

von $R = 41''.366$, und mit diesem ergibt sich dann nach Gl. (c) der Werth eines Niveantheles $\mu = \lambda R = 1''.673$. Die sämmtlichen zur Bestimmung von λ und R auf Station Roslyn gemachten Beobachtungen ergaben:

$$\lambda = 0.03985 \pm 0.00013, \quad R = 41''.400 \pm 0''.011,$$

aus welchen der an früherer Stelle angewendete Werth $\mu = 1''.650$ folgt.

3. Bestimmung der Polhöhe aus beobachteten Durchgängen von Sternen durch den ersten Vertical.

203. Beobachtet man die Zeit des Durchganges eines Sternes, dessen Rectascension α und Declination δ bekannt sind, durch einen bestimmten Vertical, dessen Azimuth A bekannt ist, so kann die Polhöhe φ mittelst der Gl. (22):

$$\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta = \operatorname{cotg} A \sin t \quad (a)$$

berechnet werden, wenn man noch den Stand der Uhr Au gegen Sternzeit kennt, womit sich der Stundenwinkel t aus der beobachteten Uhrzeit u mittelst der Gleichung $t = u + Au - \alpha$ ergibt.

Durch Differenziation der obigen Gleichung erhält man:

$$d\varphi = \frac{\cos \delta \cos q}{\sin A \cos z} dt - \frac{\operatorname{tg} z}{\sin A} dA + \frac{\sin q}{\sin A \cos z} d\delta,$$

wo z die Zenithdistanz und q den parallaktischen Winkel des Sternes zur Zeit der Beobachtung bedeuten.

Wie man sieht, werden die Coefficienten von dt und dA um so kleiner, je näher A an $\pm 90^\circ$ liegt und je kleiner die Zenithdistanz z ist, weil, für $A = \pm 90^\circ$, $\sin A$ im Nenner seinen grössten Zahlenwerth $= 1$ erreicht, und in diesem Falle auch der Zähler des Coefficienten von dt , welcher (s. §. 17) in der Form:

$$\cos \delta \cos q = \sin \varphi \sin z + \cos \varphi \cos z \cos A$$

geschrieben werden kann, klein wird.

Es ist also am vortheilhaftesten, den Stern im ersten Vertical zu beobachten, daher $\delta < \varphi$ sein muss, und, damit die Zenithdistanz klein werde, Sterne zu wählen, für welche $\varphi - \delta$, d. i. die Meridian-Zenithdistanz klein ist.

Der Coefficient von $d\delta$ kann, da allgemein $\cos \delta \sin q = \cos \varphi \sin A$, auch in der Form: $\frac{\cos \varphi}{\cos \delta \cos z}$ geschrieben werden und wird im ersten Vertical,

wo nach Gl. (46) $\cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$ ist, gleich $\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}$, derselbe bleibt daher,

wenn $\varphi - \delta$ klein ist, stets nahe $= 1$ und ein Fehler in δ geht, so wie bei den in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Methoden zur Be-

stimmung der Polhöhe, nahezu mit seinem vollen Betrage auf den berechneten Werth von φ über. Man muss daher Sterne wählen, deren Declination möglichst genau bestimmt ist.

Die Berechnung der Polhöhe aus Gl. (a) würde nun die Kenntniss des Azimuthes A erfordern, welche nicht vorausgesetzt werden kann. Beobachtet man jedoch den Durchgang des Sternes durch denselben Verticalkreis auf der Ost- und Westseite des Meridians, so ergibt sich hieraus sowohl Polhöhe als Azimuth.

Nehmen wir an, dass die Gl. (a) sich auf den östlichen Durchgang beziehe und schreiben wir, um dies anzudeuten, t_0 statt t , so lautet dieselbe:

$$\sin \varphi \cos t_0 - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta = \operatorname{cotg} A \sin t_0.$$

Für den Durchgang des Sternes durch denselben Vertical auf der Westseite geht A über in $180^\circ + A$. Bezeichnen wir daher den Stundenwinkel auf der Westseite mit t_w , so haben wir, da $\operatorname{cotg} (180^\circ + A) = \operatorname{cotg} A$, für den westlichen Durchgang die Gleichung:

$$\sin \varphi \cos t_w - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta = \operatorname{cotg} A \sin t_w.$$

Durch Gleichsetzung der aus beiden Gleichungen folgenden Werthe von $\operatorname{cotg} A$, und Multiplication der resultirenden Gleichung mit $\sin t_0 \sin t_w$ kommt:

$$\operatorname{tg} \varphi \sin (t_w - t_0) = \operatorname{tg} \delta (\sin t_w - \sin t_0),$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi \sin \frac{1}{2} (t_w - t_0) \cos \frac{1}{2} (t_w + t_0) = \operatorname{tg} \delta \sin \frac{1}{2} (t_w - t_0) \cos \frac{1}{2} (t_w + t_0),$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (t_w + t_0)}{\cos \frac{1}{2} (t_w - t_0)}. \quad (228)$$

Durch Subtraction der obigen Gleichungen erhält man ferner:

$$\operatorname{cotg} A (\sin t_w - \sin t_0) = \sin \varphi (\cos t_w - \cos t_0),$$

oder

$$\operatorname{cotg} A \sin \frac{1}{2} (t_w - t_0) \cos \frac{1}{2} (t_w + t_0) = \sin \varphi \sin \frac{1}{2} (t_w + t_0) \sin \frac{1}{2} (t_w - t_0),$$

und hieraus:

$$\operatorname{cotg} A = - \operatorname{tg} \frac{1}{2} (t_0 + t_w) \sin \varphi. \quad (229)$$

Bezeichnet man mit T_0 , T_w die Sternzeiten des Durchganges des Sternes in Ost und West durch den Vertical, dessen Azimuth = A , so ist:

$$t_0 = T_0 - \alpha, \quad t_w = T_w - \alpha$$

$$\frac{1}{2} (t_w - t_0) = \frac{1}{2} (T_w - T_0); \quad \frac{1}{2} (t_0 + t_w) = \frac{1}{2} (T_0 + T_w) - \alpha,$$

somit:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \frac{1}{2} (T_w - T_0)} \cos [\frac{1}{2} (T_0 + T_w) - \alpha]. \quad (230)$$

$$\operatorname{cotg} A = - \operatorname{tg} [\frac{1}{2} (T_0 + T_w) - \alpha] \sin \varphi, \quad (231)$$

oder, wenn man

$$\lambda = \frac{1}{2} (T_o + T_w) - \alpha \quad (232)$$

setzt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \frac{1}{2} (T_w - T_o)} \cos \lambda, \quad (233)$$

$$\operatorname{cotg} A = - \sin \varphi \operatorname{tg} \lambda. \quad (234)$$

Die vorstehenden Formeln gelten für jeden Werth des Azimuthes A .

Beobachtet man aber den Stern im ersten Vertical, so ist $A = 90^\circ$, $\operatorname{cotg} A = 0$, somit, vermöge der Gl. (231) oder (234), auch

$$\lambda = \frac{1}{2} (T_o + T_w) - \alpha = 0,$$

wie natürlich, weil dann T_o und T_w die Sternzeiten des Durchganges des Sternes durch den ersten Vertical in Ost und West sind und folglich das arithmetische Mittel $\frac{1}{2} (T_o + T_w) =$ der Sternzeit der Culmination des Sternes, d. i. $= \alpha$ wird. Bezeichnet man daher, wie dies im Weiteren stets geschehen soll, die Sternzeiten des Durchganges des Sternes durch den ersten Vertical in Ost und West mit \mathcal{T}_o und \mathcal{T}_w , so folgt aus (230) oder (233):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \frac{1}{2} (\mathcal{T}_w - \mathcal{T}_o)}, \quad (235)$$

welche Gleichung, da $\frac{1}{2} (\mathcal{T}_w - \mathcal{T}_o)$, d. i. die halbe Zwischenzeit zwischen den Durchgängen des Sternes durch den ersten Vertical in Ost und West, in Sternzeit ausgedrückt, offenbar gleich ist dem Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical, mit Gl. (47) übereinstimmt.

Bezeichnet man mit u_o und u_w die Uhrzeiten der Durchgänge des Sternes durch den Vertical in Ost und West, mit Δu_o und Δu_w die zugehörigen Uhrstände, so werden die Differenzen $T_w - T_o$, beziehungsweise $\mathcal{T}_w - \mathcal{T}_o$ in obigen Gleichungen $= (u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)$, wo $\Delta u_w - \Delta u_o$ den Gang der Uhr in der Zwischenzeit darstellt. Hieraus erhellt, dass diese Differenzen unabhängig sind von einem Fehler im Uhrstande und deren Bestimmung nur die Kenntniss des Ganges der Uhr erfordert. Die in obigen Gleichungen erscheinende Summe $T_o + T_w = (u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)$ hängt hingegen vom Uhrstande ab; ist jedoch das Azimuth A nur wenig von 90° verschieden, so wird $\frac{1}{2} (T_o + T_w)$ nahe gleich der Sternzeit α der Culmination des Sternes, also die Winkelgrösse $\lambda = [\frac{1}{2} (T_o + T_w) - \alpha]$ sehr klein, und daher ein kleiner Fehler im Uhrstande nur einen unmerklichen Einfluss auf den Cosinus derselben, somit auch auf den nach Gl. (230) oder (233) berechneten Werth der Polhöhe haben.

Die Anwendung der vorstehenden Gleichungen auf die Berechnung von Beobachtungen setzt übrigens voraus, dass die Absehenlinie des Fernrohres bei der Drehung desselben um die Horizontalaxe einen Verticalkreis beschreibe, wozu erfordert wird, dass die Absehenlinie auf der Horizontalaxe senkrecht stehe und letztere Axe horizontal sei, also der Collimationsfehler des Instrumentes so wie die Neigung der Horizontalaxe gleich Null seien, was im All-

gemeinen nicht der Fall sein wird. Es wird jedoch später gezeigt werden, dass, wenn man das Fernrohr in der Zwischenzeit zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes in seinen Lagern umlegt, auch der Einfluss des Collimationsfehlers eliminirt wird, so dass, abgesehen von dem Einflusse der zufälligen Beobachtungsfehler in den beobachteten Fadenantritten und des Fehlers in der Declination des Sternes, die berechnete Polhöhe nur noch durch die Neigung der Horizontalaxe, welche mit Hilfe der Libelle jederzeit bestimmt und in Rechnung gezogen werden kann, und einen Fehler im Uhrzuge, welcher für die wenige Stunden nicht überschreitende Zwischenzeit stets hinreichend genau bekannt angenommen werden kann, beeinflusst wird. In dieser Art ausgeführt, gewährt daher diese Methode der Bestimmung der Polhöhe einen hohen Grad der Genauigkeit und ist frei von dem Einflusse der Theilungsfehler der Kreise, der Biegung des Fernrohres und der Unsicherheit der Refraction. Wesentlich bleibt nur die genaue Bestimmung der Neigung der Horizontalaxe mittelst der Libelle und möglichste Stabilität in Bau und Aufstellung des Instrumentes, damit die Unveränderlichkeit des Azimuthes des Instrumentes in der Zwischenzeit zwischen den Durchgängen des Sternes in Ost und West genügend gesichert sei.

204. Im ersten Vertical bildet der Stern mit dem Zenith und Nordpol ein am Zenith rechtwinkeliges Dreieck, aus welchem sich die Beziehungen des Stundenwinkels und der Zenithdistanz des Sternes im ersten Vertical, welche Grössen in diesem Abschnitte ausschliessend mit σ und ζ bezeichnet werden sollen, zur Declination und Polhöhe leicht ergeben. Einige derselben, welche häufiger zur Anwendung kommen, mögen hier zusammengestellt werden.

Zufolge der Gln. (18) hat man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \operatorname{sec} \sigma, \quad 1)$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \cos \varphi \operatorname{tg} \sigma, \quad 2)$$

$$\sin \zeta = \cos \delta \sin \sigma, \quad 3)$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos \zeta. \quad 4)$$

Durch Verbindung von 1) mit 2) und von 2) mit 3) erhält man:

$$\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \zeta = \sin \varphi \sin \sigma \quad 5)$$

$$\cos \varphi \cos \zeta = \cos \delta \cos \sigma. \quad 6)$$

Aus 4) folgt ferner: $\sin \delta^2 = \sin \varphi^2 \cos^2 \zeta = \sin \varphi^2 - \sin \varphi^2 \sin^2 \zeta$; hieraus: $\sin \varphi^2 \sin^2 \zeta = \sin \varphi^2 - \sin \delta^2 = \sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)$, folglich:

$$\sin \varphi \sin \zeta = \sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}, \quad 7)$$

womit sich noch in Verbindung mit den vorausgehenden Gleichungen ergibt:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}}{\sin \delta}, \quad 8)$$

$$\sin \sigma = \frac{\sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}}{\sin \varphi \cos \delta},$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}}{\cos \varphi \sin \delta}. \quad (10)$$

Aus 1) hat man ferner: $\cos \sigma = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi}$, folglich:

$$2 \sin \frac{1}{2} \sigma^2 = 1 - \cos \sigma = 1 - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin \varphi \cos \delta},$$

$$2 \cos \frac{1}{2} \sigma^2 = 1 + \cos \sigma = 1 + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin \varphi \cos \delta},$$

und hieraus:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma = \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}}, \quad (11)$$

$$\sin(\varphi - \delta) = 2 \sin \varphi \cos \delta \sin \frac{1}{2} \sigma^2, \quad (12)$$

$$\sin(\varphi + \delta) = \sin(\varphi + \delta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma^2. \quad (13)$$

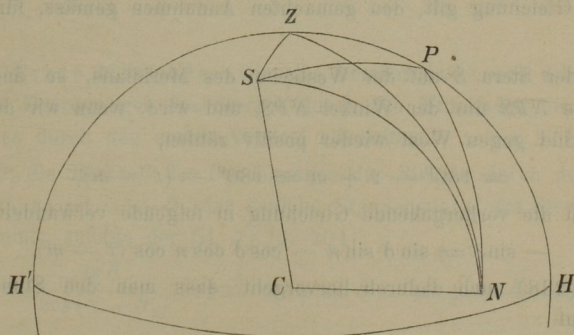
205. Zur Anstellung der Beobachtungen dient vorzugsweise das Passage-Instrument, welches eben zur Beobachtung von Gestirnen in einem bestimmten Verticalkreise zweckentsprechend construirt ist. Auch ein Universal-Instrument kann hiezu benützt werden, jedoch minder vortheilhaft, weil dieses, um eine verticale Axe drehbar, für die Unveränderlichkeit des Azimuthes der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohres zwischen den beiden Durchgängen des Sternes in Ost und West, worauf es wesentlich ankommt, erheblich geringere Gewähr bietet, als ein Passage-Instrument. Dasselbe soll mit einer Vorrichtung zur Umlegung der Horizontalaxe versehen sein (s. §. 127), um diese leicht, rasch und — bei gehöriger Vorsicht — ohne Gefahr einer Aenderung des Azimuthes bewerkstelligen zu können.

Das Instrument ist so aufzustellen, dass die Drehungsaxe des Fernrohres möglichst nahe in die Ebene des Meridians oder in die Richtung Süd-Nord zu liegen kommt. Am einfachsten geschieht dies, wenn es die Umstände erlauben, zunächst mittelst eines Universal-Instrumentes das Azimuth eines irdischen Objectes zu messen, von welchem ausgehend sofort die Richtung des ersten Verticals erhalten wird, in welche sodann das Fernrohr des Passage-Instrumentes, nachdem die Horizontalaxe horizontal gestellt und der Collimationsfehler möglichst nahe weggeschafft worden ist, leicht gebracht werden kann. Ist dieses Verfahren nicht auszuführen, so benützt man zur Orientirung des Instrumentes einen hellen Stern von kleiner nördlicher Declination, welcher in mässiger Höhe durch den ersten Vertical geht, berechnet Zenithdistanz und Stundenwinkel desselben im ersten Vertical und aus letzterem mit Zuziehung der Rectascension und des Uhrstandes die Uhrzeit des Durchganges durch den ersten Vertical. Einige Minuten vor dieser Zeit richte man nun das Fern-

rohr auf den Stern, bringe denselben durch Drehung des Instrumentes in Azimuth auf den Mittelfaden und erhalte ihn an demselben bis zu dem Momente der berechneten Uhrzeit. Waren hiebei zur Bewirkung der erforderlichen Drehung die zur Azimuthal-Correction dienenden Schrauben ($\delta\delta$ Fig. 66, S. 273) nicht ausreichend und musste daher eine Drehung des Instrumentes mit freier Hand vorgenommen werden, so wird der Erfolg dieser ersten Operation nur ein genäherter und eine Verbesserung durch Wiederholung derselben mit einem zweiten Sterne vorzunehmen sein. An späterem Orte (§. 215) werden sich Mittel ergeben, das Azimuth des Instrumentes aus Beobachtungen zu bestimmen, wornach dasselbe erforderlichenfalls noch corrigirt werden kann. Jedenfalls ist es rätlich, dasselbe möglichst klein zu halten, weil dadurch die Reduction der Beobachtungen wesentlich erleichtert wird. Wir haben uns nun mit der Aufgabe zu beschäftigen, aus den mit dem Einflusse der Instrumentalfehler: Neigung und Azimuth der Drehungsaxe des Fernrohres und Collimation der Absehenlinie des Mittelfadens behafteten Beobachtungen die Polhöhe abzuleiten.

206. Es sei (Fig. 92) HPZ der Meridian, C der Mittelpunkt des Instrumentes, CN die Drehungsaxe des Fernrohres, welche, gegen Nord verlängert, die scheinbare Himmelskugel in dem Punkte N (dem nördlichen Pole des grössten Kreises des Instrumentes) trifft. Die Höhe dieses Punktes über dem Horizonte, gleich der Neigung der Drehungsaxe, positiv genommen, wenn das

Fig. 92.



Nordende das höhere ist, sei $= i$, sein Azimuth, von Nord gegen Ost positiv gezählt, $= k$; die Declination desselben sei $= n$, der Stundenwinkel $= m$, letzterer, so wie das Azimuth k , von Nord gegen Ost positiv genommen. Von diesen vier Grössen bestimmen je zwei, Höhe und Azimuth, oder Stundenwinkel und Declination des Punktes N die Aufstellung des Instrumentes.

In dem vom Punkte N mit dem Nordpol und Zenith gebildeten Dreieck NPZ ist:

$$\begin{aligned} PZ &= 90^\circ - \varphi, \quad NZ = 90^\circ - i, \quad NP = 90^\circ - n, \\ \angle NZP &= k, \quad \angle NPZ = 180^\circ - m, \end{aligned}$$

und man hat durch Anwendung der Formeln (6) auf dieses Dreieck die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin n &= \sin \varphi \sin i + \cos \varphi \cos i \cos k, \\ \cos n \sin m &= \sin k \cos i, \\ - \cos n \cos m &= \cos \varphi \sin i - \sin \varphi \cos i \cos k \end{aligned} \quad (236)$$

oder, wenn i und k so klein sind, dass die Sinus mit den Bögen vertauscht und die Cosinus gleich 1 gesetzt werden können:

$$\begin{aligned} \sin n &= i \sin \varphi + \cos \varphi, \\ \cos n \sin m &= k, \\ - \cos n \cos m &= i \cos \varphi - \sin \varphi. \end{aligned} \quad (237)$$

Sei ferner CS die Abschenlinie des Mittelfadens auf einen Stern gerichtet, dessen Declination $= \delta$, dessen Stundenwinkel, von Süd gegen Ost positiv gezählt, $= t$ ist. Die Abschenlinie CS schliesse mit dem Kreise der Drehungsaxe des Fernrohres den Winkel $90^\circ + c$ ein, wo c den Collimationsfehler bedeutet, und nehmen wir an, dass CN das Kreisende und gegen Nord gerichtet sei. In dem Dreiecke NPS ist dann:

$$\begin{aligned} SN &= 90^\circ + c, \quad PS = 90^\circ - \delta, \quad PN = 90^\circ - n, \\ \angle NPS &= 180^\circ - (t + m), \end{aligned}$$

folglich:

$$- \sin c = \sin \delta \sin n - \cos \delta \cos n \cos (t + m). \quad (238)$$

Diese Gleichung gilt, den gemachten Annahmen gemäss, für Stern Ost, Kreis Nord.

Steht der Stern S auf der Westseite des Meridians, so ändert sich in dem Dreiecke NPS nur der Winkel NPS , und wird, wenn wir den Stundenwinkel von Süd gegen West wieder positiv zählen,

$$= 180^\circ - t + m = 180^\circ - (t - m),$$

wodurch sich die vorhergehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$- \sin c = \sin \delta \sin n - \cos \delta \cos n \cos (t - m), \quad (238^*)$$

welche aus (238) auch dadurch hervorgeht, dass man den Stundenwinkel t negativ nimmt.

Beobachtet man aber den Stern bei Kreis Süd, so kommt der Mittelfaden auf die entgegengesetzte Seite des grössten Kreises des Instrumentes zu liegen, wodurch die Seite $NS = 90^\circ - c$ wird, und es ändert sich daher in den beiden vorhergehenden Gleichungen das Zeichen von c .

Es genügt daher, in den weiteren Ableitungen von der für Stern Ost, Kreis Nord giltigen Gl. (238) auszugehen, da aus den so erhaltenen Resul-

taten die für die anderen Fälle: Stern West oder Kreis Süd geltenden einfach durch Aenderung des Zeichens von t , beziehungsweise c erhalten werden können.

In die Gl. (238) kann man an Stelle der Grössen m und n auch jene i und k einführen. Durch Auflösung des $\cos(t + m)$ und Substitution der Werthe für $\sin n$, $\cos n \sin m$ und $\cos n \cos m$ aus den Glgn. (236) folgt nämlich:

$$\frac{\sin c}{\cos k \cos i} + \frac{(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t)}{\cos k \cos i} \sin i + \cos \delta \sin t \operatorname{tg} k = \\ = \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta,$$

oder, da der Coefficient von $\sin i$ gleich $\cos z$ ist, wenn z die Zenithdistanz des Sternes am Mittelfaden bedeutet:

$$\frac{\sin c}{\cos k \cos i} + \frac{\cos z \operatorname{tg} i}{\cos k} + \cos \delta \sin t \operatorname{tg} k = \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta, \quad (239)$$

welche Gleichung noch streng^e ist. In der Praxis werden aber c und i immer so klein sein, dass $\sin c = c$, $\operatorname{tg} i = i$ und $\cos i = 1$ gesetzt werden kann; wird auch bezüglich des Azimuthes k dieselbe Voraussetzung gemacht, so geht mit Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser Grössen obige Gleichung in folgende über:

$$c + i \cos z + k \cos \delta \sin t = \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta. \quad (239^*)$$

Die vorstehenden Gleichungen enthalten die Theorie des Passage-Instrumentes bei seiner Aufstellung im ersten Vertical und es lassen sich aus denselben verschiedene Methoden zur Berechnung der Polhöhe ableiten, von welchen einige der vorzüglichsten dargestellt werden sollen.

207. Erste Methode. Dieselbe besteht darin, aus der beobachteten Uhrzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden die Sternzeit des Durchganges durch den ersten Vertical abzuleiten.

Sei \mathcal{P}_0 die Sternzeit des Durchganges des Sternes durch den ersten Vertical in Ost, so ist $\alpha - \mathcal{P}_0$ der östliche Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical, somit, zufolge der Gl. 1) [§. 204]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos(\alpha - \mathcal{P}_0)}, \quad \text{oder: } \cos \varphi \sin \delta = \sin \varphi \cos \delta \cos(\alpha - \mathcal{P}_0),$$

und man erhält durch Substitution dieses Werthes in die Gl. (239*):

$$c + i \cos z + k \cos \delta \sin t = \sin \varphi \cos \delta [\cos t - \cos(\alpha - \mathcal{P}_0)] \\ = 2 \sin \varphi \cos \delta \sin \frac{1}{2}(\alpha - \mathcal{P}_0 - t) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \mathcal{P}_0 + t).$$

Sind nun, wie vorausgesetzt, die Instrumentalfehler c , i , k klein, so fällt der Mittelfaden sehr nahe mit dem ersten Vertical zusammen und es wird daher sehr nahe $t = \alpha - \mathcal{P}_0$ sein, so dass man, da die linke Seite der Gleichung

eine sehr kleine Grösse ist, im zweiten Theile statt des $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \mathcal{G}_0 - t)$ den Bogen und $\sin t$ statt $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \mathcal{G}_0 + t)$ setzen kann. Hiedurch kommt:

$$\frac{c}{\sin \varphi \cos \delta \sin t} + \frac{i \cos \varepsilon}{\sin \varphi \cos \delta \sin t} + \frac{k}{\sin \varphi} = \alpha - \mathcal{G}_0 - t.$$

Die Coefficienten von c und i vereinfachen sich durch die Bemerkung, dass, da der Stern nahe am ersten Vertical beobachtet ist, ε und t sehr nahe der Zenithdistanz ζ und dem Stundenwinkel σ im ersten Vertical gleich sein werden, daher man in diesen sehr kleinen Gliedern $\cos \zeta$ statt $\cos \varepsilon$ und $\cos \delta \sin t = \cos \delta \sin \sigma = \sin \zeta$ [Gl. 3] §. 204] setzen kann.

Ist endlich u_0 die beobachtete Uhrzeit des Antrittes des Sternes am Mittelfaden, Δu_0 der Stand der Uhr gegen Sternzeit, so ist

$$t = \alpha - (u_0 + \Delta u_0),$$

und es folgt daher aus obiger Gleichung:

$$\mathcal{G}_0 = u_0 + \Delta u_0 - \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} - \frac{i_0}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi},$$

wobei i_0 die bei dem östlichen Durchgange des Sternes beobachtete Neigung der Drehungsaxe des Fernrohres bedeutet.

Diese Gleichung gilt, der Ableitung zufolge, für Stern Ost, Kreis Nord. Wurde der Stern im Westen beobachtet, so ändert sich nur das Zeichen von t und mit diesem, da $\cos \delta \sin t = \sin \zeta$ gesetzt wurde, das Zeichen von ζ . Erfolgte aber die Beobachtung bei Kreis Süd, so ist c mit entgegengesetzten Zeichen zu rechnen. Man hat daher für die vier möglichen Fälle folgende Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{St. O. K. N.: } \mathcal{G}_0 &= u_0 + \Delta u_0 - \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} - \frac{i_0}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}, \\ \text{St. W. K. N.: } \mathcal{G}_w &= u_w + \Delta u_w + \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} + \frac{i_w}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}, \\ \text{St. O. K. S.: } \mathcal{G}_0 &= u_0 + \Delta u_0 + \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} - \frac{i_0}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}, \\ \text{St. W. K. S.: } \mathcal{G}_w &= u_w + \Delta u_w - \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} + \frac{i_w}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}. \end{aligned} \quad (240)$$

Mittelst dieser Gleichungen ist man nun im Stande, wenn die Fehler c , i , k des Instrumentes und der Uhrfehler Δu bekannt sind, aus der beobachteten Uhrzeit u des Sternes am Mittelfaden die Sternzeit \mathcal{G} seines Durchganges durch den ersten Vertical abzuleiten, aus welcher mit Zuziehung der Rectascension der Stundenwinkel σ , und mit diesem und der Declination nach Gl. 1) [§. 204] die Polhöhe sich ergibt. Hiebei wird aber nicht bloss die Kenntniss der genannten Reductionselemente erfordert, sondern es bleibt die berechnete Polhöhe auch mit dem Einflusse der Fehler der für dieselben angenommenen Werthe behaftet.

Beobachtet man den Stern in Ost und West in derselben Kreislage, so erhält man durch Subtraction der zwei ersten, oder der zwei letzten der vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o) = \frac{1}{2}[(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)] \pm \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} + \frac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varepsilon},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern bei Kreis Nord oder Kreis Süd beobachtet wurde. Dieser Werth von $\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ ist unabhängig vom Uhrstande, dem Azimuthe k des Instrumentes und der Rectascension des Sternes, und der hiemit nach Gl. (235) berechnete Werth von φ hängt, abgesehen von der stets zu berücksichtigenden Neigung der Axe, nur noch von dem Uhr gange ($\Delta u_w - \Delta u_o$) in der Zwischenzeit und der Collimation c ab. Ist letztere unbekannt, so kann man, dieselbe vernachlässigend, zunächst einen mit dem Einflusse des Collimationsfehlers behafteten Werth von φ mittelst der Gl. (235) berechnen; beobachtet man dann den Stern an einem der folgenden Abende in der entgegengesetzten Kreislage, so wird, wie das doppelte Zeichen des von c abhängigen Gliedes der obigen Gleichung zu erkennen gibt, das Mittel aus den aus beiden Beobachtungen folgenden Werthen von φ frei sein vom Einflusse des Collimationsfehlers, vorausgesetzt, dass dieser in der Zwischenzeit sich nicht geändert hat.

Beobachtet man aber den Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen, indem man das Fernrohr in der Zwischenzeit in seinen Lagern umlegt, so hat man durch Subtraction der 1^{ten} und 2^{ten}, oder der 2^{ten} und 3^{ten} der Glgn. (240):

$$\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o) = \frac{1}{2}[(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)] + \frac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta}, \quad (241)$$

oder, wenn man:

$$\Theta = \frac{1}{2}[(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)] \quad (242)$$

setzt, wo Θ die halbe beobachtete Zwischenzeit, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o) = \Theta + \frac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta}, \quad (243)$$

und hiemit zufolge Gl. (235):

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \sec \frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o). \quad (244)$$

Hier ist nun die Differenz $\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ von der Rectascension des Sternes, dem Uhrstande, der Collimation und dem Azimuthe des Instrumentes, so lange letzteres so klein ist, dass die bei Ableitung der Glgn. (240) vernachlässigten höheren Potenzen desselben keinen merklichen Einfluss haben, unabhängig, und es bedarf die in Uhrzeit ausgedrückte Zwischenzeit ($u_w - u_o$) nur der Reduction auf Sternzeit durch Anbringung des Uhr ganges ($\Delta u_w - \Delta u_o$) in der Zwischenzeit und der Correction wegen der Neigung der Axe.

Letzterer Correction kann übrigens noch einfacher dadurch Rechnung getragen werden, dass man zunächst mit der wegen Neigung der Axe noch nicht verbesserten Zwischenzeit Θ einen Werth φ' der Polhöhe berechnet, und sodann diesen wegen der Neigung corrigirt. Durch Differenziation der Gl. (244) nach φ und $\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o)$ findet man nämlich mit Berücksichtigung der Gl. 2) [§. 204]:

$$d\varphi = \sin \varphi \operatorname{tg} \xi \cdot d \frac{1}{2} (\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o). \quad (m)$$

Setzt man nun, gemäss der Gl. (243): $d \frac{1}{2} (\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o) = \frac{\frac{1}{2} (i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \xi}$, so wird $d\varphi = \frac{1}{2} (i_o + i_w)$. Man kann daher die Formeln in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} [(u_w - u_o) + (\mathcal{A}u_w - \mathcal{A}u_o)], \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} \delta \sec \Theta, \\ \varphi &= \varphi' + \frac{1}{2} (i_o + i_w). \end{aligned} \quad (244^*)$$

Die Gl. (m) gibt den Fehler der Polhöhe, welcher durch einen Fehler in der nach Gl. (241) oder (243) berechneten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o)$ erzeugt wird. Letzterer setzt sich aus drei Fehlern zusammen, nämlich 1) dem Fehler in dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2} (i_o + i_w)$ beider Neigungen, 2) dem Fehler in der beobachteten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2} (u_w - u_o)$ und 3) dem Fehler in dem angenommenen Uhr gange $\frac{1}{2} (\mathcal{A}u_w - \mathcal{A}u_o)$.

Der von einem Fehler in den Neigungen herrührende Fehler in φ wird, mit Rücksicht auf Gl. (m): $d\varphi = d \frac{1}{2} (i_o + i_w)$, woraus folgt, dass der ganze Betrag des Fehlers in dem arithmetischen Mittel der Neigungen auf die berechnete Polhöhe übergeht, was übrigens aus der letzten der Gln. (244*) unmittelbar erhellt. Es ist daher die Bestimmung der Neigung der Axe mit Sorgfalt vorzunehmen und zu empfehlen, nicht nur die Axe vor und nach jedem Durchgange zu nivelliren, sondern auch die Libelle stets möglichst nahe berichtigt und die Neigung der Axe selbst möglichst klein zu erhalten, damit die Ausweichungen der Blase von der Mitte klein bleiben und hiedurch der Einfluss eines Fehlers in dem angenommenen Werthe eines Scalentheiles unmerklich wird. Da übrigens in obige Gleichungen nur die Summe der Neigungen bei K. O. und K. W. eingeht, in welcher bekanntlich der Einfluss einer Ungleichheit der Zapfenhalbmesser eliminirt ist, so kann letztere unberücksichtigt bleiben.

Der Einfluss eines Fehlers in der beobachteten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2} (u_w - u_o)$ wird:

$$d\varphi = \sin \varphi \operatorname{tg} \xi \cdot d \frac{1}{2} (u_w - u_o).$$

Hieraus erhält man z. B. für $\varphi = 50^0$, und:

δ	$\varphi - \delta$	ζ	$d\varphi =$	für $d\frac{1}{2}(u_w - u_o) = 0^s.1$
49^0	1^0	$9^0 52$	$0.1332 d\frac{1}{2}(u_w - u_o)$	$d\varphi = 0'' .200$
48	2	14 3	0.1916 „	$d\varphi = 0 .287$
47	3	17 19	0.2387 „	$d\varphi = 0 .358$
46	4	20 7	0.2805 „	$d\varphi = 0 .421$

Um den Einfluss eines Fehlers im Uhr gange zu erhalten, hat man statt $d\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ in Gl. (m) zu setzen:

$$d\frac{1}{2}(\mathcal{A}u_w - \mathcal{A}u_o) = \frac{\frac{1}{2}(u_w - u_o)}{24} dg = \frac{\sigma}{24} dg,$$

wenn g den Gang der Uhr gegen Sternzeit in 24^h und σ den Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical bedeutet, womit

$$d\varphi = \frac{1}{24} \sigma \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta dg$$

wird. Hiernach wird für die oben gemachten Annahmen: $\varphi = 50^0$, und:

δ	$\varphi - \delta$	σ	$d\varphi =$	für $dg = 0^s.1$
49^0	1^0	$1^h.010$	$0.0056 dg$	$d\varphi = 0'' .008$
48	2	1.418	$0.0113 dg$	$d\varphi = 0 .017$
47	3	1.724	$0.0171 dg$	$d\varphi = 0 .026$
46	4	1.978	$0.0231 dg$	$d\varphi = 0 .035$

Der Einfluss der hier betrachteten Fehler wird daher, bei gleichem Betrage derselben, um so grösser, je grösser $\varphi - \delta$ wird, übereinstimmend mit dem schon in §. 203 erhaltenen Resultate. (Vergl. übrigens §. 218.)

Differenzirt man Gl. (244) nach φ und δ , so kommt:

$$d\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta} d\delta,$$

woraus erhellt, dass, da der Coefficient von $d\delta$ stets nahe $= 1$ bleibt, wenn $\varphi - \delta$ klein ist, der Fehler der Declination nahezu mit seinem vollen Betrage auf die Polhöhe übergeht.

Statt der Gl. (244), oder jener (244*) kann man sich zur Berechnung von φ auch einer der Formeln 12) oder 13) [§. 204] bedienen, welche, da $\sigma = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ ist, die Form:

$$\sin(\varphi - \delta) = 2 \sin \varphi \cos \delta \sin \frac{1}{4}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)^2 \quad (245)$$

und

$$\sin(\varphi - \delta) = \sin(\varphi + \delta) \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)^2 \quad (246)$$

annehmen, und die Differenz $(\varphi - \delta)$ geben, wobei im 2^{ten} Theile für φ ein möglichst angenäherter Werth zu substituiren und für $\frac{1}{4}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ der Werth aus Gl. (241) durch Halbiring zu entnehmen ist. Da $\varphi - \delta$ klein, so genügt es, die Rechnung nach diesen Formeln mit sechsstelligen Logarithmen zu führen.

Durch Differenziation nach φ und δ erhält man für die Formel (245)

$$d(\varphi - \delta) = \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \operatorname{cotg} \varphi d\varphi - \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \operatorname{tg} \delta d\delta,$$

für jene (246):

$$d(\varphi - \delta) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \delta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \delta)} d(\varphi + \delta),$$

wornach der Einfluss eines Fehlers in den angenommenen Werthen von φ und δ auf den berechneten Werth der Differenz $(\varphi - \delta)$ bestimmt werden kann, welcher, vermöge des kleinen Factors $\operatorname{tg}(\varphi - \delta)$ meist unmerklich sein wird. Man sieht übrigens, dass der Gebrauch der Gl. (246), abgesehen von der bequemerer Rechnung, vortheilhafter ist, als jener der Gl. (245), weil der Coefficient von $d\varphi$ bei (246) stets erheblich kleiner ist, als jener bei (245), was auch für den Coefficienten $d\delta$ gilt, sobald φ , je nach dem Werthe von $(\varphi - \delta)$, grösser als 30° bis 33° ist.

Durch Differenziation der Glgn. (245) und (246) nach $\varphi - \delta$ und $\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o)$ erhält man für (245):

$$d(\varphi - \delta) = \frac{\sin \varphi \sin \zeta}{\cos(\varphi - \delta)} d\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o),$$

und für (246):

$$d(\varphi - \delta) = \frac{2 \operatorname{tg}(\varphi - \delta)}{\sin \sigma} d\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o),$$

welche Formeln den Einfluss eines Fehlers in der halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o)$ auf den berechneten Werth von $(\varphi - \delta)$ geben. Man erhält hieraus, der Kürze wegen $\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o) = \sigma$ setzend, für die obigen Annahmen: $\varphi = 50^\circ$, und:

$\varphi - \delta$		für Gl. (245):	für Gl. (246):
$\delta = 49^\circ$	1°	$d(\varphi - \delta) = 0.1313 d\sigma$	$d(\varphi - \delta) = 0.1337 d\sigma$
	48	„ $= 0.1861 d\sigma$	„ $= 0.1925 d\sigma$
	47	„ $= 0.2284 d\sigma$	„ $= 0.2402 d\sigma$
	46	„ $= 0.2642 d\sigma$	„ $= 0.2825 d\sigma$

208. Die Berechnung von φ nach den vorstehenden Formeln setzt voraus, dass die bei Entwicklung der Glgn. (240) vernachlässigten höheren Potenzen des Azimuthes k des Instrumentes auf die Differenz $\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o$ keinen merklichen Einfluss nehmen. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so wird man sich zur Berechnung von φ der Gl. (230) oder (233) bedienen, welche für jeden Werth des Azimuthes gelten, und wobei es sich nur noch um die Bestimmung der Grösse $\lambda = \frac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha$ handelt. Mit Weglassung des Gliedes $\frac{k}{\sin \varphi}$ geben aber die Glgn. (240) die von dem Einflusse der Collimation

und Neigung befreite Sternzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden, also die in Gl. (230) oder (233) mit T_o beziehungsweise T_w bezeichneten Zeiten. Durch Subtraction zweier zu entgegengesetzten Kreislagen gehörigen Gleichungen erhält man daher, übereinstimmend mit Gl. (241):

$$\frac{1}{2} (T_w - T_o) = \frac{1}{2} [(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)] + \frac{\frac{1}{2} (i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta}$$

und durch Addition:

$$\frac{1}{2} (T_o + T_w) = \frac{1}{2} [(u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)] \mp \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} + \frac{\frac{1}{2} (i_w - i_o)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gl. (232):

$$\lambda = \frac{1}{2} [(u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)] - \alpha + \frac{\frac{1}{2} (i_w - i_o) \cos \zeta \mp c}{\sin \varphi \sin \zeta}, \quad (247)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern in Ost bei Kr. N. oder Kr. S. beobachtet ist.*) Berücksichtigt man nun, dass die Grösse $\lambda = \frac{1}{2} (T_o + T_w) - \alpha$ stets klein ist und nur der Cosinus derselben in die Gleichung (230) oder (233) eingeht, so kann man, mit Vernachlässigung des von c und i abhängigen Gliedes, genügend genau:

$$\lambda = \frac{1}{2} [(u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)] - \alpha \quad (248)$$

setzen und daher die zur Berechnung von φ dienenden Formeln, analog jenen (244*), in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} [(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)], \\ \lambda &= \frac{1}{2} [(u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)] - \alpha, \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} \delta \sec \Theta \cos \lambda, \\ \varphi &= \varphi' + \frac{1}{2} (i_o + i_w), \end{aligned} \quad (249)$$

in welchen durch den Hinzutritt des Factors $\cos \lambda$ dem Einflusse des Azimuthes des Instrumentes Rechnung getragen ist, und welche, wenn λ so klein, dass $\cos \lambda = 1$ wird, wieder in jene (244*) übergehen.

Die Grösse λ ist übrigens nichts anderes, als der genäherte Werth des Stundenwinkels m des nördlichen Poles des grössten Kreises des Instrumentes, d. i. des Punctes N (Fig. 92), in welchem die gegen Nord verlängerte Drehungsaxe des Fernrohres die Himmelskugel trifft. Denn mit Beibehaltung der obigen Bedeutung von T_o und T_w geben die Glgn. (240): $\mathcal{S}_o = T_o - \frac{k}{\sin \varphi}$

und $\mathcal{S}_w = T_w - \frac{k}{\sin \varphi}$, aus welchen durch Addition, da $\frac{1}{2} (\mathcal{S}_o + \mathcal{S}_w) = \alpha$ ist:

$$\frac{k}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} (T_o + T_w) - \alpha = \lambda$$

folgt. Aus den zwei letzten der Glgn. (236) folgt aber für $i = o$: $\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg} k}{\sin \varphi}$,

*) Wird der Stern in Ost und West in derselben Kreislage beobachtet, so verschwindet c aus den Ausdrücken von $\frac{1}{2} (T_o + T_w)$ und λ .

oder, wenn k klein ist, : $m = \frac{k}{\sin \varphi}$, und es ist daher :

$$m = \frac{k}{\sin \varphi} = \lambda, \quad (250)$$

wo λ durch die Gl. (247), oder wenn c unbekannt, näherungsweise durch Gl. (248) bestimmt ist. Die Beziehung $m = \lambda$ gilt strenge, wenn nebst i auch $c = 0$ ist. Denn in diesem Falle geht die Gl. (234), weil, je nachdem der Stern in West oder Ost steht, $A \pm 90^\circ = 180 + k$, also $\cotg A = -\tg k$ wird, über in : $\tg k = \sin \varphi \tg \lambda$, welche Gleichung, mit der oben aus (236) erhaltenen : $\tg k = \sin \varphi \tg m$ verbunden, $\tg m = \tg \lambda$, also $m = \lambda$ gibt.

Setzt man in der vorletzten der Glgn. (249) $\cos \lambda = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} \lambda^2$, und

$$\tg \varphi_0 = \tg \delta \sec \Theta,$$

so kommt :

$$\tg \varphi' - \tg \varphi_0 = \frac{\sin(\varphi' - \varphi_0)}{\cos \varphi' \cos \varphi_0} = -2 \tg \varphi_0 \sin \frac{1}{2} \lambda^2.$$

oder, da, wenn λ klein, sehr nahe $\varphi' = \varphi_0 = \varphi$ ist :

$$\varphi' = \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \lambda^2,$$

folglich, mit Rücksicht auf Gl. (250) :

$$\varphi' = \varphi_0 - \frac{1}{2} k^2 \cotg \varphi,$$

oder in Bogensekunden :

$$\varphi' = \varphi_0 - \frac{1}{2} k^2 \sin 1'' \cotg \varphi,$$

wo k in Bogensekunden auszudrücken ist. Das zweite Glied rechter Hand gibt den Fehler, welcher durch das Azimuth des Instrumentes in Folge der in den Glgn. (240) vernachlässigten höheren Potenzen desselben in der nach Gl. (244) oder (244*) berechneten Polhöhe entsteht; er erreicht, für $\varphi = 50^\circ$, den Betrag von $0''.01$ für $k = 70''.1$ und nimmt mit k in quadratischem Verhältnisse zu.

209. Wir haben bisher angenommen, dass der Stern in Ost und West am Mittelfaden beobachtet wurde; zur Erhöhung der Genauigkeit werden aber auch die Durchgänge des Sternes an den Seitenfäden beobachtet, und es wird daher erforderlich, die an letzteren beobachteten Antrittszeiten auf den Mittelfaden zu reduciren.

Für den Durchgang des Sternes durch den Mittelfaden besteht die aus dem Dreiecke *NPS* (Fig. 92) folgende Gleichung (238) bzw. (238*) :

$$-\sin c = \sin \delta \sin n - \cos \delta \cos n \cos(t \pm m),$$

wo t der Stundenwinkel am Mittelfaden und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Stern in Ost oder West beobachtet wird.

Sei nun f der Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden, positiv, wenn ersterer nördlich von letzterem, so wird für den Antritt des Sternes am Seitenfaden in dem Dreiecke *NPS* die Seite $NS = 90^\circ + c - f$, wodurch obige

Gleichung, wenn t' den Stundenwinkel am Seitenfaden bedeutet, in folgende übergeht:

$$\sin(f - c) = \sin \delta \sin n - \cos \delta \cos n \cos(t' \pm m).$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraction:

$$\sin(f - c) + \sin c = \cos \delta \cos n [\cos(t \pm m) - \cos(t' \pm m)],$$

oder:

$$2 \sin \frac{1}{2} f \cos(\frac{1}{2} f - c) = 2 \cos \delta \cos n \sin [\frac{1}{2}(t + t') \pm m] \sin \frac{1}{2}(t' - t).$$

Da nun c immer nur wenige Bogensekunden betragen und $\frac{1}{2} f$ nicht leicht $6'$ überschreiten wird, kann $\cos(\frac{1}{2} f - c) = \cos \frac{1}{2} f$ gesetzt werden, wodurch die linke Seite der Gleichung $= \sin f$ wird. Ferner ist, je nachdem der Stern in Ost oder West, $t' - t = l$ oder $t - t' = l$ die gesuchte Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden und man hat daher aus der letzten Gleichung:

$$\sin \frac{1}{2} l = \pm \frac{\sin f}{2 \cos \delta \cos n \sin [\frac{1}{2}(t + t') \pm m]}.$$

Die Grössen n und m lassen sich durch i und k ausdrücken. Aus der 1^{ten} der Gln. (236) folgt nämlich, wenn man, was hier immer zulässig, $\cos k = 1$ setzt: $\sin n = \cos(\varphi - i)$, also $\cos n = \sin(\varphi - i)$, und nach Gl. (250) ist, hinreichend genau, $m = \frac{k}{\sin \varphi}$. Da jedoch das Azimuth k des

Instrumentes zur Zeit der Beobachtung mit der für die vorliegende Aufgabe erforderlichen Schärfe nicht immer bekannt ist und überdies behufs Ableitung der Stundenwinkel t, t' aus den beobachteten Uhrzeiten eine genaue Kenntniss des Uhrstandes erfordert wird, so ist es vortheilhaft, die Formel von diesen Elementen unabhängig zu machen, was auf mehrfache Weise geschehen kann.

Eliminirt man zunächst den Stundenwinkel t' am Seitenfaden mittelst der Gleichungen: $t' = t + l$ oder $t' = t - l$, je nachdem der Stern in Ost oder West, so kommt:

$$\sin \frac{1}{2} l = \pm \frac{\sin f}{2 \cos \delta \sin(\varphi - i) \sin(t \pm m \pm \frac{1}{2} l)}. \quad (a)$$

Zufolge der Gln. (247) und (250) ist aber:

$$m = \frac{1}{2} [(u_o + \Delta u_o) + (u_w + \Delta u_w)] - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \xi \mp c}{\sin \varphi \sin \xi},$$

wobei u_o und u_w die Uhrzeiten des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden und α die Rectascension bedeuten; da ferner für Stern Ost:

$$t = \alpha - (u_o + \Delta u_o),$$

für Stern West:

$$t = (u_w + \Delta u_w) - \alpha$$

ist, so wird:

$$t \pm m = \frac{1}{2} [(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)] \pm \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \xi \mp c}{\sin \varphi \sin \xi}.$$

Setzt man also:

$$\Theta = \frac{1}{2} [(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)], \quad (251)$$

$$\eta = \Theta \pm \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \zeta \mp c}{\sin \varphi \sin \zeta}, \quad (252)$$

so wird:

$$\sin \frac{1}{2} l = \pm \frac{\sin f}{2 \cos \delta \sin(\varphi - i) \sin(\eta \pm \frac{1}{2} l)}, \quad (253)$$

wo Θ die halbe beobachtete Zwischenzeit des östlichen und westlichen Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet.

In dem Ausdrücke von η gilt für das auf Θ folgende Correctionsglied das obere Zeichen für den östlichen, das untere für den westlichen Durchgang, und von den beiden Zeichen von c das obere oder untere, je nachdem der Stern in Ost bei Kreis Nord oder bei Kreis Süd beobachtet wurde.*) Die Differenz der Neigungen $\frac{1}{2}(i_w - i_o)$ ist wegen Ungleichheit der Zapfenhalbmesser, im Falle diese merklich ist, zu verbessern.

In der letzten Gleichung (253) gelten die oberen Zeichen für Stern Ost, die unteren für Stern West, und ist für südliche Fäden f negativ zu nehmen, wodurch auch l das Zeichen wechselt. Da übrigens das Zeichen, mit welchem die Reduction l an der am Seitenfaden beobachteten Zeit anzubringen ist, um die auf den Mittelfaden reducirte Zeit zu erhalten, nicht zweifelhaft ist, so kann man obige Formel, f und l stets positiv betrachtend, auch in der Form:

$$\sin \frac{1}{2} l = \frac{\sin f}{2 \cos \delta \sin(\varphi - i) \sin(\eta \pm \frac{1}{2} l)} \quad (254)$$

schreiben, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der Seitenfaden nördlich oder südlich vom Mittelfaden. Zur Substitution im Nenner des zweiten Theiles der Gleichung erhält man einen genäherten Werth von l aus den Beobachtungen selbst durch Subtraction der am Seiten- und Mittelfaden beobachteten Zeiten. Ist $\varphi - \delta$ nicht sehr klein, so genügt es, im Nenner $\sin \varphi$ statt $\sin(\varphi - i)$ zu setzen.

Die Berechnung von l wird bequemer, wenn man, was immer zulässig, $\sin f = f = 15^s \sin 1''$ setzt, wo f^s die Fadendistanz in Zeitsecunden ausgedrückt bedeutet, und überdies, um auch l sofort in Zeitsecunden zu erhalten, die Näherungsformel: $\sin x = x \sqrt[3]{\cos x}$ **) benützt, also

*) Hiebei ist vorausgesetzt, dass der Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet wurde; erfolgen beide Beobachtungen in derselben Kreislage, so verschwindet c aus dem obigen Ausdrücke von m und aus Gl. (252).

$$**) \text{ Es ist nämlich: } \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{120} x^4 - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \dots$$

$$\sqrt[3]{\cos x} = 1 - \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{72} x^4 - \dots$$

folglich $\frac{\sin x}{x} = \sqrt[3]{\cos x} = \frac{1}{45} x^4 + \dots$, oder $\sin x = x \sqrt[3]{\cos x} + \frac{1}{45} x^5 + \dots$ Setzt

$$\sin \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} l \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} l} = \frac{1}{2} 15 l^s \sin 1'' \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} l}$$

setzt; hiemit wird:

$$l^s = \frac{f^s}{\cos \delta \sin(\varphi - i) \sin(\gamma \pm \frac{1}{2} l) \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} l}} \quad (255)$$

Der Factor $\sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} l}$ wird meist so nahe $= 1$, dass man ihn vernachlässigen kann; im Gegenfalle bildet man den Logarithmus desselben und dessen dekadische Ergänzung leicht im Kopfe, und legt letztere zu dem ohne Rücksicht auf diesen Factor berechneten Werth von l^s hinzu.

Man kann der Gl. (253), sowie ähnlich geformten, noch eine andere zur numerischen Rechnung bequeme Gestalt geben. Setzt man:

$$F = \frac{\sin f}{\cos \delta \sin(\varphi - i) \sin 1''} = \frac{15 f^s \sin 1''}{\cos \delta \sin(\varphi - i) \sin 1''},$$

also:

$$F = \frac{15 f^s}{\cos \delta \sin(\varphi - i)}, \quad (256)$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$2 \sin \frac{1}{2} l \sin(\gamma \pm \frac{1}{2} l) = \pm F \sin 1'',$$

woraus man nach Auflösung des $\sin(\gamma \pm \frac{1}{2} l)$ und Substitution von $1 - \cos l$ für $2 \sin \frac{1}{2} l^2$:

$$\cos(\gamma \pm l) = \cos \gamma - F \sin 1'', \quad (b)$$

und endlich, für die Cosinus die Sinus der halben Winkel einführend:

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}(\gamma \pm l)^2}{\sin 1''} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} + F \quad (257)$$

erhält, wo das obere Zeichen für Stern Ost, das untere für Stern West gilt, und F für nördliche Fäden positiv, für südliche negativ zu nehmen ist.

Die Rechnung erfolgt in der Art, dass man zunächst für die einzelnen Seitenfäden die Werthe von F nach (256) berechnet, sodann mit dem Argumente γ in Zeit den $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''}$ der mehrerwähnten Hilfstafel für $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ entnimmt,*) und die diesem Logarithmus entsprechende Zahl mit den Werthen

man daher $\sin x = x \sqrt[3]{\cos x}$, so wird der Fehler dieser Gleichung, in Bogensekunden ausgedrückt, $= + \frac{1}{45} x^5 \sin 1''^4 + \dots$, also z. B. für $x = 4^\circ$: $+ 0''.0076$, für $x = 10^\circ$: $+ 0''.742$, und bleibt daher, da der Winkel $x = \frac{1}{2} l$ im äussersten Falle 2° nur wenig überschreiten kann, ganz unmerklich.

*) Die 2te Auflage des Werkes: „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen von Prof. Dr. Th. Albrecht“, Leipzig 1879, enthält eine sechsstellige Tafel für $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ von $t = 30''$ bis $t = 2'$, eine fünfstellige Tafel für dieselbe Grösse von $t = 0$ bis $t = 30''$, sowie eine Tafel für die Zahlenwerthe $\frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ von $t = 0$ bis $20''$, welche Tafeln für alle Fälle genügen, so lange $\varphi - \delta$ kleiner als 4° .

von F durch Addition (bei nördlichen Fäden) oder Subtraction (bei südlichen Fäden) verbindet, und endlich, mit den Logarithmen der so erhaltenen Summen bzw. Differenzen als Argument abermals in die Hilfstafel eingehend, derselben die Werthe von $\eta \pm l$ in Zeit entnimmt, aus welchen sich durch Verbindung mit η sofort die Werthe von l in Zeit ergeben.

Die Benützung der vorstehenden Formeln setzt voraus, dass behufs Bildung der Grösse Θ der Stern in Ost und West am Mittelfaden beobachtet sei. Ist dies nicht der Fall, oder will man überhaupt die Reduction auf den Mittelfaden unabhängig von beobachteten Durchgängen berechnen, so kann man, wieder von der obigen Gleichung (a) ausgehend, statt der beobachteten Zwischenzeit Θ den Stundenwinkel σ des Sternes im ersten Vertical einführen.

Aus den Glgn. (238) und (238*) folgt nämlich:

$$\cos(t \pm m) = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n + \frac{\sin c}{\cos \delta \cos n},$$

wobei im 2^{ten} Gliede rechts ohne merklichen Fehler c statt $\sin c$ und $\sin \varphi$ statt $\cos n$ gesetzt werden kann. Durch Division der 1^{ten} und 3^{ten} der Glgn. (237) erhält man aber mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von i :

$$\frac{\operatorname{tg} n}{\cos m} = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\sin \varphi - i \cos \varphi} = \operatorname{cotg} \varphi + i \operatorname{cosec} \varphi^2,$$

somit, da $\cos m$ nahe $= 1$, und daher dieser Factor in dem sehr kleinen von i abhängigen Gliede weggelassen werden kann:

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{cotg} \varphi \cos m + i \operatorname{cosec} \varphi^2. \quad (258)$$

$$\text{Setzt man nun } \cos m = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} m^2 = 1 - \frac{1}{2} m^2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{\sin \varphi^2},$$

so wird:

$$\cos(t \pm m) = \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \varphi + \frac{i \operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi^2} + \frac{c}{\sin \varphi \cos \delta} - \frac{1}{2} k^2 \frac{\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi^2}.$$

Es ist aber $\operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \varphi = \cos \sigma$, wenn σ den Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical bedeutet, folglich, wenn man:

$$t \pm m = \gamma$$

setzt und die Differenz $\cos \gamma - \cos \sigma$ in ein Product umformt:

$$2 \sin \frac{1}{2} (\sigma + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\sigma - \gamma) = \frac{i \operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi^2} + \frac{c}{\sin \varphi \cos \delta} - \frac{1}{2} k^2 \frac{\cos \sigma}{\sin \varphi^2}.$$

Da nun der zweite Theil dieser Gleichung, also auch $\frac{1}{2} (\sigma - \gamma)$ sehr klein ist, so kann man $\sigma - \gamma$ statt $2 \sin \frac{1}{2} (\sigma - \gamma)$ und $\sin \sigma$ statt $\sin \frac{1}{2} (\sigma + \gamma)$ setzen und erhält dadurch:

$$\gamma - \sigma = - \frac{1}{\sin \varphi \cos \delta \sin \sigma} \left(\frac{i \sin \delta}{\sin \varphi} + c \right) + \frac{1}{2} k^2 \sin 1'' \frac{\operatorname{cotg} \sigma}{\sin \varphi^2},$$

folglich mit Rücksicht auf Gl. 3) und 4) [S. 204]:

$$\gamma = t \pm m = \sigma - \frac{i \cos \xi + c}{\sin \varphi \sin \xi} + \frac{1}{2} k^2 \sin 1'' \frac{\cotg \sigma}{\sin \varphi^2},$$

in welchem Ausdrucke, in Folge seiner Ableitung aus den für Kreis Nord geltenden Gln. (238) und (238*), c bei Kreis Süd mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen ist und das vom Azimuthe k abhängige Glied vernachlässiget werden kann, da dessen Einfluss nur merklich wird, wenn k ungewöhnlich gross und $\varphi - \delta$ sehr klein ist. So wird z. B. für $\varphi = 50^\circ$, $\delta = 49^\circ 45'$, also $\varphi - \delta = 15'$: $\sigma = 7^\circ 36' 48''$, und hiemit für $k = 2' = 120''$, dieses Glied $= 0''.445$, dessen Vernachlässigung in dem für $f = -12' = -48^s$ berechneten Werthe von $l = 16^m 50^s.5$ den Fehler $dl = -0^s.037$ erzeugt, welcher wie das Quadrat von k abnimmt, und daher für kleinere Werthe von k stets unmerklich bleibt.

Man hat daher:

$$\gamma = \sigma - \frac{i \cos \xi \pm c}{\sin \varphi \sin \xi}, \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ Kr. Nord} \\ - \text{ Kr. Süd} \end{array} \right. \quad (259)$$

wo σ aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}$$

zu berechnen ist, und mit diesem Werthe von $\gamma = t \pm m$ zufolge der Gl. (a):

$$\sin \frac{1}{2} l = \frac{\sin f}{2 \cos \delta \sin(\varphi - i) \sin(\gamma \pm \frac{1}{2} l)}, \quad (260)$$

oder:

$$l^s = \frac{f^s}{\cos \delta \sin(\varphi - i) \sin(\gamma \pm \frac{1}{2} l) \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} l}}, \quad (261)$$

in welchen Gleichungen das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Fäden gilt, und statt welchen wieder wie oben die folgenden angewendet werden können:

$$F = \frac{15 f^s}{\cos \delta \sin(\varphi - i)}, \quad (262)$$

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} (\gamma \pm l)^2}{\sin 1''} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} + F,$$

wo das obere Zeichen für Stern Ost, das untere für Stern West gilt, und F für südliche Seitenfäden negativ zu nehmen ist.

Man kann die Reduction auf den Mittelfaden auch in Form einer Reihe darstellen, indem man von der oben [S. 469] erhaltenen Gl. (b):

$$\cos(\eta \pm l) = \cos \eta - F \sin 1''$$

ausgeht, welche die Form der Gl. (a) in §. 191 hat und daher auf gleiche Weise in eine Reihe entwickelt werden kann. Setzt man a. a. O.: $\varepsilon = \eta \pm l$,

$\xi = \eta$ und $h = F \sin 1'' = \frac{\sin f}{\cos \delta \sin(\varphi - i)}$ oder genügend genau:

$$h = \frac{f}{\cos \delta \sin \varphi},$$

so erhält man, bis zur 3^{ten} Potenz von f gehend, zufolge der Gl. (b) [§. 191]:

$$\begin{aligned} \pm l = & \frac{f}{\cos \delta \sin \varphi \sin \eta} - \frac{1}{2} \left(\frac{f}{\cos \delta \sin \varphi \sin \eta} \right)^2 \cotg \eta + \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{f}{\cos \delta \sin \varphi \sin \eta} \right)^3 (1 + 3 \cotg \eta^2), \end{aligned}$$

wo linker Hand das obere Zeichen für Stern Ost, das untere für Stern West gilt und für südliche Seitenfäden f negativ zu nehmen ist. Drückt man die hier noch in Bogenmass zu verstehenden Grössen f und l in Zeitsecunden aus, so hat man mit Weglassung des doppelten Zeichens von l und der Kürze wegen:

$$f_0 = \frac{f^s}{\cos \delta \sin \varphi \sin \eta}$$

setzend:

$$l^s = f_0 - \frac{15 \sin 1''}{2} f_0^2 \cotg \eta + \frac{(15 \sin 1'')^2}{6} f_0^3 (1 + 3 \cotg \eta^2),$$

oder:

$$l^s = f_0 - (5.56064 - 10) f_0^2 \cotg \eta + (0.9452 - 10) f_0^3 (1 + 3 \cotg \eta^2), \quad (263)$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Für südliche Fäden wird f_0 negativ und sind dann alle drei Glieder zu addiren.

Der Winkel η ist durch die Gl. (252) bestimmt und kann auch durch den Winkel γ [Gl. (259)] ersetzt werden, oder, mit Vernachlässigung der von der Neigung der Axe und Collimation abhängigen Correctionsglieder, durch einen der Winkel Θ oder σ . Man kann sich dieser Reihe mit einigem Vortheil, gegenüber den obigen geschlossenen Formeln bedienen, so lange $\varphi - \delta$ nicht kleiner als etwa $1^\circ 30'$ ist; für kleinere Werthe von $\varphi - \delta$ würde wenigstens bei den vom Mittelfaden entfernten Seitenfäden das Glied 4^{ter} Ordnung:

$$\begin{aligned} & - \frac{(15 \sin 1'')^3}{8} f_0^4 \cotg \eta (3 + 5 \cotg \eta^2) \\ & (6.6820 - 20) \end{aligned}$$

noch mitzunehmen sein, ja selbst dieses, wenn $\varphi - \delta$ sehr klein wird, nicht mehr ausreichen.

Lässt man in Gl. (263) σ , d. i. den Stundenwinkel im ersten Vertical an die Stelle von η treten und setzt zur Abkürzung:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}},$$

so wird zufolge der Gln. 9) und 10) [§. 204]: $f_0 = f^s N$, $\cotg \sigma = N \cos \varphi \sin \delta$, und man erhält, mit Weglassung des Gliedes 3^{ter} Ordnung, die von Hansen gegebene Formel:

$$l^s = f^s N - (5.56064 - 10) (f^s N)^2 N \cos \varphi \sin \delta, \quad (264)$$

deren man sich bedienen kann, sobald $\varphi - \delta$ grösser als 5° ist. Solche Sterne werden mit Vortheil zur genaueren Bestimmung des Azimuthes des Instrumentes beobachtet. [S. §. 216.]

Zur Uebersicht sind in der folgenden Tabelle die Werthe der Glieder der 3^{ten} und 4^{ten} Ordnung der Gl. (263) angeführt, berechnet für $\varphi = 50^\circ$ und $f = 10' = 40''$.

$\varphi - \delta$	Glied 3. Ordn.	Glied 4. Ordn.
0° 15'	33 ^s .83	14 ^s .11
0 30	5.96	1.24
0 45	2.15	0.30
1 0	1.05	0.11
1 30	0.38	0.026
2 0	0.18	0.010
3 0	0.066	0.002
4 0	0.032	0.001
5 0	0.018	—

Die in den vorstehenden Formeln erscheinenden, durch die Glgn. (252), bzw. (259) bestimmten Winkel η und γ erhalten selbstverständlich denselben Werth, wenn die Winkel Θ , bzw. σ fehlerfrei sind, und die Genauigkeit, mit welcher die Formeln die Reduction auf den Mittelfaden ergeben, hängt, abgesehen von einem Fehler in der angenommenen Fadendistanz f , lediglich von der Genauigkeit ab, mit welcher die Winkel Θ oder σ aus den gegebenen Elementen sich bestimmen. Der Winkel Θ ist mit den zufälligen Beobachtungsfehlern der Fadenantritte am Mittelfaden behaftet, während zur Bestimmung des Winkels σ , nebst einem genauen Werthe von δ , ein schon nahe richtiger Werth von φ erfordert wird, weil ein Fehler in den angenommenen Werthen von φ und δ einen erheblich grösseren Fehler in σ erzeugt, wie aus der aus Gl. 1) [§. 204] folgenden Gleichung:

$$d\sigma = \frac{2 \cotg \sigma}{\sin 2 \varphi} d\varphi - \frac{2 \cotg \sigma}{\sin 2 \delta} d\delta$$

erhellt, da $\cotg \sigma$ stets mehrmals grösser ist als die Einheit und mit abnehmendem Werthe von $\varphi - \delta$ rasch zunimmt. Es ist jedoch immer leicht, durch provisorische Berechnung einer oder mehrerer Beobachtungen, selbst nur mit Benützung der Durchgänge durch den Mittelfaden, einen zu diesem Zwecke hinreichend genauen Werth von φ sich zu verschaffen.

Die von i und c abhängigen Correctionsglieder der Winkel Θ und σ in den Ausdrücken (252) und (259) können, auch wenn i und c sehr klein sind, des kleinen Nenners wegen merkliche Werthe erlangen. Der von der

Neigung i abhängige Theil kann, da diese bekannt, wenn erforderlich, immer berücksichtigt werden; was aber den Collimationsfehler betrifft, so bleibt derselbe bei einem gut construirten Instrumente erfahrungsmässig durch längere Zeit nahe constant, und kann daher, wenn er durch sorgfältige Berichtigung nahe weggeschafft wurde, meist ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden, oder es wird, wenn man ihn von Zeit zu Zeit durch Beobachtungen bestimmt, stets ein für den vorliegenden Zweck genügend genauer Werth zur Verfügung stehen. Im Allgemeinen wird das Correctionsglied von Θ , da in demselben nur die halbe Differenz der Neigungen, $\frac{1}{2}(i_w - i_o)$, erscheint, stets beträchtlich kleiner sein, als jenes des Winkels σ und erhält für St. O. und St. W. denselben Zahlenwerth mit entgegengesetztem Zeichen, was bei jenem von σ nicht der Fall ist.

Der Einfluss eines Fehlers in den Winkeln η oder γ auf den berechneten Werth von l ist übrigens durch die Gleichung:

$$\frac{dl}{d\eta} = \frac{dl}{d\gamma} = - \frac{\sin f}{\sin \varphi \cos \delta} \frac{\cotg(\sigma \pm \frac{1}{2}l)}{\sin(\sigma \pm \frac{1}{2}l)}$$

gegeben, welche durch Differenziation der Gl. (254) oder (260) leicht erhalten wird, wobei im zweiten Factor rechter Hand σ statt η oder γ gesetzt ist und das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Seitenfäden gilt.

Zur Uebersicht sind in der folgenden Tabelle die Werthe dieser Differenzialquotienten für $\varphi = 50^\circ$ und einen Seitenfaden, dessen südlicher Abstand vom Mittelfaden $f = 12'$ ist, für verschiedene Werthe von $\varphi - \delta$ zusammengestellt, und die Werthe von σ und l , sowie des Factors $\frac{1}{\sin \varphi \sin \zeta}$, mit welchem der Zähler der Correctionsglieder in Gl. (252) und (259) zu multipliciren ist, beigefügt.

$\varphi - \delta$	σ	l	$\frac{dl}{d\eta} = \frac{dl}{d\gamma}$	$\frac{1}{\sin \varphi \sin \zeta}$
$0^\circ 15'$	$7^\circ 36' 48''$	$16^m 50^s.5$	- 1.2320	15.249
0 30	10 44 50	9 42.6	0.2887	10.779
0 45	13 8 18	7 34.6	0.1657	8.798
1 0	15 8 38	6 25.6	0.1160	7.617
1 30	18 28 52	5 8.7	0.0723	6.215
2 0	21 15 54	4 24.8	0.0522	5.379
2 30	23 41 32	3 54.9	0.0408	4.809
3 0	25 51 54	3 34.0	0.0333	4.388
3 30	27 50 36	3 17.6	0.0281	4.060
4 0	29 40 2	3 4.4	- 0.0242	3.797

Man ersieht hieraus, dass, so lange $\varphi - \delta$ nicht unter 2° bis $1^\circ.5$ sinkt, die erforderliche Genauigkeit in der Bestimmung von l unschwer zu erreichen ist, und selbst das Correctionsglied in (252) oder (259), wenn i

und c sehr klein, vernachlässigt werden kann, weil in diesem Falle der hieraus entspringende Fehler in l im Vergleiche zu den unvermeidlichen zufälligen Beobachtungsfehlern in den beobachteten Fadenantritten stets sehr klein bleibt, namentlich für die dem Mittelfaden näher stehenden Seitenfäden; bei kleineren Werthen von $\varphi - \delta$ empfiehlt es sich allerdings, den Winkel η oder γ so genau als möglich zu bestimmen.

Ein Fehler in den Winkeln η oder γ bewirkt übrigens, wie ein Blick auf die entwickelten Formen zeigt, dass die Werthe von l für sämtliche Seitenfäden entweder zu gross oder zu klein erhalten werden, und zwar, so lange $\varphi - \delta$ nicht zu klein ist, nahe um denselben Betrag für je zwei zu beiden Seiten des Mittelfadens in gleichen Abständen befindliche Seitenfäden. Da nun die Werthe von l an die beobachteten Uhrzeiten für die dem Mittelfaden vorausgehenden und die demselben folgenden Seitenfäden mit entgegengesetztem Zeichen anzubringen sind, so werden die aus einem kleinen Fehler in η oder γ entspringenden Fehler von l sich im Mittel aus sämtlichen Fäden sehr nahe aufheben und daher der mit diesen für St. O. und St. W. erlangten Mitteln berechnete Werth von φ frei sein von dem Einflusse dieser Fehler, wenn das Fadennetz zu beiden Seiten des Mittelfadens nahe symmetrisch ist, und, im Falle der Durchgang an einem Seitenfaden nicht beobachtet worden wäre, auch der an dem auf der anderen Seite des Mittelfadens in gleichem Abstände liegenden Seitenfaden beobachtete Durchgang vom Mittel ausgeschlossen wird. Nur in dem Falle, wenn man für jeden einzelnen Faden aus der Differenz der an demselben in Ost und West beobachteten und auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten $u_w - u_o$ die Polhöhe ableiten wollte, würden die in Rede stehenden Fehler eine minder gute Uebereinstimmung der einzelnen Werthe von φ , und daher auch z. B. bei Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers des Mittels, wobei gleichfalls die aus den einzelnen Fäden folgenden Differenzen $u_w - u_o$ in Anspruch genommen werden, einen zu grossen Werth desselben zur Folge haben.

Wesentlich ist aber eine möglichst genaue Kenntniss der Fadendistanzen f ; man kann dieselben leicht aus einer grösseren Anzahl von im ersten Vertical beobachteten Sterndurchgängen bestimmen; durch Subtraction der am Mittelfaden und an den Seitenfäden beobachteten Uhrzeiten ergeben sich die Werthe von l , aus welchen mittelst der vorstehenden Gleichungen, durch Auflösung nach f , die Werthe von f erhalten werden, wobei die Werthe der Winkel η oder γ so genau als möglich zu bestimmen sind.

210. Beispiel. 1864, September 26, wurde auf dem astronomisch-trigonometrischen Punkte: Hohe Schneeberg bei Bodenbach in Böhmen mit einem Repsold'schen Passage-Instrumente folgende Beobachtung des Sternes α Persei im ersten Vertical gemacht:

Faden *)	St. O. K. N.	St. W. K. S.
I	1 ^h 56 ^m 14 ^s .0	4 ^h 20 ^m 11 ^s .0
II	57 9.6	21 13.0
III	58 2.5	22 11.5
IV	59 0.0	23 13.3
V	2 0 1.5	24 16.8
VI	1 0.6	25 16.9
VII	2 2.7	26 18.1
VIII	3 0.2	27 13.0
IX	4 2.3	28 11.3
X	4 58.5	29 2.9
XI	2 5 57.7	4 29 55.4

$$\text{Neigung: } i_o = -6''.842 \quad i_w = -8''.146$$

$$\text{Uhrstand: } \Delta u_o = +1^m 34^s.18 \quad \Delta u_w = +1^m 34^s.41$$

Der scheinbare Ort des Sternes war:

$$\alpha = 3^h 14^m 43^s.43, \delta = +49^\circ 22' 30''.00.$$

Zur Reduction der Beobachtungen nehmen wir an:

$$\varphi = 50^\circ 47' 36''; c = +1''.5$$

und finden mittelst der Formeln 4) und 7) [S. 204]:

$$\log \cos \zeta = 9.9910, \log \sin \varphi \sin \zeta = 9.1933$$

$$\log \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta = 9.2023.$$

Die angegebenen Uhrstände beziehen sich auf die am Mittelfaden VI in Ost und West beobachteten Uhrzeiten.

Die Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden wollen wir mittelst der Gl. (256) berechnen, zu welchem Zwecke zunächst der Winkel η nach den Formeln (251) und (252) zu bestimmen ist. Wir haben als Uhrzeiten am Mittelfaden:

$$\begin{array}{r} u_o = 2^h 1^m 0^s.6 \\ u_w = 4 25 16.9 \\ u_w - u_o = 2 24 16.3 \\ \Delta u_w - \Delta u_o = + 0.23 \\ 2\Theta = 2 24 16.53 \\ \Theta = 1 12 8.26 \\ \\ \log 15 = 1.176091 \\ \log \sin \varphi = 9.889229 \\ \log \cos \delta = 9.813651 \\ \log \frac{15}{\sin \varphi \cos \delta} = 1.473211 \end{array} \quad \begin{array}{r} i_w - i_o^{**}) = -1''.304 \\ \frac{1}{2}(i_w - i_o) = -0.652 \\ 9.8142 n \\ \log \cos \zeta = 9.9910 \\ 9.8052 n \\ \frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \zeta = -0.639 \\ -c = -1.500 \\ \\ -2.139 \\ 0.3302 n \\ \log \sin \varphi \sin \zeta = 9.1933 \\ 1.1369 n \\ \text{Corr. Glied} = -13''.7 = -0^s.91 \end{array}$$

*) Die Bezeichnung der Fäden mit I., II. . . . XI. entspricht der Reihenfolge, in welcher dieselben bei Kreis Nord von einem Sterne in Osten angetreten werden.

**) Die Zapfengleichung war an dem benützten Instrumente = 0, daher die Differenz $i_w - i_o$ keine Correction erfordert.

St. O. $\eta = \Theta - 0^s.91 = 1^h 12^m 7^s.35$

St. W. $\eta = \Theta + 0^s.91 = 1^h 12^m 9^s.17$

St. O. $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} = 4.005585$

St. W. „ „ „ = 4.005947

St. O. $\frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} = 10129''.43$

St. W. $\frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} = 10137''.88$

Mit diesen Grössen steht nun die Berechnung der l nach Gl. (257), mit Benützung der Albrecht'schen Hilfstafel für $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$, wie folgt:

Faden	f	$\log f^s$	$\log F'$	F'	$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} \pm F' = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\eta \pm l)^2}{\sin 1''}$	
					St. O.	St. W.
I	46 ^s .190	1.664548	3.137759	1373 ^u .28	11502 ^u .71	8764 ^u .60
II	37.089	1.569245	3.042456	1102.70	11232.13	9035.18
III	28.364	1.452767	2.925978	843.29	10972.72	9294.59
IV	19.107	1.281193	2.754404	568.07	10697.50	9569.81
V	9.333	0.970021	2.443232	277.48	10406.91	9860.40
VII	9.631	0.983671	2.456882	286.34	9843.09	10424.22
VIII	18.389	1.264558	2.737769	546.72	9582.71	10684.60
IX	27.780	1.443732	2.916943	825.93	9303.50	10963.81
X	36.205	1.558769	3.031980	1076.41	9053.02	11214.29
XI	44.861	1.651869	3.125080	1333.77	8795.66	11471.65

Faden	$\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\eta \pm l)^2}{\sin 1''}$		$\eta + l$	$\eta - l$	l	
	St. O.	St. W.			St. O.	St. W.
I	4.060800	3.942732	76 ^m 53 ^s .98	67 ^m 3 ^s .02	+ 4 ^m 46 ^s .63	+ 5 ^m 6 ^s .15
II	4.950462	3.955937	75 58.88	68 5.10	3 51.53	4 4.07
III	4.040314	3.968230	75 5.45	69 3.77	2 58.10	3 5.40
IV	4.029282	3.980903	74 8.08	70 5.15	2 0.73	2 4.02
V	4.017321	3.993895	73 6.72	71 9.03	+ 0 59.37	+ 1 0.14
VII	3.993131	4.018043	71 5.25	73 10.40	- 1 2.10	- 1 1.23
VIII	3.981488	4.028759	70 8.00	74 5.38	1 59.35	1 56.21
IX	3.968646	4.039961	69 5.77	75 3.60	3 1.58	2 54.43
X	3.956794	4.049772	68 9.17	75 55.23	3 58.18	3 46.06
XI	3.944268	4.059626	67 10.19	76 47.69	- 4 57.16	- 4 38.52

Hiemit erhält man die folgenden auf den Mittelfaden reducirten Uhrzeiten :

Faden	St. O. K. N.	St. W. K. S.
I	2 ^h 1 ^m 0 ^s .63	4 ^h 25 ^m 17 ^s .15
II	1.13	17.07
III	0.60	16.90
IV	0.73	17.32
V	0.87	16.94
VI	0.60	16.90
VII	0.60	16.87
VIII	0.85	16.79
IX	0.72	16.87
X	0.32	16.84
XI	0.54	16.88
Mittel $u_o =$	2 ^h 1 ^m 0 ^s .69	$u_w =$ 4 ^h 25 ^m 16 ^s .96

Wir finden zunächst nach Gl. (248):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_o + u_w) &= 3^h 13^m 8^s.82 \\ \frac{1}{2}(\Delta u_o + \Delta u_w) &= + 1 34.30 \\ &\quad 3 14 43.12 \\ \alpha &= 3 14 43.43 \\ \lambda &= - 0.31 = - 4''.6, \end{aligned}$$

also λ so klein,*) dass zur Berechnung von φ irgend eine der Gleichungen (244), (244*), (245) oder (246) benützt werden kann. Am einfachsten wird die Rechnung nach (244*):

$$\begin{aligned} u_o &= 2^h 1^m 0^s.69 & \log \operatorname{tg} \delta &= 0.0665832 \\ u_w &= 4 25 16.96 & \log \cos \Theta &= 9.9781216 \\ u_w^* - u_o &= 2 24 16.27 & \log \operatorname{tg} \varphi' &= 0.0884616 \\ \Delta u_w - \Delta u_o &= + 0.23 & \varphi' &= 50^\circ 47' 43''.30 \\ 2\Theta &= 2 24 16.50 & \frac{1}{2}(i_o + i_w) &= - 7.49 \\ \Theta &= 1 12 8^s.25 & \varphi' &= 50^\circ 47' 35''.81 \\ &= 18^\circ 2' 3''.75 \end{aligned}$$

Will man sich einer der Gln. (244), (245) oder (246) bedienen, so ist zunächst nach Gl. (243) die Grösse $\frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o)$ zu bilden. Man hat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(i_o + i_w) &= - 7''.494 & \frac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} &= - 47''.02 \\ \log &= 0.8747 n & \Theta &= 18^\circ 2' 3.75 \\ \log \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta &= 9.2024 & \frac{1}{2}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o) &= 18^\circ 1' 16''.73 \\ &1.6723 n & \frac{1}{4}(\mathcal{I}_w - \mathcal{I}_o) &= 9 0 38.36 \end{aligned}$$

*) Ein genauerer Werth von λ würde sich mittelst der Gl. (247) ergeben, wo der Werth des 2. von i und c abhängigen Gliedes schon oben $= - 0^s.91$ gefunden wurde; mit Berücksichtigung desselben wird $\lambda = - 0^s.31 - 0^s.91 = - 1^s.22$ womit nach Gl. (250) als genäherter Werth des Azimuthes: $k = \lambda \sin \varphi = - 0^s.945 = - 14''.2$ folgt.

Hiemit erhält man:

Nach Gl. (244):

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \delta &= 0.0665832 \\ \log \cos \frac{1}{2} (\vartheta_w - \vartheta_o) &= 9.9781538 \\ \log \operatorname{tg} \varphi &= 0.0884294 \\ \varphi &= 50^\circ 47' 35''.81 \end{aligned}$$

Nach Gl. (245):

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{4} (\vartheta_w - \vartheta_o) &= 9.194842 \\ \log \sin \varphi &= 9.889229 \\ \log \cos \delta &= 9.813651 \\ \log 2 &= 0.301030 \\ \log \sin (\varphi - \delta) &= 8.393594 \\ \varphi - \delta &= 1^\circ 25' 5''.80 \\ \delta &= 49 \quad 22 \quad 30 \quad .00 \\ \varphi &= 50^\circ 47' 35''.80 \end{aligned}$$

Nach Gl. (246):

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{4} (\vartheta_w - \vartheta_o) &= 9.200235 \\ \log \sin (\varphi + \delta) &= 9.993125 \\ \log \sin (\varphi - \delta) &= 8.393595 \\ \varphi - \delta &= 1^\circ 25' 5''.81 \\ \delta &= 49 \quad 22 \quad 30 \quad .00 \\ \varphi &= 50 \quad 47 \quad 35 \quad .81 \end{aligned}$$

Zur Rechnung nach den zwei letzten Gleichungen wurde der Werth $\varphi = 50^\circ 47' 36''$ und $\varphi + \delta = 100^\circ 10' 6''$ angenommen, und es bedarf kaum der Erwähnung, dass, wenn der resultirende Werth von φ von dem angenommenen merklich abweichen würde, die Rechnung mit ersterem zu wiederholen wäre, was insbesondere bei dem Gebrauch der Gl. (245) gilt.

Wir haben oben zur Berechnung der Reduction auf den Mittelfaden den Winkel γ benützt, zu dessen Bestimmung die beiden am Mittelfaden beobachteten Durchgangszeiten in Anspruch genommen werden. Wollte man, unabhängig von der Beobachtung, die Reduction mit Hilfe des Winkels γ (Gl. 259) berechnen, so ergibt sich derselbe auf folgende Weise:

	St. O. K. N.	St. W. K. S.
$\varphi = 50^\circ 47' 36''.0$	$i = -6''.842$	$-8''.146$
$\delta = 49 \quad 22 \quad 30 \quad .0$	$0.8352 \ n$	$0.9109 \ n$
$\varphi - \delta = 1 \quad 25 \quad 6 \quad .0$	$\log \cos \zeta = 9.9910$	9.9910
$\varphi + \delta = 100 \quad 10 \quad 6 \quad .0$	$\log i \cos \zeta = 0.8262 \ n$	$0.9019 \ n$
$\log \sin (\varphi - \delta) = 8.393611$	$i \cos \zeta = -6''.702$	$-7''.978$
$\log \sin (\varphi + \delta) = 9.993125$	$c = +1.500$	-1.500
8.400486	$i \cos \zeta \pm c = -5''.202$	$-9''.478$
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma = 9.200243$	$0.7162 \ n$	$0.9767 \ n$
$\frac{1}{2} \sigma = 9^\circ 0' 39''.0$	$\log \sin \varphi \sin \zeta = 9.1933$	-9.1933
$\sigma = 18 \quad 1 \quad 18 \quad .0$	$1.5229 \ n$	$1.7834 \ n$
$\sigma = 1^h \ 12^m \ 5^s.20$	$\text{Corr. Glied} = 33''.33$	$-60''.73$
$\text{Corr. Gl.} = -2.22$	$= -2^s.22$	$-4^s.05$
$\text{,,} = -4.05$		
$\text{St. O. } \gamma = 1^h \ 12^m \ 7^s.42$		
$\text{St. W. } \gamma = 1 \quad 12 \quad 9 \quad .25$		

Diese Werthe von γ stimmen sehr nahe mit den oben für η erhaltenen überein und würden daher für l die gleichen Werthe ergeben.

Will man auch den wahrscheinlichen Fehler des nach dieser Methode berechneten Werthes von φ ableiten, so weit derselbe nur von den zufälligen Fehlern der beobachteten Fadenantritte des Sternes abhängt, so wird man zunächst die den einzelnen Fäden entsprechenden Differenzen der auf den Mittelfaden reducirten Uhrzeiten, und die Abweichungen v derselben von ihrem arithmetischen Mittel bilden; bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler einer dieser Differenzen mit ε , jenen des arithmetischen Mittels mit r , so ist, wenn n die Anzahl der Fäden:

$$\varepsilon = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \quad r = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Sind dann $\varepsilon\varphi$ der wahrscheinliche Fehler des aus einem Faden folgenden Werthes von φ , $r\varphi$ der w. Fehler des aus dem Mittel aller Fäden abgeleiteten Werthes von φ , so hat man, zufolge der Gl. (m) [S. 462]:

$$\varepsilon\varphi = \frac{15}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta \cdot \varepsilon, \quad r\varphi = \frac{15}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta \cdot r.$$

Für das vorliegende Beispiel findet man:

$u_w - u_o$	v	vv
2 ^h 24 ^m 16 ^s .52	− 0 ^s .25	0.0625
15 .94	+ 0.33	.1089
16 .30	− 0.03	.0009
16 .59	− 0.32	.1024
16 .07	+ 0.20	.0400
16 .30	− 0.03	.0009
16 .27	0.00	.0000
15 .94	+ 0.33	.1089
16 .15	+ 0.12	.0144
16 .52	− 0.25	.0625
16 .34	− 0.07	.0049
Mittel = 2 ^h 24 ^m 16 ^s .27		[vv] = 0,5063

Hiemit erhält man:

$$\varepsilon\varphi = \pm 0''.181; \quad r\varphi = \pm 0''.055.$$

211. Zweite Methode. Der Umstand, dass bei der im Vorhergehenden dargestellten Methode der Berechnung von Beobachtungen im ersten Vertical die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden einen grösseren Müheaufwand erfordert, welcher übrigens durch die Einfachheit der Ableitung der Polhöhe aus den zwei Mitteln der auf den Mittelfaden reducirten Durchgangzeiten wieder aufgewogen wird, ausserdem aber hiezu eine genaue Kenntniss

der Fadendistanzen f erforderlich ist, macht es wünschenswerth, Methoden zu besitzen, welche weder die Reduction auf den Mittelfäden, noch die Kenntniss der Fadendistanzen erheischen.

Nehmen wir an, der Stern sei in Ost bei Kreis Nord an einem Seitenfaden beobachtet, dessen nördlicher Abstand vom Mittelfaden $= f$ ist, so dass also die Abschenlinie dieses Fadens mit dem Kreisende der Axe den Winkel $90^\circ + c - f$ bildet, so haben wir in Gl. (238 $c - f$ statt c zu setzen, wodurch die Gl. (239*) in folgende übergeht:

$$-f + c + i \cos z + k \cos \delta \sin t = \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta,$$

in welcher z und t Zenitdistanz und Stundenwinkel des Sternes am Seitenfaden bedeuten. Setzen wir $\cos t = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} t^2$, so verwandelt sich diese Gl. in folgende:

$$\sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t^2 - f + c + i \cos z + k \cos \delta \sin t.$$

Wird der Stern an demselben Faden auf der Westseite beobachtet, so ändert $\sin t$ sein Zeichen; dasselbe gilt für f und c , wenn die Beobachtung bei Kreis Süd erfolgt. Lässt man daher z_o und t_o Zenithdistanz und Stundenwinkel auf der Ostseite, z_w und t_w dieselben Grössen auf der Westseite bedeuten, so hat man für die vier möglichen Fälle folgende Gleichungen:

$$\text{St. O. K. N.: } \sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_o^2 - f + c + i_o \cos z_o + k \cos \delta \sin t_o,$$

$$\text{St. W. K. S.: } \sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_w^2 + f - c + i_w \cos z_w - k \cos \delta \sin t_w,$$

$$\text{St. O. K. S.: } \sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_o^2 + f - c + i_o \cos z_o + k \cos \delta \sin t_o, \quad (m)$$

$$\text{St. W. K. N.: } \sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_w^2 - f + c + i_w \cos z_w - k \cos \delta \sin t_w,$$

woraus erhellt, dass im Mittel aus der 1^{ten} und 2^{ten}, oder der 3^{ten} und 4^{ten} Gleichung, d. i. aus zwei an demselben Faden in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen gemachten Beobachtungen des Sternes f und c verschwinden.

Setzt man nun, unter ζ die Zenithdistanz im ersten Vertical verstanden:

$$z_o = \zeta \pm \Delta z_o, \quad z_w = \zeta \pm \Delta z_w,$$

wo die oberen Zeichen für Kreis Nord (Seitenfaden nördlich vom Mittelfaden), die unteren für Kreis Süd (Seitenfaden südlich vom Mittelfaden) gelten, so kann man, mit Rücksicht darauf, dass i stets sehr klein ist und die Differenzen Δz in den äussersten praktisch vorkommenden Fällen 4 bis 5 Grade nicht überschreiten:

$$\cos z = \cos \zeta \mp \Delta z \sin \zeta$$

setzen. Dadurch erhalten die von der Neigung abhängigen Glieder in den Gln. (m) die Form: $i \cos \zeta \mp i \Delta z \sin \zeta$, wo das 2^{te} Glied nicht nur an und für sich sehr klein ist, sondern auch zu dem arithmetischen Mittel aus der 1^{ten} und 2^{ten}, oder der 3^{ten} und 4^{ten} Gleichung nur den stets verschwindend kleinen Beitrag $\pm \frac{1}{2} (i_w \Delta z_w - i_o \Delta z_o) \sin \zeta$ liefert und daher immer vernachlässigt werden kann.

Da ferner, mit Rücksicht auf die Gl. 3) [§. 204],

$$\begin{aligned} k \cos \delta \sin t &= k \sin \zeta + k (\cos \delta \sin t - \sin \zeta) = \\ &= k \sin \zeta + k \cos \delta (\sin t - \sin \sigma) \end{aligned}$$

ist, so kann man die vom Azimuth k abhängigen Glieder der Glgn. (m) auch in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \text{St. O. K. N.:} &+ k \sin \zeta + k \cos \delta (\sin t_o - \sin \sigma), \\ \text{St. W. K. S.:} &- k \sin \zeta - k \cos \delta (\sin t_w - \sin \sigma), \\ \text{St. O. K. S.:} &+ k \sin \zeta + k \cos \delta (\sin t_o - \sin \sigma), \\ \text{St. W. K. N.:} &- k \sin \zeta - k \cos \delta (\sin t_w - \sin \sigma), \end{aligned} \quad (n)$$

Vernachlässigt man nun auch in diesen Ausdrücken das zweite mit dem Producte der kleinen Factoren k und $(\sin t - \sin \sigma)$ behaftete Glied, welches als von 2^{ter} Ordnung betrachtet werden kann, mit dem Vorbehalte, den Einfluss desselben später näher zu untersuchen, so verwandeln sich die Glgn. (m) in folgende:

$$\begin{aligned} \text{St. O. K. N.:} &\sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_o^2 - f + c + i_o \cos \zeta + k \sin \zeta, \\ \text{St. W. K. S.:} &\sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_w^2 + f - c + i_w \cos \zeta - k \sin \zeta, \\ \text{St. O. K. S.:} &\sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_o^2 + f - c + i_o \cos \zeta + k \sin \zeta, \\ \text{St. W. K. N.:} &\sin(\varphi - \delta) = \sin \varphi \cos \delta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} t_w^2 - f + c + i_w \cos \zeta - k \sin \zeta. \end{aligned} \quad (265)$$

Man ersieht hieraus, dass, wenn man den Stern in Ost und West an demselben Faden in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet, das Mittel aus den aus beiden Beobachtungen abgeleiteten Werthen von $\sin(\varphi - \delta)$ von der Fadendistanz f , dem Collimationsfehler c und dem Azimuth k , wenn letzteres so klein ist, dass der Einfluss des vernachlässigten Gliedes 2^{ter} Ordnung unmerklich wird, endlich von einem kleinen Fehler in dem angenommenen Uhrstande, weil dieser die Stundenwinkel t_o und t_w in entgegengesetztem Sinne beeinflusst, unabhängig ist, und nur der Correction wegen der Neigung der Axe:

$$= + \frac{1}{2} (i_o + i_w) \cos \zeta$$

bedarf, wobei eine etwa vorhandene Ungleichheit der Zapfendurchmesser unbeachtet bleiben kann, weil dieselbe die Neigungen i_o und i_w in gleichem Betrage und entgegengesetztem Sinne beeinflusst.

Um endlich die Differenz $\varphi - \delta$ sofort in Bogensekunden ausgedrückt zu erhalten, hat man bekanntlich:

$$x'' = \frac{\text{arc } x}{\sin 1''} = \frac{\text{arc } x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 1''}, \quad \text{somit: } \sin x = x'' \sin 1'' \cdot \frac{\sin x}{\text{arc } x},$$

also:

$$\sin(\varphi - \delta) = (\varphi - \delta)'' \sin 1'' \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\text{arc}(\varphi - \delta)}$$

Durch Substitution dieses Werthes von $\sin(\varphi - \delta)$ in die Glgn. (265) gehen dieselben, wenn zur Abkürzung:

$$C = \sin \varphi \cos \delta \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)}$$

gesetzt, und der, der Einheit stets nahe kommende Factor $\frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)}$ in den kleinen von c , i und k abhängigen Gliedern weggelassen wird, in folgende über:

$$\begin{aligned} \text{St. O. K. N.: } \varphi - \delta &= C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''} - f \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)} + c + i_o \cos \zeta + k \sin \zeta, \\ \text{St. W. K. S.: } \varphi - \delta &= C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''} + f \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)} - c + i_w \cos \zeta - k \sin \zeta, \\ \text{St. O. K. S.: } \varphi - \delta &= C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''} + f \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)} - c + i_o \cos \zeta + k \sin \zeta, \\ \text{St. W. K. N.: } \varphi - \delta &= C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''} - f \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)} + c + i_w \cos \zeta - k \sin \zeta, \end{aligned} \quad (266)$$

in welcher nunmehr $(\varphi - \delta)$, f , c , i und k in Bogensekunden zu verstehen sind.

Der Factor $\frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)}$ kann mittelst der Gleichung:

$$\frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)} = \frac{(\varphi - \delta)'' \sin 1''}{\sin(\varphi - \delta)}$$

berechnet, oder einer Hilfstafel entnommen werden, welche $\log \frac{\text{arc} x}{\sin x}$ mit dem Argumente $x = \varphi - \delta$ gibt, wobei ein genäherter Werth von $\varphi - \delta$ genügt. Einfacher findet man denselben, so lange $\varphi - \delta$ den Werth $2^0 46' 40''$ nicht überschreitet, mit Hilfe der in vielen Logarithmentafeln am Fusse jeder Seite der Zahlenlogarithmen angeführten Zahlen S , mittelst welcher nach der Formel: $\log \sin x = \log x'' + S$ aus dem Logarithmus der in dem Winkel x enthaltenen Zahl von Secunden der $\log \sin x$ erhalten wird. Es ist dann, wie leicht zu ersehen:

$$\log \frac{\text{arc} x}{\sin x} = \log \sin 1'' - S = 4.685575 - S,$$

wo die dem Winkel $x = (\varphi - \delta)$ entsprechende Zahl S unmittelbar der Tafel entnommen wird. Auch kann man den für kleine Winkel geltenden Näherungsausdruck (s. Anmerkung S. 468):

$$\log \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)} = \frac{1}{3} \log \sec(\varphi - \delta)$$

benützen, welcher bis zu $\varphi - \delta = 4^0$ noch auf $0''.0076$ oder 2 Einheiten der 7. Decimalstelle genau ist; man bildet diese Grösse leicht im Kopfe, indem man die dekadische Ergänzung von $\log \cos(\varphi - \delta)$ durch 3 dividirt.

Durch Addition der zwei ersten, oder der zwei letzten der Gln. (266) folgt nun:

$$\varphi - \delta = \frac{1}{2} \left\{ C \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''} + C \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''} \right\} + \frac{1}{2} (i_o + i_w) \cos \zeta. \quad (267)$$

Die Berechnung erfolgt daher in der Art, dass man für jeden Faden aus den an demselben in Ost und West beobachteten Uhrzeiten u_o und u_w mit

Zuziehung des Uhrstandes und der Rectascension des Sternes die Stundenwinkel:

$$t_o = \alpha - (u_o + \Delta u_o) = (\alpha - \Delta u_o) - u_o,$$

$$t_w = u_w + \Delta u_w - \alpha = u_w - (\alpha - \Delta u_w)$$

ableitet, mit diesen Stundenwinkeln als Argument der Hilfstafel die Werthe von $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ entnimmt, diese mit $\log C$ verbindet, und aus den zugehörigen Zahlen $C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ das arithmetische Mittel nimmt, welchem sodann,

oder auch bloß dem Mittelwerthe aus allen auf diese Art für die einzelnen Fäden erlangten Mittel, noch die Correction wegen der Neigung beizufügen ist.

Beispiel. Berechnen wir nach dieser Methode die im vorhergehenden Paragraphen angeführte Beobachtung von α Persei, so haben wir mit dem angenommenen Werthe:

$$\varphi = 50^\circ 47' 36'', \text{ und } \delta = 49^\circ 22' 30''.00 : \varphi - \delta = 1^\circ 25' 6'';$$

hiemit:

$$\log \sin \varphi = 9.889229$$

$$\log \cos \delta = 9.813651$$

$$\frac{1}{3} \log \sec (\varphi - \delta) = 0.000044$$

$$\log C = 9.702924$$

Die S. 476 angegebenen Uhrstände:

$$\Delta u_o = + 1^m 34^s.18 \text{ und } \Delta u_w = + 1^m 34^s.41$$

beziehen sich auf die Uhrzeit am Mittelfaden in Ost und West, und können für die Dauer eines jeden der beiden Durchgänge als constant angenommen werden. Mit der Rectascension $\alpha = 3^h 14^m 43^s.43$ hat man daher zur Bestimmung der Stundenwinkel:

$$t_o = (\alpha - \Delta u_o) - u_o = 3^h 13^m 9^s.25 - u_o,$$

$$t_w = u_w - (\alpha - \Delta u_w) = u_w - (3^h 13^m 9^s.02).$$

Hiernach steht die Rechnung wie folgt:

Faden	Beobachtung		t_o	t_w	$\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''}$	$\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''}$
	St. O. K. N. u_o	St. W. K. S. u_w				
I	1 56 14.0	4 20 11.0	1 16 55.25	1 7 1.98	4.061037	3.942509
II	57 9.6	21 13.0	15 59.65	8 3.98	4.050607	3.955700
III	58 2.5	22 11.5	15 6.75	9 2.48	4.040563	3.967961
IV	59 0.0	23 13.3	14 9.25	10 4.28	4.029508	3.980724
V	2 0 1.5	24 16.8	13 7.75	11 7.78	4.017523	3.993643
VI	1 0.6	25 16.9	12 8.65	12 7.88	4.005843	4.005690
VII	2 2.7	26 18.1	11 6.55	13 9.08	3.993394	4.017784
VIII	3 0.2	27 13.0	10 9.05	14 3.98	3.981702	4.028488
IX	4 2.3	28 11.3	9 6.95	15 2.28	3.968891	4.039709
X	4 58.5	29 2.9	8 10.75	15 53.88	3.957128	4.049517
XI	2 5 57.7	4 29 55.4	1 7 11.55	1 16 46.38	3.944559	4.059382

Faden	$\log C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''}$	$\log C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''}$	$C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''}$	$C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''}$	Summe	Mittel
	St. O. K. N.	St. W. K. S.	St. O. K. N.	St. W. K. S.		
I	3.763961	3.645433	5807''12	4420''11	10227''23	5113''61
II	3.753531	3.658624	5669.33	4556.42	5.75	2.88
III	3.743487	3.670885	5539.71	4686.89	6.60	3.30
IV	3.732432	3.683648	5400.47	4826.68	7.15	3.57
V	3.720447	3.696567	5253.48	4972.41	5.89	2.95
VI	3.708767	3.708614	5114.08	5112.27	6.35	3.17
VII	3.696318	3.720708	4969.56	5256.64	6.20	3.10
VIII	3.684626	3.731412	4837.56	5387.81	5.37	2.69
IX	3.671815	3.742633	4696.94	5528.83	5.77	2.88
X	3.660052	3.752441	4571.43	5655.11	6.54	3.27
XI	3.647483	3.762306	4441.02	5785.04	10226.06	5113.03

Mittel = 5113.13

= 1° 25' 13''13

Hiernach ergibt sich im Mittel aus allen 11 Fäden:

$$\frac{1}{2} \left\{ C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''} + C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''} \right\} = 1^\circ 25' 13''.13$$

$$\frac{1}{2} (i_o + i_w) \cos \zeta = - 7.34$$

$$\varphi - \delta = 1^\circ 25' 5''.79$$

$$\delta = 49 \quad 22 \quad 30 \quad .00$$

$$\varphi = 50^\circ 47' 35''.79$$

212. Es erübrigt noch, den Einfluss des in den Glgn. (265) und (266) vernachlässigten zweiten Gliedes der Ausdrücke (n) [S. 482] auf den nach Gl. (267) berechneten Werth von $\varphi - \delta$ zu untersuchen.

Bezeichnen wir die hiedurch bedingte Correction dieses Werthes mit $A(\varphi - \delta)$, so wird für das arithmetische Mittel sowohl der 1^{ten} und 2^{ten}, als auch der 3^{ten} und 4^{ten} Gleichung:

$$A(\varphi - \delta) = \frac{1}{2} k \cos \delta (\sin t_o - \sin t_w),$$

oder:

$$A(\varphi - \delta) = k \cos \delta \cos \frac{1}{2} (t_o + t_w) \sin \frac{1}{2} (t_o - t_w). \quad (r)$$

Zufolge der Gl. (238) besteht nun für die Beobachtung eines Sternes in Ost bei Kreis Nord an einem Seitenfaden, welcher in dem Abstände f nördlich vom Mittelfaden liegt, dessen Absehenlinie also mit dem Kreise den Winkel $90^\circ + c - f$ einschliesst, die Gleichung:

$$-\sin(c - f) = \sin \delta \sin n - \cos \delta \cos n \cos(t_o + m),$$

welche für die Beobachtung an demselben Faden auf der Westseite bei Kreis Süd in folgende übergeht:

$$\sin(c - f) = \sin \delta \sin n - \cos \delta \cos n \cos(t_w - m),$$

und es wird bei beiden Beobachtungen der Seitenfaden, weil der Voraussetzung nach auf der Ostseite nördlich, auf der Westseite südlich vom Mittelfaden gelegen, früher als der Mittelfaden vom Sterne angetreten. Ist umgekehrt

der Stern in Ost bei Kreis Süd, in West bei Kreis Nord beobachtet worden, in welchem Falle auf beiden Seiten der Seitenfaden später als der Mittelfaden vom Sterne angetreten wird, so ändert sich in obigen Gleichungen nur das Zeichen von $\sin(c - f)$, und es folgt daher durch Subtraction derselben für beide Fälle:

$$\mp 2 \sin(c - f) = \cos \delta \cos n [\cos(t_w - m) - \cos(t_o + m)],$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Seitenfaden vor oder nach dem Mittelfaden angetreten wird.

Aus letzterer Gleichung folgt nun:

$$\mp \sin(c - f) = \cos \delta \cos n \sin \frac{1}{2}(t_o + t_w) \sin [\frac{1}{2}(t_o - t_w) + m],$$

und hieraus:

$$\sin [\frac{1}{2}(t_o - t_w) + m] = \mp \frac{\sin(c - f)}{\cos \delta \cos n \sin \frac{1}{2}(t_o + t_w)}.$$

Für den vorliegenden Zweck können die Instrumentalfehler c und $i = o$ angenommen werden, wodurch $n = 90^\circ - \varphi$, $m = \frac{k}{\sin \varphi}$ wird, und die vorstehende Gleichung, da m klein, in folgende übergeht:

$$\sin \frac{1}{2}(t_o - t_w) = - \frac{k}{\sin \varphi} \cos \frac{1}{2}(t_o - t_w) \pm \frac{f}{\cos \delta \sin \varphi \sin \frac{1}{2}(t_o + t_w)}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Gl. (r) kommt:

$$A(\varphi - \delta) = - k^2 \frac{\cos \delta}{\sin \varphi} \cos \frac{1}{2}(t_o + t_w) \cos \frac{1}{2}(t_o - t_w) \pm kf \frac{\cotg \frac{1}{2}(t_o + t_w)}{\sin \varphi}.$$

Setzt man nun, was hier näherungsweise zulässig ist, $\frac{1}{2}(t_o + t_w) = \sigma$ und $\cos \frac{1}{2}(t_o - t_w) = 1$, so erhält man:

$$A(\varphi - \delta) = - k^2 \frac{\cos \delta \cos \sigma}{\sin \varphi} \pm kf \frac{\cotg \sigma}{\sin \varphi},$$

oder, mit Rücksicht auf die Glgn. 6) und 2) [§. 204], und $A(\varphi - \delta)$, k und f in Bogensekunden ausdrückend:

$$A(\varphi - \delta) = - k^2 \sin 1'' \cotg \varphi \cos \zeta \pm kf \sin 1'' \cotg \varphi \cotg \zeta, \quad (268)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Seitenfaden vor oder nach dem Mittelfaden angetreten wird.

Die Correction besteht daher aus zwei Theilen, von welchen der erste vom Quadrate des Azimuthes abhängige constant für alle Fäden und stets negativ ist; für $\varphi = 50^\circ$ und von dem für kleine Werthe von $\varphi - \delta$ der Einheit nahe kommenden Factor $\cos \zeta$ abgesehen, wird derselbe z. B. für $k = 30''$: $- 0''.0037$, für $k = 1' = 60''$: $- 0''.015$, für $k = 2' = 120''$: $- 0''.059$, und nimmt mit k im quadratischen Verhältnisse zu. Es ist daher räthlich, das Azimuth des Instrumentes möglichst klein zu halten, damit der Einfluss dieses Gliedes überhaupt unmerklich wird.

Der zweite von der ersten Potenz des Azimuthes und der Fadendistanz f abhängige Theil erreicht, in Folge der Factoren f und $\cotg \zeta$, für denselben

Werth von k weit grössere Werthe, als der erste; das Doppelte von der Zeitfolge des Fadenantrittes in Bezug auf den Mittelfaden abhängige Vorzeichen gibt jedoch zu erkennen, dass dieser Theil des Fehlers im Mittel aus je zwei Werthen von $\varphi - \delta$, welche aus zwei vom Mittelfaden gleichweit abstehenden Seitenfäden abgeleitet sind, folglich auch im Mittel aus allen Fäden sich aufhebt, wenn das Fadennetz in Bezug auf den Mittelfaden symmetrisch, und der Durchgang in Ost und West vollständig an allen Fäden beobachtet ist. Wurde daher an irgend einem Seitenfaden der Durchgang nicht, oder nur auf einer Seite des Meridians beobachtet, so wird man, wenn unter den gegebenen Umständen der Fehler einen unzulässigen Werth erreicht, entweder die wenn auch vollständig erhaltene Beobachtung an dem auf der anderen Seite des Mittelfadens symmetrisch gelegenen Seitenfaden gänzlich ausschliessen, oder den aus letzterer abgeleiteten Werth von $\varphi - \delta$, wenn k und f bekannt sind, entsprechend zu verbessern haben. Diese Verbesserung wird übrigens an allen aus den einzelnen Seitenfäden folgenden Werthen von $\varphi - \delta$ in dem Falle anzubringen sein, wenn man aus den Abweichungen derselben von ihrem arithmetischen Mittel den wahrscheinlichen Fehler desselben bestimmen will, weil sonst diese Abweichungen nicht richtig erhalten werden.

Bei der im vorigen §. als Beispiel benützten Beobachtung von α Persei, 1884, September 26, war $k = -0^s.945 = -14''.2$ (s. Anmerk. S. 478), $\varphi = 50^\circ 47'.6$, $\zeta = 11^\circ 37'.2$; mit diesen Werthen wird nach Gl. (268) die Correction:

$$A(\varphi - \delta) = -0''.00078 \mp (7.6126) f^s,$$

deren erstes Glied unmerklich ist. Das zweite, in welchem die eingeklammerte Zahl einen Logarithmus bedeutet und f in Zeitsecunden auszudrücken ist, liefert die in der 2^{ten} Spalte der folgenden Zusammenstellung angeführten Correctionen, welche, an die von S. 485 in die 1^{te} Spalte übertragenen Werthe des 1^{ten} Gliedes der Gl. (267) angebracht, die in der 3^{ten} Spalte befindlichen verbesserten Werthe geben.

Faden		Corr.	Verbess. Werthe	Abw. v. Mittel	vv
I	5113 ^{''} .61	- 0 ^{''} .19	5113 ^{''} .42	- 0 ^{''} .29	0.0841
II	2 .88	0 .15	2 .73	+ 0 .40	.1600
III	3 .30	0 .12	3 .18	- 0 .05	.0025
IV	3 .57	0 .08	3 .49	- 0 .36	.1296
V	2 .95	- 0 .04	2 .91	+ 0 .22	.0484
VI	3 .17	0 .00	3 .17	- 0 .04	.0016
VII	3 .10	+ 0 .04	3 .14	- 0 .01	.0001
VIII	2 .69	0 .08	2 .77	+ 0 .36	.1296
IX	2 .88	0 .11	2 .99	+ 0 .14	.0196
X	3 .27	0 .15	3 .42	- 0 .29	.0841
XI	5113 .03	+ 0 .18	5113 .21	- 0 .08	.0064
Mittel =	5113 .13		5113 .13		[vv] = 0.6660

Das Mittel der verbesserten Werthe ist, wie man sieht, identisch mit jenem der unverbesserten, wie dies bei einer vollständigen Beobachtung an allen Fäden und einem nahe symmetrischen Fadennetze sein muss. Aus den Abweichungen vom Mittel findet man den wahrscheinlichen Fehler eines aus einem Faden abgeleiteten Werthes von $\varphi - \delta$:

$$\varepsilon\varphi = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[rv]}{10}} = \pm 0''.174,$$

und den wahrscheinlichen Fehler des Mittels aus allen 11 Fäden

$$r\varphi = \pm \frac{0.174}{\sqrt{11}} = \pm 0''.053.$$

213. Dritte Methode. Von derselben Gleichung (239*), wie bei Entwicklung der zweiten Methode, ausgehend, kann man noch auf anderem Wege zu einem Verfahren gelangen, aus den an demselben Seitenfaden in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachteten Durchgängen des Sternes die Polhöhe abzuleiten.

Für die Beobachtung des Sternes in Ost, bei Kreis Nord, an einem Seitenfaden, dessen Absenlinie mit dem Kreise der Axe den Winkel $90^\circ - C$ einschliesst, haben wir in Gl. (239*) — C statt c zu setzen, und dadurch die Gleichung:

$$\cos \varphi \sin \delta = \sin \varphi \cos \delta \cos t_o + C - i_o \cos z_o - k \cos \delta \sin t_o,$$

welche sich für den westlichen Durchgang durch denselben Seitenfaden bei Kreis Süd, durch Aenderung der Zeichen von t und C in folgende verwandelt:

$$\cos \varphi \sin \delta = \sin \varphi \cos \delta \cos t_w - C - i_w \cos z_w + k \cos \delta \sin t_w.$$

Aus den bei der zweiten Methode (S. 481) angeführten Gründen kann man in den kleinen von der Neigung der Axe abhängigen Gliedern ohne merklichen Fehler z_o und z_w mit der Zenithdistanz ξ im ersten Vertical vertauschen und erhält dann durch Addition beider Gleichungen:

$$\cos \varphi \sin \delta = \sin \varphi \cos \delta \cos \frac{1}{2}(t_w + t_o) \cos \frac{1}{2}(t_w - t_o) - \frac{1}{2}(i_o + i_w) \cos \xi + k \cos \delta \cos \frac{1}{2}(t_w + t_o) \sin \frac{1}{2}(t_w - t_o).$$

Sind u_o, u_w die beobachteten Uhrzeiten der Durchgänge des Sternes an Seitenfaden, Au_o, Au_w die zugehörigen Uhrstände gegen Sternzeit, so ist:

$$t_o = \alpha - (u_o + Au_o), \quad t_w = (u_w + Au_w) - \alpha,$$

somit:

$$\frac{1}{2}(t_w + t_o) = \frac{1}{2}[(u_w - u_o) + (Au_w - Au_o)] = \Theta,$$

wo Θ die beobachtete halbe Zwischenzeit, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet; ferner:

$$\frac{1}{2}(t_w - t_o) = \frac{1}{2}[(u_o + u_w) + (Au_o + Au_w)] - \alpha = \psi,$$

und obige Gleichung verwandelt sich durch Einführung dieser Grössen und Division durch $\cos \varphi \cos \delta$ in folgende:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi \cos \Theta \cos \psi - \frac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\cos \zeta}{\cos \varphi \cos \delta} + k \frac{\cos \Theta \sin \psi}{\cos \varphi}.$$

Setzen wir nun:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi' \cos \Theta \cos \psi,$$

so erhalten wir durch Subtraction beider Gleichungen:

$$(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \cos \Theta \cos \psi = \frac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\cos \zeta}{\cos \varphi \cos \delta} - k \frac{\cos \Theta \sin \psi}{\cos \varphi}.$$

oder, durch $\cos \Theta \cos \psi = \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \varphi'$ dividirend:

$$\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos \varphi \cos \varphi'} = \frac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\cos \zeta \sin \varphi'}{\cos \varphi \cos \varphi' \sin \delta} - k \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \varphi},$$

d. i.

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\cos \zeta \sin \varphi'}{\sin \delta} - k \operatorname{tg} \psi \cos \varphi',$$

oder, da $\varphi - \varphi'$ sehr klein ist, und daher auch in dem Coefficienten des von der Neigung abhängigen Gliedes $\sin \varphi$ statt $\sin \varphi'$ gesetzt werden kann, wodurch dieser Coefficient zufolge Gl. 4) [§. 204] = 1 wird:

$$\varphi - \varphi' = \frac{1}{2}(i_o + i_w) - k \operatorname{tg} \psi \cos \varphi'.$$

Man hat daher zur Berechnung folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} [(u_w - u_o) + (\mathcal{A}u_w - \mathcal{A}u_o)] \\ \psi &= \frac{1}{2} [(u_o + u_w) + (\mathcal{A}u_o + \mathcal{A}u_w)] - \alpha \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} \delta \sec \Theta \sec \psi \\ \varphi &= \varphi' + \frac{1}{2}(i_o + i_w) - k \cos \varphi' \operatorname{tg} \psi. \end{aligned} \quad (269)$$

Der immer kleine Winkel ψ , und somit auch das vom Azimuth abhängige Correctionsglied $k \cos \varphi' \operatorname{tg} \psi$, erhalten für zwei zu beiden Seiten des Mittelfadens von diesem gleichweit abstehende Seitenfäden sehr nahe gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe. Es tritt daher auch hier, wie bei der vorher behandelten Reductionsmethode der Fall ein, dass der durch Vernachlässigung des Gliedes $k \cos \varphi' \operatorname{tg} \psi$ entstehende Fehler sich im Mittel der aus sämmtlichen Fäden folgenden Werthe von φ aufheben wird, wenn das Fadennetz genügend symmetrisch ist und beide Durchgänge in Ost und West vollständig an allen Fäden beobachtet sind, oder, im Falle an irgend einem Seitenfaden der Durchgang nicht oder nicht vollständig beachtet worden wäre, auch der wengleich vollständig beobachtete Durchgang an dem auf der andern Seite des Mittelfadens symmetrisch gelegenen Seitenfaden entweder vom Mittel ausgeschlossen oder der aus demselben abgeleitete Werth von φ' durch Anbringung der Correction $- k \cos \varphi' \operatorname{tg} \psi$ verbessert wird. Sollen aber auch die den einzelnen Fäden entsprechenden Werthe von φ oder φ' richtig erhalten werden, z. B. behufs Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers, so muss das

Glied $-k \cos \varphi' \operatorname{tg} \psi$ berücksichtigt werden, da dasselbe zwar immer klein, aber selbst für sehr kleine Werthe von k nicht unmerklich ist.

Beispiel. Berechnen wir auch nach dieser Methode die Beobachtung von α Persei, 1864, September 26, so finden wir mit dem Werthe:

$$\Delta u_w - \Delta u_o = + 0^s.23$$

[S. 476]:

Faden	Beobachtung		$(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)$		Θ	
	St. O. K. N. u_o	St. W. K. S. u_w	$u_w - u_o$	$+ 0.23$	in Zeit	in Bogen
I	1 56 14.0	4 20 11.0	2 23 57.0	57.23	1 11 58.61	17 59 39.22
II	57 9.6	21 13.0	24 3.4	3.63	12 1.81	18 0 27.22
III	58 2.5	22 11.5	24 9.0	9.23	12 4.61	18 1 9.22
IV	1 59 0.0	23 13.3	24 13.3	13.53	12 6.76	18 1 41.47
V	2 0 1.5	24 16.8	24 15.3	15.53	12 7.76	18 1 56.47
VI	1 0.6	25 16.9	24 16.3	16.53	12 8.26	18 2 3.97
VII	2 2.7	26 18.1	24 15.4	15.63	12 7.81	18 1 57.22
VIII	3 0.2	27 13.0	24 12.8	13.03	12 6.51	18 1 37.72
IX	4 2.3	28 11.3	24 9.0	9.23	12 4.61	18 1 9.22
X	4 58.5	29 2.9	24 4.4	4.63	12 2.31	18 0 34.72
XI	2 5 57.7	29 55.4	2 23 57.7	57.93	1 11 58.96	17 59 44.47

Der Winkel ψ , in der Form: $\psi = \frac{1}{2}(u_o + u_w) - [\alpha - \frac{1}{2}(\Delta u_o + \Delta u_w)]$ geschrieben, wird mit dem S. 476, angeführten Werthen: $\alpha = 3^h 14^m 43^s.43$, $\frac{1}{2}(\Delta u_o + \Delta u_w) = + 1^m 34^s.30$:

$$\psi = \frac{1}{2}(u_o + u_w) - 3^h 13^m 9^s.13,$$

und die weitere Rechnung ist daher folgende, wobei $\log \operatorname{tg} \delta = 0.0665832$:

Faden	$u_o + u_w$		$\frac{1}{2}(u_o + u_w)$	ψ	
	in Zeit	in Bogen	in Zeit	in Zeit	in Bogen
I	6 16 25.0	3 8 12.50	— 4 56.63	— 1 14 9.4	0 59 27.4
II	18 22.6	9 11.30	3 57.83	0 45 31.9	0 30 37.2
III	20 14.0	10 7.00	3 2.13	0 45 31.9	0 30 37.2
IV	22 13.3	11 6.65	2 2.48	0 45 31.9	0 30 37.2
V	24 18.3	12 9.15	0 59.98	0 45 31.9	0 30 37.2
VI	26 17.5	13 8.75	— 0 0.38	0 0 5.7	0 15 19.0
VII	28 20.8	14 10.40	+ 1 1.27	0 29 22.0	0 44 25.0
VIII	30 13.2	15 6.60	1 57.47	0 57 53.6	0 57 53.6
IX	32 13.6	16 6.80	2 57.67	0 57 53.6	0 57 53.6
X	34 1.4	17 0.70	3 51.57	0 57 53.6	0 57 53.6
XI	35 53.1	17 56.55	+ 4 47.42	+ 1 11 51.3	0 57 53.6

Faden	$\log \cos \Theta$	$\log \cos \psi$	$\log \cos \Theta \cos \psi$	$\log \operatorname{tg} \varphi'$	φ'
I	9.9782205	9.9998989	9.9781194	0.0884638	$50^{\circ} 47' 43''.81$
II	1877	9350	1227	4605	43.05
III	1589	9619	1208	4624	43.49
IV	1369	9828	1197	4635	43.74
V	1265	9.9999959	1224	4608	43.12
VI	1214	0.0000000	1214	4618	43.35
VII	1260	9.9999957	1217	4615	43.28
VIII	1395	9842	1237	4595	42.81
IX	1589	9638	1227	4605	43.05
X	1826	9384	1210	4622	43.44
XI	9.9782170	9.9999051	9.9781221	4611	43.19

Mittel: $\varphi' = 50^{\circ} 47' 43''.30$

$$\varphi' = 50^{\circ} 47' 43''.30$$

$$\frac{1}{2}(i_o + i_w) = \quad \quad \quad - \quad 7.49$$

$$\varphi = 50^{\circ} 47' 35''.81.$$

Mit dem S. 478 (Anmerk.) bestimmten genäherten Werthe des Azimuthes: $k = -14''.2$ ($\log k \cos \varphi' = 0.9531_n$) findet man folgende verbesserte Werthe der den einzelnen Fäden entsprechenden Werthe von φ' :

Faden	$\lg \operatorname{tg} \psi$	$\log k \cos \varphi \operatorname{tg} \psi$	$k \cos \varphi \operatorname{tg} \psi$	$\varphi' - k \cos \varphi' \operatorname{tg} \psi$	v	vv
I	8.3339 <i>n</i>	9.2870	+ 0''.19	$50^{\circ} 47' 43''.62$	- 0.32	0.1024
II	8.2379 <i>n</i>	9.1910	0.16	42.89	+ 0.41	.1681
III	8.1221 <i>n</i>	9.0752	0.12	43.37	- 0.07	.0049
IV	7.9497 <i>n</i>	8.9028	0.08	43.66	- 0.36	.1296
V	7.6398 <i>n</i>	8.5929	0.04	43.08	+ 0.22	.0484
VI	5.4415 <i>n</i>	6.3946	+ 0.00	43.35	- 0.05	.0025
VII	7.6489	8.6020 <i>n</i>	- 0.04	43.32	- 0.02	.0004
VIII	7.9316	8.8847 <i>n</i>	0.08	42.89	+ 0.41	.1681
IX	8.1113	9.0644 <i>n</i>	0.12	43.17	+ 0.13	.0169
X	8.2264	9.1795 <i>n</i>	0.15	43.59	- 0.29	.0841
XI	8.3202	9.2733 <i>n</i>	- 0.19	43.38	- 0.08	.0064

Mittel: $50^{\circ} 47' 43''.30$ $[vv] = 0.7318$

Das Mittel stimmt überein mit dem oben erhaltenen der uncorrigirten Werthe von φ' , und aus $[vv]$ findet man als wahrscheinlichen Fehler eines aus einem Faden abgeleiteten Werthes von φ :

$$\varepsilon_{\varphi} = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{10}} = \pm 0''.182$$

und als wahrscheinlichen Fehler des Mittels:

$$\nu_{\varphi} = \pm \frac{0''.182}{\sqrt{11}} = \pm 0''.055.$$

214. Vierte Methode. Ein anderes Verfahren, aus den an demselben Seitenfaden in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachteten Durchgängen des Sternes die Polhöhe abzuleiten, welches die Reduction auf den Mittelfaden und daher auch die Kenntniss der Fadendistanz f nicht erfordert, jedoch voraussetzt, dass der Stern in Ost und West am Mittelfaden beobachtet sei, ist folgendes:

Es sei in der einen Kreislage, z. B. Kreis Nord, der östliche Durchgang des Sternes an einem Seitenfaden beobachtet, dessen Abschenlinie mit dem Kreise der Axe den Winkel $90^\circ - C$ einschliesst, so haben wir in Gl. (238) — C statt c zu setzen, und erhalten:

$$\sin C = \sin \delta \sin n - \cos \delta \cos n \cos(t + m),$$

oder, wenn wir durch $\cos \delta \cos n$ dividiren und die bei dieser Beobachtung stattfindenden Werthe von t, n und m mit t_o, n_o, m_o bezeichnen:

$$\sin C \sec \delta \sec n_o = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n_o - \cos(t_o + m_o) \quad (a)$$

Für den westlichen Durchgang des Sternes durch denselben Faden bei Kreis Süd besteht die Gleichung:

$$-\sin C \sec \delta \sec n_w = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n_w - \cos(t_w - m_w),$$

wobei die Grössen m_o, n_o in m_w, n_w übergehen, wenn die Neigung der Achse sich geändert hat, während das Azimuth des Instrumentes, wie immer, als unverändert geblieben angenommen wird. Durch Addition beider Gleichungen kommt:

$$\begin{aligned} \sin C \sec \delta (\sec n_o - \sec n_w) &= \operatorname{tg} \delta (\operatorname{tg} n_o + \operatorname{tg} n_w) \\ &- [\cos(t_o + m_o) + \cos(t_w - m_w)]. \end{aligned}$$

Nun folgt aus der 1. der Gln. (236) unter der zulässigen Annahme $\cos k = 1$: $\sin n = \cos(\varphi - i)$, somit $\sec n = \operatorname{cosec}(\varphi - i)$, oder nach dem Taylor'schen Satze mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von i : $\sec n = \operatorname{cosec} \varphi + i \cotg \varphi \operatorname{cosec} \varphi$; hiemit wird:

$$\sec n_o - \sec n_w = (i_o - i_w) \cotg \varphi \operatorname{cosec} \varphi,$$

eine immer sehr kleine Grösse, deren Product mit der gleichfalls kleinen Grösse $\sin C$ unmerklich wird, indem es z. B. für $i_o - i_w = 2''$, $C = 12'$ $= 7200''$ und $\varphi = 50^\circ$ noch nicht 4 Einheiten der 8^{ten} Decimalstelle erreicht, daher die linke Seite der obigen Gleichung $= 0$ gesetzt werden kann.

Ferner folgt aus der 2^{ten} der Gln. (237): $\sin m = k \sec n$, d. i. $\sin m = k \operatorname{cosec} \varphi + i k \cotg \varphi \operatorname{cosec} \varphi$, folglich:

$$\sin m_w - \sin m_o = (i_w - i_o) k \cotg \varphi \operatorname{cosec} \varphi,$$

oder

$$m_w - m_o = (i_w - i_o) k \cotg \varphi \operatorname{cosec} \varphi \sec \frac{1}{2} (m_o + m_w),$$

welche Differenz stets sehr klein ist und z. B. für

$$i_w - i_o = 2'', k = 2' = 120'', \varphi = 50^\circ$$

den Betrag $0''.0011$ erlangt, daher $m_w = m_o = m$ gesetzt werden kann

Endlich wird, vermöge der Gl. (258):

$$\operatorname{tg} n_o + \operatorname{tg} n_w = 2 \operatorname{cotg} \varphi \cos m + (i_o + i_w) \operatorname{cosec} \varphi^2.$$

Hiermit verwandelt sich nun die letzte Gleichung in folgende:

$$o = \operatorname{tg} \delta [2 \operatorname{cotg} \varphi \cos m + (i_o + i_w) \operatorname{cosec} \varphi^2] - [\cos(t_o + m) + \cos(t_o - m)],$$

woraus nach Division mit $2 \operatorname{cotg} \varphi \cos m$ folgt:

$$\operatorname{tg} \delta = \cos \frac{1}{2}(t_o + t_w) \cos \left[\frac{1}{2}(t_w - t_o) - m \right] \operatorname{tg} \varphi \sec m - \frac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi}, \quad (b)$$

wo in dem letzten sehr kleinen Gliede der, der Einheit stets nahekommende Factor $\sec m$ weggelassen ist.

Sind nun u_o, u_w die beobachteten Uhrzeiten des östlichen und westlichen Durchganges des Sternes durch den Seitenfaden, $\mathcal{A}u_o$ und $\mathcal{A}u_w$ die zugehörigen Uhr correctionen gegen Sternzeit, α die Rectascension des Sternes, so ist:

$$t_o = \alpha - (u_o + \mathcal{A}u_o), \quad t_w = (u_w + \mathcal{A}u_w) - \alpha,$$

somit:

$$\frac{1}{2}(t_o + t_w) = \frac{1}{2}[(u_w - u_o) + (\mathcal{A}u_w - \mathcal{A}u_o)] = \Theta$$

wo Θ die halbe beobachtete Zwischenzeit, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet; ferner wird:

$$\frac{1}{2}(t_w - t_o) = \frac{1}{2}[(u_w + u_o) + (\mathcal{A}u_w + \mathcal{A}u_o)] - \alpha$$

Zur Bestimmung des Winkels m muss die Beobachtung der zwei Durchgänge am Mittelfaden zu Hilfe genommen werden. Bezeichnet man die Uhrzeiten derselben mit $u_{m,o}$ und $u_{m,w}$, die correspondirenden Uhr correctionen mit $\mathcal{A}u_{m,o}$, $\mathcal{A}u_{m,w}$ so ist zufolge der Glgn. (250) und (247):

$$m = \frac{1}{2}[(u_{m,o} + u_{m,w}) + (\mathcal{A}u_{m,o} + \mathcal{A}u_{m,w})] - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \xi \mp c}{\sin \varphi \sin \xi},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern in Ost bei Kreis Nord oder Kreis Süd beobachtet wurde.

Setzen wir endlich:

$$\frac{1}{2}(t_w - t_o) - m = \mu,$$

so wird:

$$\mu = \frac{1}{2}[(u_o + u_w) - (u_{m,o} + u_{m,w})] - \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \xi \mp c}{\sin \varphi \sin \xi}.*$$

Durch Einführung der Grössen Θ und μ geht die Gl. (b) in folgende über:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi \cos \Theta \cos \mu \sec m - \frac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi}.$$

* Hiebei wurde das in der Differenz $\mu = \frac{1}{2}(t_w - t_o) - m$ auftretende Glied: $\frac{1}{2}[(\mathcal{A}u_o + \mathcal{A}u_w) - (\mathcal{A}u_{m,o} + \mathcal{A}u_{m,w})] = o$ angenommen, was immer zulässig, wenn die Uhr nahe der Sternzeit folgt. Im Gegenfalle wird man es meist bequemer finden, vorerst alle beobachteten Uhrzeiten auf Sternzeit zu reduciren, wo dann in den Formeln des Textes die $\mathcal{A}u$ entfallen.

Setzen wir nun:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi' \cos \Theta \cos \mu \sec m,$$

so folgt durch Subtraction beider Gleichungen:

$$(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \cos \Theta \cos \mu \sec m = \frac{1}{2} (i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

oder mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos \varphi \cos \varphi'} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi'} = \frac{1}{2} (i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

d. i.:

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2} (i_o + i_w) \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi},$$

oder, da $\varphi - \varphi'$ sehr klein:

$$\varphi - \varphi' = \frac{1}{2} (i_o + i_w).$$

Man hat daher zur Auflösung der Aufgabe die folgenden Formeln:

$$\Theta = \frac{1}{2} [(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)],$$

$$\mu = \frac{1}{2} [(u_o + u_w) - (u_{m,o} + u_{m,w})] - \frac{\frac{1}{2} (i_w - i_o) \cos \xi \mp c}{\sin \varphi \sin \xi},$$

$$m = \frac{1}{2} [(u_{m,o} + u_{m,w}) + (\Delta u_{m,o} + \Delta u_{m,w})] - \alpha \quad (270)$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \delta \sec \Theta \sec \mu \cos m,$$

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{2} (i_o + i_w).$$

Hiebei wurde in dem Ausdrücke des Winkels m das von der Neigung und Collimation abhängige Correctionsglied vernachlässigt, weil m immer so klein sein wird, dass hiedurch die 7^{te} Decimalstelle des $\cos m$ nicht beeinflusst wird. Was den Winkel μ betrifft, welcher für kleinere Werthe von $\varphi - \delta$ bei den vom Mittelfaden entfernteren Seitenfäden 1° überschreitet, so erhält der erste Theil des Ausdrucks rechter Hand für die dem Mittelfaden vorausgehenden und die demselben nachfolgenden Seitenfäden entgegengesetztes Vorzeichen, während das Correctionsglied für alle Fäden das gleiche Zeichen hat. Hieraus folgt wieder, wie bei den vorausgehenden Methoden, dass der durch Vernachlässigung des Correctionsgliedes entstehende Fehler in den Werthen von φ' sich im Mittel der aus sämtlichen Fäden folgenden Werthe von φ' aufheben wird, wenn das Fadennetz symmetrisch ist und, im Falle an irgend einem Seitenfaden der Durchgang nicht, oder nicht vollständig beobachtet worden wäre, auch der wenn auch vollständig beobachtete Durchgang an dem auf der anderen Seite des Mittelfadens symmetrisch gelegenen Seitenfaden vom Mittel ausgeschlossen wird. Sollen aber auch die einzelnen Werthe von φ' richtig erhalten werden, so muss das Correctionsglied berücksichtigt werden.

Beispiel. Berechnen wir auch nach dieser Methode die schon wiederholt benützte Beobachtung von α Persei, 1864, September 26. Nach den auf S. 476 befindlichen Angaben war:

$$\Delta u_w - \Delta u_o = + 0^s.23; \Delta u_{m,o} + \Delta u_{m,w} = + 3^m 8^s.59;$$

mit letzterem Werthe und den am Mittelfaden beobachteten Uhrzeiten finden wir:

$$\begin{aligned} u_{m,o} + u_{m,w} &= 6^h 26^m 17^s.50 \\ \Delta u_{m,o} + \Delta u_{m,w} &= + 3 \quad 8.59 \\ &6 \quad 29 \quad 26.09 \\ &3 \quad 14 \quad 43.04 \\ \alpha &= 3 \quad 14 \quad 43.43 \end{aligned}$$

$$m = - 0.39 = - 5''.8, \text{ also } \cos m = 1.$$

Ferner ergab sich S. 476 der Werth des Correctionsgliedes:

$$\frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \xi - c}{\sin \varphi \sin \zeta} = - 13''.7.$$

Die Werthe von Θ und $u_o + u_w$ finden sich schon auf S. 490 berechnet. Die weitere Rechnung ist dann folgende:

Faden	$u_o + u_w$			$(u_o + u_w) - (u_{m,o} + u_{m,w})$		$\frac{1}{2}(u_o + u_w) - \frac{1}{2}(u_{m,o} + u_{m,w})$		μ
	^h	^m	^s	^m	^s	in Zeit	in Bogen	
I	6	16	25.0	- 9	52.5	- 4	56.25	- 1 ^o 14' 3.7
II		18	22.6	7	54.9	3	57.45	0 59 21.7
III		20	14.0	6	3.5	3	1.75	0 45 26.2
IV		22	13.3	4	4.2	2	2.10	0 30 31.5
V		24	18.3	- 1	59.2	- 0	59.60	- 0 14 54.0
VI		26	17.5	0	0.0	0	0.00	0 0 0.0
VII		28	20.8	+ 2	3.3	+ 1	1.65	+ 0 15 24.7
VIII		30	13.2	3	55.7	1	57.85	0 29 27.7
IX		32	13.6	5	56.1	2	58.05	0 44 30.7
X		34	1.4	7	43.9	3	51.95	0 57 59.2
XI	6	35	53.1	+ 9	35.6	+ 4	47.80	1 11 57.0

Faden	log cos Θ	log cos μ	log cos Θ cos μ	log tg φ'	φ'	Abw.v. Mittel v	vv
I	9.9782205	9.9998998	9.9781203	0.0884629	50 ^o 47' 43.60	- 0.30	0.0900
II	1877	9358	1235	4597	42.86	+ 0.44	.1936
III	1589	9624	1213	4619	43.37	- 0.07	.0049
IV	1369	9831	1200	4632	43.67	- 0.37	.1369
V	1265	9.9999960	1225	4607	43.09	+ 0.21	.0441
VI	1214	0.0000000	1214	4618	43.35	- 0.05	.0025
VII	1260	9.9999955	1215	4617	43.33	- 0.03	.0009
VIII	1395	9838	1233	4599	42.91	+ 0.39	.1521
IX	1589	9632	1221	4611	43.19	+ 0.11	.0121
X	1826	9377	1203	4629	43.60	- 0.30	.0900
XI	2170	9043	1213	4619	43.37	- 0.07	.0049

Mittel: $\varphi' = 50^{\circ} 47' 43.30$ [vv] = 0.7320

Hiernach folgt im Mittel aus allen 11 Fäden:

$$\begin{aligned} \varphi' &= 50^{\circ} 47' 43''.30 \\ \frac{1}{2}(i_o + i_w) &= \quad \quad \quad 7.49 \\ \varphi &= 20^{\circ} 47' 35''.81, \end{aligned}$$

und man findet als wahrscheinlichen Fehler eines aus einem Faden abgeleiteten Werthes von φ :

$$\varepsilon\varphi = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{vv}{10}} = \pm 0''.182,$$

und als wahrscheinlicher Fehler des Mittels:

$$r\varphi = \pm \frac{0''.182}{\sqrt{11}} = \pm 0''.055.$$

Die Berechnung des Correctionsgliedes in dem Ausdrucke von μ gibt folgende Werthe von φ' :

$\varphi' = 50^{\circ} 47' 43''.74$
43 .00
43 .44
43 .72
43 .09
43 .35
43 .28
42 .86
43 .09
43 .49
43 .23

$$\text{Mittel: } \varphi' = 50^{\circ} 47' 43''.30$$

deren Mittel mit dem obigen übereinstimmt.

Aus den der Vergleichung der verschiedenen in den vorgehenden §§. dargestellten Reductionsmethoden geht hervor, dass, wenn das Instrument zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes durch den ersten Vertical in den Lagern umgelegt wird, der Collimationsfehler c und das Azimuth k des Instrumentes eliminirt werden, wenn diese Fehler so klein sind, dass der Einfluss der zweiten und höheren Potenzen derselben unmerklich wird; dass jedoch die Elimination strenge nur für den Mittelfaden stattfindet, während die aus den einzelnen Seitenfäden abgeleiteten Resultate mit einem merklichen Einflusse der ersten Potenzen dieser Fehler — sei es c oder k , je nach der angewendeten Reductionsmethode — behaftet bleiben, welcher als von zweiter Ordnung betrachtet werden kann und sich erst im Mittel der aus sämtlichen Fäden folgenden Resultate aufhebt, wenn die Durchgänge in Ost und West vollständig und an einem hinreichend symme-

trischen Fadennetze beobachtet sind. Eine wenigstens genäherte Kenntniss der Instrumentalfehler c und k ist daher nicht nur dann erforderlich, wenn man die aus den Seitenfäden folgenden einzelnen Resultate von dem Einflusse der ersten Potenzen dieser Fehler zu befreien wünscht, sondern auch zu dem Zwecke, um überhaupt beurtheilen zu können, ob dieselben klein genug sind, um den Einfluss der höheren Potenzen vernachlässigen zu können. Eine zu diesem Zwecke hinreichend genäherte Bestimmung von c und k lässt sich aber, wie wir in §. 216 sehen werden, durch eine zweckmässige Anordnung der Beobachtungen immer erlangen.

215. Ist $\varphi - \delta$ klein, so wird die Zwischenzeit zwischen den Antritten des Sternes an zwei aufeinanderfolgenden Fäden gross genug, um während derselben das Instrument umlegen zu können. Hierauf gründet sich eine von W. Struve angegebene Beobachtungsmethode, welche darin besteht, dass man zuerst in Ost in der einen Kreislage den Durchgang des Sternes an allen Seitenfäden auf der einen Seite des Mittelfadens beobachtet, hierauf das Instrument umlegt, und den weiteren Durchgang an denselben Fäden in dieser zweiten Kreislage beobachtet; das Instrument bleibt nun in dieser Lage und man beobachtet den westlichen Durchgang an denselben Fäden, legt sodann um, und schliesst mit der Beobachtung des Sternes wieder an denselben Fäden. Bei diesem Verfahren wird also nur die eine Hälfte der Seitenfäden in Anspruch genommen und der Stern an jedem dieser Fäden viermal beobachtet.

Die Berechnung der Polhöhe aus solchen Beobachtungen kann nach der ersten oder zweiten der im Vorhergehenden dargestellten Reductionsmethoden unmittelbar vorgenommen werden.

1. Bei Anwendung der ersten Methode (§. 207), welche die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden erfordert, erhält man mit den Mitteln der in den vier Lagen beobachteten, auf Sternzeit und den Mittelfaden reducirten und wegen der Neigung der Axe verbesserten Durchgangszeiten sofort die vier Gleichungen (240), und aus diesen durch Verbindung von je zweien, entgegengesetzten Kreislagen bei Stern Ost und Stern West entsprechenden, zwei Werthe von $\mathcal{P}_w - \mathcal{P}_o$, mit deren Mittel sich nach Gl. (244) die Polhöhe ergibt.

Als Beispiel mag die folgende, 1863, September 20, auf dem astronomisch-trigonometrischen Punkte „Spiegler Schneeberg“ an der Grenze von Böhmen, Mähren und Pr.-Schlesien mit demselben in §. 210 erwähnten Passage-Instrumente gemachte Beobachtung des Sternes η Ursae majoris dienen.

Faden	St. O. K. S.			St. O. K. N.			St. W. K. N.			St. W. K. S.		
	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>
VII	13	12	18.5	13	17	33.5	14	8	20.5	14	13	36.0
VIII		10	9.0		20	24.5		5	30.5		15	45.0
IX		8	0.5		23	52.5		2	2.5		17	53.3
X		6	12.0		27	39.5		13	58		19	43.0
XI	13	4	24.5	13	33	0.0	13	52	54.7		21	30.7
Vor d. Durchg.	<i>i</i> = - 2 ^u .04						- 1 ^u .82					
Nach d. "	<i>i</i> = - 1.77						- 1.29					
Mittel:	<i>i</i> ₀ = - 1 ^u .905						<i>i</i> _w = - 1 ^u .555					
	= - 0 ^s .1270						= - 0 ^s .1037					

Uhrstand um 13^h.0 Uhrzeit: - 48^s.02; stündlicher Gang = - 0^s.0838.

Scheinbarer Ort des Sternes: $\alpha = 13^h 42^m 8^s.82$; $\delta = 49^\circ 59' 48''.74$.

Zur Berechnung nehmen wir an: $\varphi = 50^\circ 12' 34''$; $c = - 2''.0$.

Mit Rücksicht auf die längere Dauer der Durchgänge reduciren wir zunächst die beobachteten Uhrzeiten mit dem gegebenen Stande und Gange der Uhr auf Sternzeit und erhalten:

Faden	St. O. K. S.			St. O. K. N.			St. W. K. N.			St. W. K. S.		
	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>
VII	13	11	30.46	13	16	45.46	14	7	32.38	14	12	47.88
VIII		9	20.97		19	36.45		4	42.39		14	56.88
IX		7	12.47		23	4.45		1	14.39		17	5.17
X		5	23.97		26	51.44		57	25.40		18	54.87
XI	13	3	36.47	13	32	11.93	13	52	6.61	14	20	42.57

Zur Berechnung der Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden müssen wir, da letzterer nicht beobachtet ist,*) den Winkel γ , Gl. (259) benützen. Mittelst der Formeln 4), 7) und 11) [§. 204] finden wir:

$$\log \cos \zeta = 9.9987, \quad \log \sin \varphi \sin \zeta = 8.7812, \quad \log \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta = 8.7825,$$

$$\sigma = 7^\circ 1' 36''.76 = 28^m 6^s.45.$$

Mit den Mittelwerthen: $i = - 1''.665 = - 0^s.1110$ für Kreis Süd, und $= - 1''.795 = - 0^s.1197$ für Kreis Nord, berechnen wir den Winkel γ nach Gl. (259):

*) Bei sehr langsamer Bewegung des Sternes ist es möglich, auch den Antritt des Sternes vom Mittelfaden in Ost und West, und zwar entweder in entgegengesetzten Kreislagen oder in derselben Kreislage zu beobachten. Im ersteren Falle ergeben sich die Winkel Θ und η , gleichgiltig, ob der Mittelfaden in Ost bei Kreis Nord oder Kreis Süd beobachtet wurde, nach den Gln. (251) und (252) und können die Reductionen auf den Mittelfaden für jede Kreislage in Ost und West mittelst einer der von dem Winkel η abhängigen Formeln berechnet werden. Im zweiten Falle erhält aber der Winkel Θ für beide Kreislagen verschiedene Werthe, von welchen nur einer aus den in der einen Kreislage beobachteten Durchgängen durch den Mittelfaden nach Gl. (251) sich ergibt, mit welchem der zugehörige Werth von η nach Gl. (252), in deren Correctionsglieder $c = 0$ zu setzen ist, und mit diesem die dieser Kreislage entsprechenden Werthe von l berechnet werden können, während dies für die andere Kreislage in Ermangelung des zugehörigen Werthes von Θ nicht möglich ist.

	K. Süd	K. Nord
$\log i =$	9.0453 <i>n</i>	9.0781 <i>n</i>
$\log i \cos \zeta =$	9.0440 <i>n</i>	9.0768 <i>n</i>
$i \cos \zeta =$	- 0 ^s .1107	- 0 ^s .1193
$c =$	- 0.1333	- 0.1333
$i \cos \zeta \pm c =$	+ 0.0226	- 0.2526
$\log =$	8.3541	9.4024 <i>n</i>
$\log \sin \varphi \sin \zeta =$	8.7812	8.7812
	9.5729	0.6212 <i>n</i>
Corr. Glied =	+ 0 ^s .37	- 4 ^s .18
$\gamma = \sigma - \text{Corr. Glied} =$	28 ^m 6'08	28 ^m 10 ^s .63

Benützen wir nun zur Berechnung der Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden die Formeln (262), so finden wir:

$$\log \frac{15}{\cos \delta \sin(\varphi - i)} = 1,482417,$$

und aus der Tafel für $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$:

für Kreis Süd: $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 3.18994, \quad \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 1548'' .60,$

für Kreis Nord: $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 3.19228, \quad \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 1556 .97 ;$

die weitere Rechnung steht mit den S. 477 angeführten Werthen der Fadendistanzen *f* wie folgt:

Faden	$\log f$	$\log F$	<i>F</i>	$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} \pm F = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\gamma \pm l)^2}{\sin 1''}$	
				K. S.	K. N.
VII	0.983671	2.466088	292 ^{''} .47	1841 ^{''} .07	1264 ^{''} .50
VIII	1.264558	2.746975	558 .44	2107 .04	998 .53
IX	1.443732	2.926149	843 .62	2392 .22	713 .35
X	1.558769	3.041186	1099 .48	2648 .03	457 .49
XI	1.651869	3.134286	1362 .34	2910 .94	194 .63

Faden	$\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\gamma \pm l)^2}{\sin 1''}$		$\gamma \pm l$				<i>l</i>			
			K. S.		K. N.		K. S.		K. N.	
	K. S.	K. N.	^m	^s	^m	^s	^m	^s	^m	^s
VII	3.265070	3.10192	30	38.63	25	23.40	2	32.55	2	47.23
VIII	3.323673	2.99936	32	47.18	22	33.59	4	41.10	5	37.04
IX	3.378801	2.85330	34	56.32	19	3.96	6	50.24	9	6.67
X	3.422931	2.66038	36	45.80	15	16.02	8	39.72	12	54.61
XI	3.464033	2.28921	38	32.94	9	57.41	10	26.86	18	13.22

Die auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten werden sonach:

Faden	St. O. K. S.			St. O. K. N.			St. W. K. N.			St. W. K. S.		
	^h	^m	^s	^h	^m	^s	^h	^m	^s	^h	^m	^s
VII	13	14	3.01	13	13	58.23	14	10	19.61	14	10	15.33
VIII			2.07			59.41			19.43			15.78
IX			2.71			57.78			21.05			14.93
X			3.69			56.83			20.01			15.15
XI			3.33			58.71			19.83			15.71
Mittel:	^h	^h	^s	^h	^h	^s	^h	^h	^s	^h	^h	^s
	13	14	2.96	13	13	58.19	14	10	19.99	14	10	15.38
$\frac{i}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} =$			+ 2.10			+ 2.10			- 1.71			- 1.71
	13	14	5.06	13	14	0.29	14	10	18.28	14	10	13.67

womit sich nach (240) die folgenden Gleichungen ergeben:

- 1) St. O. K. S.: $\mathcal{J}_o = 13^h 14^m 5^s.06 + 16.55 c - 1.3014 k$,
- 2) St. O. K. N.: $\mathcal{J}_o = 13 14 0.29 - 16.55 c - 1.3014 k$,
- 3) St. W. K. N.: $\mathcal{J}_w = 14 10 18.28 + 16.55 c - 1.3014 k$,
- 4) St. W. K. S.: $\mathcal{J}_w = 14 10 13.67 - 16.55 c - 1.3014 k$.

r)

Durch Subtraction folgt:

$$3) - 1): \mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o = 56^m 13^s.22$$

$$4) - 2): \mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o = 56 13.38$$

$$\text{Mittel: } \mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o = 56 13.30$$

$$\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o) = 28^m 6^s.65 = 7^o 1' 39''.75;$$

Hiemit findet man endlich nach Gl. (244):

$$\log \operatorname{tg} \delta = 0.0761383$$

$$\log \cos \frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o) = 9.9967249$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.0794134$$

$$\varphi = 50^o 12' 34''.16.$$

Meistens bedient man sich jedoch zur Berechnung derartiger Beobachtungen einer Methode, welche die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden nicht erfordert, insbesondere auch aus dem Grunde, weil die Werthe der Fadendistanzen f nicht immer so genau bekannt sind, als es erforderlich ist, wenn $\varphi - \delta$ sehr klein, und daher das Verhältniss $l : f$ nicht nur beträchtlich gross, sondern auch, je nachdem der Seitenfaden südlich oder nördlich vom Mittelfaden liegt, erheblich verschieden ist.

2. Die in §. 211 dargestellte zweite Reductionsmethode ist, sowie die erste, auf den vorliegenden Fall ohne weitere Aenderung anwendbar. Die an jedem einzelnen Faden beobachteten vier Antritte des Sternes liefern die vier Gleichungen (266), deren arithmetisches Mittel sofort, abgesehen von der Neigungs-Correction, einen Werth von $\varphi - \delta$ gibt.

Setzt man, der Kürze wegen:

$$\psi(t) = C \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}, \quad (271)$$

wo

$$C = \sin \varphi \cos \delta \frac{\operatorname{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)},$$

indem man noch dem Buchstaben ψ den Index n oder s , dem Buchstaben t den Index o oder w beifügt, je nachdem sich die Grösse $\psi(t)$ auf einen Fadenantritt bei K. N. oder K. S., beziehungsweise in Ost oder West bezieht, so wird das Mittel aus den Gln. (266):

$$\varphi - \delta = \frac{1}{4} [\psi_n(t_o) + \psi_n(t_w) + \psi_s(t_o) + \psi_s(t_w)] + \frac{1}{2}(i^o + i_w) \cos \xi. \quad (272)$$

Man überzeugt sich leicht, dass in der Summe der vier Werthe von $\psi(t)$ der Einfluss des zweiten von dem Producte kf abhängigen Gliedes der Gl. (268) sich aufhebt.

Die Berechnung des obigen Beispiels nach diesem Verfahren ist, mit Uebertragung der oben schon auf Sternzeit reducirten Durchgangszeiten, folgende :

$$\begin{array}{rcl} \alpha = 13^h 42^m 8^s.82 & \log \sin \varphi = 9.885581 \\ \delta = 49^o 59' 48''.74 & \log \cos \delta = 9.808096 \\ \text{Angenommen: } \varphi = 50 \ 12 \ 34 & \frac{1}{2} \log \sec(\varphi - \delta) = 0.000001 \\ \varphi - \delta = 0 \ 12 \ 45 & \log C = 9.693678 \end{array}$$

Durchgangszeiten, auf Sternzeit reducirt:

Faden	VII		VIII		IX		X		XI	
	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>
St. O. K. S.	13	11 30.46	13	9 20.97	13	7 12.47	13	5 23.97	13	3 36.47
St. O. K. N.	13	16 45.46	13	19 36.45	13	23 4.45	13	26 51.44	13	32 11.93
St. W. K. N.	14	7 32.38	14	4 42.39	14	1 14.39	13	57 25.40	13	52 6.61
St. W. K. S.	14	12 47.88	14	14 56.88	14	17 5.17	14	18 54.87	14	20 42.57
Stundenw. <i>t</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>	<i>h</i>	<i>m s</i>
	0	30 38.36	0	32 47.85	0	34 56.35	0	36 44.85	0	38 32.35
		25 23.36		22 32.37		19 4.37		15 17.38		9 56.89
		25 23.56		22 33.57		19 5.57		15 16.58		9 57.79
	30 39.06		32 48.06		34 56.35		36 46.05		38 33.75	
$\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$		3.264942		3.323970		3.378813		3.422555		3.463811
		3.10190		2.99858		2.85361		2.66167		2.28845
		3.10201		2.99934		2.85452		2.66091		2.28976
		3.265271		3.324062		3.378813		3.423027		3.464335
$\log C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''} = \psi(t)$		2.958620		3.017648		3.072491		3.116233		3.157489
		2.79558		2.69226		2.54729		2.35535		1.98213
		2.79569		2.69302		2.54820		2.35459		1.98344
		2.958949		3.017740		3.072491		3.116705		3.158013
$\psi_s(t_0) =$		909''.12		1041''.47		1181''.66		1306''.87		1437''.11
$\psi_n(t_0) =$		624 .57		492 .33		352 .61		226 .65		95 .97
$\psi_n(t_w) =$		624 .73		493 .20		353 .35		226 .25		96 .26
$\psi_s(t_w) =$		909 .81		1041 .69		1181 .66		1308 .29		1438 .84
Summe = <i>S</i> =		3068''.23		3068''.69		3069''.28		3068''.06		3068''.18
$\frac{1}{4} S =$		767 .06		767 .17		767 .32		767 .02		767 .05
Mittel: $\frac{1}{4} S = 767''.15 = 0^o 12' 47''.12$										
$\frac{1}{2} (i_0 + i_w) \cos \zeta = \quad \quad \quad - 1 .72$										
$\varphi - \delta = 0^o 12' 45''.40$										
$\delta = 49 \ 59 \ 48 .74$										
$\varphi = 50^o 12' 34''.14$										

3. Zu einer sehr bequemen Methode zur Berechnung derartiger Beobachtungen gelangt man endlich auf folgendem Wege:

Bezeichnet man wieder, wie in §. 214, den Winkel, welchen die Absehenlinie eines Seitenfadens mit dem Kreise der Axe einschliesst, mit

$90^\circ - C$, so hat man für den Durchgang des Sternes durch diesen Faden bei Stern Ost, Kreis Nord die Gl. (a) [§. 214]:

$$\sin C \sec \delta \sec n_1 = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n_1 - \cos (t_1 + m_1),$$

wo der Index 1 sich auf den ersten Durchgang des Sternes durch diesen Seitenfaden bezieht. Werden die analogen Grössen für die drei folgenden Durchgänge durch denselben Faden der Zeitfolge nach mit den Stellenzeigern 2, 3, 4 versehen, wobei also die Stellenzeiger 1 und 2 auf die zwei Durchgänge in Ost, jene 3 und 4 auf die Durchgänge in West sich beziehen, so kann aus den in §. 214 dargelegten Gründen ohne merklichen Fehler

$$\sec n_1 = \sec n_2 = \sec n_3 = \sec n_4, \text{ und } m_1 = m_2 = m_3 = m_4$$

gesetzt werden, weil die vier Secanten sich nur um Grössen von der Ordnung i unterscheiden, und in die kleine Grösse $\sin C$ multiplicirt sind, die Unterschiede der vier Grössen m aber von der Ordnung ik sind. Man hat daher für die vier an demselben Seitenfaden beobachteten Durchgänge die Gleichungen:

$$\text{St. O. K. N: } \sin C \sec \delta \sec n = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n_1 - \cos (t_1 + m),$$

$$\text{St. O. K. S: } - \sin C \sec \delta \sec n = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n_2 - \cos (t_2 + m),$$

$$\text{St. W. K. S: } - \sin C \sec \delta \sec n = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n_3 - \cos (t_3 - m),$$

$$\text{St. W. K. N: } \sin C \sec \delta \sec n = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n_4 - \cos (t_4 - m).$$

durch deren Addition sich die folgende ergibt:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \delta (\operatorname{tg} n_1 + \operatorname{tg} n_2 + \operatorname{tg} n_3 + \operatorname{tg} n_4) = \\ = & 2 \cos \frac{1}{2} (t_1 + t_4) \cos [\frac{1}{2} (t_4 - t_1) - m] + 2 \cos \frac{1}{2} (t_2 + t_3) \cos [\frac{1}{2} (t_3 - t_2) - m] \end{aligned}$$

Nun ist vermöge der Gl. (258):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} n_1 + \operatorname{tg} n_2 + \operatorname{tg} n_3 + \operatorname{tg} n_4 &= 4 \cotg \varphi \cos m + (i_1 + i_2 + i_3 + i_4) \operatorname{cosec} \varphi^2 \\ &= 4 \cotg \varphi \cos m + 2 (i_o + i_w) \operatorname{cosec} \varphi^2, \end{aligned}$$

wenn $i_o = \frac{1}{2} (i_1 + i_2)$ und $i_w = \frac{1}{2} (i_3 + i_4)$ die arithmetischen Mittel der zwei in Ost und West vor und nach dem Durchgange des Sternes beobachteten Neigungen bedeuten.

Ferner ist für zwei Beobachtungen in Ost und West in derselben Kreislage und an demselben Faden das Dreieck SPN (Fig. 92) congruent mit dem analogen auf der Westseite liegenden, folglich $t_1 + m = t_4 - m$, und ebenso $t_2 + m = t_3 - m$, also

$$\frac{1}{2} (t_4 - t_1) = \frac{1}{2} (t_3 - t_2) = m.$$

Hiernach wird die obige Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \delta \cotg \varphi \cos m + (i_o + i_w) \operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec} \varphi^2 &= \cos \frac{1}{2} (t_1 + t_4) + \cos \frac{1}{2} (t_2 + t_3) \\ &= 2 \cos \frac{1}{4} [(t_1 + t_4) + (t_2 + t_3)] \cos \frac{1}{4} [(t_1 + t_4) - (t_2 + t_3)]. \end{aligned}$$

Sind nun u_1, u_2, u_3, u_4 die wegen Stand und Gang der Uhr bereits auf Sternzeit reducirten Durchgangszeiten, so ist:

$$t_1 = \alpha - u_1, t_2 = \alpha - u_2, t_3 = u_3 - \alpha, t_4 = u_4 - \alpha,$$

und:

$$t_1 + t_4 = u_4 - u_1, t_2 + t_3 = u_3 - u_2;$$

setzen wir also:

$$s = \frac{1}{4} [(u_4 - u_1) + (u_3 - u_2)],$$

$$d = \frac{1}{4} [(u_4 - u_1) - (u_3 - u_2)],$$

so wird:

$$\operatorname{tg} \delta \cotg \varphi \cos m + \frac{1}{2} (i_o + i_w) \operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec} \varphi^2 = \cos s \cos d,$$

wo:

$$m = \frac{1}{2} (t_4 - t_1) = \frac{1}{2} (u_1 + u_4) - \alpha,$$

oder:

$$m = \frac{1}{2} (t_3 - t_2) = \frac{1}{2} (u_2 + u_3) - \alpha,$$

folglich im Mittel:

$$m = \frac{1}{4} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - \alpha$$

ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt nun:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi \cos s \cos d \sec m - \frac{1}{2} (i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

wo im letzten sehr kleinen Gliede der der Einheit nahe gleiche Factor $\sec m$ weggelassen ist.

Setzen wir endlich:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi' \cos s \cos d \sec m,$$

so erhalten wir durch Subtraction beider Gleichungen:

$$(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \cos s \cos d \sec m = \frac{1}{2} (i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

oder, mit Rücksicht auf die vorhergehende:

$$\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos \varphi \cos \varphi'} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi'} = \frac{1}{2} (i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

d. i.:

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2} (i_o + i_w) \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi},$$

oder, da $\varphi - \varphi'$ sehr klein:

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{2} (i_o + i_w).$$

Die zur Rechnung dienenden Formeln sind also folgende:

$$s = \frac{1}{4} [(u_4 - u_1) + (u_3 - u_2)],$$

$$d = \frac{1}{4} [(u_4 - u_1) - (u_3 - u_2)],$$

$$m = \frac{1}{4} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - \alpha, \quad (273)$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \delta \sec s \sec d \cos m,$$

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{2} (i_o + i_w),$$

wobei, wie oben bemerkt, u_1, \dots, u_4 die bereits wegen Stand und Gang der Uhr auf Sternzeit gebrachten Durchgangszeiten sind.

Für unser Beispiel ist die Rechnung nach diesem Verfahren folgende:

Durchgangszeiten, auf Sternzeit reducirt.

	VII			VIII			IX			X			XI		
	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>m</i>	<i>s</i>
St. O. K. S. $u_1 =$	13	11	30.46	13	9	20.97	13	7	12.47	13	5	23.97	13	3	36.47
St. O. K. N. $u_2 =$	13	16	45.46	13	19	36.45	13	23	4.45	13	26	51.44	13	32	11.93
St. W. K. N. $u_3 =$	14	7	32.38	14	4	32.39	14	1	14.39	13	57	25.40	13	52	6.61
St. W. K. S. $u_4 =$	14	12	47.88	14	14	56.88	14	17	5.17	14	18	54.87	14	20	42.57
$u_4 - u_1 =$	1	1	17.42	1	5	35.91	1	9	52.70	1	13	30.90	1	17	6.10
$u_3 - u_2 =$	0	50	46.92	0	45	5.94	0	38	9.94	0	30	33.96	0	19	54.68
$s =$	1	52	4.34	1	50	41.85	1	48	2.64	1	44	4.86	1	37	0.78
$d =$	0	10	30.50	0	20	29.97	0	31	42.76	0	42	56.94	0	57	11.42
$s =$	28 ⁰	1'	5.10''	27 ⁰	0'	27.75''	27 ⁰	0'	39.60''	26 ⁰	1'	12.90''	24 ⁰	15'	11.70''
$d =$	2	37	37.50	5	7	29.55	7	55	41.40	10	44	14.10	14	17	51.30
$\frac{1}{4}s =$	7	0	16.27	6	55	6.94	6	45	9.90	6	30	18.22	6	3	47.92
$\frac{1}{4}d =$	0	39	24.37	1	16	52.39	1	58	55.35	2	41	3.52	3	34	27.82
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 =$	54	48	36.18	36.69	36.48	35.68	37.58								
$\frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) =$	13	42	9.04	9.17	9.12	8.92	9.39								
$m =$			+ 0.22	+ 0.35	+ 0.30	+ 0.10	+ 0.57								

Mittel $m = + 0^s.308 = + 4''.62$

$\log \operatorname{tg} \delta =$	0.0761383	0.0761383	0.0761383	0.0761383	0.0761383
$\log \cos \frac{1}{4}s =$	9.9967465	9.9968260	9.9969767	9.9971949	9.9975637
$\log \cos \frac{1}{4}d =$	9.9999715	9.9998914	9.9997401	9.9995232	9.9991544
$\log \operatorname{tg} \varphi' =$	0.0794203	0.0794209	0.0794215	0.0794202	0.0794202
$\varphi' =$	50 ⁰ 12' 35.77''	35.91''	36.05''	35.75''	35.75''

Mittel: $\varphi' = 50^0 12' 35''.85$

$\frac{1}{2}(i_o + i_w) = \quad \quad \quad - \quad 1.73$

$\varphi = 50 \quad 12 \quad 34 \quad .12$

Die Rechnung wird durch Benützung einer von O. Struve publicirten Tafel,*) welche mit dem Argumente x in Zeit den $\log \sec \frac{1}{4}x$ gibt, noch erheblich vereinfacht, indem hiedurch für die obigen Grössen s und d die Verwandlung von Zeit in Bogen und die Division durch 4 erspart wird.

216. Es ist nun noch zu zeigen, wie die Instrumentalfehler durch Beobachtungen bestimmt werden können. Hiebei kann von der Neigung der Axe abgesehen werden, weil diese stets mit Hilfe der Libelle auf bekannte Weise (§. 102) erhalten wird. Es mag nur bemerkt werden, dass, weil in alle zur Berechnung der Polhöhe selbst dienenden Gleichungen, wie wir gesehen haben, nur das arithmetische Mittel der Neigungen zur Zeit des östlichen und westlichen Durchganges eingeht, dieses aber, zufolge der Gln. (127) von dem Einflusse einer Ungleichheit der Zapfen-Durchmesser frei ist, die

*) Tabulae auxiliares ad transitus per planum primum verticale reducendos inservientes. — Edidit Otto Struve. — Petropoli, 1868.

daher rührende Correction der einzelnen Neigungen unterlassen werden kann; hingegen wird diese dann anzubringen sein, wenn in den Formeln die Differenz beider Neigungen, oder diese isolirt vorkommen, wie dies z. B. in den Gln. (247), (252), (259) und den folgenden der Fall ist.

Lassen wir in den Gln. (240) u_o und u_w die Mittel der an den verschiedenen Fäden beobachteten und auf den Mittelfaden reducirten Uhrzeiten bedeuten, und setzen der Kürze wegen:

$$S_o = u_o + Au_o, \quad S_w = u_w + Au_w,$$

wo also S_o und S_w die Sternzeiten des Durchganges des Sternes in Ost und West durch den Mittelfaden bezeichnen, so werden dieselben:

$$\begin{aligned} \text{St. O. K. N.: } \mathcal{P}_o &= S_o - \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} - \frac{i_o}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}, \\ \text{St. W. K. N.: } \mathcal{P}_w &= S_w + \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} + \frac{i_w}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}, \\ \text{St. O. K. S.: } \mathcal{P}_o &= S_o + \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} - \frac{i_o}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}, \\ \text{St. W. K. S.: } \mathcal{P}_w &= S_w - \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} + \frac{i_w}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi}. \end{aligned} \quad (274)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man sofort, dass, um einen der Fehler c oder k isolirt zu bestimmen, der Durchgang eines Sternes in Ost und West in derselben Kreislage beobachtet werden muss. Man erhält dann durch Addition der 1^{ten} und 2^{ten}, oder der 3^{ten} und 4^{ten} Gleichung, da $\frac{1}{2}(\mathcal{P}_o + \mathcal{P}_w) = \alpha$ ist:

$$\alpha = \frac{1}{2}(S_o + S_w) + \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} - \frac{k}{\sin \varphi},$$

somit:

$$k = \sin \varphi \left[\frac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha \right] + \frac{1}{2}(i_w - i_o) \operatorname{cotg} \zeta. \quad (275)$$

Durch Subtraction derselben Gleichungen ergibt sich aber:

$$\frac{1}{2}(\mathcal{P}_w - \mathcal{P}_o) = \frac{1}{2}(S_w - S_o) \pm \frac{c}{\sin \varphi \sin \zeta} + \frac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta},$$

und hieraus:

$$c = \pm \sin \varphi \sin \zeta \left[\frac{1}{2}(\mathcal{P}_w - \mathcal{P}_o) - \frac{1}{2}(S_w - S_o) \right] \mp \frac{1}{2}(i_o + i_w) \cos \zeta, \quad (276)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die beiden Durchgänge bei Kreis Nord oder bei Kreis Süd beobachtet wurden, und $\frac{1}{2}(\mathcal{P}_w - \mathcal{P}_o)$, d. i. der Stundenwinkel σ des Sternes im ersten Vertical mittelst der Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\mathcal{P}_w - \mathcal{P}_o)^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}$$

zu berechnen ist. Da in dem Ausdrücke von k in die Grösse $\frac{1}{2}(S_o + S_w)$ der Uhrstand eingeht, so wird zur Bestimmung von k nebst einem genauen Werthe der Rectascension des Sternes auch eine möglichst genaue Kenntniss des Uhrstandes erfordert. Ebenso verhält es sich für die Bestimmung von c

bezüglich der zur Berechnung von $\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ anzuwendenden Werthe von φ und δ .

Aus Gl. (276) ersieht man, dass zur Bestimmung von c mit Vortheil Sterne beobachtet werden, welche in kleinem Abstände vom Zenith durch den ersten Vertical gehen, weil dann der Factor $\sin \xi$ klein, und hiedurch der Einfluss eines Fehlers in $\frac{1}{2}(\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ und $\frac{1}{2}(S_w - S_o)$ vermindert wird.

Hingegen zeigt die Gl. (275), dass es zur Bestimmung des Azimuthes k vortheilhaft ist, einen Stern zu wählen, welcher in grösserem Abstände vom Zenith durch den ersten Vertical geht, weil bei einem solchen, vermöge seiner schnelleren Bewegung, die beobachteten Fadenantritte, also auch die Zeiten S_o und S_w genauer erhalten werden. Für solche Sterne wird aber die Zwischenzeit zwischen dem östlichen und westlichen Durchgang beträchtlich gross (für $\varphi - \delta = 10^\circ$ schon bei 6^h), womit die Gefahr einer erheblichen Aenderung des Azimuthes in der Zwischenzeit verbunden ist.

Wenn es sich daher um eine genauere Bestimmung des Azimuthes handelt, so ist es zweckmässiger, in derselben Kreislage zwei Sterne zu beobachten, welche bald nacheinander, der eine in Ost, der andere in West, in grösserer Zenithdistanz durch den ersten Vertical gehen. Lässt man dann in den Glgn. (274) die mit den Stellenzeigern o und w versehenen Buchstaben auf den in Ost, beziehungsweise West beobachteten Stern sich beziehen und bezeichnet ebenso deren Zenithdistanz im ersten Vertical mit ξ_o , bzw. ξ_w , so werden die zwei ersten Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_o - S_o) \sin \varphi \sin \xi_o &= -c - i_o \cos \xi_o - k \sin \xi_o, \\ (\mathcal{J}_w - S_w) \sin \varphi \sin \xi_w &= +c + i_w \cos \xi_w - k \sin \xi_w, \end{aligned}$$

und man erhält durch Addition, wenn zur Abkürzung

$$M_o = \frac{\sin \xi_o}{\sin \xi_o + \sin \xi_w}, \quad M_w = \frac{\sin \xi_w}{\sin \xi_o + \sin \xi_w}$$

gesetzt wird:

$$k = \sin \varphi [(S_o - \mathcal{J}_o) M_o + (S_w - \mathcal{J}_w) M_w] + \frac{i_w \cos \xi_w - i_o \cos \xi_o}{\sin \xi_o + \sin \xi_w}. \quad (277)$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich durch Verbindung der zwei letzten der Glgn. (274), wenn beide Sterne bei Kreis Süd beobachtet werden. Die in demselben erscheinenden Sternzeiten des Durchganges durch den ersten Vertical \mathcal{J}_o und \mathcal{J}_w sind hier mittelst der Gleichungen:

$$\mathcal{J}_o = \alpha_o - \sigma_o, \quad \mathcal{J}_w = \alpha_w + \sigma_w,$$

und die Stundenwinkel im ersten Vertical, σ_o und σ_w , mittelst einer der Glgn. 1) oder 11) [§. 204] zu berechnen.

Hat man, wie es zur Bestimmung von φ behufs Elimination von c und k in der Regel geschieht, den Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet, so lassen sich bei Beobachtung nur eines Sternes die beiden Fehler c und k nicht trennen, weil in den für beide Durchgänge

sich ergebenden Gleichungen die zwei Glieder mit c und k gleiches Zeichen haben. Wurde z. B. der Stern in Ost bei Kreis Nord, in West bei Kreis Süd beobachtet, so erhält man durch Addition der ersten und letzten der Gln. (274), weil $\frac{1}{2}(\mathcal{I}_o + \mathcal{I}_w) = \alpha$:

$$\alpha = \frac{1}{2}(S_o + S_w) - \frac{c}{\sin \varphi \sin \xi} + \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \xi} - \frac{k}{\sin \varphi},$$

und hieraus

für St. O. K. N.; St. W. K. S.:

$$c + k \sin \xi = \sin \varphi \sin \xi \left[\frac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha \right] + \frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \xi = A. \quad (a)$$

Beobachtet man nun aber noch einen zweiten Stern, indem man in Ost bei Kreis Süd beginnt, so erhält man durch Addition der zweiten und dritten der Gln. (274), wenn man die auf diesen Stern sich beziehenden Grössen mit accentuirten Buchstaben bezeichnet, auf gleiche Art

für St. O. K. S.; St. W. K. N.:

$$-c + k \sin \xi' = \sin \varphi \sin \xi' \left[\frac{1}{2}(S_o' + S_w') - \alpha' \right] + \frac{1}{2}(i_w' - i_o') \cos \xi' = A', \quad (b)$$

und aus beiden Gleichungen (a) und (b) folgt nun:

$$\begin{aligned} k &= \frac{A + A'}{\sin \xi + \sin \xi'}, \\ c &= \frac{A \sin \xi' - A' \sin \xi}{\sin \xi + \sin \xi'}. \end{aligned} \quad (278)$$

Werden daher, wie dies auf astronomisch-trigonometrischen Stationen gewöhnlich der Fall ist, an einem Abende mehrere Sterne zur Bestimmung der Polhöhe beobachtet, und zwar jeder derselben in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen, so ist es zweckmässig, die Beobachtung der Sterne in Ost abwechselnd in entgegengesetzten Kreislagen zu beginnen, weil dann die Beobachtungen das Materiale bieten nicht nur zur Berechnung der Polhöhe mit Elimination der ersten Potenzen von c und k , sondern auch zur Bestimmung dieser Instrumentalfehler selbst, welche Bestimmung, so weit die Kenntniss dieser Fehler nach dem am Schlusse des §. 213 Bemerkten wünschenswerth oder nothwendig ist, auch immer genügend genau sein wird. Hiebei wird man allerdings, wenn man sich zur Berechnung der Polhöhe einer der Methoden bedient, welche die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden nicht erfordern, zur Ableitung der Grössen S_o und S_w sich auf die am Mittelfaden in Ost und West beobachteten Durchgänge des Sternes beschränken müssen und daher, wegen der den einzelnen beobachteten Fadenantritten anhaftenden zufälligen Beobachtungsfehler, eine grössere Sicherheit der Bestimmung von c und k nur bei Beobachtung mehrerer Sterne an einem Abende erwarten dürfen; jeder Stern gibt dann eine Gleichung von der Form:

$$\pm c + k \sin \xi = m,$$

aus welchen c und k nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können.

Beispiel. 1864, Sept. 14, wurden auf der Station „Hohe Schneeberg“ die Sterne $31\ o^1$ Cygni und e Cygni beobachtet; nach Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden ergaben sich im Mittel aus allen Fäden folgende Uhrzeiten der Durchgänge der Sterne durch den Mittelfaden, welchen die Neigungen, Uhrstände und scheinbaren Oerter der Sterne beigefügt sind:

e Cygni.		$31\ o^1$ Cygni.	
St. O. K. N.	St. W. K. S.	St. O. K. S.	St. W. K. N.
$u_o = 18^h 53^m 56^s.98$	$u_w = 20^h 58^m 49^s.33$	$u_o = 18^h 3^m 9^s.14$	$u_w = 22^h 13^m 14^s.97$
$i_o = -0^s.216$	$i_w = -0^s.315$	$i'_o = -0^s.250$	$i'_w = -0^s.234$
$Au_o = +1^m 11^s.29$	$Au_w = +1^m 11^s.47$	$Au_o = +1^m 11^s.21$	$Au_w = +1^m 11^s.59$
$\alpha = 19^h 57^m 33^s.70$	$\delta = 49^o 44' 9''.29$	$\alpha' = 20^h 9^m 24^s.22$	$\delta' = 46^o 20' 19''.57$

Mit dem angenommenen Werthe $\varphi = 50^o 47' 36''$ findet man nach den Formeln des §. 204:

Für e Cygni: $\log \sin \varphi \sin \zeta = 9.1294$
 $\log \sin \zeta = 9.2401$
 $\log \cos \zeta = 9.9933$
 $\sin \zeta = 0.1738$

Für $31\ o^1$ Cygni: $\log \sin \varphi \sin \zeta' = 9.4434$
 $\log \sin \zeta' = 9.5542$
 $\log \cos \zeta' = 9.9702$
 $\sin \zeta' = 0.3583$

Hiernach ist die weitere Rechnung nach den vorausgehenden Formeln (a), (b) und (278) folgende:

$$\begin{aligned} u_o &= 18^h 53^m 56^s.98 & u_w &= 20^h 58^m 49^s.33 \\ Au_o &= + 1\ 11.29 & Au_w &= + 1\ 11.47 \\ S_o &= 18\ 55\ 8.27 & S_w &= 21\ 0\ 0.80 \\ S_o + S_w &= 39^h 55^m 9^s.07 \\ \frac{1}{2}(S_o + S_w) &= 19\ 57\ 34.535 \\ \alpha &= 19\ 57\ 33.70 \\ \frac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha &= + 0^s.835 \\ \log [\frac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha] &= 9.9217 \\ \log \sin \varphi \sin \zeta &= 9.1294 \\ & 9.0511 \\ & + 0.1125 \\ \frac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \zeta &= - 0.0492 \\ c + k \sin \zeta &= + 0.0633 = A \\ \log A &= 8.8014 \\ \log \sin \zeta' &= 9.5542 \\ & 8.3556 \\ A \sin \zeta' &= 0.02268 \\ A + A' &= - 0.1416 \\ \log (A + A') &= 9.1511 n \\ \log (\sin \zeta + \sin \zeta') &= 9.7260 \\ \log k &= 9.4251 n \\ k &= - 0^s.266 = - 3''.99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_o &= 18^h 3^m 9^s.14 & u_w &= 22^h 13^m 14^s.97 \\ Au_o &= + 1\ 11.21 & & + 1\ 11.59 \\ S'_o &= 18\ 4\ 20.35 & S'_w &= 22\ 14\ 26.56 \\ S'_o + S'_w &= 40^h 18^m 46^s.91 \\ \frac{1}{2}(S'_o + S'_w) &= 20\ 9\ 23.455 \\ \alpha' &= 20\ 9\ 24.22 \\ \frac{1}{2}(S'_o + S'_w) - \alpha' &= - 0^s.765 \\ \log [\frac{1}{2}(S'_o + S'_w) - \alpha'] &= 9.8837 n \\ \log \sin \varphi \sin \zeta' &= 9.4434 \\ & 9.3271 n \\ & - 0.2124 \\ \frac{1}{2}(i'_w - i'_o) \cos \zeta' &= + 0.0075 \\ - c + k \sin \zeta' &= - 0.2049 = A' \\ \log A' &= 9.3115 n \\ \log \sin \zeta &= 9.2401 \\ & 8.5516 n \\ A' \sin \zeta &= - 0.03561 \\ A \sin \zeta' - A' \sin \zeta &= + 0.05829 \\ & 8.7656 \\ \log (\sin \zeta + \sin \zeta') &= 9.7260 \\ \log c &= 9.0396 \\ c &= + 0^s.110 = + 1''.65 \end{aligned}$$

Einfacher, als nach den entwickelten Gln. (275), (276) und (278), wird übrigens die Rechnung und gleichförmig für alle Fälle, wenn man für

die beobachteten Durchgänge die entsprechenden Grundgleichungen (240) numerisch darstellt, aus welchen sich dann c und k leicht durch einfache Elimination ergeben. Für das vorliegende Beispiel steht diese Rechnung wie folgt:

e Cygni.

St. O. K. N.		St. W. K. S.
$u_o = 18^h 53^m 56^s.98$		$u_w = 20^h 58^m 49^s.33$
$\Delta u_o = + 1 11.29$		$\Delta u_w = + 1 11.47$
$\frac{i}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} = + 1.58$		$= - 2.30$
18 55 9.85		20 59 58.50

31 σ^1 Cygni.

St. O. K. S.		St. W. K. N.
$u_o = 18^h 3^m 9^s.14$		$u_w = 22^h 13^m 14^s.97$
$\Delta u_o = + 1 11.21$		$\Delta u_w = + 1 11.59$
$\frac{i}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} = + 0.84$		$= - 0.79$
18 4 21.19		22 14 25.77

Hiemit wird für *e* Cygni die 1^{te} und 4^{te} der Gln. (240):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_o &= 18^h 55^m 9^s.85 - 7.424 c - 1.291 k \\
 \mathcal{J}_w &= 20 59 58.50 - 7.424 c - 1.291 k \\
 \mathcal{J}_o + \mathcal{J}_w &= 2\alpha = 39 55 8.35 - 14.848 c - 2.582 k \\
 2\alpha &= 39 55 7.40 \\
 \hline
 0 &= + 0^s.95 - 14.848 c - 2.582 k \quad (\alpha)
 \end{aligned}$$

Für 31 σ^1 Cygni wird die 2^{te} und 3^{te} der Gln. (240):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_o &= 18^h 4^m 21^s.19 + 3.6025 c - 1.291 k \\
 \mathcal{J}_w &= 22 14 25.77 + 3.6025 c - 1.291 k \\
 \mathcal{J}_o + \mathcal{J}_w &= 2\alpha = 40 18 46.96 + 7.205 c - 2.582 k \\
 2\alpha &= 40 18 48.44 \\
 \hline
 0 &= - 1^s.48 + 7.205 c - 2.582 k \quad (\beta)
 \end{aligned}$$

Aus den Gln. (α) und (β) folgt nun durch Subtraction:

$$0 = - 2^s.43 + 22.053 c, \text{ hieraus: } c = + 0^s.110 = + 1''.65,$$

und durch Substitution dieses Werthes in eine der Gln. (α) oder (β):

$$k = - 0^s.266 = - 3''.99.$$

Sind mehr als zwei Sterne abwechselnd in verschiedenen Kreislagen beobachtet, so gibt jeder derselben eine Gleichung von der Form der Gln. (α) und (β), aus welchen c und k nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können.

Wird die Berechnung der Polhöhe nach der zweiten Methode [§. 211] vorgenommen, so ergeben sich hiebei die zur Bestimmung von c und k erforderlichen Daten. Setzt man nämlich wieder, wie in §. 215 [Gln. 271] der Kürze wegen:

$$\psi(t) = C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}, \quad \text{wo } C = \sin \varphi \cos \delta \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)},$$

indem man noch dem Buchstaben ψ den Index n oder s , dem Buchstaben t den Index o oder w beifügt, je nachdem sich die Grösse $\psi(t)$ auf einen Fadenantritt bei K. N. oder K. S., beziehungsweise in Ost oder West bezieht, und überdies zur Abkürzung

$$r = \frac{\text{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)},$$

so erhalten die Glgn. (266) folgende Gestalt:

$$\text{St. O. K. N.: } \varphi - \delta = \psi_n(t_o) - rf + c + i_o \cos \zeta + k \sin \zeta,$$

$$\text{St. W. K. S.: } \varphi - \delta = \psi_s(t_w) + rf - c + i_w \cos \zeta - k \sin \zeta,$$

$$\text{St. O. K. S.: } \varphi - \delta = \psi_s(t_o) + rf - c + i_o \cos \zeta + k \sin \zeta,$$

$$\text{St. W. K. N.: } \varphi - \delta = \psi_n(t_w) - rf + c + i_w \cos \zeta - k \sin \zeta.$$

Wurde nun ein Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet und die Beobachtung in Ost bei K. N. begonnen, so folgt durch Subtraction der zwei ersten Gleichungen:

Für St. O. K. N.; St. W. K. S.:

$$c + k \sin \zeta = \frac{1}{2} [\psi_s(t_w) - \psi_n(t_o)] + rf + \frac{1}{2} (i_w - i_o) \cos \zeta = A; \quad (c)$$

für einen zweiten Stern, dessen Beobachtung in Ost bei Kreis Süd begonnen wurde, ergibt sich durch Subtraction der zwei letzten Gleichungen:

Für St. O. K. S.; St. W. K. N.:

$$-c + k \sin \zeta' = \frac{1}{2} [\psi_n'(t_w) - \psi_s'(t_o)] - r'f + \frac{1}{2} (i_w' - i_o') \cos \zeta' = A'. \quad (d)$$

Kennt man nun die Fadendistanzen f , so sind die zweiten Theile dieser Gleichungen, A und A' bekannt, und man findet aus denselben c und k wieder mittelst der Glgn. (278). Auf diese Art gibt jeder Faden, an welchem beide Sterne in Ost und West beobachtet sind, einen Werth von c und k . Da in die Summe $A + A'$ das Glied $(r - r')f$ eingeht, so können zur Bestimmung des Azimuthes k die Fadendistanzen f unberücksichtigt bleiben, wenn ohne merklichen Fehler $r = r'$ gesetzt werden kann.

Die Beobachtung eines Sternes nach Struve's Verfahren [§. 215] liefert nebst der Polhöhe stets auch die Elemente zur Bestimmung von c und k . Denn bei Anwendung der ersten Reductionsmethode [§. 207] erhält man die vier Gleichungen (240) und durch entsprechende Combination je zweier derselben je zwei Gleichungen für c und k . Bei Anwendung der zweiten Reductionsmethode [§. 211] ergeben sich für jeden Faden, an welchem alle vier Antritte beobachtet sind, die beiden obigen Glgn. (c) und (d), welche, wenn man in der zweiten, weil in diesem Falle auf denselben Stern sich beziehend, die Accente weglässt und zur Abkürzung:

$$a = \psi_s(t_w) - \psi_n(t_o),$$

$$b = \psi_n(t_w) - \psi_s(t_o)$$

setzt, die Form:

$$\begin{aligned} c + k \sin \zeta &= \frac{1}{2} a + rf + \frac{1}{2} (i_w - i_o) \cos \zeta, \\ -c + k \sin \zeta &= \frac{1}{2} b - rf + \frac{1}{2} (i_w - i_o) \cos \zeta, \end{aligned}$$

annehmen, aus welchen durch Addition und Subtraction:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4} (a + b) \operatorname{cosec} \zeta + \frac{1}{2} (i_w - i_o) \cotg \zeta, \\ c &= \frac{1}{4} (a - b) + rf \end{aligned} \quad (279)$$

folgt. Die Fadendistanz f ist in letzterer Formel mit positivem oder negativem Zeichen einzuführen, je nachdem der Faden bei Kreis Nord nördlich oder südlich vom Mittelfaden liegt. Der Factor r kann hier stets = 1 angenommen werden, da für Sterne, welche nach diesem Verfahren beobachtet werden können, $\varphi - \delta$ immer kleiner als 1° sein wird, für welchen Werth

$$\log r = 0.000022$$

ist und die Fadendistanzen selten bis auf wenige Einheiten der fünften Ziffer genau bekannt sein werden.

In §. 215 ergaben sich bei Berechnung des Beispiels nach der ersten Reductionsmethode die vier Gleichungen (r) [S. 500]:

- 1) St. O. K. S.: $\mathcal{G}_o = 13^h 14^m 5^s.06 + 16.55 c - 1.3014 k,$
- 2) St. O. K. N.: $\mathcal{G}_o = 13 14 0.29 - 16.55 c - 1.3014 k,$
- 3) St. W. K. N.: $\mathcal{G}_w = 14 10 18.28 + 16.55 c - 1.3014 k,$
- 4) St. W. K. S.: $\mathcal{G}_w = 14 10 13.67 - 16.55 c - 1.3014 k.$

Aus diesen folgt durch Subtraction:

$$\begin{aligned} 1) - 2): 0 &= + 4^s.77 + 33.10 c, \\ 3) - 4): 0 &= + 4.61 + 33.10 c, \\ \text{Mittel: } 0 &= + 4.69 + 33.10 c; \\ c &= - 0^s.142 = - 2''.13. \end{aligned}$$

Ferner durch Addition:

$$\begin{aligned} 1) + 4): \mathcal{G}_o + \mathcal{G}_w &= 2\alpha = 27^h 24^m 18^s.73 - 2.603 k, \\ 2) + 3): \mathcal{G}_o + \mathcal{G}_w &= 2\alpha = 27 24 18.57 - 2.603 k, \\ \text{Mittel: } 2\alpha &= 27 24 18.65 - 2.603 k \\ &2\alpha = 27 24 17.64 \\ \hline 0 &= + 1^s.01 - 2.603 k \\ k &= + 0^s.388 = + 5''.82. \end{aligned}$$

Bei Berechnung desselben Beispiels nach der zweiten Reductionsmethode ergaben sich [S. 501] die Grössen $\psi(t)$ wie folgt:

Faden	VII	VIII	IX	X	XI
$\psi_s(t_o) =$	909".12	1041".47	1181".66	1306".87	1437".11
$\psi_n(t_o) =$	624.57	492.33	352.61	226.65	95.97
$\psi_n(t_w) =$	624.73	493.20	353.35	226.25	96.26
$\psi_s(t_w) =$	909.81	1041.69	1181.66	1308.29	1438.84

Da nach den S. 498 befindlichen Angaben $\frac{1}{4} \operatorname{cosec} \zeta = 3.179$, und

$$\frac{1}{2} (i_w - i_o) \cotg \zeta = + 2''.22$$

wird, so ist die Berechnung von c und k nach den Formeln (279) folgende:

	VII	VIII	IX	X	XI
$\psi_s(t_w) - \psi_n(t_o) = a =$	285''.24	549''.36	829''.05	1081''.64	1342''.87
$\psi_n(t_w) - \psi_s(t_o) = b =$	- 284.39	- 548.27	- 828.31	- 1080.62	- 1340.85
$a + b =$	+ 0''.85	+ 1''.09	+ 0''.74	+ 1''.02	+ 2''.02
$\frac{1}{4} (a + b) \operatorname{cosec} \zeta =$	+ 2.70	+ 3.46	+ 2.35	+ 3.24	+ 6.42
$k =$	+ 4.92	+ 5.68	+ 4.57	+ 5.46	+ 8.64
$a - b =$	569''.63	1097''.63	1657''.36	2162''.26	2683''.72
$\frac{1}{4} (a - b) =$	142.41	274.41	414.34	540.56	670.93
$f =$	- 144.46	- 275.83	- 416.70	- 543.07	- 672.91
$c =$	- 2.05	- 1.42	- 2.36	- 2.51	- 1.98

Hiernach ergibt sich im Mittel aus den fünf Fäden:

$$c = - 2''.06, \quad k = + 5''.85,$$

nahe übereinstimmend mit den obigen Werthen.

217. Allen bisherigen Berechnungen liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes durch den ersten Vertical der Collimationsfehler und das Azimuth des Instrumentes constant geblieben sind. Untersuchen wir nun den Einfluss, welchen eine in der Zwischenzeit eintretende Aenderung dieser Instrumentalfehler auf die berechnete Polhöhe nimmt.

Bezeichnet man den Collimationsfehler und das Azimuth beim östlichen Durchgange des Sternes, wie bisher, mit c und k , beim westlichen mit $c + \Delta c$ und $k + \Delta k$, so erhält man, wenn das Instrument zwischen beiden Durchgängen umgelegt wird, durch Subtraction der 1^{ten} und 4^{ten}, oder 2^{ten} und 3^{ten} der Gln. (240), mit Rücksicht auf Gl. (242):

$$\frac{1}{2} (\mathcal{D}_w - \mathcal{D}_o) = \Theta + \frac{\frac{1}{2} (i_o + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} \mp \frac{1}{2} \frac{\Delta c}{\sin \varphi \sin \zeta} - \frac{1}{2} \frac{\Delta k}{\sin \varphi}.$$

Setzt man nun in die Differenzialformel (m) [S. 462] einmal $\mp \frac{1}{2} \frac{\Delta c}{\sin \varphi \sin \zeta}$, dann $-\frac{1}{2} \frac{\Delta k}{\sin \varphi}$ statt $d \frac{1}{2} (\mathcal{D}_w - \mathcal{D}_o)$, so erhält man für die Correction, welche die berechnete Polhöhe in Folge der Aenderung der Collimation oder des Azimuthes erfordern würde, die Ausdrücke:

$$d\varphi = \mp \frac{1}{2} \Delta c \sec \zeta, \quad (280)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern in Ost bei Kreis Nord oder bei Kreis Süd beobachtet ist; ferner:

$$d\varphi = - \frac{1}{2} \Delta k \operatorname{tg} \zeta. \quad (281)$$

Aus ersterer Formel ersieht man, dass, da $\sec \xi$ für kleine Werthe von $\varphi - \delta$ nahe $= 1$ bleibt, eine Aenderung der Collimation in der Zwischenzeit nahe mit ihrem halben Betrage auf die berechnete Polhöhe übergeht. Da jedoch bei zweckmässiger Construction des Instrumentes, namentlich des Oculars, der Collimationsfehler erfahrungsmässig für längere Zeit nahe constant bleibt, so wird von dieser Seite kein merklicher Fehler zu besorgen sein, wenn das Instrument vorsichtig behandelt, insbesondere jeder Stoss oder stärkere Druck auf das Ocular vermieden wird.*)

Nach der zweiten der obigen Formeln erhält man für die Annahme $\Delta k = + 1''$ und $\varphi = 50^\circ$:

Für $\varphi - \delta =$	$0^\circ 30'$	1°	2°	3°	4°
$\text{tg } \xi =$	0.1220	0.1740	0.2502	0.3116	0.3662
$d\varphi =$	$- 0''.06$	$0''.09$	$0''.12$	$0''.16$	$0''.18$,

welche Beträge mit zunehmender geographischer Breite etwas abnehmen und umgekehrt. Hieraus erhellt, dass schon eine sehr kleine Aenderung des Azimuthes einen merklichen Fehler in der Polhöhe zur Folge hat. Es ist daher wesentlich, dass die Constanz des Azimuthes schon durch solide Construction und feste Aufstellung des Passage-Instrumentes möglichst gesichert sei und durch vorsichtige Behandlung desselben, insbesondere bei den Umlegungen der Axe, kein Anlass zu einer Aenderung derselben gegeben werde. Ist daher das Instrument mit einer Umlegevorrichtung nicht versehen, oder werden die Beobachtungen mit einem Universal-Instrumente ausgeführt, so kann es sich empfehlen, die Umlegung der Axe während eines Abends gänzlich zu unterlassen und dafür am nächsten Abende dieselben Sterne in der anderen Kreislage zu beobachten; das Mittel aus den an beiden Abenden aus jedem Sterne abgeleiteten Werthen der Polhöhe, deren jeder noch mit dem Einflusse des Collimationsfehlers behaftet ist, wird dann frei sein von diesem Einflusse, wenn die Collimation in der Zwischenzeit unverändert geblieben ist; auch geben die Beobachtungen jedes Abendes die Mittel zur Bestimmung des Collimationsfehlers.

Abgesehen von den aus Unvollkommenheiten des Instrumentes oder seiner Aufstellung und aus nicht genügender Vorsicht in der Behandlung desselben entspringenden zufälligen Störungen, finden Aenderungen des Azimuthes sowie der Neigung in der Regel auch allmähig, der Zeit nahe proportional statt, insbesondere in Folge der während der Dauer der Beobachtungen eintretenden Aenderung der Temperatur. Bezeichnet man die stündliche Aenderung des

*) Bei gebrochenen Fernröhren mit Prisma in der Axe hat selbstverständlich jede Aenderung in der Lage des Prismas eine Aenderung des Collimationsfehlers zur Folge. Es ist daher darauf zu achten, dass das Prisma in dem hohlen Würfel unverrückbar befestigt ist.

Azimuthes mit (Δk) , so ist, wenn σ den in Stunden ausgedrückten Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical, gleich der halben Zwischenzeit, bedeutet, $\Delta k = 2 (\Delta k) \sigma$, womit

$$d\varphi = - (\Delta k) \sigma \operatorname{tg} \zeta$$

wird. Für $(\Delta k) = 1''$ und $\varphi = 50^\circ$ wird:

für $\varphi - \delta =$	$0^\circ 30'$	1°	2°	3°	4°
$\sigma =$	$0^h.716$	$1^h.010$	$1^h.418$	$1^h.724$	$1^h.978$
$d\varphi = -$	$0''.09$	$0''.18$	$0''.35$	$0''.54$	$0''.72$,

woraus ersichtlich ist, dass insbesondere bei grösseren Werthen von $\varphi - \delta$ schon eine stündliche Aenderung des Azimuthes um einen kleinen Bruchtheil einer Secunde einen merklichen Fehler der Polhöhe nach sich zieht. Hierin liegt der wesentlichste Grund, bei der Auswahl der Sterne sich auf solche von kleiner Meridian-Zenithdistanz zu beschränken.

218. Wir haben schon in §. 207 [S. 462] den Einfluss eines Fehlers von bestimmtem Betrage in der beobachteten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2} (u_w - u_o)$ oder $\frac{1}{2} (\mathcal{J}_w - \mathcal{J}_o)$ auf die berechnete Polhöhe untersucht und gefunden, dass derselbe um so kleiner wird, je kleiner $\varphi - \delta$ ist. Dieses Ergebniss wird jedoch durch den Umstand wesentlich modificirt, dass mit abnehmendem Werthe von $\varphi - \delta$ die Unsicherheit der beobachteten Fadenantritte erheblich zunimmt, weil die auf den Faden senkrechte Componente der Bewegung des Sternes um so kleiner wird, je kleiner $\varphi - \delta$ ist. Wir wollen daher noch mit Berücksichtigung dieses Umstandes den wahrscheinlichen Fehler der Polhöhe bestimmen, welcher aus der durch die zufälligen Fehler der beobachteten Fadenantritte entspringenden Unsicherheit der halben Zwischenzeit entspringt.

Bezeichnet man mit ε den wahrscheinlichen Fehler eines Fadenantrittes, so wird der wahrsch. Fehler der halben Zwischenzeit $\frac{1}{2} (u_w - u_o) : \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$,

und für das Mittel aus n Fäden: $\pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$. Hiemit folgt als wahrscheinlicher Fehler $\varepsilon\varphi$ der Polhöhe nach Gl. (m) [S. 462]:

$$\varepsilon\varphi = \pm \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$$

Nun ist nach Gl. (138) für Verticalfäden:

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2} \sec \delta^2 \sec p^2,$$

wo p den parallaktischen Winkel, v die Vergrößerung des Fernrohres bedeutet und für Beobachtungen nach der Aug- und Ohrmethode der Gehör-

fehler $a = 0^s.07 = 1''.05$, der Gesichtsfehler für die Vergrößerung $= 1 : b = 3^s.18 = 47''.7$ gesetzt werden kann. Es ist aber im ersten Vertical: $\cos \delta \cos p = \sin \varphi \sin \zeta$, somit:

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \operatorname{cosec} \varphi^2 \operatorname{cosec} \zeta^2},$$

welcher Werth um so grösser wird, je kleiner ζ , d. i. $\varphi - \delta$ ist. Hiemit wird nun:

$$\varepsilon \varphi = \pm \frac{\sec \zeta}{\sqrt{2n}} \sqrt{a^2 \sin \varphi^2 \sin \zeta^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2}, \quad (282)$$

und dieser Ausdruck, in welchen a und b in Bogensekunden einzusetzen sind, ändert sich mit ζ , oder $\varphi - \delta$ nur sehr wenig, weil das veränderliche erste Glied unter dem Wurzelzeichen gegen das constante zweite Glied stets erheblich kleiner bleibt und $\sec \zeta$ mit $\varphi - \delta$ sich nur wenig ändert. Aus diesem Grunde ist auch $\varepsilon \varphi$ der Vergrößerung des Fernrohres nahe verkehrt proportional. Für eine Vergrößerung $v = 80$ und $\varphi = 50^\circ$ findet man für:

	$\varphi - \delta = 0^\circ 30'$	1°	2°	3°	4°
für $n = 1 : \varepsilon \varphi =$	$0''.43$	$0''.44$	$0''.46$	$0''.48$	$0''.49$
für $n = 11 : \varepsilon \varphi =$	$0''.13$	$0''.13$	$0''.14$	$0''.14$	$0''.15$

Man ersieht hieraus, dass, in so weit nur der Einfluss der zufälligen Fehler in den beobachteten Durchgangszeiten in Betracht kommt, und da auch der Einfluss eines kleinen Fehlers im Uhr gange nur gering ist (S. 463), ohne erhebliche Einbusse an Genauigkeit noch Sterne beobachtet werden können, deren Meridian-Zenithdistanz 4° und darüber beträgt; da jedoch mit zunehmendem Werthe derselben, also auch der Zwischenzeit zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes, die Gefahr einer Aenderung des Azimuthes des Instrumentes beträchtlich wächst, so bleibt es immer räthlich, sich auf kleine Werthe von $\varphi - \delta$ zu beschränken.

219. Auch bei dieser Methode der Bestimmung der Polhöhe kann die tägliche Aberration der Fixsterne unberücksichtigt bleiben. Denn zufolge der Gl. (154) ist die durch die tägliche Aberration bewirkte Aenderung des von Süd über West von 0° bis 360° gezählten Stundenwinkels: $dt = - 0^s.021 \cos z$; hieraus folgt, dass der westliche Stundenwinkel t_w durch die tägliche Aberration verkleinert, der östliche Stundenwinkel t_o um denselben Betrag vergrößert wird, die tägliche Aberration daher auf die Summe $t_o + t_w$ oder die Differenz $\mathcal{P}_w - \mathcal{P}_o$, daher auch auf die berechnete Polhöhe keinen Einfluss hat.