigt bleiben.

Es sei nun: a das wahre, a' das scheinbare Azimuth des Mondes,
A „ „ A' „ „ „ der Sonne,

so ist der Winkel am Zenith Z im Dreiecke $M'ZS'$, nämlich

$$E' = a' - A', \tag{g}$$

und der Winkel am Zenith Z im Dreiecke MZS, nämlich

$$E = a - A. \tag{g'}$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen gibt:

$$E = E' + (A' - A) - (a' - a),$$

oder, weil das scheinbare und wahre Azimuth des zweiten Sternes als gleich angesehen werden können, also $A = A'$ anzunehmen gestattet ist, auch:

$$E = E' - (a' - a),$$

oder $a' - a = \Delta a$ gesetzt:

$$E = E' - \Delta a, \tag{h}$$

woraus folgt, dass der Unterschied zwischen E und E' gleich ist dem Unterschiede zwischen dem scheinbaren und dem wahren Azimuthe, d. i. der Azimuthalparallaxe des Mondes.

Aus der strengen Gleichung (72), pag. 127, für die Parallaxe im Azimuthe ist die auf pag. 607 angegebene Näherungsformel entstanden; dieselbe lautet:

$$a' - a = \Delta a = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p}{\cos h} \sin a. \tag{i}$$

Es ist also $a' - a = \Delta a$ eine bekannte Grösse und positiv oder negativ, mithin das scheinbare Azimuth des Mondes grösser oder kleiner als das wahre Azimuth, je nachdem der Mond westlich oder östlich vom Meridian steht.

In dem Dreiecke *MZS* ist aber:

$$\cos d = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos E,$$

mithin, wenn man den Einfluss der Aenderung von E auf d haben will, durch Differenziren nach d und E:

$$-\sin d\, \partial d = -\cos h \cos H \sin E \,.\, \partial E$$

und da $\partial E = -\varDelta a$ ist, auch

$$\partial d = -\frac{\cos h \cos H \sin E}{\sin d} \varDelta a, \tag{k}$$

oder nach Einsetzung des Wortes für $\varDelta a$ aus Gl. (i):

$$\partial d = -\frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin p \cos H \sin a \,.\, \sin E}{\sin d}. \tag{345}$$

Diese Correction hat man zu dem vorher berechneten Werthe d hinzuzufügen.

Erwägt man, dass $\varphi - \varphi'$ und p kleine Winkel sind, so kann man statt des sinus derselben den Bogen setzen; ferner folgt aus den Relationen (o), pag. 606, $\varrho(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi$, so dass man für die Distanzcorrection wegen der Azimuthalparallaxe auch folgende Gleichung anwenden kann:

$$\partial d = -\frac{e^2}{2} \frac{p \sin 2\varphi \cos H \sin a \sin E}{\sin d}. \tag{345*}$$

Da aber die Relation besteht (Fig. 98):

$$\frac{\sin E}{\sin d} = \frac{\sin q}{\cos H},$$

so erhält man auch:

$$\partial d = -\frac{e^2}{2} p \sin 2\varphi \sin a \sin q. \tag{346}$$

Das Berliner „nautische Jahrbuch“ enthält zwei Tabellen, XX und XXI, für diese Correction gerechnet, u. z. gibt Tafel XX mit den Argumenten φ und a den Werth $\frac{e^2}{2} p \sin 2\varphi \sin a = U$ und Tafel XXI gibt mit U und dem Winkel q die Grösse $U \sin q$.

Die Correctionsgrösse ∂d ist der nach einer der Formeln (335), (336), (338), (340), (342) oder (344) gerechneten Distanz d hinzuzufügen.

Bezüglich der Wahl des Vorzeichens der Correction ∂d führt am einfachsten die folgende Betrachtung zum Ziele. Steht der Mond westlich vom Meridiane, so ist das scheinbare Azimuth grösser als das wahre Azimuth, oder was dasselbe sagen will, der Mond steht dem Beobachter auf der Erdoberfläche vom Meridiane entfernter, als einem Beobachter am Mittelpuncte. Misst man nun die Distanz zwischen Mond und Stern, so wird diese gemessene Distanz kleiner oder grösser als die geocentrische Distanz ausfallen müssen, je nachdem der Mond als linksseitiges oder als rechtsseitiges Object bei der Distanzmessung erscheint. Steht hingegen der Mond östlich vom Meridiane, so ist das scheinbare Azimuth kleiner als das wahre Azimuth, d. h. auch in diesem Falle erscheint der Mond dem Beobachter auf der Erdoberfläche entfernter vom Meridiane als einem Beobachter am Mittelpuncte. Die Distanzmessung zwischen Mond und Stern wird nunmehr aber ein grösseres oder kleineres Resultat als die geocentrische Distanz geben, je nachdem bei der Distanzmessung der Mond als linksseitiges oder als rechtsseitiges Object erscheint. Man hat also:

für Mond westlich vom Meridiane	Mond links, Stern rechts	∂d +
	Mond rechts, Stern links	∂d —
für Mond östlich vom Meridiane	Mond links, Stern rechts	∂d —
	Mond rechts, Stern links	∂d +

8. Berechnung der mittleren Zeit T' jenes Meridianes, für welchen die Ephemeride gilt, welche der auf den Mittelpunct der Erde reducirten Distanz d entspricht.

Da in der Ephemeride die geocentrischen Distanzen der beiden Gestirne von 3 zu 3 Stunden angegeben sind, so kann man nunmehr umgekehrt zu der gegebenen geocentrischen Distanz d die zugehörige Zeit des Meridianes der Ephemeride durch Interpolation finden; sei diese Zeit T', so ist die Länge zwischen dem Meridiane des Beobachtungsortes und dem Meridiane, für welchen die Ephemeride gilt, gegeben durch

$$L = T' - T.$$

279. Beispiel. Am 6. October 1851 wurde in Wien an einem Puncte, dessen Polhöhe $\varphi = 48^0\ 11'\ 40''$ ist, die Distanz der entfernteren Ränder zwischen Mond und Saturn gemessen; es ergab sich zur mittlern Wiener Zeit $11^h\ 57^m\ 9^s$ die Distanz mit $56^0\ 6'\ 38{\cdot}6''$. Der Stand der meteorologischen Instrumente war folgender: Barometer $27''\ 8{\cdot}7'''$ P. M., Temperatur des Quecksilbers $+ 16{\cdot}0^0$ R., Temperatur der äusseren Luft $+ 12{\cdot}1^0$ R.

Zur Berechnung sollen die weiteren Daten aus dem Berliner astronomischen Jahrbuche entnommen werden. Nach demselben sind die Oerter des Mondes und des Saturn die folgenden:

Mittlere Berliner Zeit			Rectasc. ☾	Declination ☾	Parallaxe ☾	r ☾
		h	h m s	° ′ ″	′ ″	′ ″
October	5	12	21 53 24.96	— 15 39 31.9	54 10.8	14 45.8
„	6	0	22 16 57.58	— 13 59 29.1	54 5.2	14 44.3
„	6	12	22 40 6.40	— 12 11 13.5	54 1.4	14 43.3
„	7	0	23 2 54.68	— 10 15 52.7	53 59.3	14 42.7
„	7	12	23 25 26.22	— 8 14 34.0	53 59.0	14 42.6

		Rectasc. ♄	Declination ♄	Parallaxe ♄	R ♄
	h	$h\ \ m\ \ s$	$°\ \ '\ \ ''$		
October 5	0	2 4 27.89	+ 9 43 0.5		$''$ $''$
„ 6	0	4 11.44	41 26.1	Sept. 27 1.02	9.74
„ 7	0	3 54.81	39 51.1	Oct. 7 1.03	9.82
„ 8	0	2 3 38.00	+ 9 38 15.3	„ 17 1.04	9.87

Mit dem vorläufig angenommenen Längenunterschiede zwischen Wien und Berlin mit $11^m\ 50^s$ ergibt sich die der Beobachtungszeit $11^h\ 57^m\ 9^s$ entsprechende mittlere Berliner Zeit zu $11^h\ 45^m\ 19^s$ und für diese Zeit hat man nunmehr die Oerter der Gestirne, die Parallaxen und den Halbmesser derselben durch Interpolation zu finden. Man erhält nach durchgeführter Rechnung für diese Zeit:

Rectascension ☾	$22^h\ 39^m\ 38^s.12$		Rectascension ♄	$2^h\ 4^m\ 3^s.32$
Declination ☾	$-\ 12^0\ 13'\ 31''.8$		Declination ♄	$+\ 9^0\ 40'\ 40''.6$
Parallaxe ☾	54 1 .5		Parallaxe ♄	1 .0
Halbmesser ☾	14 43 .3		Halbmesser ♄	9 .8

Verwandelt man sich die mittlere Wiener Zeit in Sternzeit, so erhält man:

Sternzeit im mittleren Berliner Mittag October 6 . .	$12^h\ 58^m\ 3^s.24$
Reduction auf Wien	$-$ 1 .96
Sternzeit im mittleren Wiener Mittage	$12^h\ 58^m\ 1^s.28$
Mittlere Ortszeit	11 57 9 .00
Reduction auf Sternzeit	+ 1 57 ·80
Orts-Sternzeit $\theta =$	$0^h\ 57^m\ 8^s.08$
und hiemit nach $t = \theta - \alpha$ Stundenwinkel ☾	$2^h\ 17^m\ 29^s.96 = 34^0\ 22'\ 29''.4$
Stundenwinkel ♄	22 53 4 .76 = 343 16 11 .4

Mit der Polhöhe, der Declination und dem Stundenwinkel rechnet man sich die wahre Höhe und das wahre Azimuth für beide Gestirne; man findet folgende Resultate:

	Mond	Saturn
Wahre Höhe	$h = 22^0\ 19'\ 30''.8$	$H = 48^0\ 59'\ 29''.4$
Wahres Azimuth	$a = 36^0\ 37'\ 14''.1$	$A = -\ 25^0\ 37'\ 25''.7$

$$E = a - A = 62^0\ 14'\ 39''.8$$

Berechnung der Parallaxe in Höhe und im Azimuthe für den Mond.

Für die Polhöhe $\varphi = 48^0\ 11'\ 40''$ ist die verbesserte oder geocentrische Breite $\varphi' = 48^0\ 0'\ 13''.4$ und $\log \varrho = 9{\cdot}999196$, mithin ist:

$$\varphi - \varphi' = 11'\ 26''.6 = 686''.6.$$

Die Rechnung nach den Glgn. (328) und (330*) ist die folgende:

$$\log(\varphi - \varphi') = 2.8367$$
$$\log\cos a = 9.9045$$
$$\log(\varphi - \varphi')\cos a = 2.7412$$
$$(\varphi - \varphi')\cos a = 551''.1 = 9'\ 11''.1$$
$$h + (\varphi - \varphi')\cos a = 22^0\ 28'\ 41''.9 = F$$

$$\log\varrho = 9.99920$$
$$\log\sin p = 8.19630$$
$$\log\cos F = 9.96568$$
$$\log\sin F = 9.58244$$
$$\log\varrho\sin p\sin F = 7.77794$$
$$\varrho\sin p\sin F = 0.005997$$
$$\text{Nenner} = 0.99400$$

$$\log\text{Zähler} = 8.16118$$
$$\log\text{Nenner} = 9.99739$$
$$\log\operatorname{tg}(h - h') = 8.16379$$
$$h - h' = 0^0\ 50'\ 7''.4$$
$$\text{also } h' = h + 0^0\ 50'\ 7''.4$$

$$\log\varrho\sin p = 8.1955$$
$$\log\sin(\varphi - \varphi') = 7.5229$$
$$\log\sin a = 9.7756$$
$$\log\sec h = 0.0338$$
$$\log 206265 = 5.3144$$
$$\log(a' - a) = 0.8421$$
$$(a' - a) = 6''.95$$

Für Saturn ist die Höhenparallaxe $P\cos H = 0''.68$.

Es sind daher die mit der Parallaxe behafteten Höhen:

$$☽\, h = 22^0\ 19'\ 30''.8 \qquad ♄\, H = 48^0\ 59'\ 29''.4$$
$$\text{Höhenparallaxe} = -\ 0\ \ 50\ \ 7\ .4 \qquad = -\ 0''.7$$
$$☽\, h_1 = 21^0\ 29'\ 23''.4 \qquad ♄\, H_1 = 48^0\ 59'\ 28''.7.$$

Mit diesen mit der Parallaxe behafteten Höhen rechnet man sich mit Rücksicht auf den beobachteten Barometer- und Thermometerstand die wahren Refractionen; dieselben sind bezüglich:

$$☽\, B_m = 2'\ 21''.6 \qquad B_s = 50''.0$$

und hiemit hat man schliesslich:

scheinbare Höhe des Mondes: $h' = h_1 + B_m = 21^0\ 31'\ 45''.0$

scheinbare Höhe des Saturn: $H' = H_1 + B_s = 49^0\ 0'\ 18''.7.$

Berechnung des scheinbaren Halbmessers des Mondes:

$$\log\sin p = 8.1963$$
$$\log\sin h = 9.5796$$
$$\log r = 2.9461$$
$$\log r\sin p\sin h = 0.7220$$

$$r\sin p\sin h = 5''.27$$
$$r = 14'\ 43''.30$$
$$r' = r(1 + \sin p\sin h) = 14'\ 48''.6$$

Es ist also der durch die Parallaxe vergrösserte Halbmesser des Mondes $r' = 14'\ 48''.6$, welcher zugleich der Horizontalhalbmesser der in Folge der Refraction entstandenen elliptischen Form des Mondes ist. Um den durch die Refraction verkürzten, vertikalen Halbmesser der Ellipse zu finden, hat man:

Scheinbare Höhe des Mondmittelpunktes . . . . . $h' = 21^0\ 31'\ 45''.0$

Genäherte scheinbare Höhe des oberen Randes $h' + r' = 21\ \ 46\ \ 34$

" " " " unteren " $h' - r' = 21\ \ 16\ \ 56$

und hiemit: Refraction " oberen " $B_o = 2'\ 23''.6$

" " unteren " $B_u = 2\ \ 27\ .2$

$$\varDelta B = \tfrac{1}{2}(B_u - B_o) = 1\ .8$$

Verticaler Halbmesser $r_v = r' - 1''.8 = 14'\ 46''.8.$

Mit den scheinbaren Höhen h' und H' und der genäherten Distanz d_n der Mittelpunkte beider Gestirne rechnet man sich den parallaktischen Winkel q am Monde und die Verkürzung des Halbmessers in der Richtung der gemessenen Distanz.

Es ist aber

$$d_n = 56^0\ 6'\ 39'' - r' - R = 56^0\ 6'\ 39'' - 14'\ 59'' = 55^0\ 51'\ 40'',$$

mithin:

$h' = 21^0\ 32'$	$\log\cos s = = 9.6541$	$\frac{1}{2} q = 22^0\ 16'$
$H' = 49\ \ 0$	$\log\sin(s - H') = 9.3897$	$q = 44^0\ 32'$
$d_n = 55\ \ 52$	$\log\sec h' = 0.0314$	$\log\cos q = 9.853$
$s = 63\ \ 12$	$\log\operatorname{cosec} d_n = 0.0821$	$\log\cos q^2 = 9.706$
$s - H' = 14^0\ 12'$	$\log\sin\frac{1}{2} q^2 = 9.1573$	$\log\frac{1}{2}(B_u - B_o) = 0.255$
	$\log\sin\frac{1}{2} q = 9.5786,5$	$\log \varDelta B \cos q^2 = 9.961$
		$\varDelta B \cos q^2 = 0''.91$

Mit den bisher gerechneten Daten hat man die scheinbare Distanz d' der Mittelpuncte der beiden Gestirne nach Gl. (334):

$$\begin{aligned} d'' &= 56^0\ \ 6'\ 38.''6 \\ r' - \varDelta B \cos q^2 &= -\ \ 14'\ 47''.7 \\ R' &= -\ \ \ \ 9''.8 \\ \hline d' &= 55^0\ 51'\ 41''.1. \end{aligned}$$

Die Berechnung der geocentrischen Distanz soll nach der Gl. (341) erfolgen; es ist:

$$\begin{aligned} d' &= 55^0\ 51'\ 41''.1 \\ h' &= 21\ \ 31\ \ 45\ .0 \\ H' &= 49\ \ \ 0\ \ 18\ .7 \\ \hline s &= 63^0\ 11'\ 52''.4 \\ s - h' &= 41\ \ 40\ \ \ 7\ .4 \\ s - H' &= 14\ \ 11\ \ 33\ .7 \\ h &= 22\ \ 19\ \ 30\ .8 \\ H &= 48\ \ 59\ \ 29\ .4 \end{aligned}$$

$\log\sec h' = 0.0314093$	$\frac{1}{2}(H - h) = 13^0\ 19'\ 59''.3$
$\log\sec H' = 0.1831023$	$\log\sin\frac{1}{2}(H - h) = 9.3628830$
$\log\sin(s - h') = 9.8227055$	$\log c = 9.6049438$
$\log\sin(s - H') = 9.3894917$	$\log\operatorname{tg}\mu = 9.7579392 \quad \mu = 29^0\ 48'\ 1''.61$
$\log\cos h = 9.9661617$	$\log\sin\mu = 9.6963395$
$\log\cos H = 9.8170171$	$\log\cos\mu = 9.9384004$
$\log c^2 = 9.2098876$	$\log\sin\frac{1}{2} d = 9.6665435$ . . (nach Gl. 342)
	$\log\sin\frac{1}{2} d = 9.6665434$ . . (nach Gl. 342*)
	$\frac{d}{2} = 27^0\ 38'\ 50''.2$
	$d = 55\ \ 17\ \ 40\ .4$

Correction der gerechneten geocentrischen Distanz d wegen der Azimuthalparallaxe des Mondes, u. zw. weil die Parallaxe des Mondes im Azimuthe bereits gerechnet worden ist nach Gl. (k) pag. 616; es war nämlich $\Delta a = a' - a = 6''.95$ und $E = a - A = 62^0\ 14'\ 40''$. Man hat also:

$$\begin{aligned} \log\ \cos h &= 9.9662 \\ \log \cos H &= 9.8170 \\ \log\ \sin E &= 9.9469 \\ \log \operatorname{cosec} d &= 0.0851 \\ \log \Delta a &= 0.8421 \\ \hline \log \partial d &= 0.6573 \qquad \partial d = 4''.54, \end{aligned}$$

somit, weil der Mond westlich vom Meridiane und rechts vom Saturn stand: Wahre Distanz $d = 55^0\ 17'\ 40''.4 - 4''.5$, d. i.:

$$d = 55^0\ 17'\ 35''.9.$$

Zu dieser Distanz ist nun die Ortszeit der Ephemeride zu bestimmen. Im Berliner astronomischen Jahrbuche findet man:

October 6,	6^h	$d = 58^0\ \ 8'\ 52''$	
			$-\ 1^0\ 29'\ 12''$
	9	56 39 40	
			$-\ 1^0\ 29'\ 12''$
	12	55 10 29	
			$-\ 1^0\ 29'\ 10''$
	15	53 41 19	
			$-\ 1^0\ 29'\ \ 8''$
	18^h	52 12 11	

Es ist also die Aenderung der Distanz in 3^h . . $-\ 1^0\ 29'\ 11'' = -\ 5351''$
in 1^h . . $-\ 1783''.7$

Die Differenz zwischen der aus der Beobachtung abgeleiteten geocentrischen Distanz $d = 55^0\ 17'\ 35''.9''$ und der Distanz, welche am 6. October um 12^h statt hat, ist

$$55^0\ 17'\ 35''.9 - 55^0\ 10'\ 29'' = 7'\ 6''.9 = 426''.9.$$

Man hat also die Proportion:

$$3600 : -\ 1783{\cdot}7 = x^s : 426.9,$$

aus welcher

$$x = -\ 861^s.6 = -\ 14^m\ 21^s.6$$

folgt.

Demnach ist die der gemessenen Distanz entsprechende

Berliner Ortszeit $= 12^h + x$	$11^h\ 45^m\ 38^s.4$
Wiener Ortszeit	$11^h\ 57^m\ \ 9^s.0$
Oestliche Länge des Beobachtungsortes von Berlin .	$11^m\ 30^s.6$

450. Näherungs-Methoden zur Reduction der Monddistanzen.

Zur Reduction der beobachteten Monddistanzen hat man auch Näherungs-Methoden vorgeschlagen, welche theils auf successiver Näherung, theils auf Reihenentwicklung beruhen.

Die einfachste, auch älteste, schon von Lacaille im Jahre 1759 vorgeschlagene Näherungs-Methode ergibt sich aus der Gl. (c'), pag. 611:

$$\cos d = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos E$$

durch Differenziren nach d, h und H; man erhält:

$$\begin{aligned} -\sin d\, \partial d = & (\cos h \sin H - \sin h \cos H \cos E)\, \partial h \\ & + (\sin h \cos H - \cos h \sin H \cos E)\, \partial H. \end{aligned}$$

Nun ist, wenn q den Winkel am Monde, Q den Winkel am Sterne bezeichnet, nach der zweiten Gleichung von (b), pag. 88:

$$\begin{aligned} \sin d \cos q &= \sin H \cos h - \cos H \sin h \cos E \\ \sin d \cos Q &= \sin h \cos H - \cos h \sin H \cos E, \end{aligned}$$

mithin:

$$\partial d = -\partial h \,.\, \cos q - \partial H \,.\, \cos Q. \tag{347}$$

Fasst man die Differentialien ∂d, ∂h, ∂H so auf, dass selbe den Uebergang von den wahren auf die scheinbaren Grössen bedeuten, also $\partial d = d - d'$, $\partial h = h - h'$, $\partial H = H - H'$ ist, so wird:

$$d - d' = -(h - h') \cos q - (H - H') \cos Q,$$

oder:

$$d = d' - (h - h') \cos q - (H - H') \cos Q. \tag{348}$$

Bei dem Monde ist $h - h'$ immer positiv, bei der Sonne oder einem anderen Gestirne, das zur Distanzmessung benützt wird, ist fast ausschliesslich $H - H'$ negativ, es wird demnach die zweite, von $(H - H')$ abhängige Correction positiv werden.

Die Berechnung der Winkel q und Q erfolgt nach den folgenden Gleichungen, für welche der Weg zu ihrer Bildung schon auf pag. 610 gegeben ist.

$$\left.\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}(h + H + d) \\ \sin \tfrac{1}{2} q^2 &= \frac{\cos s \sin (s - H)}{\cos h \sin d} \\ \sin \tfrac{1}{2} Q^2 &= \frac{\cos s \sin (s - h)}{\cos H \sin d} \end{aligned}\right\} \tag{349}$$

oder:

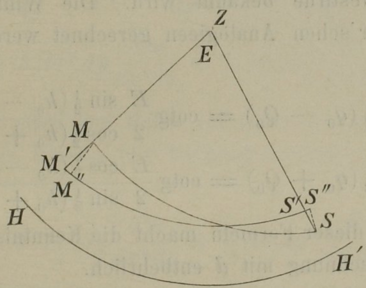
$$\left.\begin{aligned} \sin q &= \frac{\cos H}{\sin d} \sin E \\ \sin Q &= \frac{\cos h}{\sin d} \sin E \end{aligned}\right\} \tag{349*}$$

Die Distanz d, deren Werth man noch nicht kennt, muss als Näherungswerth bestimmt und so in Rechnung genommen werden.

Die geometrische Bedeutung der Correctionsglieder $\partial h \cos q$ und $\partial H \cos Q$ ergibt sich aus der Fig. 100, wenn man von M und S die Perpendikel MM'' und SS″ zieht; es ist dann: $M'M'' = \partial h \cos q$, $S'S'' = \partial H \cos Q$.

In Folge der Berücksichtigung der Correctionen $\partial h \cos q$ und $\partial H \cos Q$ erhält man aus der scheinbaren Distanz d' noch keineswegs die wahre Distanz d, weil ja dieses zur Voraussetzung haben müsste, dass arc MS = arc $M''S''$ wäre, was keineswegs der Fall ist.

Fig. 100.



Legendre*) hat den Vorschlag gemacht, die Functionswerthe $\cos q$ und $\cos Q$ nicht aus den wahren und nicht aus den scheinbaren Höhen und der bezüglichen Distanz, sondern aus den arithmetischen Mittelwerthen zu berechnen. Sind diese Mittelwerthe h_0, H_0 und d_0, also

$$h_0 = \frac{h + h'}{2} = h' + \frac{\Delta h}{2}, \quad H_0 = \frac{H + H'}{2} = H' - \frac{\Delta H}{2}, \quad d_0 = d' + \frac{x}{2},$$

so hat man, wenn die Winkel am Monde und dem zweiten Sterne nunmehr mit q_0 und Q_0 bezeichnet werden, zur Berechnung derselben folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos q_0 &= \frac{\sin H_0 - \sin h_0 \cos d_0}{\cos h_0 \sin d_0} \\ \cos Q_0 &= \frac{\sin h_0 - \sin H_0 \cos d_0}{\cos H_0 \sin d_0}, \end{aligned}\right\} \tag{350}$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} q_0^2 &= \frac{\cos s \sin (s - H_0)}{\cos h_0 \sin d_0} \\ \sin \tfrac{1}{2} Q_0^2 &= \frac{\cos s \sin (s - h_0)}{\cos H_0 \sin d_0}, \end{aligned}\right\} \tag{350*}$$

wo $s = \frac{1}{2}(h_0 + H_0 + d_0)$ ist.

*) Nouvelle formule pour reduire en distances vraies les distances apparentes de la lune au soleil ou à une étoile, par A. M. Legendre. Memoires de l'institut des sciences lettres et arts. Tome sixième. 1806.

Hier wird der Werth von der wahren Distanz schon bekannt vorausgesetzt; man kann also nur durch Näherung zum Ziele kommen, indem man in vorstehende Gleichungen zunächst für d_0 die scheinbare Distanz d' einsetzt und hiermit nach Gl. (348) einen Werth x_n rechnet, dann $d_0 = d' + \frac{x_n}{2}$ einsetzt und die Rechnung so oft wiederholt, bis der verlangte Grad der Genauigkeit erreicht ist.

Da man bei der Reduction der Monddistanzen das Azimuth des Mondes ohnehin rechnen muss, so empfiehlt es sich, auch das Azimuth des zweiten Sternes zu rechnen, wodurch der Winkel E am Zenith zwischen den Verticalkreisen der beiden Gestirne bekannt wird. Die Winkel q_0 und Q_0 können jetzt nach den Neper'schen Analogieen gerechnet werden, welche in diesem Falle folgende sind:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(q_0 - Q_0) &= \operatorname{cotg} \frac{E}{2} \, \frac{\sin \frac{1}{2}(h_0 - H_0)}{\cos \frac{1}{2}(h_0 + H_0)} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(q_0 + Q_0) &= \operatorname{cotg} \frac{E}{2} \, \frac{\cos \frac{1}{2}(h_0 - H_0)}{\sin \frac{1}{2}(h_0 + H_0)}. \end{aligned}\right\} \tag{350*}$$

Die Anwendung dieser Formeln macht die Kenntniss von d, beziehentlich die näherungsweise Rechnung mit d entbehrlich.

Die Gl. (348) geht nunmehr in folgende über:

$$d = d' - (h - h') \cos q_0 - (H - H') \cos Q_0. \tag{351}$$

Die Berechnung der Reduction der Distanz nach dem Vorschlage von Legendre hat den grossen Vortheil, dass hiebei die Glieder 2ter Ordnung vollständig und die Glieder der 3ten Ordnung zum grössten Theile berücksichtigt erscheinen. Es ergibt sich das aus folgender Betrachtung:

Es sei u eine Function der zwei Variablen x und y, also $u = f(x, y)$.

Wenn x und y sich ändert um Δx und Δy, so wird u sich ändern um Δu und unter Berücksichtigung der Glieder 1ter Ordnung ist

$$\Delta u = \Delta x \frac{du}{dx} + \Delta y \frac{du}{dy}, \tag{a}$$

wo $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ im Allgemeinen wieder Functionen von x und y sein werden; bezeichnet man $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ beziehentlich mit $\psi(x, y)$ und $\varphi(x, y)$, so wird

$$\Delta u = \Delta x \, \psi(x, y) + \Delta y \, \varphi(x, y). \tag{a*}$$

Setzt man nun in

$\psi(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ statt x, $x + \frac{1}{2}\Delta x$, statt y, $y + \frac{1}{2}\Delta y$,

so wird

$$\Delta u = \Delta x \, \psi(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y + \tfrac{1}{2}\Delta y) + \Delta y \, \varphi(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y + \tfrac{1}{2}\Delta y), \tag{b}$$

oder nach vorgenommener Entwicklung:

$$\Delta u = \Delta x\,\psi(x,y) + \Delta y\;\varphi(x,y) + \tfrac{1}{2}\,\Delta x^2\frac{d\psi}{dx} + \tfrac{1}{2}\Delta y^2\frac{d\varphi}{dy} + \tfrac{1}{2}\,\Delta x\Delta y\left(\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left[\frac{d^2\psi}{dx^2}\Delta x^3 + 2\,\Delta x^2\Delta y\,\frac{d^2\psi}{dx\,dy} + 2\,\Delta x\Delta y^2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \Delta x\Delta y^2\frac{d^2\psi}{dy^2} + \Delta x^2\Delta y\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right.$$
$$\left. + \Delta y^3\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right].$$

Setzt man wieder für $\psi(x\,y)\,..\,\frac{du}{dx}$, für $\varphi(x,y)\,..\,\frac{du}{dy}$, so kommt:

$$\Delta u = \Delta x\,\frac{du}{dx} + \Delta y\,\frac{du}{dy} + \tfrac{1}{2}\left(\Delta x^2\frac{d^2u}{dx^2} + \Delta y^2\frac{d^2u}{dy^2} + 2\,\Delta x\Delta y\,\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$$

$$+ \frac{1}{2.4}\left[\Delta x^3\frac{d^3u}{dx^3} + 3\,\Delta x^2\Delta y\,\frac{d^3u}{dx^2dy} + 3\,\Delta x\Delta y^2\,\frac{d^3u}{dx\,dy^2} + \Delta y^3\,\frac{d^3u}{dy^3}\right] \qquad (c)$$

Die Entwicklung nach der Reihe von Taylor ergibt die volle Uebereinstimmung bis auf die Glieder 2^{ter} Ordnung inclusive, während die Glieder 3^{ter} Ordnung sind:

$$\frac{1}{2.3}\left[\Delta x^3\frac{d^3u}{dx^3} + 3\,\Delta x^2\Delta y\,\frac{d^3u}{dx^2\,dy} + 3\,\Delta x\Delta y^2\,\frac{d^3u}{dx\,dy^2} + \Delta y^3\,\frac{d^3u}{dy^3}\right],$$

woraus man erkennt, dass der Fehler der Formel (b) nur der 4^{te} Theil der Gesammtheit der Glieder 3^{ter} Ordnung beträgt.

Die Formel (b) ist aber in der That für unsere Aufgabe angewendet worden, denn man hat die Functionswerthe $\frac{du}{dx} = \cos q$ und $\frac{du}{dy} = \cos Q$ mit den Mittelwerthen $h_0 = \frac{h + h'}{2} = h' + \frac{\Delta h}{2}$, $H_0 = \frac{H + H'}{2} = H' - \frac{\Delta H}{2}$ gerechnet und hiefür

$$\psi\left(x + \frac{\Delta x}{2},\; y + \frac{\Delta y}{2}\right) = \cos q_0 \text{ und } \varphi\left(x + \frac{\Delta x}{2},\; y + \frac{\Delta y}{2}\right) = \cos Q_0$$

erhalten. Es ist also auch die Reduction: $d - d' = -\,\partial h\cos q_0 - \partial H\cos Q_0$. nach Gl. (351) bestimmt, bis auf die Glieder 2^{ter} Ordnung genau und nur um den 4^{ten} Theil der Glieder 3^{ter} Ordnung fehlerhaft.

Beispiel. Es soll das nach den strengen Gleichungen gerechnete Beispiel nach der Näherungsformel (351) reducirt werden.

Die bereits bekannten Daten sind:

	Mond	Saturn
Scheinbare Höhen	$h' = 21^\circ\ 31'\ 45''.0$	$H' = 49^\circ\ 0'\ 18''.7$
Wahre Höhen	$h = 22\ \ 19\ \ 30\ .8$	$H = 48\ \ 59\ \ 29''.4$
Scheinbare Distanz der Mittelpuncte		$d' = 55^\circ\ 51'\ 41''.1$
Winkel am Zenith		$E = 62\ \ 14\ \ 39\ .8$

$$
\begin{array}{lrrrrlrrr}
\text{Mittel der Höhen} \ldots\ h_0 = & 21^0 & 55' & 37''.9 & & & & & \\
H_0 = & 48 & 59 & 54\ .0 & & & & & \\
\text{Differenz der Höhen}\ .\ \Delta h = & 0 & 47 & 45\ .8 & = 2035''.8 & & & & \\
\Delta H = - & 0 & 0 & 49\ .3 & & & & & \\
h_0 - H_0 = - & 27 & 4 & 16\ .1, & \frac{1}{2}(h_0 - H_0) = - & 13^0 & 32' & 8''.1 \\
h_0 + H_0 = & 70 & 55 & 31\ .9, & \frac{1}{2}(h_0 + H_0) = & 35 & 27 & 46\ .0 \\
 & & & & \frac{1}{2} E = & 31 & 7 & 19\ .9
\end{array}
$$

Berechnung von q_0 und Q_0 nach der Gl. (350*) und von $d - d'$ nach Gl. (351):

$$
\begin{array}{rl}
\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} E = & 0.219130 \\
\log \sin \frac{1}{2} (h_0 - H_0) = & 9.369307\ (n) \\
\hline
 & 9.588437\ (n) \\
\log \cos \frac{1}{2} (h_0 + H_0) = & 9.910887 \\
\hline
\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (q_0 - Q_0) = & 9.677550\ (n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} E = & 0.219130 \\
\log \cos \frac{1}{2} (h_0 - H_0) = & 9.987767 \\
\hline
 & 0.206897 \\
\log \sin \frac{1}{2} (h_0 + H_0) = & 9.763558 \\
\hline
\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (q_0 + Q_0) = & 0.443339
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
\frac{1}{2} (q_0 - Q_0) = - & 25^0 & 27' & 5''.6 \\
\frac{1}{2} (q_0 + Q_0) = & 70 & 11 & 9\ .7 \\
\hline
q_0 = & 44^0 & 44' & 4\ .1 \\
Q_0 = & 95 & 38 & 15\ .3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \cos q_0 = & 9.851488 \\
\log \Delta h = & 3.457246 \\
\hline
 & 3.308734 \\
\Delta h \cos q_0 = & 2035''.80
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log \cos Q_0 = & 8.9924\ (n) \\
\log \Delta H = & 1.6928\ (n) \\
\hline
 & 0.6852 \\
\Delta H \cos Q_0 = & 4''.84
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Es ist also:} & d - d' = & - 2035''.80 - 4''.84 = - 2040''.64 \\
 & d - d' = & - 0^0\ 34'\ 0''.64 \\
 & d' = & 55\ \ 51\ \ 41\ .1. \\
\text{Wahre Distanz:} & d = & 55^0\ 17'\ 40''.46.
\end{array}
$$

Dieser Werth ist bis auf 0.06 Secunden mit dem Resultate der strengen Rechnung übereinstimmend.

Die weitere Reduction ist der auf pag. 621 gegebenen analog.

Von Bremiker*) wurde auch eine Näherungsmethode zur Reduction der Monddistanzen vorgeschlagen, welche leicht und schnell auszuführen ist, keine Unterscheidung von Fällen erfordert und wenn nicht die grösste Genauigkeit verlangt wird, die Anwendung fünfstelliger Logarithmen gestattet.

Zur Entwicklung der nothwendigen Formeln geht man wieder von der Grundgleichung (335) aus; dieselbe lautet:

$$\cos d = \cos (H - h) - \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'} [\cos (H' - h') - \cos d'].$$

---

*) Dr. K. Bremiker: Ueber die Reduction der Monddistanzen. Astronom. Nachrichten, Band 30.

Setzt man den Factor

$$\frac{\cos h \ \cos H}{\cos h' \cos H'} = \frac{1}{C},$$

so wird C im Allgemeinen grösser als 1 sein. Nur dann, wenn die Sonnenhöhe sehr gering, die Mondhöhe aber gleichzeitig sehr gross ist, würde C kleiner als 1 werden.

Zur Abkürzung sei noch $H - h = \varDelta$ und $H' - h' = \varDelta'$ gesetzt, und $\varDelta$ als $\varDelta'$ stets positiv genommen. Da nun $\varDelta$ und $\varDelta'$ im ersten Quadranten liegt und $C > 1$ ist, so kann man

$$\frac{\cos d'}{C} = \cos D' \text{ und } \frac{\cos \varDelta'}{C} = \cos \varDelta''$$

setzen; mit Rücksicht auf diese neuen Einführungen geht obige Gleichung in die folgende über:

$$\cos d = \cos \varDelta + \cos D' - \cos \varDelta''$$

oder:

$$\cos d - \cos D' = \cos \varDelta - \cos \varDelta''.$$

Durch entsprechende Umformung erhält man statt dieser Gleichung die nachstehende:

$$\sin \tfrac{1}{2}(d - D') \sin \tfrac{1}{2}(d + D') = \sin \tfrac{1}{2}(\varDelta - \varDelta'') \sin \tfrac{1}{2}(\varDelta + \varDelta'').$$

Bedenkt man, dass $\frac{1}{2}(d - D')$ und $\frac{1}{2}(\varDelta - \varDelta'')$ kleine Winkel sind, so kann man statt sinus den Bogen selbst setzen und erhält dann:

$$d - D' = (\varDelta - \varDelta'') \frac{\sin \frac{1}{2}(\varDelta + \varDelta'')}{\sin \frac{1}{2}(d + D')}.$$

Setzt man $d - D' = z$, so hat man

$$z = (\varDelta - \varDelta'') \frac{\sin \frac{1}{2}(\varDelta + \varDelta'')}{\sin \frac{1}{2}(d + D')}$$

und hiermit die reducirte Distanz: $d = D' + z$.

Zur Berechnung von z benöthigt man schon den Werth der reducirten Distanz d, welcher erst gesucht werden soll; man wird daher als ersten Näherungswerth für d die scheinbare Distanz d' annehmen, also im Nenner statt $\sin \frac{1}{2}(d + D')$ $\sin \frac{1}{2}(d' + D')$ setzen, wodurch sich ein genäherter Werth von z ergibt, mit welchem die Rechnung in der Weise wiederholt wird, dass man im Nenner statt $\sin \frac{1}{2}(d + D') \ldots \sin \left(D' + \frac{z}{2}\right)$ setzt; bei der wiederholten Rechnung von z wird sich von den drei Logarithmen nur der eine, u. zw. nur jener von $\sin \frac{1}{2}(d + D')$ in den letzteren Stellen ändern. Die Näherung wird so oft wiederholt, bis der gefundene Werth z mit dem angenommenen nahe genug übereinstimmt.

Die zur Reduction der Monddistanzen nach Bremiker nothwendigen zu berechnenden Grössen sind:

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \log C = \log\cos h' + \log\cos H' - \log\cos h - \log\cos H \\
\qquad \Delta = H - h \qquad \Delta' = H' - h' \\
2.\ \text{Die Winkel } D' \text{ und } \Delta'' \text{ aus} \\
\qquad \log\cos D' = \log\cos d' - \log C \\
\qquad \log\cos\Delta'' = \log\cos\Delta' - \log C \\
3.\ z = (\Delta - \Delta'')\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\Delta + \Delta'')}{\sin\frac{1}{2}(d + D')} \\
4.\ D' + z = d = \text{reducirte Distanz.}
\end{array}\right\} \qquad (352)$$

Berechnung der reducirten Distanz nach diesen Formeln mit den im Beispiele auf pag. 619 angegebenen Daten:

Scheinbare Höhen . $h' = 21^0\,31'\,45''.0$	$H' = 49^0\ 0'\,18''.7$;	$\Delta' = 27^0\,28'\,33''.7$
Wahre Höhen . . . $h = 22\ 19\ 30\ .8$	$H = 48\ 59\ 29''.4$;	$\Delta = 26\ 39\ 58\ .6$
Scheinbare Distanz . $d' = 55\ 51\ 41\ .1$		
$\log\cos h' = 9.968591$	$\log\cos d' = 9.749115$	$\log\cos\Delta' = 9.948024$
$\log\cos H' = 9.816898$	$\log C = 0.002311$	$\log C = 0.002311$
$\log\cos h = 9.966161$	$\log\cos D' = 9.746804$	$\log\cos\Delta'' = 9.945713$
$\log\cos H = 9.817017$	$D' = 56^0\ 4'\ 2''.6$	$\Delta'' = 28^0\ 3'\,18''.2$
$\log C = 0.002311$	$d' = 55\ 51\ 41\ .1$	$\Delta = 26\ 39\ 58\ .6$
	$\frac{1}{2}(d' + D') = 55^0\,57'\,51''.9$	$\frac{1}{2}(\Delta + \Delta'') = 27^0\,21'\,38''.4$
		$\Delta - \Delta'' = -\ 1\ 23\ 19\ .6$

$$\begin{array}{rcl}
\log(\Delta - \Delta'') &=& 3.69893\ n \\
\log\sin\frac{1}{2}(\Delta + \Delta'') &=& 9.66237 \\
&& 3.36130\ n \\
\log\sin\frac{1}{2}(d' + D') &=& 9.91839 \\
\log z' &=& 3.44291\ n \\
\log\sin\left(D' + \dfrac{z'}{2}\right) &=& 9.91694 \\
\log z'' &=& 3.44436\ (n) \\
\log\sin\left(D' + \dfrac{z''}{2}\right) &=& 9.91694 \\
\log z''' &=& 3.44436\ (n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
z' &=& -\ 2772.8 = -\ 46'\ 12''.8 \\
D' + \dfrac{z'}{2} &=& 55^0\ 40'\ 56'' \\
z'' &=& -\ 2782.1 = -\ 46'\ 22''.1 \\
D' + \dfrac{z''}{2} &=& 55^0\ 40'\ 52'' \\
z &=& -\ 2782''.1,
\end{array}$$

also gleichwerthig mit z'', so dass $z = -\ 46'\ 22''.1$ als definitiver Werth anzunehmen ist. Mit demselben folgt:

Reducirte Distanz . . $d = 55^0\ 17'\ 40''.5$;

der Unterschied zwischen diesem Werthe und jenem nach den strengen Formeln ist demnach nur 0.1 Secunde.

Der weitere Gang der Rechnung zur Ableitung des Längenunterschiedes ist schon auf pag. 620 und 621 angegeben worden.