

NEUNTES CAPITEL.

BESTIMMUNG DES AZIMUTHES EINES IRDISCHEN OBJECTES.

220. Unter Azimuth eines irdischen Objectes, bezogen auf einen bestimmten Beobachtungspunct oder der Richtung von letzterem Punkte zu dem irdischen Objecte, versteht man den Winkel, welchen die durch das Object gelegte Verticalebene mit der Meridianebene des Beobachtungspunctes einschliesst. Dieser Winkel hat jenen Bogen des Horizontes zum Maasse, welcher zwischen der Meridianebene und der bezeichneten Verticalebene liegt. Die Durchschnittslinie der Meridianebene mit dem Horizonte bestimmt die Mittagslinie des Beobachtungspunctes und man kann demnach auch sagen, das Azimuth des irdischen Objectes ist der Horizontalwinkel zwischen der Mittagslinie und der Durchschnittslinie, welche sich auf dem Horizonte mit der durch die gegebene Richtung nach dem irdischen Objecte gelegten Verticalebene ergibt.

Wenn man die Richtung der Mittagslinie für einen auf der Erdoberfläche gegebenen Punct kennt, so lässt sich dann leicht das Azimuth der Richtung nach einem irdischen Objecte bestimmen, und umgekehrt, ist das Azimuth der Richtung nach einem irdischen Objecte bekannt, so lässt sich die Richtung der Mittagslinie des Beobachtungspunctes leicht angeben.

Die Methoden zur Bestimmung des Azimuthes eines irdischen Objectes können je nach den Instrumenten und den Hilfsgrössen, welche dem Beobachter zur Verfügung stehen, verschieden sein.

Es sollen zunächst einige Methoden zur Bestimmung der Mittagslinie, beziehentlich zur Bestimmung des Azimuthes eines irdischen Objectes, welche die Kenntniss der Zeit und der Polhöhe des Beobachtungspunctes gar nicht oder nur näherungsweise erfordern, angegeben werden.

221. A. Ein Gestirn erreicht bekanntlich bei seinem oberen Meridiandurchgange die grösste Höhe. Verfolgt man demnach mit einem am Beobachtungsorte aufgestellten Universal-Instrumente das Gestirn, indem man es in der Richtung der Visirlinie erhält, so lange, bis die Höhenänderung aufhört, so steht das Gestirn und mithin auch die Visirlinie des Fernrohres in der Ebene des Meridians, und wenn man sich diese Richtung der Visirlinie auf den Horizont des Beobachtungspunctes projicirt denkt, so erhält man die Richtung der Mittagslinie. Macht man die zu dieser Richtung der Visirlinie entsprechende Ablesung M_p am Horizontalkreise, so bestimmt dieselbe den Meridianpunct des Instrumentes, u. zw. den Nordpunct, wenn man einen nördlichen, den Südpunct, wenn man einen südlichen Stern zur Beobachtung gewählt hat; stellt man dann die Visur nach dem irdischen Objecte ein und

macht nunmehr die Ablesung M am Horizontalkreise, so ergibt sich unter Voraussetzung eines von links nach rechts getheilten Kreises und eines beweglichen Nonius- oder Mikroskopträgers das Azimuth a der Richtung nach dem Objecte durch die Gleichung: $a = M - M_p$; es ist a das von Süd über West von $0 - 360^\circ$ gezählte Azimuth, wenn man einen auf der Südseite culminirenden Stern, hingegen ist a das von Nord über Ost gezählte Azimuth, wenn man einen auf der Nordseite culminirenden Stern beobachtet hat. Wenn der Kreis von links nach rechts getheilt, der Nonius- oder Mikroskopträger fest, hingegen der Kreis beweglich ist, so ist dann $a = M_p - M$.

Wenn man sich erinnert, dass die Aenderung der Höhe eines Gestirnes im Meridian gleich Null, vor und nach der Culmination aber sehr gering ist, so wird man auch erkennen, dass die eben erörterte Methode zur Bestimmung der Meridianrichtung sehr unsicher sein wird und nur zu einer approximativen Bestimmung der Meridianrichtung beziehentlich eines Azimuthes Anwendung finden kann.

B. Eine andere Methode, die Richtung des Meridians, oder den Meridianpunct des Instrumentes zu finden, besteht in der Beobachtung von correspondirenden Höhen. Für einen Fixstern gehören zu gleichen Stundenwinkeln auf beiden Seiten des Meridians auch gleiche Höhen. Beobachtet man daher den Stern vor und nach dem Meridiandurchgange bei gleicher Höhe, so werden dadurch zwei Verticalkreise bestimmt, welche zu beiden Seiten des Meridians von diesem gleich weit abstehen. Die Mitte dieser beiden durch die gleichen Höhen bestimmten Verticalkreise gibt die Meridianrichtung. Man wird daher den Stern vor dem Meridiandurchgange in einer bestimmten Höhe beobachten und die zugehörige Ablesung M_o am Horizontalkreise machen und dann nach dem Meridiandurchgange jenen Augenblick abwarten, bis das Gestirn wieder an den Kreuzungspunct der Fäden des in der Höhe unverändert gebliebenen Fernrohres tritt und die entsprechende Ablesung M_w vermerken; die Meridianrichtung ist dann durch die Lesung $M_p = \frac{1}{2}(M_o + M_w)$ gegeben; u. zw. ist M_p der Nord- oder der Südpunct, je nachdem man einen nördlichen oder einen südlichen Stern zur Beobachtung verwendet hat.

Benützt man zu dieser Beobachtung ein Gestirn mit eigener Bewegung, etwa die Sonne, so wird man wegen der Aenderung der Declination in der Zwischenzeit den Meridianpunct M_p corrigiren müssen, welche Correction sich durch Differenziren der Gleichung

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A$$

nach δ und A ergibt; es wird:

$$\cos \delta \, d\delta = \cos \varphi \cos h \sin A \, dA$$

und hieraus:

$$dA = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi \cos h \sin A} \, d\delta,$$

oder, da $\cos h \sin A = \cos \delta \sin t$, auch

$$dA = \frac{d\delta}{\cos \varphi \sin t} \quad (282)$$

Ist die Aenderung der Declination in der Zwischenzeit der Beobachtung $\Delta\delta$, so muss man, wenn die Theilung am Horizontalkreise im Sinne der Zählung der Azimuthe beziffert ist, die Lesung für den Meridianpunct um die Grösse $\mp \frac{\Delta\delta}{2 \cos \varphi \sin t}$ verbessern, wo $-$ für zunehmende und $+$ für abnehmende Declination gilt.

Beispiel. Zur Bestimmung des Meridianpunctes wurden auf einem Puncte des Observatoriums der k. k. technischen Hochschule in Wien gleiche Höhen des oberen und unteren Sonnenrandes beobachtet.

Die Beobachtungsdaten waren:

Datum Mittlere Wiener Zeit	Zur Höhe	Lesung am Horizont- talkreise	Datum Mittlere Wiener Zeit	Zur Höhe	Lesung am Horizon- talkreise	Zwischen- zeit	$M_p = \frac{1}{2}(M_o + M_w)$
1885, Dezmb. 30		M_o	1885, Dezmb. 31		M_w		
$^h \ ^m \ ^s$ 22 29 36.9	H_1	238° 45' 57.9"	$^h \ ^m \ ^s$ 1 37 12.4	H_1	283° 20' 45.2"	$^h \ ^m \ ^s$ 3 7 35.5	261° 3' 21.5"
38 44.9	H_2	240 49 12.3	28 3.2	H_2	281 17 27.5	2 49 18.3	3 19.9
44 11.7	H_3	242 5 20.7	1 22 37.8	H_3	280 1 14.2	2 38 26.1	261 3 17.5

Die Polhöhe des Beobachtungspunctes ist $\varphi = 48^\circ 12'.0$; aus dem Berliner astronomischen Jahrbuche entnimmt man:

Zeitgleichung = mittlerer Zeit weniger wahrer Zeit = $-3^m 22^s.9$
und für die in vorstehender Tabelle angesetzten Zwischenzeiten die Aenderung der Declination beziehentlich $\Delta\delta = +32''.5; +29''.3; +27''.4$.

Man hat demnach: Wahrer Wiener Mittag um $0^h 3^m 22^s.9$ und hiemit ergeben sich die den Beobachtungszeiten entsprechenden Stundenwinkel t wie folgt:

Für die Beobachtungen am 30. Dezember:	Für die Beobachtungen am 31. Dezember:	Im Mittel:
$^h \ ^m \ ^s$ $t = 1 33 46.0 = 23^\circ 26' 30''$	$^h \ ^m \ ^s$ $t = 1 33 49.5 = 23^\circ 27' 23''$	$t = 23^\circ 26' 56''$
24 38.0 = 21 9 30	24 40.3 = 21 10 4	= 21 9 47
19 11.2 = 19 47 48	19 14.9 = 19 48 44	= 19 48 16

Rechnet man mit den Mittelwerthen für t und den zugehörigen Werthen für $\Delta\delta$ die Correction $dA = \frac{\Delta\delta}{2 \cos \varphi \sin t}$, so erhält man beziehentlich

$$dA = 1' 1''.2, 1' 0''.9, 1' 0''.8.$$

Nimmt man aus den zu derselben Höhe gehörigen Ablesungen am Horizontalkreise das arithmetische Mittel, so erhält man die in obiger Tabelle in der achten Columnne angesetzten Werthe; verbessert man dieselben um dA und berücksichtigt, dass $\Delta\delta$ positiv ist, die Correction dA demnach negativ zu nehmen ist, so ergeben sich für die drei Beobachtungen die folgenden sehr gut übereinstimmenden Lesungen für den Meridianpunct, u. zw. in diesem Falle für den Südpunct:

$$\begin{array}{r} M_p = 261^\circ 2' 20'' \\ \quad \quad \quad 2 \quad 19 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 2 \quad 17 \end{array}$$

im Mittel: $M_p = 261^\circ 2' 19''$

C. Eine nächste Methode zur Bestimmung der Meridianrichtung ist die Beobachtung der grössten Digressionen. Bekanntlich ist zur Zeit der grössten Digression der parallaktische Winkel 90° , und wegen der Berührung des Parallelkreises mit dem Höhenkreise die Bewegung des Sternes senkrecht gegen den Horizont, also die Bewegung im Azimuthe Null. Wenn man demnach einen Stern, dessen Declination grösser als die Polhöhe des Beobachtungspunctes ist, in seiner Bahn mit einem Universal-Instrumente verfolgt, so wird man im allgemeinen die Visirlinie im Azimuthe und in der Höhe bewegen müssen, um denselben auf dem Kreuzungspuncte der Fäden zu erhalten und nur beim Eintritte des Sternes in die grösste Digression wird die Bewegung im Azimuthe aufhören und jene in der Höhe allein hinreichen, um den Stern in der Visirlinie des Fernrohres zu erhalten. Liest man dann, wenn diese Erscheinung auf der Ostseite des Meridians eintritt, am Horizontalkreise ab, ebenso, wenn dieses auf der Westseite des Meridians statt hat, und wären die Lesungen beziehentlich M_o und M_w , so ist $M_p = \frac{1}{2}(M_o + M_w)$ die dem Meridianpuncte entsprechende Lesung am Kreise.

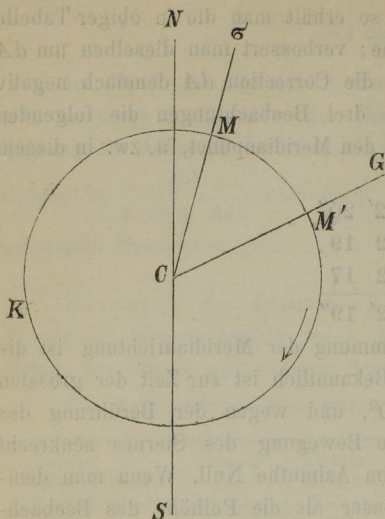
Bei der Ausführung dieser Methode wird man am vortheilhaftesten den Polarstern verwenden, weil derselbe unter den helleren, nördlich vom Zenith culminirenden Sternen am längsten in der grössten Digression verweilt.

Um nicht zu lange zu warten zu müssen, wird man sich die Zeit und der Einstellung wegen das Azimuthe und die Höhe für den Eintritt des Sternes in die grösste östliche und westliche Digression rechnen; die nöthigen Formeln hiezu finden sich in §. 26, pag. 102.

222. Die am meisten übliche Methode zur Bestimmung des Azimuthe ist die der directen Winkelmessung zwischen einem Polsterne und dem irdischen Objecte. Als Polstern wählt man am vortheilhaftesten α Ursae min., den Polarstern.

Denkt man sich an dem Beobachtungsorte das Universal-Instrument über dem gegebenen Puncte C, Fig. 93, sorgfältig centrisch und horizontal

Fig. 93.



aufgestellt, und die Zeit, wo der Polarstern σ den Mittelfaden zwischen den beiden horizontalen Fäden passirt, an einer Uhr aufgefasst, sowie die zu dieser bestimmten Richtung nach dem Polarstern entsprechende Lesung M am Horizontalkreise gemacht, so ist auch die Horizontalprojection $C\sigma$ nach dem Polarstern sicher festgelegt. Stellt man dann die Visur nach dem irdischen Objecte G ein und liest den Horizontalkreis in M' ab, so hat man, wenn das Azimuth des Sternes σ im Momente der Beobachtung mit A , das Azimuth des irdischen Objectes mit a bezeichnet wird und wenn die Lesungen von Süd gegen West, also auch von Nord gegen Ost zunehmen, der Kreis fest, der Mikroskopträger beweglich ist, offenbar $a - A = M' - M$, somit:

$$a = A + M' - M \quad (283)$$

als Azimuth des irdischen Objectes. Je nachdem A , das Azimuth des Polarsternes, von Süd über West von $0 - 360^\circ$, oder von Nord über Ost von $0 - 360$ gezählt, in vorstehende Relation eingeführt wird, erhält man das von Süd über West oder das von Nord über Ost gezählte Azimuth des irdischen Objectes.*)

Die Ablesungen M, M' des Horizontalkreises werden im allgemeinen mit dem Einflusse der Neigung der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohres und des Collimationsfehlers der Visirlinie behaftet sein. Bezeichnet man mit i, J die erforderlichenfalls wegen Ungleichheit der Zapfendurchmesser verbesserten Neigungen der Axe bei der Beobachtung des Polarsternes, beziehentlich des Objectes, positiv genommen, wenn das linke Axenende das höhere ist; mit z und Z die Zenithdistanzen des Sternes und Objectes, mit $90 + c$ den Winkel, welchen die Absehenlinie des Mittelfadens mit dem Kreise der Axe einschliesst, so sind, bei der oben vorausgesetzten Richtung der Bezifferung des Kreises, die verbesserten Lesungen, zufolge §. 121

$$M + i \cotg z \pm c \operatorname{cosec} z \quad \text{und} \quad M' + J \cotg Z \pm c \operatorname{cosec} Z,$$

wobei die oberen Zeichen für Kreis links, die unteren für Kreis rechts gelten.

Durch Substitution derselben in obige Gleichung erhält man als vollständigen Ausdruck für das Azimuth des irdischen Objectes:

*) In der Geodäsie pflegt man das Azimuth des irdischen Objectes von Nord gegen Ost von 0° bis 360° zu zählen. Die obigen Formeln 283 und 284 bleiben hiebei unverändert, wenn man auch das Azimuth des Polarsternes in gleichem Sinne zählt.

$$a = A + M' - M - (i \cotg z - J \cotg Z) \mp c (\operatorname{cosec} z - \operatorname{cosec} Z), \quad (284)$$

wo das obere Zeichen für Kreis links, das untere für Kreis rechts gilt.

Die Beobachtungen sind symmetrisch in beiden Kreislagen anzustellen. Hierbei erhält das von dem Collimationsfehler c abhängige Correctionsglied in dem Ausdrucke von a für beide Kreislagen entgegengesetztes Zeichen; ist daher c klein und folgen die Beobachtungen des Polarsternes in beiden Kreislagen rasch aufeinander, so werden auch die Zahlenwerthe dieses Gliedes, in Folge der langsamen Aenderung der Zenithdistanz z des Polarsternes, so nahe gleich werden, dass in dem arithmetischen Mittel zweier aus Beobachtungen in beiden Kreislagen abgeleiteter Werthe von a die beiden von c abhängigen Glieder sich aufheben und dadurch der Einfluss des Collimationsfehlers eliminiert wird. Erstreckt sich jedoch die Beobachtungsreihe auf eine längere Zeit, so verfährt man richtiger in der Art, dass man aus je zwei in einer Kreislage gemachten Beobachtungen des irdischen Objectes und des Polarsternes nach Gl. (284), jedoch mit Weglassung des letzten von c abhängigen Gliedes, das Azimuth a , sowie den der Zeit der Beobachtung des Polarsternes entsprechenden Werth des Coefficienten von c , $C = \operatorname{cosec} z - \operatorname{cosec} Z$ berechnet. Man hat dann zwei Systeme von Gleichungen von der Form

$$a = a_l - Cc \quad \text{bei K. L.}$$

$$a = a_r + C'c \quad \text{„ K. R.,}$$

und erhält, aus jedem Systeme das Mittel nehmend, zwei neue Gleichungen derselben Form, aus welcher zunächst durch Subtraction der Werth des Collimationsfehlers

$$c = \frac{a_l - a_r}{C + C'}$$

hervorgeht, durch dessen Substitution in die vorausgehenden Gleichungen die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Werthe des Azimuthes sich ergeben. Die Bestimmung der Neigung i bei den Beobachtungen des Polarsternes ist stets mit Sorgfalt vorzunehmen, weil der Coefficient $\cotg z$ für nördliche Breiten von nahe 45° an und darüber grösser als 1 wird. Die irdischen Objecte liegen meist nahe am Horizonte und demnach wird $\cotg Z$ klein; die Nivellirung der Axe kann daher bei den Visuren nach dem irdischen Objecte in dem Falle unterlassen werden, wenn Z so nahe an 90° liegt, dass für zulässige Werthe von J das Product $J \cotg Z$ unmerklich wird.

223. Die Berechnung des Azimuthes A des Polarsternes geschieht nach der Gleichung (siehe §. 16)

$$\operatorname{tg} A = - \frac{\sin t}{\operatorname{tg} \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos t}, \quad (285)$$

wobei der Stundenwinkel

$$t = u + x - \alpha$$

aus der beobachteten Uhrzeit u des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden, mit Zuziehung der Rectascension α desselben und des aus Zeitbestimmungen als bekannt anzunehmenden Uhrstandes x abzuleiten ist.

Der Gleichung zur Berechnung des Azimuthes des Polarsternes kann man auch eine andere Form geben, welche die bequeme Anwendung von Tafeln gestattet.

Dividirt man Zähler und Nenner in Gl. 285 durch $\operatorname{tg} \delta \cos \varphi$, so kommt:

$$\operatorname{tg} A = - \frac{\operatorname{ctg} \delta \sec \varphi \sin t}{1 - \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \varphi \cos t},$$

und wenn man statt der Declination die Poldistanz p nach der Gl. $p = 90 - \delta$ einführt:

$$\operatorname{tg} A = - \frac{\operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t}. \quad (286)$$

Nun hat man Tafeln*) gerechnet, welche mit dem Argumente $\log \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t$ sofort

$$\log \frac{1}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t} = b \quad (r)$$

geben, so dass nunmehr ist:

$$\log \operatorname{tg} A = - [\log \operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t + b] \quad (286^*)$$

Die Berechnung des $\log \operatorname{tg} A$ erfordert, dass man sich bildet: $\log \operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t$ und $\log \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t$ und mit letzterem Werthe als Argument aus der Tafel den Werth b entnimmt; wird dieser zu $\log \operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t$ hinzugelegt, so erhält man sofort $\log \operatorname{tg} A$.

224. Für denselben Zweck, nämlich zur Berechnung des Azimuthes des Polarsternes, sind auch von Astrand Formeln entwickelt worden, welche innerhalb der Hundertelsecunde strenge Resultate geben und welche hier noch aufgenommen werden sollen.

Setzt man in Gl. (286) $\operatorname{tg} p \cos t = \operatorname{tg} \psi$, so geht dieselbe über in

$$\operatorname{tg} A = - \frac{\operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t}{1 - \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi},$$

oder auch nach entsprechender Umformung

$$\operatorname{tg} A = - \operatorname{tg} p \sin t \cos \psi \sec(\psi + \varphi).$$

Entwickelt man $\operatorname{tg} A$ und $\operatorname{tg} p$ in Reihen, so erhält man

$$A + \frac{1}{3} A^3 = - (p + \frac{1}{3} p^3 \dots) \sin t \cos \psi \sec(\psi + \varphi)$$

*) Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen von Prof. Dr. Th. Albrecht. 1879.

und hieraus:

$$A = -p \sin t \cos \psi \sec(\psi + \varphi) - \frac{1}{3} p^3 \sin t \cos \psi \sec(\psi + \varphi) - \frac{1}{3} A^3. \quad (s)$$

Setzt man

$$A' = +p \sin t \cos \psi \sec(\psi + \varphi),$$

so ist A' ein Näherungswerth für A , und man kann damit das Glied $\frac{1}{3} A^3$ rechnen, wodurch Gl. (s) wird:

$$A = -A' - \frac{p}{3} \sin t \cos \psi \sec(\psi + \varphi) (p^2 - A'^2) \sin 1''^2$$

oder

$$A = -A' - \frac{1}{3} A' (p - A') (p + A') \sin 1''^2.$$

Die zur Rechnung nothwendigen Formeln sind demnach:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \operatorname{tg} p \cos t \\ A' &= p \sin t \cos \psi \sec(\psi + \varphi) \\ c &= \frac{1}{3} A' (p - A') (p + A') \sin 1''^2 \\ A &= -A' - c \end{aligned} \right\} \quad (287)$$

Wenn man jedoch bedenkt, dass die Berechnung nach diesen Formeln selbst für den Fall, als man den Hilfwinkel ψ aus einer Tafel mit doppeltem Eingang, nämlich p und t entnehmen könnte, nicht weniger Zeit als die Berechnung des Azimuthes nach der strengen Formel erfordert, so werden dieselben auch nicht als Ersatz für die strenge Formel zu empfehlen sein.

225. Eine zur Berechnung des Azimuthes des Polarsternes manchenmal angewendete Reihenentwicklung kann auf nachfolgende Weise erhalten werden.

Es ist nämlich nach Gl. (286)

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t (1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t)^{-1},$$

oder entwickelt:

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t \left\{ 1 + \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t + \operatorname{tg} p^2 \operatorname{tg} \varphi^2 \cos^2 t + \operatorname{tg} p^3 \operatorname{tg} \varphi^3 \cos^3 t + \operatorname{tg} p^4 \operatorname{tg} \varphi^4 \cos^4 t \dots \right\}.$$

Setzt man zunächst für $\operatorname{tg} p$ die Reihe und bestimmt hiernach $\operatorname{tg} p^2$, $\operatorname{tg} p^3$ und $\operatorname{tg} p^4$, so erhält man, wenn in der Entwicklung nicht weiter als p^5 gegangen und nach den aufeinander folgenden Potenzen von p geordnet wird, folgende Gleichung:

$$\operatorname{tg} A = - \left\{ p \sec \varphi \sin t + \frac{1}{2} p^2 \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi \sin 2t + \frac{1}{3} p^3 \sec \varphi \sin t [1 + 3 \operatorname{tg} \varphi^2 \cos^2 t] + \frac{1}{2} p^4 \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi \sin 2t \left[\frac{2}{3} + \operatorname{tg} \varphi^2 \cos^2 t \right] + p^5 \sec \varphi \sin t \left[\frac{2}{15} + \operatorname{tg} \varphi^2 \cos^2 t (1 + \operatorname{tg} \varphi^2 \cos^2 t) \right] \dots \right\}. \quad (m)$$

Wendet man nun für $\operatorname{tg} A$ die Reihenentwicklung an, setzt also

$$\operatorname{tg} A = A + \frac{1}{3} A^3 + \frac{2}{15} A^5 \dots,$$

so folgt

$$A = \operatorname{tg} A - \frac{1}{3} A^3 - \frac{2}{15} A^5 \dots \quad (n)$$

Rechnet man sich mit dem Näherungswerthe für $A = \text{tg } A$, wie er in Gl. (m) gegeben ist, die Glieder $\frac{1}{3} A^3$ und $\frac{2}{15} A^5$, so erhält man hiefür:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} A^3 &= \frac{1}{3} p^3 \sec \varphi^3 \sin t^3 + \frac{1}{2} p^4 \sec \varphi^3 \text{tg } \varphi \sin t^2 \sin 2t \\ &\quad + p^5 \sec \varphi^3 \sin t^3 \left[\frac{1}{3} + 2 \text{tg } \varphi^2 \cos t^2 \right] \\ \frac{2}{15} A^5 &= \frac{2}{15} p^5 \sec \varphi^5 \sin t^5. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieser Werthe und für $\text{tg } A$ aus (m) in (n) erhält man, wenn die Poldistanz p in Secunden eingesetzt wird, zur Bestimmung des Azimuthes A in Secunden nachstehende Reihe:

$$\begin{aligned} A &= -p \sec \varphi \sin t - \frac{1}{2} p^2 \sin 1'' \sec \varphi \text{tg } \varphi \sin 2t \\ &\quad - \frac{1}{3} p^3 \sin 1''^2 \sec \varphi \sin t [(1 + 4 \text{tg } \varphi^2) \cos t^2 - \text{tg } \varphi^2] \\ &\quad - \frac{1}{2} p^4 \sin 1''^3 \sec \varphi \text{tg } \varphi \sin 2t \left[\frac{2}{3} + \text{tg } \varphi^2 - (1 + 2 \text{tg } \varphi^2) \sin t^2 \right] \\ &\quad - p^5 \sin 1''^4 \sec \varphi \sin t \left[\frac{2}{15} + \text{tg } \varphi^2 \cos t^2 + \text{tg } \varphi^4 \cos t^4 - \frac{1}{3} \sec \varphi^2 \sin t^2 \right] \\ &\quad - \frac{2}{15} \sec \varphi^4 \sin t^4 - 2 \sec \varphi^2 \text{tg } \varphi^2 \sin t^2 \cos t^2 \end{aligned} \quad (288)$$

Für den speciellen Fall $p = 1^\circ 18' 0'' = 4680''$ erhält man als Grenzwerte der Glieder III.—V. Ordnung:

	III. Glied	IV. Glied	V. Glied
$\varphi = 45^\circ$	1'' .56	0'' .03	0'' .002
50°	2 .25	0 .05	0 .004
55°	3 .38	0 .11	0 .008
60°	5 .41	0 .18	0 .013

Aus diesen Werthen entnimmt man, dass die Glieder IV. Ordnung noch berücksichtigt werden müssten, wenn man das Azimuth auf ein Hundertelsecunde richtig haben will.

Die Gleichung (288) lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} A &= - \{ p \sec \varphi \sin t + M \sin 2t + N \}, \\ \text{wo: } M &= \frac{1}{2} p^2 \sin 1'' \sec \varphi \text{tg } \varphi \\ N &= \text{Summe der Glieder 3. bis 5. Ordnung.} \end{aligned} \right\} \quad (288^*)$$

In dieser Form lässt sich die Reihe für A tabuliren, wenn auch für einen speciellen Werth von p_0 , indem die Grössen M und N für diesen Werth gerechnet werden können. Solche Tafeln sind von W. Valentiner *) für $p_0 = 1^\circ 23' 0'' = 4980''$ gerechnet worden, so dass man hat:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{2} p_0^2 \sin 1'' \sec \varphi \text{tg } \varphi \\ N_0 &= \frac{1}{3} p_0^3 \sin 1''^2 \sec \varphi \sin t [(1 + 4 \text{tg } \varphi^2) \cos t^2 - \text{tg } \varphi^2] + \\ &\quad \text{Glieder höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

Für ein gegebenes von p_0 verschiedenes p hat man demnach M und N zu rechnen; es ist aber

$$\frac{M}{M_0} = \frac{p^2}{p_0^2}, \text{ mithin } M = M_0 \frac{p^2}{p_0^2}. \quad (n)$$

*) Valentiner W. Beiträge zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen. Leipzig 1869.

Für N benützt man auch die ähnliche Relation :

$$\frac{N}{N_0} = \frac{p^3}{p_0^3}, \text{ also } N = N_0 \frac{p^3}{p_0^3}. \quad (n^*)$$

Von den beiden Relationen ist jene für M nach (n) streng richtig, während jene zur Bestimmung von N nach (n^*) als zulässig gelten kann, weil die Glieder der IV. und V. Ordnung gegenüber jenen der III. Ordnung als verschwindend klein angesehen werden können.

Die Berechnung des Azimuthes des Polarsternes nach (288), selbst mit Zuhilfenahme der gerechneten Tafelwerthe, erweist sich wegen des Mehraufwandes an Zeit gegenüber der Rechnung nach der strengen Formel (286) auch nicht vorthellhaft.

226. Um den Einfluss kennen zu lernen, welcher durch Fehler in der angenommenen Position des Sternes, in der Polhöhe und in der Zeit auf das nach Gl. (285) berechnete Azimuth A des Polarsternes hervorgerufen wird, differenzire man diese Gleichung in der Form

$$\cotg A \sin t = \sin \varphi \cos t - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi$$

geschrieben, nach allen darin vorkommenden Grössen, wodurch man erhält :

$$dA = \frac{\sin A}{\sin t} (\cos A \cos t + \sin A \sin t \sin \varphi) dt + \frac{\cos \varphi \sin A^2}{\sin t \cos \delta^2} d\delta - \frac{(\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t) \sin A^2}{\cos \delta \sin t} d\varphi. \quad (t)$$

Nun ist aber, wenn mit q der parallaktische Winkel bezeichnet wird,

$$\cos q = \cos A \cos t + \sin A \sin t \sin \varphi$$

$$\sin q = \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \sin A$$

$$\sin z = \cos \delta \frac{\sin t}{\sin A}$$

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

und hiermit geht die Gl. (t) in die folgende über :

$$dA = \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} dt + \frac{\sin q}{\sin z} d\delta - \frac{\sin A}{\operatorname{tg} z} d\varphi. \quad (289)$$

Man erkennt hieraus, dass für dem Pole nahe stehende Sterne, insbesondere für den Polarstern, die Coefficienten von dt und $d\varphi$ stets klein sind und daher Fehler in der Polhöhe oder dem Stundenwinkel, d. i. in der angenommenen Rectascension und Uhr correction nur geringen Einfluss auf das berechnete Azimuth A haben. Der Coefficient von dt erreicht sein Maximum in der oberen und unteren Culmination des Sternes, wo $\cos q = \mp 1$ wird, jener von $d\varphi$ zur Zeit der grössten Digression, und betragen diese Maxima

für den Polarstern und $q = 48^\circ$ beziehentlich $0''.037$ und $0''.041$; der erstere dieser Coefficienten wird $= 0$ in der Digression, der letztere im Meridiane. Der Coefficient von $d\delta$ erreicht sein Maximum in der grössten Digression und wird $= 0$ im Meridiane. Alle drei Coefficienten haben aber die Eigenschaft, dass sie für zwei um $180^\circ = 12^h$ verschiedene Stundenwinkel des Polarsternes sehr nahe gleiche Zahlenwerthe und entgegengesetztes Vorzeichen erhalten, daher das arithmetische Mittel aus zwei Azimuthbestimmungen, bei welchen der Polarstern in um 12^h verschiedenen Stundenwinkeln beobachtet wurde, von dem Einflusse constanter Fehler in der Rectascension und Declination des Sternes, der Polhöhe und in der Zeit frei sein wird.

227. Zur Berechnung des Azimuthes des Polarsternes nach Gl. (285) u. f. ist an die den Ephemeriden entnommene scheinbare Rectascension und Declination des Sternes noch die tägliche Aberration nach den Gleichungen (112) anzubringen. Man zieht es aber oft vor, die tägliche Aberration bei dem scheinbaren Orte des Sternes unberücksichtigt zu lassen und dafür den Einfluss derselben in dem berechneten Azimuthe zu berücksichtigen. Die Vernachlässigung des Betrages der täglichen Aberration in Rectascension und Declination kommt einem Fehler in der Rectascension, beziehentlich im Stundenwinkel und in der Declination gleich. Da vermöge der Gleichung: $t = u + x - \alpha$, $dt = -d\alpha$ ist, so hat man nach Gl. (289), mit Weglassung des letzten Gliedes:

$$dA = -\frac{\cos \delta \cdot \cos q}{\sin z} d\alpha + \frac{\sin q}{\sin z} d\delta.$$

Wenn man nun, mit λ die Constante der täglichen Aberration bezeichnend, in Gemässheit der Formeln (112) setzt:

$$d\alpha = \lambda \cos q \cos t \sec \delta, \quad d\delta = \lambda \cos q \sin t \sin \delta,$$

so wird

$$dA = \frac{\lambda \cos q}{\sin z} (-\cos t \cos q + \sin t \sin q \sin \delta),$$

und wegen $\cos A = \cos t \cos q - \sin t \sin q \sin \delta$

$$dA = -\frac{\lambda \cos q \cos A}{\sin z}. \quad (290)$$

Nach Gl. (283) hat man $da = dA$, somit wird die Correction des Azimuthes des irdischen Objectes wegen der täglichen Aberration des Polarsternes

$$da = -\lambda \frac{\cos q}{\sin z} \cos A. \quad (w)$$

Für den Polarstern ist das Azimuth A immer so nahe $= 180^\circ$, dass, da λ sehr klein ist, $\cos A = -1$ gesetzt werden kann, wodurch man für den früheren Ausdruck den einfachen

$$da = + \lambda \frac{\cos \varphi}{\sin z} \quad (290^*)$$

setzen kann. Der Coefficient λ wird, wenn man die Aequatorial-Horizontalparallaxe der Sonne $= 8''.85$ setzt, $= 0''.321$.

228. Die Beobachtungen werden zweckmässig in der Art ausgeführt, dass man, in einer Kreislage beginnend, auf eine Einstellung des irdischen Objectes zwei Beobachtungen des Polarsternes und hierauf wieder eine Beobachtung des Objectes folgen lässt; an diese erste Gruppe schliesst man eine zweite ganz ähnliche in der anderen Kreislage an. Man kann dann sofort, ohne Aenderung der Kreislage, eine dritte Gruppe anreihen, auf welche schliesslich die vierte wieder in der ersten Kreislage zu folgen hat. Eine solche Reihe, aus je vier, beziehungsweise acht, auf beide Kreislagen gleichmässig vertheilten Beobachtungen des Objectes und Sternes bestehend, bildet einen vollständigen Satz (Stand), und liefert durch Verbindung von je zwei unmittelbar auf einander folgenden Beobachtungen des Objectes und Sternes nach Gl. (284) ebensoviele Werthe des Azimuthes.

Das Schema für die Beobachtungen in einem Satze oder Stande wird daher folgendes sein:

Kreis rechts:	Nivellirung	}	1. Gruppe.
	1 Einstellung des irdischen Objectes		
	Nivellirung		
	2 Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes		
	1 Einstellung des irdischen Objectes	}	
	Wechsel der Kreislage.		
Kreis links:	Nivellirung	}	2. Gruppe.
	1 Einstellung des irdischen Objectes		
	Nivellirung		
	2 Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes		
	1 Einstellung des irdischen Objectes	}	
	Wechsel der Kreislage.		
Kreis links:	1 Einstellung des irdischen Objectes	}	3. Gruppe.
	Nivellirung		
	2 Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes		
	1 Einstellung des irdischen Objectes		
	Wechsel der Kreislage.	}	
	Wechsel der Kreislage.		
Kreis rechts:	Gruppe 4 analog der Gruppe 1.		

Behufs Elimination der periodischen Theilungsfehler ist nach §. 117 bei n zu beobachtenden Sätzen oder Ständen der Nullpunkt des Horizontalkreises von Satz zu Satz um je $\frac{180}{n}$ Grade zu verändern. Auch ist es, zufolge der am Schlusse des vorhergehenden Paragraphes gemachten Bemerkung,

räthlich, die einzelnen Sätze paarweise auf je zwei um 12^h verschiedene Stundenwinkel des Polarsternes zu vertheilen.

Da Fehler in den Ablesungen des Horizontalkreises mit ihrem vollen Betrage auf das aus den Beobachtungen abgeleitete Azimuth des irdischen Objectes übergehen, so ist es nothwendig, die Lesungen jedes Mikroskopes um den Fehler der Schraubenmikrometer nach §. 112 zu verbessern. Sind diese Fehler nicht genau bestimmt, oder hat man Ursache, die Unveränderlichkeit derselben während der Zeitdauer der Beobachtungen bei dem benützten Instrumente nicht voraussetzen zu können, so wird man den beweglichen Faden nicht bloß auf den einen unter dem Rechen des Mikroskopes erscheinenden, sondern auch noch auf den folgenden Theilstrich einstellen, und den Stand der Trommel ablesen; die Beobachtungsreihen bieten die Mittel dar, um den Fehler der Schrauben nach §. 112 bestimmen zu können. Letzteres Verfahren ist übrigens unter allen Umständen empfehlenswerth, weil, wenn man aus den Lesungen beider Theilstriche das Mittel nimmt, dadurch auch der Einfluss der zufälligen Theilungsfehler vermindert wird.

Bei der Beobachtung des Polarsternes stellt man das Fernrohr auf den Stern so ein, dass der verticale Mittelfaden dem Sterne im Sinne seiner Bewegung im Azimuthe etwas vorausliegt, so dass nach kurzer Zeit der Durchgang des Sternes durch den Faden, u. zw. möglichst nahe am Horizontalfaden, erfolgt, wornach die Uhrzeit des Durchganges beobachtet wird. Besteht der Mittelfaden aus zwei naheliegenden Parallelfäden, so kann man auch die Zeit beobachten, wenn der Stern dem Augenmaasse nach in der Mitte zwischen beiden Fäden steht, welches Verfahren bei sehr langsamer Bewegung des Sternes, wenn der Abstand $15''$ bis $20''$ nicht erheblich überschreitet, erfahrungsgemäss gleiche Schärfe gewährt, wie die Beobachtung des Durchganges durch einen Faden. Selbstverständlich ist dann auch das irdische Object in die Mitte zwischen die beiden Fäden einzustellen.

229. Beispiel. Zur Bestimmung des Azimuthes auf der astronomischen Station Kremsmünster in Oberösterreich wurde die Richtung Kremsmünster — Grosser Priel gewählt. Die Beobachtungen wurden von Dr. Tinter mit dem schon auf pag. 417 erwähnten Universal-Instrumente, bei welchem der Mikroskopträger beweglich ist, ausgeführt. Der Winkelwerth eines Scalentheiles der Aufsatzlibelle war 1.89 Secunde. Die Zenithdistanz des anvisirten Objectes auf dem grossen Priel (ein daselbst errichtetes Kreuz) wurde mit $Z = 86^\circ 59' 20''$ bestimmt.

Am 31. August 1874 wurden für den Stand mit dem Meridianpuncte 160° die in nachfolgender Tabelle angesetzten Beobachtungsdaten erhalten, in welcher Tabelle noch die Werthe $\cotg z$, $\cotg Z$, $\operatorname{cosec} z$ und $\operatorname{cosec} Z$ aufgenommen sind. Die Mikroskoplesungen sind bereits die mit dem Winkelwerthe einer Schraubenumdrehung richtig gestellten Werthe.

Kreis- lage	Object	Uhr	Mikroskop		Libelle		cotg Z cotg z	cosec Z cosec z
			I	II	l	r		
L.	Grosser Priel		347 ⁰ 43' 43.79	43' 37.16	22.6 23.9	20.0 18.6	0.053	1.001
"	Polaris	^{h m s} 6 40 45.6	157 56 7.82	55 54.57	21.5	20.6	1.119	1.501
"	"	43 44.0	55 57.40	55 45.44	19.4	22.6		1.500
"	Grosser Priel		347 43 43.09	43 37.36				
R.	" "		167 43 54.21	43 34.66				
"	Polaris	6 48 28.0	337 55 51.69	55 42.43	19.8	21.8	1.117	1.499
"	"	51 6.8	55 47.38	55 36.90	18.9	22.7		1.499
"	Grosser Priel		167 43 55.71	43 36.96	19.6 18.2	21.9 23.2	0.053	1.001

Man hat nun für 1874, August 31, 6^h 45^m.9 den scheinbaren, um die tägliche Aberration verbesserten Ort des Polarsternes: $\alpha = 1^h 13^m 6^s.74$, $\delta = 88^{\circ} 38' 15''.12$; ferner ist die Sternzeit = Uhrzeit + 3^m 27^s.69. Angekommene Polhöhe $\varphi = 48^{\circ} 3' 23''.14$.

Rechnet man das Azimuth des Polaris nach der Gl. (285), so hat man zunächst:

$$\log \operatorname{tg} \delta = 1.6237150$$

$$\log \cos \varphi = 9.8250354$$

$$\log \operatorname{tg} \delta \cos \varphi = 1.4487504$$

$$\operatorname{tg} \delta \cos \varphi = 28.102852,$$

ferner:

Kreis- lage	Stundenwinkel t		$\log \sin t$	$\log \cos t$	$\log \sin \varphi \cos t$
	in Zeit	im Gradm.			
L.	^{h m s} 5 31 6.55	82 ⁰ 46' 38.25	1.9965401	9.099427	8.970886
	5 34 4.95	83 31 14.25	.9972170	9.052484	.923942
R.	5 38 49.75	84 42 26.25	.9981444	8.964937	.836395
	5 41 27.75	85 21 56.25	9.9985778	8.907395	8.778853

Kreis- lage	$\sin \varphi \cos t$	Nenner	\log Nenner	$\log \operatorname{tg} A$	N. Ö. Azim. $A = 360 -$
L.	0.093516 .083935	28.009336 .018917	1.4473028 .4474513	8.5492373 <i>n</i> .5497657 <i>n</i>	2 ⁰ 1' 42.66 1 51.54
R.	.068611 0.060097	.034241 28.042755	.4476888 1.4478207	.5504556 <i>n</i> 8.5507571 <i>n</i>	2 3.16 2 2 8.24

Man hat also zur Berechnung des Azimuthes des irdischen Objectes nach Gl. (284) die nachstehenden Daten:

Kreis- lage	A	Kreislesung <i>M', M</i>	$J \cotg Z$ $i \cotg z$	$A - M - i \cotg z$	Azimuth <i>a</i> excl. Collim.	Coefficienten der Collimation
L.	357° 58' 17.34	347° 43' 40.48	+ 0.19	200° 2' 17.37 2 18.26	187 45 58.04 45 58.68	- 0.500 - 0.499
	357 58 8.46	157 56 1.19	- 1.22			
		55 51.42				
		347 43 40.23	+ 0.19			
R.	357° 57' 56.84	167° 43' 44.44	- 0.18	20° 2' 12.84 2 12.68	45 57.10 187 45 58.84	+ 0.498 + 0.498
	357 57 51.76	337 55 47.06	- 3.06			
		55 42.14				
		167 43 46.34	- 0.18			

Die Gleichungen zur Bestimmung des Collimationsfehlers und des Azimuthes des irdischen Objectes sind demnach:

$$\begin{aligned} a &= 187^{\circ} 45' 58''.04 - 0.500 c \\ a &= \quad \quad \quad 58.68 - 0.499 c \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{K. L.}$$

$$\begin{aligned} a &= \quad \quad \quad 57.10 + 0.498 c \\ a &= 187^{\circ} 45' 58''.84 + 0.498 c \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{K. R.}$$

Vereinigt man die zwei zu einer Kreislage gehörigen Werthe zum arithmetischen Mittel, so kommt:

$$\begin{aligned} a &= 187^{\circ} 45' 58''.36 - 0.4995 c \dots \text{K. L.} \\ a &= 187^{\circ} 45' 57''.97 + 0.4980 c \dots \text{K. R.} \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet sich:

$$c = + 0''.391, \quad a = 187^{\circ} 45' 58''.16.$$

Es ist also das nordöstliche Azimuth der Richtung Kremsmünster — Grosser Priel

$$187^{\circ} 45' 58''.16.$$

Wenn man sich die Correctionsglieder wegen des Collimationsfehlers rechnet, so erhält man beziehentlich 0''.20, 0''.20, 0''.19, 0''.19, und die einzelnen wegen Collimation verbesserten Werthe des Azimuthes werden

$$\begin{aligned} a &= 187^{\circ} 45' 57''.84 \\ &58.48 \\ &57.29 \\ &59.03 \end{aligned}$$

$$\text{Mittel: } a = 187^{\circ} 45' 58''.16 \pm 0''.25.$$

Würde man auf die genaue Kenntniss des Werthes des Collimationsfehlers *c* verzichten, so kann man mit Rücksicht auf die geringe Aenderung

der Zenithdistanz während der kurzen nur 10.3 Zeitminuten währenden Beobachtungszeit des Sternes und mit Rücksicht auf den kleinen Werth des Collimationsfehlers c den Einfluss dieses Fehlers auf die einzelnen Ablesungen als constant annehmen und den wahrscheinlichsten Werth des Azimuthes dadurch bestimmen, dass man aus den für beide Kreislagen erhaltenen, noch mit dem Einflusse des Collimationsfehlers behafteten Werthe das arithmetische Mittel nimmt.

Wenn man aus den in Columne 6 obiger Tafel angesetzten Werthen des Azimuthes das Mittel nimmt, so erhält man:

$$a = 187^{\circ} 45' 58''.16,$$

übereinstimmend mit den früheren Resultaten.

Bei grösseren Werthen des Collimationsfehlers wird jedoch selbst bei geringen Aenderungen der Zenithdistanz des Polaris der Einfluss der Collimation leicht den Werth von 0.01 Secunden erreichen können.

Für eine gegebene Aenderung der Zenithdistanz bei den zu einem Stande vereinigten Beobachtungen lässt sich die Grenze von c bestimmen, für welche der Einfluss dieser Aenderung für $c \operatorname{cosec} z$ einen gegebenen Werth m nicht überschreiten soll. Differenzirt man $c \operatorname{cosec} z$ nach z und setzt $c d \operatorname{cosec} z = m$, so kommt $-c \cotg z \operatorname{cosec} z dz = m$, mithin ist

$$c'' = - \frac{m''}{\cotg z \operatorname{cosec} z dz'' \sin 1''}$$

Setzt man, wie es obigem Beispiele entspricht, $m = 0''.01$, $dz = 222''$, $z = 41^{\circ} 49'$, so erhält man $c = 5''.55$. Es ist also im vorliegenden Beispiele bei der gesteckten Grenze der Genauigkeit gestattet, aus den mit der Collimation noch behafteten Werthen für die einzelnen Beobachtungen in beiden Kreislagen abgeleiteten Azimuthe das arithmetische Mittel zu nehmen.

Rechnet man das Azimuth des Polarsternes nach der Gl. (286) mit Zuhilfenahme der am obigen Orte bezeichneten Tafeln, so hat man:

$$\text{Poldistanz } p = 90 - \delta = 1^{\circ} 21' 44''.88$$

$$\log \operatorname{tg} p = 8.376285 \quad \log \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi = 8.422708$$

$$\log \cos \varphi = 9.825035 \quad \log \operatorname{tg} p \sec \varphi = 8.551250$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.046423.$$

Kreis- lage	Stundenwinkel t		$\log \sin t$	$\log \cos t$	Argument $\lg \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t$ $= N$
	im Zeitm.	im Gradm.			
L.	$^h \quad ^m \quad ^s$ 5 31 6.55	$^{\circ} \quad ^' \quad ^''$ 82 46 38.25	9.996540	9.09943	7.52214
	34 4.95	83 31 14.25	.997217	9.05248	.47519
R.	5 38 49.75	84 42 26.25	.998144	8.96494	.38765
	41 27.75	85 21 56.25	9.998578	8.90739	7.33010

Kreis- lage	$b = \log \frac{1}{1-N}$	$\lg \operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t$	$\log \operatorname{tg} A_n$	A_n
L.	0.001447 .001299	8.547790 .548467	8.549237 <i>n</i> .549766 <i>n</i>	357° 58' 17.35" 58 8.46
R.	.001061 0.000929	.549394 8.549828	.550455 <i>n</i> 8.550757 <i>n</i>	57 56.85 357 57 51.76

Die weitere Rechnung zur Ermittlung des Azimuthes des irdischen Gegenstandes ist analog jener in Tabelle Seite 530 angegeben.

230. Bestimmung des Azimuthes eines irdischen Objectes mit Hilfe des Passage-Instrumentes.

Wenn sich das irdische Object nahe in der Richtung des Meridians des Beobachtungspunctes befindet, so kann das Azimuth desselben auch mit Hilfe des Passage-Instrumentes bestimmt werden, zu welchem Zwecke das Ocular desselben mit einem Schraubenmikrometer mit beweglichem Verticalfaden versehen sein muss. Hiebei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Liegt das irdische Object so nahe dem Meridiane, dass dasselbe, wenn das Instrument so wie bei der in den §§. 170 u. s. f. vorgetragenen Methode der Zeitbestimmung im Meridiane aufgestellt ist, noch im Gesichtsfelde des Fernrohres nicht weit vom Mittelfaden erscheint, so führt jede nach der erwähnten Methode ausgeführte Zeitbestimmung, wobei nebst dem Polsterne noch etwa zwei Zeitsterne in jeder Kreislage zu beobachten sind, unmittelbar zur Kenntniss des Azimuthes k des westlichen Poles des Instrumentes; wenn man dann noch in jeder Kreislage mittelst des Mikrometers die Abstände des irdischen Objectes vom Mittelfaden misst, indem man wiederholt den beweglichen Faden abwechselnd auf das irdische Object und den Mittelfaden einstellt, so hat man, wenn der irdische Gegenstand im Norden liegt, das Azimuth a desselben von Nord gegen West positiv gezählt wird, und mit A, A' die Abstände des Objectes vom Mittelfaden in Bogensekunden bezeichnet werden, positiv genommen, wenn das Object westlich von der Absehenlinie liegt, wenn also im geraden Fernrohre der Mittelfaden westlich, im gebrochenen Fernrohre östlich von dem Objecte liegt, zufolge der zweiten Gleichung von 188, pag. 386

$$a = k + \frac{1}{2}(A + A') \operatorname{cosec} Z - \frac{1}{2}(i + i') \cotg Z, \quad (291)$$

wobei Z die Zenithdistanz des irdischen Objectes, i und i' die Neigungen der horizontalen Drehaxe in den beiden Kreislagen bezeichnen.

Liegt das irdische Object im Süden, so findet man auf dem pag. 386 eingeschlagenen Wege, wenn man das Azimuth a von Süd gegen Ost positiv

zählt und die Abstände A und A' positiv nimmt, wenn das Object östlich von der Absehenlinie liegt,

$$a = k + \frac{1}{2} (A + A') \operatorname{cosec} Z + \frac{1}{2} (i + i') \cotg Z. \quad (292)$$

Durch die Verbindung der Beobachtungen in beiden Kreislagen ist der Einfluss des Collimationsfehlers auf das Endresultat bereits eliminirt.

Um ein möglichst sicheres Endresultat für das Azimuth des Objectes zu erhalten, wird man in jeder Kreislage wiederholt den Abstand des Objectes vom Mittelfaden mit dem Schraubenmikrometer messen und auch eine Anzahl Durchgänge des Polarsternes durch die festen Fäden oder an dem in verschiedene Stellungen gebrachten beweglichen Faden beobachten, wobei im letzteren Falle der jeweilige Stand des beweglichen Fadens durch die Ablesung am Mikrometer zu notiren ist.

Das Schema der zu einer Reihe vereinigten Beobachtungen kann etwa folgendes sein:

Durchgangsbeobachtungen von einem oder von zwei Zeitsternen.

- Kreis Ost: 2 Durchgangsbeobachtungen des Polaris.
 2 Einstellungen des irdischen Objectes mit dem beweglichen Faden.
 2 Einstellungen des Mittelfadens mit dem beweglichen Faden.
 2 Einstellungen des irdischen Objectes mit dem beweglichen Faden.
 2 Durchgangsbeobachtungen des Polaris.
- Kreis West: 2 Durchgangsbeobachtungen des Polaris.
 2 Einstellungen des irdischen Objectes mit dem beweglichen Faden.
 2 Einstellungen des Mittelfadens mit dem beweglichen Faden.
 2 Einstellungen des irdischen Objectes mit dem beweglichen Faden.
 2 Durchgangsbeobachtungen des Polaris.

Durchgangsbeobachtungen von einem oder zwei Zeitsternen.

Mit drei bis vier Durchgangsbeobachtungen des Polaris, beziehentlich Einstellungen auf das Object und den Mittelfaden, wird man einerseits hinreichende Sicherheit für das Erkennen grober Fehler haben und andererseits wird man hiermit auch den nöthigen Grad der Genauigkeit erlangen können. Das obenstehende Schema kann etwa noch derart erweitert werden, dass man bei Kreis West die Beobachtungen von den letzten Durchgangsbeobachtungen des Polarsternes an in symmetrischer Weise fortsetzt, hierauf die Kreislage wechselt und bei Kreis Ost die Beobachtungen in der angesetzten Weise schliesst. Die zur Ermittlung der Neigung der Axe nothwendigen Nivellirungen wird man auf die Durchgangsbeobachtungen der Sterne und auf die Einstellungen des Objectes entsprechend vertheilen.

Gestatten es die Verhältnisse, so wird man die Reihen so vertheilen, dass die eine Hälfte zur Zeit der oberen, die andere Hälfte zur Zeit der unteren Culmination des Polaris zur Ausführung gelangt, und um die Unsicherheit in dem Winkelwerthe eines Schraubenganges zu eliminiren, wird man

das Instrument derart aufstellen, dass bei der einen Hälfte der Reihen das Object rechts, bei der anderen Hälfte der Reihen aber links vom Mittelfaden erscheint.

2. Bei dem im Vorstehenden angegebenen Verfahren darf das Azimuth des irdischen Objectes, von Süd oder von Nord gezählt, wenige Bogenminuten nicht überschreiten; ist dasselbe grösser, aber noch kleiner als das Azimuth des Polarsternes in seiner grössten östlichen oder westlichen Digression, so dass der durch das Object gelegte Verticalkreis den Parallel des Polarsternes noch schneidet, so stelle man das Passage-Instrument im Vertical des irdischen Objectes derart auf, dass letzteres nahe am Mittelfaden erscheint.

Man führt nun, nach der in §§. 179 u. s. f. vorgetragene Methode eine Zeitbestimmung durch, indem man in jeder Kreislage den Durchgang von mindestens einem Zeitsterne durch die festen Fäden und den Durchgang des Polarsternes durch einige Fäden beobachtet und überdies den Abstand des irdischen Objectes vom Mittelfaden mittelst des Mikrometers misst, letzteren so oftmal als Fadenantritte des Polarsternes beobachtet wurden. Der Polarstern kann hiebei an den festen Fäden oder an dem beweglichen Faden des Mikrometers beobachtet werden, dessen Abstand vom Mittelfaden durch Vergleichung der Lesung des Mikrometers bei der Einstellung des beweglichen Fadens auf den Polarstern mit jener auf den Mittelfaden sich ergibt.

Durch Verbindung je einer Beobachtung des Polarsternes und des irdischen Objectes ergibt sich das Azimuth des letzteren mittelst der Seite 396 in der Anmerkung entwickelten Gleichungen (r), in welchen sich die erstere auf einer in der oberen Culmination im Azimuthe A am Mittelfaden beobachteten Stern, die letztere auf den im Azimuthe A' in dem östlichen Abstände f vom Mittelfaden beobachteten Polarstern bezieht, und in welchen die Azimuthe A, A' von Süd über West von 0° bis 360° gezählt sind.

Für den Polarstern hat man sofort die 2^{te} der Gleichungen (r) anzuwenden, nämlich:

$$A' + k - 180 = f \operatorname{cosec} z' + i \cotg z' + c \operatorname{cosec} z'. \quad (t)$$

Liegt nun das irdische Object im Norden, und bezeichnet man das Azimuth desselben mit a , den Abstand desselben vom Mittelfaden mit Δ , positiv genommen, wenn das Object östlich von der Absehenlinie liegt, mit Z dessen Zenithdistanz und mit J die Neigung der horizontalen Drehaxe, so besteht für dasselbe die Gleichung von derselben Form, nämlich:

$$a + k - 180 = \Delta \operatorname{cosec} Z + J \cotg Z + c \operatorname{cosec} Z. \quad (t')$$

Man erhält durch Subtraction der beiden Gln. (t) und (t') für das Azimuth des irdischen Gegenstandes den Ausdruck:

$$a = A' + \Delta \operatorname{cosec} Z - f \operatorname{cosec} z' - i \cotg z' + J \cotg Z - c(\operatorname{cosec} z' - \operatorname{cosec} Z). \quad (293)$$

Liegt aber das irdische Object im Süden, so gilt für dasselbe die erste der Gleichungen (r), indem man, wenn dasselbe im östlichen Abstände \mathcal{A} vom Mittelfaden beobachtet wurde, $c + \mathcal{A}$ statt c schreibt, und für \mathcal{A} die gewählte Bezeichnung für das Azimuth des irdischen Objectes, nämlich a einführt, wodurch dieselbe die Form:

$$360 - a - k = \mathcal{A} \operatorname{cosec} Z + J \cotg Z + c \operatorname{cosec} Z$$

erhält, welche, zur Gl. (t) sich auf den Polarstern beziehenden addirt, die folgende ergibt:

$$a = A' + 180 - \mathcal{A} \operatorname{cosec} Z - f \operatorname{cosec} z' - i \cotg z' - J \cotg Z \\ - c (\operatorname{cosec} z' + \operatorname{cosec} Z). \quad (294)$$

Das Azimuth des Polarsternes ist entweder mittelst der Gl. (285)

$$\operatorname{tg} A' = - \frac{\sin t}{\operatorname{tg} \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos t'}$$

oder mittelst der Gl. (286):

$$\operatorname{tg} A' = - \frac{\operatorname{tg} p \sec \varphi \sin t}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t}$$

zu bestimmen, wobei der Stundenwinkel $t = u + x - \alpha$ aus der beobachteten Uhrzeit des Durchganges des Polarsternes durch den benützten Faden mit Zuziehung der Rectascension α und des aus der gleichzeitig erhaltenen Zeitbestimmung folgenden Uhrstandes x abzuleiten ist. Sollte der letztere aus anderweitigen Zeitbestimmungen genau bekannt sein, so kann die Beobachtung der Zeitsterne entfallen.

Die wahre Neigung i beziehentlich J der Axe des Instrumentes ist in den Gln. (293), (294) positiv einzuführen, wenn das westliche Axenende das höhere ist. Die Gln. (293), (294) gelten in obiger Form für Kreis West; bei Kreis Ost ist das vom Collimationsfehler c abhängige Glied mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen.

Sollte der scheinbare Ort des Polarsternes vor der Einführung in die Rechnung wegen der täglichen Aberration nicht verbessert worden sein, so ist an die nach den Gln. (293), (294) berechneten Werthe von a die nach Gl. (290) gegebene Verbesserung wegen der täglichen Aberration anzubringen.

3. Hat man das Azimuth eines in einem beliebigen Winkelabstande vom Meridiane liegenden irdischen Objectes zu bestimmen, so kann man auch auf die Weise vorgehen, dass man in einer Entfernung von wenigstens vier Kilometern eine Marke setzt, welche nahe im Meridiane des Beobachtungspunctes liegt und nunmehr das Azimuth dieser Marke nach dem in 1. oder 2. erörterten Vorgange mit Hilfe des Passage-Instrumentes ermittelt. Misst man dann noch den Horizontalwinkel zwischen der Meridianmarke und dem irdischen Objecte von demselben Puncte aus, über welchem das Passage-Instrument aufgestellt war, in mehreren Ständen, so erhält man schliesslich durch Verbindung dieses

Horizontalwinkels mit dem Azimuthe der Marke das Azimuth des irdischen Objectes.

Beispiel. Zur Ermittlung des Azimuthes der Richtung vom Punkte 4 des Observatoriums der Wiener technischen Hochschule nach der Kuppel am Leopoldsberge wurden Beobachtungen im Vertical des Polarsternes gemacht. Da das letztgenannte Object weit ausserhalb des Verticals des Polarsternes liegt, so wurde eine Blitzableiterspitze des k. k. Operntheaters, welche noch innerhalb dieses Verticals liegt, als Meridianmarke angenommen und zunächst das Azimuth dieser Spitze nach der in 2. erläuterten Methode bestimmt und hierauf der Horizontalwinkel zwischen der Kuppel am Leopoldsberge und der Spitze mit dem im Punkte 4 aufgestellten Universal-Instrumente gemessen. Die am 22. Mai 1886 von Dr. Tinter erhaltenen Beobachtungsdaten sind in nachstehender Tabelle enthalten. Da die Zeit aus Meridiandurchgängen von Sternen genau bekannt war, so wurden Zeitsterne in die Beobachtung nicht einbezogen.

Kreis- lage	Object	Durch- gangszeit	Stellung des bewegl. Fadens	Mittel	Entfernung vom Mittelfaden	Neigung
Kr. W.	Spitze		13.903 13.898 .904 .897 .890 13.904	13.899	6.648	-1.52 p -0".12
" "	Mittelfaden		7.239 7.243 .260 .256 .253 7.248	7.250		
" "	Polaris	^h 9 ^m 6 ^s 41.0 7 10.7 8 13.7 9 10 22.8	0.418 0.507 0.660 1.057		6.833 6.744 6.591 6.194	-0.75 p -1".55
" "	Mittelfaden		7.262 7.251 .249 .249 .260 7.244	7.252		
Kr. O.	Polaris	^h 9 ^m 19 ^s 48.4 21 34.7 22 54.6 9 24 15.9	11.543 11.213 10.925 10.625		4.244 3.914 3.626 3.356	-3.10 p -6".39
" "	Spitze		0.496 0.490 .480 .480 .475 0.496	0.486	6.806	
" "	Mittelfaden		7.287 7.298 .292 .294 .295 7.288	7.292		
" "	Spitze		0.503 0.497 .502 .497 .490 0.506	0.499	6.807	-0.95 p -0".10

Kreis- lage	Object	Durch- gangszeit	Stellung des bewegl. Fadens	Mittel	Entfernung vom Mittelfaden	Neigung
Kr. O.	Mittelfaden		7.306 7.308 .307 .303 .305 7.306	7.306		
" "	Polaris	^h ^m ^s 9 33 8.6 34 14.0 34 51.7 9 35 54.7	8.896 .636 .528 8.317		1.597 .337 .229 1.018	-2.40 p -4".94
Kr. W.	Polaris	^h ^m ^s 9 58 2.7 58 41.2 59 7.3 9 59 42.2	11.050 .201 .309 11.433		3.771 3.922 4.030 4.150	+0.70 p +1".44
" "	Mittelfaden		7.269 7.270 .268 .264 .264 7.259	7.266		
" "	Spitze		13.933 13.939 .942 .935 .936 13.942	13.938	6.659	+0.23 p +0".02
" "	Mittelfaden		7.283 7.296 .287 .298 .292 7.297	7.292		

Für die weitere Rechnung hat man: Polhöhe des Beobachtungspunctes $\varphi = 48^\circ 11' 58''.27$; scheinbarer Ort des Polarsternes nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche einschliesslich der täglichen Aberration $\alpha = 1^h 16^m 48^s.04$, $\delta = 88^\circ 41' 50''.87$; Stand der Uhr für die Mitte der Beobachtungen $x = + 2^m 28^s.66$; täglicher Gang der Uhr $\Delta x = + 0^s.519$; Werth einer Revolution der Schraube $R = 57''.46$; Winkelwerth eines Theiles der Libelle $\mu = 1''.89$; Zenithdistanz der Spitze $Z = 87^\circ 40' 8''$.

Die Berechnung des Azimuthes des Polarsternes erfolgte nach der Gl. (285); nach der Berechnung des Azimuthes folgte jene der Zenithdistanz, beziehentlich des Werthes $\text{cosec } z'$ nach der Gl. $\text{cosec } z' = \frac{\sin A}{\cos \delta \sin t}$, und mit diesem Werthe für die einzelnen Einstellungen des Polarsternes die Berechnung des Gliedes $f \text{ cosec } z'$.

In den nachfolgenden Tabellen ist der Gang der Rechnung übersichtlich dargestellt, wobei bemerkt wird, dass zur Berechnung des Correctionsgliedes $i \cotg z'$ der für jede Gruppe geltende Mittelwerth der Zenithdistanz z' genommen worden ist; die Werthe $J \cotg Z$ und $i \cotg z'$ sind in vorstehender Tabelle eingesetzt.

Kreis- lage	Stundenwinkel t		log $\cos t$	log $\sin \varphi \cos t$	$\sin \varphi \cos t$
	im Zeitm.	im Gradm.			
W.	$7^h 52^m 21.62^s$	$118^\circ 5' 24.3''$	9.672891 n	9.545321 n	— 0.35101
	52 51.32	12 49.8	674644	547074	35243
	53 54.32	118 28 34.8	678342	550773	35545
	7 56 3.42	119 0 51.3	9.685766 n	9.558196 n	— 0.36157
O.	8 5 29.02	121 22 15.3	9.716484 n	9.588915 n	— 0.38807
	7 15.32	121 48 49.8	721943	594374	39298
	8 35.22	122 8 48.3	725985	598415	39666
	8 9 56.52	122 29 7.8	9.730044 n	9.602474 n	— 0.40038
O.	8 18 49.22	124 42 18.3	9.755381 n	9.627812 n	— 0.42444
	19 54.62	124 58 39.3	758349	630779	42735
	20 32.32	125 8 4.8	760046	632476	42902
	8 21 35.32	125 23 49.8	9.762859 n	9.635289 n	— 0.43181
W.	8 43 43.32	130 55 49.8	9.816336 n	9.688766 n	— 0.48839
	44 21.82	131 5 27.3	817735	690165	48997
	44 47.92	11 58.8	818678	691108	49103
	8 45 22.82	131 20 42.3	9.819934 n	9.692364 n	— 0.49245

Kreis- lage	Nenner	log Nenner	log $\sin t$	log $\operatorname{tg} A'$	A'
W.	29.66558	1.4722529	9.9455712	8.4733183 n	$178^\circ 17' 47.81''$
	66700	4722736	9450692	4727956	17 55.18
	67002	4723178	9439958	4716780	18 10.92
	29.67614	1.4724074	9.9417594	8.4693520 n	$178^\circ 18' 43.53''$
O.	29.70264	1.4727950	9.9313639	8.4585689 n	$178^\circ 21' 12.46''$
	70755	4728668	9292991	4564323	21 41.53
	71123	4729207	9277234	4548027	22 3.61
	29.71495	1.4729750	9.9260992	8.4531242 n	$178^\circ 22' 26.27''$
O.	29.73901	1.4733265	9.9149213	8.4415948 n	$178^\circ 24' 59.55''$
	74192	4733690	9134834	4401144	25 18.94
	74359	4733934	9126480	4392546	25 30.17
	29.74638	1.4734341	9.9112410	8.4378069 n	$178^\circ 25' 49.03''$
W.	29.80296	1.4742594	9.8782373	8.4039779 n	$178^\circ 32' 52.31''$
	80454	4742824	8771798	4028974	33 5.29
	80560	4742979	8764596	4021617	33 14.11
	29.80702	1.4743186	9.8754922	8.4011736 n	$178^\circ 33' 25.94''$

Kreislage	$\lg \sin A'$	$\lg \cos \delta \sin t$	$\lg \operatorname{cosec} z'$	$\lg f$	$\lg f \operatorname{cosec} z'$	$f \operatorname{cosec} z'$	$\lg \frac{\Delta''}{\Delta \operatorname{cosec} Z}$	$\frac{z'}{i \operatorname{cotg} z'}$
W.	8.473126	8.302200	0.170926	2.593977	2.764903	581.97	2.582057	$42^{\circ} 26' 5''$
	472604	301699	170905	588284	759189	574.87	2.582416	1.094
	471487	300626	170861	578317	749178	561.28	382''.31	-1''.55
	8.469163	8.298389	0.170774	2.551337	2.722111	527.37		
O.	8.458389	8.287994	0.170395	2.387141	2.557536	361.02	2.592258	$42^{\circ} 30' 50''$
	456255	285929	170326	351987	522313	332.90	2.592617	1.091
	454627	284353	170274	318794	489068	308.37	391''.40	-6''.39
	8.452949	8.282729	0.170220	2.285188	2.455408	285.37		
O.	8.441429	8.271551	0.169878	1.962671	2.132549	135.69	2.592322	$42^{\circ} 33' 30''$
	439950	270113	169837	885497	055334	113.59	2.592681	1.089
	439090	269278	169812	848918	2.018730	104.41	391''.45	-4''.94
	8.437644	8.267871	0.169773	1.767114	1.936887	86.47		
W.	8.403838	8.234867	0.168971	2.335823	2.504794	319.74	2.582775	$42^{\circ} 40' 0''$
	402759	233810	168949	352874	521823	332.52	2.583134	1.085
	402025	233090	168935	364671	533606	341.67	382''.94	+1''.44
	8.401036	8.232122	0.168914	2.377832	2.346746	352.16		

Stellt man die gerechneten Werthe für das Azimuth des Polarsternes, für $f \operatorname{cosec} z$, $\Delta \operatorname{cosec} Z$ und das Correctionsglied wegen der Neigung der Horizontalaxe übersichtlich zusammen und bedenkt hiebei, dass das irdische Object im Norden liegt, im Fernrohre im östlichen Abstände Δ vom Mittelfaden erschien, dass ferner der Polarstern für die ersten drei Gruppen im westlichen, für die letzte Gruppe aber im östlichen Abstände f vom Mittelfaden war, dass man demnach in der zur Anwendung kommenden Gl. (293) $\Delta \operatorname{cosec} Z$ positiv, für die ersten drei Gruppen der Beobachtungen des Polarsternes f negativ, für die letzte Gruppe jedoch positiv zu nehmen hat, so erhält man die in nachstehender Tabelle angegebenen Daten, in welcher Tabelle auch die Einzelwerthe des Azimuthes des irdischen Objectes, sowie der Endwerth desselben angegeben ist.

Kreislage	A'	$f \operatorname{cosec} z'$	$\Delta \operatorname{cosec} Z$	$\frac{-i \operatorname{cotg} z'}{+ J \operatorname{cotg} Z}$	Azimuth α	
					aus den Einzel- Beobachtungen	aus beiden Kreislagen
W.	$178^{\circ} 17' 47.81''$	$+9' 41.97''$	$+6' 22.31''$	$+1.43$	$178^{\circ} 33' 53.52''$	$178^{\circ} 33' 51.42''$
	17 55 18	9 34.37	6 22.31		53.29	51.48
	18 10.92	9 21.28	6 22.31		55.94	54.03
	178 18 43.53	+8 47.37	+6 22.31		54.64	52.91
O.	178 21 12.46	+6 1.02	+6 31.40	$+6.29$	178 33 51.17	
	21 41.53	5 32.90	6 31.40		52.12	
	22 3.61	5 8.37	6 31.40		49.67	
	178 22 26.27	+4 45.37	+6 31.40		49.33	

Kreis- lage	A'	$f \operatorname{cosec} z'$	$\Delta \operatorname{cosec} Z$	$-i \cot g z' + J \cot g Z$	Azimuth a	
					aus den Einzel- Beobachtungen	aus beiden Kreislagen
O.	178° 24' 59.55 25 18.94 25 30.17 178 25 49.03	+2' 15.69 1 53.59 1 44.41 +1 26.47	+6' 31.45 6 31.45 6 31.45 +6 31.45	+ 4.84	178° 33' 51.53 48.82 50.87 51.79	
W.	178 32 52.31 33 5.29 33 14.11 178 33 25.94	-5 19.74 5 32.52 5 41.67 -5 52.16	+6 22.94 6 22.94 6 22.94 +6 22.94	- 1.42	178 33 54.09 54.29 53.96 178 33 55.30	178° 33' 52.94 52.58 51.39 178 33 53.42

$$\text{Mittel: } a = 178^{\circ} 33' 52.52''$$

Es ist demnach das von Süd über West gezählte Azimuth der Spitze:

$$a = 178^{\circ} 33' 52.52''.$$

Die Messung des Horizontalwinkels W zwischen der Kuppel am Leopoldsberge und der Spitze hat ergeben $W = 9^{\circ} 11' 56''.71$; da die Kuppel um diesen Winkel westlich von der Spitze liegt, so ist das von Süd über West gezählte Azimuth a_k der Kuppel gegeben durch: $a_k = a - W$, oder nach Einführung der Zahlenwerthe:

$$a_k = 169^{\circ} 21' 55''.81.$$

4. Wenn dem Beobachter ein Universal- und ein Passage-Instrument zur Verfügung stehen, so kann das Azimuth des terrestrischen Objectes nach dem Vorschlage C. v. Littrow auf die Art ermittelt werden, dass man die beiden Instrumente collimirt und hierauf den Azimuthwinkel zwischen dieser durch die Visirlinie des Passage-Instrumentes bestimmten Richtung und jener nach dem irdischen Objecte misst. Zu dem Zwecke wird in der Meridianebene, in welcher das Passage-Instrument zur Zeitbestimmung aus den Meridiandurchgängen bekannter Sterne aufgestellt ist, auch das Universal-Instrument derart aufgestellt, dass die horizontalen Drehaxen beider Instrumente womöglich in gleicher Höhe liegen. Durch die Zeitbestimmung mittelst des Passage-Instrumentes wird das Azimuth k der horizontalen Drehaxe desselben bekannt. Collimirt man zur Zeit der Azimuthmessung des irdischen Objectes die Axen der beiden Fernrohre und ermittelt die zugehörige Lesung M am Horizontalkreise, so würde diese Lesung sofort dem Meridianpunkte entsprechen, wenn das Passage-Instrument mit seiner Visirlinie sich genau in der Meridianebene bewegen würde, und wenn für das Universal-Instrument der Einfluss der Instrumentalfehler Null wäre. Ist aber für das Passage-Instrument das Azimuth der horizontalen Drehaxe k positiv, wenn das westliche Ende derselben nach Süden ausweicht, c der Collimationsfehler positiv, wenn die Visirlinie mit dem Kreisende $90 + c$ einschliesst, und für das Universal-

Instrument i' die Neigung der horizontalen Drehaxe positiv, wenn das linke Axenende das höhere ist, c' der Collimationsfehler, auch positiv genommen, wenn die Visirlinie mit dem Kreiseude $90 + c'$ einschliesst, und z die Zenithdistanz des als Object dienenden Kreuzungspunctes der Fäden am Passage-Instrumente, so hat man die Lesung M_p für den Meridianpunct bestimmt durch

$$M_p = M + k + i' \cotg z \mp c \operatorname{cosec} z \pm c' \operatorname{cosec} z \left\{ \begin{array}{l} + \text{ Kreis West, beziehentlich} \\ \text{Kreis links.} \\ - \text{ Kreis Ost, beziehentlich} \\ \text{Kreis rechts.} \end{array} \right.$$

Da aber wegen der leicht zu erfüllenden Bedingung beim Aufstellen der Instrumente die Horizontalaxen, wenn auch nicht in vollkommene, so doch in nahezu gleiche Höhe gebracht worden sind, so wird z von 90° äusserst wenig abweichen, wodurch vorstehende Gleichung wird:

$$M_p = M + k \mp c \pm c'.$$

Stellt man dann die Visirlinie des Universal-Instrumentes auf das irdische Object, dem die Zenithdistanz Z zukommt, ein, und hat sich hiebei die Lesung M' am Horizontalkreise und die Neigung i'' der Drehaxe ergeben, so ist die wegen der Instrumentalfehler c' und i'' verbesserte Lesung

$$M' + i'' \cotg Z \pm c' \operatorname{cosec} Z \left\{ \begin{array}{l} + \text{ bei Kreis links,} \\ - \text{ bei Kreis rechts,} \end{array} \right.$$

somit das Azimuth a des irdischen Objectes unter der Voraussetzung eines von links nach rechts bezifferten Kreises mit beweglichem Mikroskopträger der Differenz der Lesungen auf das Object und des Meridianpunctes, also im Allgemeinen:

$$a = M' - M - k + i'' \cotg Z - i' \cotg z \mp c' (\operatorname{cosec} z - \operatorname{cosec} Z) \pm c \operatorname{cosec} z, \quad (295)$$

oder für den oben vorausgesetzten Fall, dass z sehr nahe oder $= 90^\circ$ ist, auch

$$a = M' - M - k + i'' \cotg Z \mp c' (1 - \operatorname{cosec} Z) \pm c. \quad (295^*)$$

Das Mittel aus den in beiden entgegengesetzten Kreislagen erhaltenen Werthen für das Azimuth ist frei von dem Einflusse des Collimationsfehlers.

Es wird a das von Süd über West von $0-360^\circ$ oder das von Nord gegen Ost von $0-360^\circ$ gezählte Azimuth sein, je nachdem das Universal-Instrument nördlich oder südlich vom Passagen-Instrumente aufgestellt ist.

Da der Werth k des Azimuthes des Passagen-Instrumentes in vollem Betrage auf das abgeleitete Endresultat a eingeht, so wird es von selbst geboten, die Azimuthmessung unmittelbar vor und nach der Zeitbestimmung aus Meridiandurchgängen bekannter Sterne vorzunehmen.

Für die Winkelmessung zwischen dem Kreuzungspuncte der mittleren Fäden am Passagen-Instrumente und dem irdischen Objecte gilt bezüglich der

zu einem Satze vereinigten Beobachtungen, sowie der Vertheilung der Sätze auf verschiedene um aliquote der Peripherie von einander abstehende Stellen des Kreises das schon in § 228 Gesagte.

Nach dieser Methode wurde von Dr. Tinter von einem Punkte des Observatoriums der k. k. technischen Hochschule in Wien das Azimuth der Richtung nach der Stiftskirche festgelegt. Ein Theodolith mit Mikroskopablesung wurde südlich von dem Pfeiler des Passage-Instrumentes, das zu Zeitbestimmungen aus Meridiandurchgängen bekannter Sterne verwendet wird, aufgestellt und mit diesem collimirt. Die Zenithdistanz z des Zielpunctes des Passage-Instrumentes war $91^{\circ} 30'$, die Zenithdistanz Z des Zielpunctes der Stiftskirche war $87^{\circ} 42' 2''$. Der Winkelwerth eines Scalentheiles der Libelle des Theodolithen $\mu = 4''.44$.

In nachstehender Tabelle sind die Beobachtungsdaten nebst den Werthen $i' \cot g z$, $i'' \cot g Z$ und die wegen der Neigung corrigirten Ablesungen eingetragen.

Kreislage		Object	Mikroskopablesung	Libelle		$i' \cot g z$ $i'' \cot g Z$	$M + i' \cot g z$ $M' + i'' \cot g Z$
Theodol.	Pass.-Instr.			l	r		
Kr. links	Kr. W.	Pass.-Instr.	63° 24' 16.5	9.0	10.0	- 0.03	63° 24' 16.47
			16.0	10.6	8.4		15.97
			14.2				14.17
			63 24 14.8				63 24 14.77
" "		Stiftskirche	345 6 36.9	11.4	7.0	+ 0.26	345 6 37.16
			37.5	10.0	8.5		37.76
			38.0				38.26
			345 6 36.1				345 6 36.36
Kr. rechts		Stiftskirche	165 6 42.0	8.4	10.2	- 0.07	165 6 41.93
			41.0	9.5	9.2		40.93
			37.6				37.53
			165 6 39.4				165 6 39.33
" "	Kr. O.	Pass.-Instr.	243 22 57.6	9.5	9.4	+ 0.07	243 22 57.67
			57.1	8.2	10.7		57.17
			58.3				58.37
			243 22 57.8				243 22 57.87

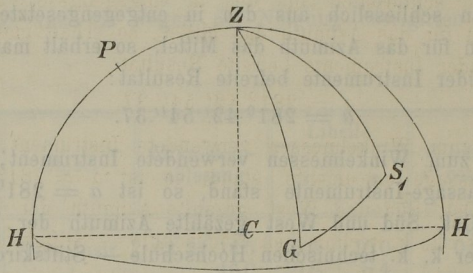
Das Azimuth des Passage-Instrumentes hat sich aus einer der Azimuthmessung vorangehenden Zeitbestimmung mit $k = + 7''.73$ ergeben.

Verbindet man die wegen der Neigung corrigirten Ablesungen in jeder Kreislage von der Mitte aus mit Berücksichtigung des Werthes k nach Gl. (295) zur Bestimmung des Azimuthes des Objectes, so erhält man

231. Bestimmung des Azimuthes eines irdischen Objectes mit Hilfe des Sextanten. Wenn man den Winkel zwischen der Sonne und dem irdischen Objecte mittelst des Sextanten oder des Prismenkreises misst und hiebei die Zeit auffasst, so kann man unter Voraussetzung, dass die Höhe der Sonne und des irdischen Objectes bekannt ist, den Azimuthwinkel zwischen der Sonne und dem irdischen Objecte und das Azimuth der Sonne rechnen, wodurch sich auch das Azimuth des irdischen Gegenstandes ergibt.

Sei in Fig. 94, HH' der Horizont, Z das Zenith des Beobachtungsortes C , G das irdische Object, S_1 der Mittelpunkt der Sonne und $GS_1 = A'$ die mit dem Sextanten gemessene Distanz, so sind, wenn die scheinbare Höhe der Sonne mit H' , die scheinbare Höhe des irdischen Objectes mit h' bezeichnet

Fig. 94.



wird, in dem Dreiecke zwischen dem Zenith Z , der Sonne S_1 und dem Gegenstande G die drei Seiten bekannt, nämlich: $GS_1 = A'$, $ZS_1 = 90 - H'$, $ZG = 90 - h'$ und zur Bestimmung des Azimuthwinkels $GZS_1 = A'$ hat man die Gleichung:

$$\cos A' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos A',$$

aus welcher

$$\cos A' = \frac{\cos A' - \sin H' \sin h'}{\cos H' \cos h'} \quad (296)$$

folgt.

Durch Umformung kann man vorstehende Gleichung auf eine für die Rechnung bequemere und für alle Fälle entsprechendere Form bringen.

Man hat zunächst:

$$\frac{1 - \cos A'}{1 + \cos A'} = \frac{\cos(H' - h') - \cos A'}{\cos(H' + h') + \cos A'}$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(H' - h' + A') \sin \frac{1}{2}(A' - H' + h')}{\cos \frac{1}{2}(H' + h' + A') \cos \frac{1}{2}(H' + h' - A')}} \quad (296^*)$$

Setzt man :

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} (H' + k' + A'), \\ \text{so ist: } s - H' &= \frac{1}{2} (k' + A' - H') \\ s - k' &= \frac{1}{2} (H' - k' + A') \\ s - A' &= \frac{1}{2} (H' + k' - A'), \end{aligned} \right\} \quad (296^{**})$$

mithin: $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A' = \sqrt{\frac{\sin(s - k') \sin(s - H')}{\cos s \cos(s - A')}}.$

Um nun das Azimuth des irdischen Objectes G , d. i. den Winkel $H'ZG = a$ zu finden, ist noch die Kenntniss des Azimuthes der Sonne, nämlich des Winkels $H'ZS_1 = A_1$ nothwendig. Die Berechnung des Azimuthes der Sonne geschieht nach den Formeln (21), pag. 92.

Man hat dann das Azimuth des irdischen Objectes G gegeben durch:
 $a = A_1 + A'.$

Die scheinbare Höhe der Sonne bestimmt man entweder unmittelbar durch Höhenmessungen vor und nach der Beobachtung des Winkels zwischen der Sonne und dem irdischen Objecte, oder man rechnet sich für die Zeit der Beobachtung nach den in (21), pag. 92, gegebenen Formeln nebst dem Azimuthe auch die wahre Höhe H_1 der Sonne, welche durch Correction wegen Parallaxe und Refraction in die scheinbare Höhe verwandelt wird. Es ist daher bei diesen Beobachtungen auch nothwendig, die meteorologischen Instrumente abzulesen, deren Angaben zur Berechnung der wahren Refraction dienen.

Bezüglich der Messung des Winkels zwischen der Sonne und dem irdischen Objecte ist noch zu bemerken, dass man den Abstand des Gegenstandes von dem westlichen Sonnenrande misst, die entsprechende Zeit an der Uhr auffasst und dann zuwartet, bis der östliche Sonnenrand in dieselbe Entfernung kommt und die hiebei stattfindende Zeit an der Uhr auffasst. Das arithmetische Mittel der beiden Uhrzeiten kann dann für jene Zeit angenommen werden, wo der Mittelpunkt der Sonne in dem gemessenen Abstände von dem irdischen Objecte war.

Will man die Beobachtungen wiederholen, so wird man den Sextanten ein wenig verstellen, so dass der westliche Rand der Sonne wieder nahe am Objecte erscheint, und wird den Moment an der Uhr auffassen, wo die Berührung dieses Randes mit dem Objecte stattfindet, dann den Augenblick abwarten, wo der östliche Rand der Sonne mit dem Objecte in Berührung kommt u. s. f.

Man kann aber auch so verfahren, dass man zuerst eine gewisse Anzahl Abstände des Objectes von dem ihm zunächst liegenden Sonnenrande misst und zu jedem gemessenen Abstände die Uhrzeit vermerkt und dann die gleiche Anzahl der Abstände des Objectes von dem ihm entferntesten Sonnenrande misst und hiebei wieder zu jedem Abstände die Zeit notirt. Wenn jede Beobachtungsreihe

ein nicht verhältnissmässig langes Zeitintervall umfasst, so kann man die Aenderungen der Abstände den Aenderungen der Zeit proportional annehmen und somit das Mittel der Beobachtungszeiten zu dem Mittel der gemessenen Distanzen gehörig betrachten. Dieses Mittel der Distanzen im entsprechenden Sinne um den scheinbaren Halbmesser der Sonne verbessert, gibt den Abstand des irdischen Objectes vom Mittelpunkte der Sonne.

Um den Einfluss eines Fehlers in der gemessenen Distanz auf den abgeleiteten Azimuthwinkel A' kennen zu lernen, differenzire man die Gl. (296) nach A' und A' ; es kommt:

$$dA' = \frac{\sin A'}{\sin A' \cos H' \cos h'} \cdot dA', \quad (297)$$

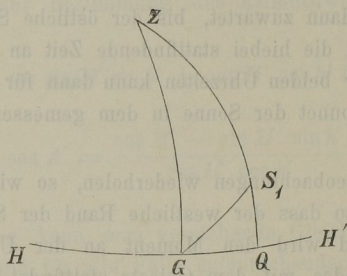
d. h. ein Fehler in A' nimmt einen um so geringeren Einfluss auf A' , je kleiner H' ist, und je näher A' an 90° liegt.

Wenn die Höhe h' des irdischen Objectes sehr gering ist, so kann man das Glied $\sin H' \sin h'$ gegen $\cos A'$ vernachlässigen und $\cos h' = 1$ setzen; man erhält dann zur Bestimmung des Näherungswerthes für A' aus (296) die Gl.:

$$\cos A' = \frac{\cos A'}{\cos H'}. \quad (298)$$

Dieselbe gilt streng für den Fall, wenn das irdische Object im Horizonte liegt; Fig. 95 versinnlicht dieses. Wenn HH' den Horizont, Z das Zenith, G das im Horizonte liegende Object und $GS_1 = A'$ die gemessene Distanz darstellt, so ist arc GQ das Maass des Azimuthwinkels A' zwischen G und S_1 .

Fig. 95.



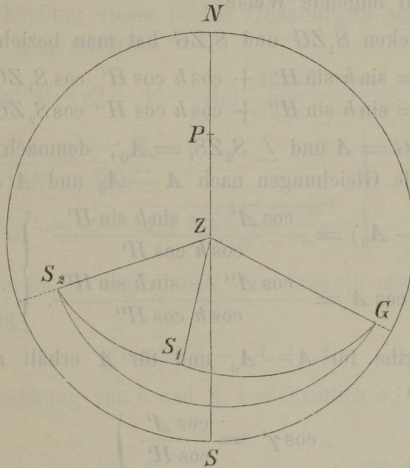
Aus dem Dreiecke GS_1Q folgt aber: $\cos GQ = \frac{\cos GS_1}{\cos QS_1}$ oder

$$\cos A' = \frac{\cos A'}{\cos H'}.$$

Ist das irdische Object weit entfernt, so ist die Messung der scheinbaren Höhe desselben mit dem Sextanten nicht gut möglich.

Für diesen Fall wurde von Wisniewski*) eine Methode vorgeschlagen, nach welcher man das Azimuth und die Höhe des irdischen Objectes aus den gemessenen Distanzen der Sonne von dem Objecte durch Rechnung finden kann. Die Lösung dieser Aufgabe wird möglich, wenn man nämlich die Entfernung der Sonne von dem irdischen Objecte zu zwei verschiedenen Tageszeiten misst. Sei in Fig. 96 in orthogonaler Projection Z das Zenith, NS die Meridianrichtung, G das irdische Object, dessen Azimuth ermittelt werden soll, $S_1G = \mathcal{A}'$ die zur Uhrzeit u_1 , $S_2G = \mathcal{A}''$ die zu einer anderen Tageszeit zur Uhrzeit u_2 gemessene Distanz der Sonne von dem Objecte G , so kann man nach den früher erwähnten Formeln das Azimuth und die wahre Höhe der Sonne für die Beobachtungszeiten u_1 und u_2 rechnen, d. h. man erhält durch die Rechnung $\angle SZS_1 = \mathcal{A}_1$, und $\angle SZS_2 = \mathcal{A}_2$ und

Fig. 96.



die wahren Höhen H_1 und H_2 der Sonne für den Ort derselben in S_1 und S_2 . Bringt man an die wahren Höhen den Betrag der Refraction und der Höhenparallaxe im entsprechenden Sinne an, so erhält man die scheinbaren Höhen H' und H'' , mithin die Dreiecksseiten $ZS_1 = 90 - H'$, $ZS_2 = 90 - H''$ und aus den gerechneten Azimuthen \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 die Azimuthaldifferenz $S_2ZS_1 = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$, wodurch in dem Dreiecke S_2ZS_1 zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind. Durch Anwendung der Neper'schen Analogieen auf dieses Dreieck erhält man die Winkel S_2S_1Z , S_1S_2Z und die Seite $S_1S_2 = \mathcal{A}$.

In dem Dreiecke S_2S_1G sind nunmehr alle drei Seiten, nämlich $S_1G = \mathcal{A}'$, $S_2G = \mathcal{A}''$ und $S_1S_2 = \mathcal{A}$ bekannt und durch Anwendung ent-

*) Memoires de l'académie de St. Petersbourg 1816.

sprechender Formeln erhält man die drei Winkel S_1S_2G , S_2GS_1 und GS_1S_2 . Hierauf kann der Winkel GS_1Z bestimmt werden, indem $\angle GS_1Z = 360 - (GS_1S_2 + S_2S_1Z)$ ist und dadurch sind in dem Dreiecke S_1ZG die Seiten $ZS_1 = 90 - H'$, $S_1G = A'$ und der Winkel ZS_1G bekannt und mit den Neper'schen Analogien bestimmen sich die fehlenden Stücke, nämlich: $\angle S_1ZG$, $\angle ZGS_1$ und die Seite $ZG = 90 - h$. Aus der gerechneten scheinbaren Höhe h findet sich die wahre Höhe nach Berücksichtigung der Refraction, und das von Süden über Westen gezählte Azimuth des irdischen Objectes G ist: $a = 360^\circ + A_1 - \angle S_1ZG$.

Die Reduction der Beobachtungen nach den strengen Formeln ist etwas umständlich; von Knorre wurden Näherungsformeln vorgeschlagen, welche wohl schneller zum Ziele führen, aber in der Anwendung bezüglich des Genauigkeitsgrades eine besondere Vorsicht fordern. Man gelangt zu diesen Näherungsformeln auf folgende Weise:

Aus den Dreiecken S_1ZG und S_2ZG hat man beziehentlich:

$$\begin{aligned}\cos A' &= \sin h \sin H' + \cos h \cos H' \cos S_1ZG \\ \cos A'' &= \sin h \sin H'' + \cos h \cos H'' \cos S_2ZG,\end{aligned}$$

oder wenn man $S_2ZG = A$ und $\angle S_2ZS_1 = A_0$, demnach $S_1ZG = A - A_0$ setzt, und vorstehende Gleichungen nach $A - A_0$ und A auflöst,

$$\left. \begin{aligned}\cos(A - A_0) &= \frac{\cos A' - \sin h \sin H'}{\cos h \cos H'} \\ \cos A &= \frac{\cos A'' - \sin h \sin H''}{\cos h \cos H''}.\end{aligned}\right\} \quad (m)$$

Genäherte Werthe für $A - A_0$ und für A erhält man nach Gl. 298 durch die Relationen:

$$\left. \begin{aligned}\cos \gamma' &= \frac{\cos A'}{\cos H'} \\ \cos \gamma'' &= \frac{\cos A''}{\cos H''}\end{aligned}\right\} \quad (n)$$

und wenn $\cos h = 1$ und $\sin h = h'' \sin 1''$ gesetzt wird, erhält man aus vorstehenden Gleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned}\cos(A - A_0) - \cos \gamma' &= -h'' \sin 1'' \operatorname{tg} H' \\ \cos A - \cos \gamma'' &= -h'' \sin 1'' \operatorname{tg} H'',\end{aligned}$$

oder nach entsprechender Umformung:

$$\begin{aligned}2 \sin \frac{1}{2}(A - A_0 + \gamma') \sin \frac{1}{2}(\gamma' + A_0 - A) &= -h'' \sin 1'' \operatorname{tg} H' \\ 2 \sin \frac{1}{2}(A + \gamma'') \sin \frac{1}{2}(\gamma'' - A) &= -h'' \sin 1'' \operatorname{tg} H''.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass $A - A_0$ von γ' und A von γ'' wenig abweicht, so wird man

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2}(A - A_0 + \gamma') &= \sin \gamma', \\ 2 \sin \frac{1}{2}(\gamma' + A_0 - A) &= \gamma' + A_0 - A = (\gamma' + A_0 - A)'' \sin 1'',\end{aligned}$$

$$\sin \frac{1}{2}(A + \gamma'') = \sin \gamma'',$$

$$2 \sin \frac{1}{2}(\gamma'' - A) = \gamma'' - A = (\gamma'' - A)'' \sin 1''$$

setzen können, und man erhält mit diesen Näherungen:

$$\begin{aligned} A - A_0 - \gamma' &= h \frac{\operatorname{tg} H'}{\sin \gamma'} \\ A - \gamma'' &= h \frac{\operatorname{tg} H''}{\sin \gamma''}. \end{aligned} \quad (o)$$

Bestimmt man die Hilfswinkel w' und w'' nach den Gln.:

$$\operatorname{tg} w' = \frac{\operatorname{tg} H'}{\sin \gamma'}, \quad \operatorname{tg} w'' = \frac{\operatorname{tg} H''}{\sin \gamma''}, \quad (p)$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} A - A_0 - \gamma' &= h \operatorname{tg} w' \\ A - \gamma'' &= h \operatorname{tg} w'' \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen ergeben sich die Unbekannten A und h ; man findet:

$$A = \gamma'' + (\gamma'' - \gamma' - A_0) \frac{\sin w'' \cos w'}{\sin(w' - w'')}, \quad (r)$$

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{\gamma'' - \gamma' - A_0}{\operatorname{tg} w' - \operatorname{tg} w''} \\ \text{oder } h &= (\gamma'' - \gamma' - A_0) \frac{\cos w' \cos w''}{\sin(w' - w'')} \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

Mit dem Werthe A ergibt sich das Azimuth a des irdischen Objectes nach der Gleichung:

$$a = 360^\circ - A + A_2.$$

Die zur Berechnung von h und A , beziehentlich a , nothwendigen Formeln sind demnach:

$$\cos \gamma' = \frac{\cos A'}{\cos H'}, \quad \cos \gamma'' = \frac{\cos A''}{\cos H''},$$

$$\operatorname{tg} w' = \frac{\operatorname{tg} H'}{\sin \gamma'}, \quad \operatorname{tg} w'' = \frac{\operatorname{tg} H''}{\sin \gamma''},$$

$$h = \frac{\gamma'' - \gamma' - A_0}{\operatorname{tg} w' - \operatorname{tg} w''}$$

$$\text{oder } h = \frac{\cos w' \cos w''}{\sin(w' - w'')} (\gamma'' - \gamma' - A_0),$$

$$A = \gamma'' + h \operatorname{tg} w'', \quad (299)$$

$$\text{oder } A = \gamma'' + \frac{\cos w' \sin w''}{\sin(w' - w'')} (\gamma'' - \gamma' - A_0)$$

$$\text{und } a = 360^\circ - A + A_2.$$

Beispiel. Zur Bestimmung des Azimuthes und der Höhe der auf einer Kuppel aufgesetzten Spitze eines im Südosten von Wien gelegenen Palais wurde von Dr. Tinter auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule in Wien mit einem Pistor'schen Prismen-Sextanten die Distanz dieser Spitze von der Sonne zu zwei verschiedenen Tageszeiten gemessen. Die Beobachtungsdaten waren:

1885, December 26, $22^h 54^m 12^s.3$ mittlere Wiener Zeit, Distanz des Objectes vom Mittelpuncte der Sonne $\mathcal{A}' = 30^\circ 10' 0''$; Barometerstand $B = 758.65 \text{ mm}$; Temperatur des Quecksilbers $T = 1.8^\circ \text{ C}$; Temperatur der Luft $a = 2.4^\circ \text{ C}$.

1885, December 27, $3^h 30^m 27^s.3$ mittlere Wiener Zeit, Distanz des Objectes vom Mittelpuncte der Sonne $\mathcal{A}'' = 89^\circ 14' 45''$; Stand der meteorologischen Instrumente: $B = 758.5 \text{ mm}$, $T = 2.7 \text{ C}$, $a = 3.0 \text{ C}$.

Polhöhe des Beobachtungsortes $\varphi = 48^\circ 11' 59''$; Collimationsfehler (Indexfehler) des Sextanten $+ 1' 6''$.

Aus dem Nautical-Almanac findet man für die Beobachtungszeiten:

Declination der Sonne $\delta_1 = -23^\circ 19' 14''.2$	$\delta_2 = -23^\circ 18' 44''.4$
Aequatoral-Horizontalparallaxe $\pi = 9''.0$	
Zeitgleichung $g' = -1^m 25^s.0$	$g'' = -1^m 30^s.7$

Hiemit bestimmt man sich zunächst die wahren Wiener Zeiten, nämlich:

Mittlere Wiener Zeit . $u_1 = 22^h 54^m 12^s.3$	$u_2 = 3^h 30^m 27^s.3$
Zeitgleichung $g' = -1 25.0$	$g'' = -1 30.7$
Wahre Wiener Zeit . $u_1' = 22^h 52^m 47^s.3$	$u_2' = 3^h 28^m 56^s.6$
Stundenwinkel $t' = 1^h 7^m 12^s.7$ östlich,	$t'' = 3^h 28^m 56^s.6$ westlich
$t' = 16^\circ 48' 10''.5$	$t'' = 52^\circ 14' 9''.0$

Berechnung des Azimuthes und der Höhe der Sonne nach den Formeln (pag. 92):

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{\cos M \operatorname{tg} t}{\sin(\varphi - M)}, \quad \operatorname{tg} H = \frac{\cos A}{\operatorname{tg}(\varphi - M)}$$

$\log \operatorname{tg} \delta' = 9.634571 n$	$\log \operatorname{tg} \delta'' = 9.634397 n$
$\log \cos t' = 9.981050$	$\log \cos t'' = 9.787045$
$\log \operatorname{tg} M' = 9.653521 n$	$\log \operatorname{tg} M'' = 9.847352(n)$
$M' = -24^\circ 14' 34''.7$	$M'' = -35^\circ 7' 54''.7$
$\varphi - M' = 72 26 33.7$	$\varphi - M'' = 83 19 53.7$

$\log \operatorname{tg} t' = 9.479973 n$	$\log \operatorname{tg} t'' = 0.110879$
$\log \cos M' = 9.959905$	$\log \cos M'' = 9.912663$
$9.439878 n$	0.023542
$\log \sin(\varphi - M') = 9.979283$	$\log \sin(\varphi - M'') = 9.997052$
$\log \operatorname{tg} A_1 = 9.460595 n$	$\log \operatorname{tg} A_2 = 0.026490$
Azimuth: $A_1 = 343^\circ 53' 28''.9$	$A_2 = 46^\circ 44' 46''.7$
$\log \cos A_1 = 9.982604$	$\log \cos A_2 = 9.835836$
$\log \operatorname{tg}(\varphi - M') = 0.499765$	$\log \operatorname{tg}(\varphi - M'') = 0.932133$
$\log \operatorname{tg} H_1 = 9.482839$	$\log \operatorname{tg} H_2 = 8.903703$
Wahre Sonnenhöhe $H_1 = 16^\circ 54' 28''.8$	$H_2 = 4^\circ 34' 49''.3$

Rechnet man sich die Refraction und die Höhenparallaxe nach den bekannten Regeln, so ergibt sich:

Wahre Refraction . . . R'	=	3' 13".5	R''	=	+ 10' 32".6
Höhenparallaxe . . . p'	=	8 .6	p''	=	9 .0
mithin: $R' - p'$	=	3 4 .9	$R'' - p''$	=	10 23 .6
Wahre Sonnenhöhe . . H_1	=	16° 54' 28".8	H_2	=	4° 34' 49".3
Scheinbare Sonnenhöhe H'	=	16 57 33 .7	H''	=	4 45 12 .9
$Z' = 90 - H'$	=	73 2 26 .3	$Z'' = 90 - H''$	=	85 14 47 .1

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen kann nun die weitere Rechnung nach den strengen oder nach den Näherungs-Formeln ausgeführt werden. Hier sollen beide Reductionsverfahren zur Anwendung kommen.

Rechnung nach den strengen Formeln.

In dem Dreiecke S_1ZS_2 hat man gegeben: $ZS_1 = Z' = 73^\circ 2' 26''.3$, $ZS_2 = Z'' = 85^\circ 14' 47''.1$ und $\angle S_1ZS_2 = 360 - A_1 + A_2 = 62^\circ 51' 17''.8$.

Die fehlenden Stücke findet man nach den Neper'schen Analogieen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (S_1 - S_2) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (Z'' - Z')}{\sin \frac{1}{2} (Z'' + Z')} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} S_1 Z S_2 \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (S_1 + S_2) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (Z'' - Z')}{\cos \frac{1}{2} (Z'' + Z')} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} S_1 Z S_2 \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} S_1 S_2 &= \frac{\sin \frac{1}{2} (S_1 + S_2)}{\sin \frac{1}{2} (S_1 - S_2)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Z'' - Z'). \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} Z'' - Z' &= 12^\circ 12' 21'' & \frac{1}{2} (Z'' - Z') &= 6^\circ 6' 10''.5 \\ Z'' + Z' &= 158 17 13 & \frac{1}{2} (Z'' + Z') &= 79 8 36 .5 \\ & & \frac{1}{2} S_1 Z S_2 &= 31 25 38 .9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2} (Z'' - Z') &= 9.026593 & \log \cos \frac{1}{2} (Z'' - Z') &= 9.997532 \\ \log \sin \frac{1}{2} (Z'' + Z') &= 9.992157 & \log \cos \frac{1}{2} (Z'' + Z') &= 9.274966 \\ \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} S_1 Z S_2 &= 0.213915 & &= 0.213915 \\ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (S_1 - S_2) &= 9.248351 & \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (S_1 + S_2) &= 0.936481 \\ \frac{1}{2} (S_1 - S_2) &= 10^\circ 2' 45''.4 & \frac{1}{2} (S_1 + S_2) &= 83^\circ 23' 50''.8 \\ S_1 &= 93 26 36 .2 & S_2 &= 73 21 5 .4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Z'' - Z') &= 9.029061 \\ \log \sin \frac{1}{2} (S_1 + S_2) &= 9.997110 \\ \log \sin \frac{1}{2} (S_1 - S_2) &= 9.241640 \\ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} S_1 S_2 &= 9.784531 \\ \frac{1}{2} S_1 S_2 &= 31^\circ 20' 10''.9 \\ S_1 S_2 = A &= 62^\circ 40' 21''.8 \end{aligned}$$

Berechnung des Dreieckes S_1S_2G . Gegeben sind die drei Seiten, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} S_1G = A' &= 30^\circ 11' 6'' \\ S_2G = A'' &= 89 15 51 \\ S_1S_2 = A &= 62 40 22. \end{aligned} \right\} \text{ schon verbessert wegen des Indexfehlers des Sextanten.}$$

Zu bestimmen sind die drei Winkel; man hat:

$s = \frac{1}{2} (A + A' + A'') = 91^\circ 3' 39''.5$	$\log \sin s = 9.999926$
$s - A = 28 23 17.5$	$\log \sin (s - A) = 9.677098$
$s - A' = 60 52 33.5$	$\log \sin (s - A') = 9.941297$
$s - A'' = 1 47 48.5$	$\log \sin (s - A'') = 8.496308$
$\log \sin (s - A) \sin (s - A') = 9.618395$	$\log \sin (s - A) \sin (s - A'') = 8.173406$
$\log \sin s \sin (s - A'') = 8.496234$	$\log \sin s \sin (s - A') = 9.941223$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} GS_1S_2 = 0.561080$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} S_1S_2G = 9.116092$
$\frac{1}{2} GS_1S_2 = 74^\circ 38' 15''.6$	$\frac{1}{2} S_1S_2G = 7^\circ 26' 35''.7$
$GS_1S_2 = 149 16 31.2$	$S_1S_2G = 14 53 11.4$
$\log \sin (s - A') \sin (s - A'') = 8.437605$	
$\log \sin s \sin (s - A) = 9.677024$	
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} S_1GS_2 = 9.380291$	
$\frac{1}{2} S_1GS_2 = 13^\circ 29' 53''.2$	
$S_1GS_2 = 26 59 46.4$	

Berechnung des Dreieckes S_1ZG , in welchem gegeben ist:

$ZS_1 = Z' = 73^\circ 2' 26''$, $S_1G = A' = 30^\circ 11' 6''$ und
 $\angle ZS_1G = 360 - (ZS_1S_2 + S_2S_1G) = 117^\circ 16' 53''$.

Nach den Neper'schen Analogieen hat man die weitere Rechnung, wie folgt:

$\frac{1}{2} (Z' - A') = 21^\circ 25' 40''.0$	$\log \sin \frac{1}{2} (Z' - A') = 9.562683$
$\frac{1}{2} (Z' + A') = 51 36 46.0$	$\log \sin \frac{1}{2} (Z' + A') = 9.894223$
$\frac{1}{2} ZS_1G = 58 38 26.5$	$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} ZS_1G = 9.784922$
	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (G_1 - Z) = 9.453382$
	$\frac{1}{2} (G_1 - Z) = 15^\circ 51' 24''.3$
	$\angle G_1 = ZG_1S_1 = 58 16 14$
$\log \cos \frac{1}{2} (Z' - A') = 9.968893$	$\log \sin \frac{1}{2} (Z' - A') = 9.562683$
$\log \cos \frac{1}{2} (Z' + A') = 9.793073$	$\log \sin \frac{1}{2} (G_1 + Z) = 9.828970$
$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} ZS_1G = 9.784922$	$\log \cos \frac{1}{2} (Z' - A') = 9.968893$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (G_1 + Z) = 9.960742$	$\log \sin \frac{1}{2} (G_1 - Z) = 9.436532$
$\frac{1}{2} (G_1 + Z) = 42^\circ 24' 50''.7$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} ZG_1 = 9.986228$
$\angle Z = S_1ZG_1 = 26 33 26$	$\frac{1}{2} ZG_1 = 44^\circ 5' 30''$
	$ZG_1 = 88 11 0$

Man hat also:

Südwestliches Azimuth der Sonne in S_1 = $343^\circ 53' 29''$
Winkel S_1ZG_1 (Object war östlich von der Sonne) . . . = $26 33 26$
mithin: Südwestliches Azimuth des irdischen Objectes G : $a = 317^\circ 20' 3''$
Zenithdistanz des irdischen Objectes $z = 88 11 0$
Höhe des irdischen Objectes $h = 1 49 0$.

Zur Controle kann man noch das Dreieck S_2ZG berechnen und das Azimuth des irdischen Objectes aus dem Winkel S_2ZG und dem für den Ort der Sonne in S_2 gerechneten Azimuthe A_2 ableiten.

Man findet: $\angle S_2ZG = 89^\circ 24' 45''$ und $360 - S_2ZG = 270^\circ 35' 15''$; nun ist das Azimuth von $G = (360 - S_2ZG) + A_2 = 270^\circ 35' 15'' + 46^\circ 44' 47''$, demnach:

$$a = 317^\circ 20' 2'',$$

also bis auf eine Secunde mit dem früheren Werthe übereinstimmend.

Die Zenithdistanz für das irdische Object ergibt sich mit dem aus dem Dreiecke S_1ZG gerechneten Werthe vollkommen gleichwerthig.

Rechnung nach den Näherungsformeln (299).

Es ist zunächst:

$$A_0 = A_2 + 360 - A_1 = 46^\circ 44' 47'' + 16^\circ 6' 31'' = 62^\circ 51' 18''.$$

Ermittlung der Hilfsgrößen: γ' , γ'' , w' und w'' .

$$\log \cos A' = 9.936718$$

$$\log \cos A'' = 8.108645$$

$$\log \cos H' = 9.980690$$

$$\log \cos H'' = 9.998503$$

$$\log \cos \gamma' = 9.956028$$

$$\log \cos \gamma'' = 8.110142$$

$$\gamma' = 25^\circ 21' 1''.0$$

$$\gamma'' = 89^\circ 15' 49''.9$$

$$\log \operatorname{tg} H' = 9.484238$$

$$\log \operatorname{tg} H'' = 8.919899$$

$$\log \sin \gamma' = 9.631597$$

$$\log \sin \gamma'' = 9.999964$$

$$\log \operatorname{tg} w' = 9.852641$$

$$\log \operatorname{tg} w'' = 8.919935$$

$$w' = 35^\circ 27' 39''.3$$

$$w'' = 4^\circ 45' 14''.4$$

Hiemit wird:

$$\gamma'' - \gamma' - A_0 = 1^\circ 3' 23'' = 3803''$$

$$w' - w'' = 30^\circ 42' 25''$$

$$\log(\gamma'' - \gamma' - A_0) = 3.58013$$

$$\log(\gamma'' - \gamma' - A_0) = 3.58013$$

$$\log \sin w'' = 8.91843$$

$$\log \cos w' = 9.91090$$

$$\log \cos w' = 9.91090$$

$$\log \cos w'' = 9.99850$$

$$\hline 2.40946$$

$$\hline 3.48953$$

$$\log \sin(w' - w'') = 9.70812$$

$$\log \sin(w' - w'') = 9.70812$$

$$\log(\gamma'' - \gamma' - A_0) \frac{\sin w'' \cos w'}{\sin(w' - w'')} = 2.70134$$

$$\log h = 3.78141$$

$$502''.7$$

$$h = 6045''.2 = 1^\circ 40' 45''$$

$$(\gamma'' - \gamma' - A_0) \frac{\sin w'' \cos w'}{\sin(w' - w'')} = 8' 23''$$

$$\gamma'' = 89^\circ 15' 42''$$

$$A = 89^\circ 24' 5''$$

$$360 - A = 270 35 55$$

$$A_2 = 46 44 47$$

$$\hline a = 317^\circ 20' 42''$$

Es ist demnach das südwestliche Azimuth des irdischen Objectes $317^\circ 20' 42''$ und die Höhe desselben $1^\circ 40' 45''$. Wie man sieht, weichen diese nach den Näherungsformeln gerechneten Größen von den nach den strengen Formeln gerechneten bedeutend ab, im Azimuthe um $39''$, in Höhe um $8' 15''$, woraus hervorgeht, dass man in der Anwendung der vorgeschlagenen Näherungsformeln äusserst vorsichtig sein muss. Der Grund für diese Abweichungen liegt eben darin, dass die für die Ableitung der Näherungsformeln gemachten Voraussetzungen nicht mehr zutreffen. Wenn man jedoch in der Entwicklung der Reihen für $\sin h$ und $\cos h$ die Glieder zweiter

Ordnung noch mitnimmt, so erhält man Formeln, welche Resultate geben, die von den nach den strengen Formeln gerechneten wenig abweichen, welche aber auch noch die für die Rechnung bequeme Form haben.

Die erste der Gl. (m) kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\cos(A - A_0) = \frac{\cos A'}{\cos H'} \cdot \frac{1}{\cos h} - \operatorname{tg} h \operatorname{tg} H'$$

oder $\cos h$ und $\operatorname{tg} h$ in Reihen entwickelt, und $\frac{\cos A'}{\cos H'} = \cos \gamma'$ gesetzt

$$\cos(A - A_0) = \cos \gamma' - h \operatorname{tg} H' + \frac{1}{2} h^2 \cos \gamma'. \quad (u)$$

Nach der Relation $\sin \alpha^2 = 1 - \cos \alpha^2$ findet man:

$$\sin(A - A_0) = \sin \gamma' \left[1 + h \frac{\cos \gamma'}{\sin \gamma'^2} \operatorname{tg} H' - \frac{h^2 \operatorname{tg} H'^2}{2 \sin \gamma'^4} - \frac{h^2 \cos \gamma'^2}{2 \sin \gamma'^2} \right]. \quad (v)$$

Wird Gl. (u) mit $\sin \gamma'$, Gl. (v) mit $\cos \gamma'$ multiplicirt und erstere von letzterer subtrahirt, so erhält man:

$$\sin(A - A_0 - \gamma') = h \frac{\operatorname{tg} H'}{\sin \gamma'} - \frac{h^2}{2} \cotg \gamma' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} \right). \quad (w)$$

Auf gleichem Wege erhält man aus der zweiten der Gl. (m):

$$\sin(A - \gamma'') = h \frac{\operatorname{tg} H''}{\sin \gamma''} - \frac{h^2}{2} \cotg \gamma'' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} \right). \quad (w^*)$$

Da nun γ' von $A - A_0$ und γ'' von A nicht viel abweicht, so kann man statt des sinus den Bogen setzen und wenn man h als auch die Differenzen $A - A_0 - \gamma'$ und $A - \gamma''$ in Secunden haben will:

$$\begin{aligned} A - A_0 - \gamma' &= h \frac{\operatorname{tg} H'}{\sin \gamma'} - \frac{h^2}{2} \sin 1'' \cotg \gamma' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} \right) \\ A - \gamma'' &= h \frac{\operatorname{tg} H''}{\sin \gamma''} - \frac{h^2}{2} \sin 1'' \cotg \gamma'' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} \right) \end{aligned} \quad (o^*)$$

Diese beiden Gleichungen (o^*) zur Bestimmung von h und A treten nunmehr an die Stelle der Gl. (o). Die Rechnung wird in der Weise geführt, dass man in dem von h^2 abhängigen Gliede für h den Näherungswerth

$h = \frac{\gamma'' - \gamma' - A_0}{\operatorname{tg} w' - \operatorname{tg} w''}$ oder $h = \frac{\cos w' \cos w''}{\sin(w' - w'')} (\gamma'' - \gamma' - A_0)$ einführt, wo-

durch im rechten Theile einer jeden Gl. (o^*) die von h^2 abhängigen Glieder bekannt werden. Setzt man:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \sin 1'' \cotg \gamma' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} \right) &= C_1 \\ \frac{h^2}{2} \sin 1'' \cotg \gamma'' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} \right) &= C_2, \end{aligned} \quad (y)$$

so erhält man statt der Gl. (o^*) die nachstehenden:

$$A - A_0 - \gamma' + C_1 = h \frac{\operatorname{tg} H'}{\sin \gamma'}$$

$$A - \gamma'' + C_2 = h \frac{\operatorname{tg} H''}{\sin \gamma''},$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (p):

$$\begin{aligned} A - A_0 - \gamma' + C_1 &= h \operatorname{tg} w' \\ A - \gamma'' + C_2 &= h \operatorname{tg} w''. \end{aligned} \quad (o^{**})$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen durch Subtraction gibt:

$$h = \frac{\gamma'' - \gamma' - A_0 + C_1 - C_2}{\operatorname{tg} w' - \operatorname{tg} w''}, \quad (s^*)$$

oder:

$$h = \frac{\cos w' \cos w''}{\sin(w' - w'')} (\gamma'' - \gamma' - A_0 + C_1 - C_2),$$

und hiemit wird:

$$A = h \operatorname{tg} w' + A_0 + \gamma' - C_1 \quad (r^*)$$

oder:

$$A = h \operatorname{tg} w'' + \gamma'' - C_2$$

Wenn der nach Gl. (s*) gefundene Werth für h von dem angenommenen Näherungswerthe, nach Gl. (s) gerechnet, beträchtlich abweicht, so wird man mit dem verbesserten Werthe h die Grössen C_1 und C_2 und hiermit nach (s*) h neu berechnen; diese Näherung wird so lange fortgesetzt, bis der angenommene mit dem durch die Rechnung erhaltenen Werthe übereinstimmt. Weil in C_1 und C_2 die Coefficienten von h^2 nur einmal berechnet werden dürfen, nimmt die wiederholte Näherungsrechnung für h wenig Zeit in Anspruch.

Wenden wir nun diese Formeln auf das vorige Beispiel an, so haben wir zunächst von der früheren Rechnung bekannt (pag. 550 und 553):

$H' = 16^\circ 57' 33''.7$	$H'' = 4^\circ 45' 12''.9$
$A_1 = 343 53 28.9$	$A_2 = 46 44 46.7$
$\gamma' = 25 21 1.0$	$\gamma'' = 89 15 41.9$
$w' = 35 27 39.3$	$w'' = 4 45 14.4$
$A_0 = 62 51 17.8$	$\gamma'' - \gamma' - A_0 = 1 3 23.1 = 3803''.1$

Die weitere Rechnung kann folgendermassen geführt werden:

Berechnung des Näherungswerthes von h und der Coefficienten von h in C_1 und C_2 (Gln. s und y).

$$\begin{aligned} \log(\gamma'' - \gamma' - A_0) &= 3.58013 \\ \log \cos w' &= 9.91090 \\ \log \cos w'' &= 9.99850 \\ \hline &3.48953 \\ \log \sin(w' - w'') &= 9.70812 \\ \log h_1 &= 3.78141 \\ h_1 &= 6045''.2 \end{aligned}$$

$\log \operatorname{tg} H' = 9.48424$	$\log \operatorname{tg} H'' = 8.9199$
$\log \sin \gamma' = 9.63160$	$\log \sin \gamma'' = 0.0000$
$\log \frac{\operatorname{tg} H'}{\sin \gamma'} = 9.85264$	$\log \frac{\operatorname{tg} H''}{\sin \gamma''} = 8.9199$
$\log \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} = 9.70528$	$\log \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} = 7.8398$
0.5073	0.0069
$1 + \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} = 1.5073$	$1 + \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} = 1.0069$
$\log \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} \right) = 0.17820$	$\log \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} \right) = 0.0030$
$\log \operatorname{cotg} \gamma' = 0.32443$	$\log \operatorname{cotg} \gamma'' = 8.1101$
$\log \sin 1'' = 4.68558$	$\log \sin 1'' = 4.6856$
$\log \frac{1}{2} = 9.69897$	$\log \frac{1}{2} = 9.6990$
$\lg \frac{1}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} \gamma' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} \right) = 4.88718$	$\lg \frac{1}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} \gamma'' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} \right) = 2.4977$
$\log h^2 = 7.56281$	$\log h^2 = 7.5628$
$\log C_1 = 2.44999$	$\log C_2 = 0.0605$
$C_1 = 281''.8$	$C_2 = 1''.1$

Nach (s^*) wird nun:

$$\gamma'' - \gamma' - A_0 + C_1 - C_2 = 4083.8 \quad \log 4083.8 = 3.61106$$

$$\log \frac{\cos w' \cos w''}{\sin (w' - w'')} = 0.20128$$

$$\log h_2 = 3.81234$$

$$h_2 = 6491''.4$$

Mit diesem zweiten Näherungswerthe h ergeben sich die Grössen C_1 und C_2 , wie folgt:

$$\lg \frac{1}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} \gamma' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H'^2}{\sin \gamma'^2} \right) = 4.88718 \quad \lg \frac{1}{2} \sin 1'' \operatorname{cotg} \gamma'' \left(1 + \frac{\operatorname{tg} H''^2}{\sin \gamma''^2} \right) = 2.4977$$

$$\log h^2 = 7.62468$$

$$\log h^2 = 7.6247$$

$$\log C_1 = 2.51186$$

$$\log C_2 = 0.1224$$

$$C_1 = 325.0$$

$$C_2 = 1.3$$

$$\gamma'' - \gamma' - A_0 + C_1 - C_2 = 4126''.8$$

$$\log 4126.8 = 3.61561$$

$$\log \frac{\cos w' \cos w''}{\sin (w' - w'')} = 0.20128$$

$$\log h_3 = 3.81689 \quad h_3 = 6559''.8$$

$$\log h_3^2 = 7.63378$$

Setzt man die Näherung auf dem angezeigten Wege fort, so erhält man schliesslich:

$$C_1 = 333''.0 \text{ und } C_2 = 1''.4;$$

hiermit wird:

$$h = 6572''.3.$$

Es ist demnach die Höhe des irdischen Objectes:

$$h = 1^\circ 49' 32''.$$

Mit diesem Werthe h wird A nach (r^*) gefunden:

$$\begin{aligned} \log h &= 3.81772 \\ \log \operatorname{tg} w' &= 9.85264 \\ \log \operatorname{tg} w'' &= 8.91994 \\ \log h \operatorname{tg} w' &= 3.67036 \quad \dots \quad 4681''.2 = 1^\circ 18' 1''.2 \\ \log h \operatorname{tg} w'' &= 2.73766 \quad \dots \quad 546.6 = 0^\circ 9' 6''.6. \end{aligned}$$

Nach der ersten Gleichung (r^*) ist:

$$\begin{aligned} h \operatorname{tg} w' &= 1 \ 18 \ 1.2 \\ A_0 &= 62^\circ 51' 17''.8 \\ \gamma' &= 25 \ 21 \ 1.0 \\ \hline &89^\circ 30' 20''.0 \\ C_1 &= 5 \ 33 \ .0 \\ A &= 89^\circ 24' 47''.0 \\ 360 - A &= 270^\circ 35' 13'' \end{aligned}$$

Das Azimuth a des irdischen Objectes ist bestimmt durch:

$$a = 360 - A + A_2, \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} 360^\circ - A &= 270^\circ 35' 13'' \\ A_2 &= 46 \ 44 \ 47 \\ \hline a &= 317^\circ 20' \ 0'' \end{aligned}$$

Die nach den verbesserten Näherungsformeln abgeleiteten Werthe für die Höhe und das Azimuth des irdischen Objectes stimmen mit den nach den strengen Formeln gerechneten sehr nahe überein, u. zw. ist die Abweichung in der Höhe 32 und im Azimuthe 2 Secunden; letztere Abweichung ist übrigens geringer, als jener Fehler, welcher der Messung des Winkels mit dem Sextanten anhaften wird.

ZEHNTES CAPITEL.

BESTIMMUNG DES LÄNGENUNTERSCHIEDES ZWEIER ORTE AUF DER OBERFLÄCHE DER ERDE.

232. Der Längenunterschied zweier Orte auf der Oberfläche der Erde ist der Winkel, welchen die Meridiane beider Orte an den Polen miteinander bilden, gleich dem zwischen den beiden Meridianen liegenden Bogen des Aequators, daher auch — wie schon in §. 34 nachgewiesen wurde — gleich dem Unterschiede der Ortszeiten an den beiden Orten in demselben absoluten Momente. Bezeichnen wir daher mit u_o und u_w die in demselben Momente an beiden Orten stattfindenden Uhrzeiten, mit x_o , x_w die Uhrcorrectionen gegen Ortszeit, mit L den Längenunterschied beider Orte, so ist, wenn wir die Länge von West gegen Ost positiv zählen:

$$L = (u_o + x_o) - (u_w + x_w), \quad (300)$$

oder:

$$L = (u_o - u_w) + (x_o - x_w). \quad (301)$$