sind, mit Vortheil angewendet, weil sie wenig Zeit erfordert, mit Ausnahme der Mittagsstunden zu gelegenen, durch andere Beobachtungen nicht in Anspruch genommenen Zeit ausgeführt werden kann und dabei eine völlig genügende Schärfe gewährt. Auch kann die Zeitbestimmung nach diesem Verfahren mit Vortheil mit der Messung des Azimuthes eines irdischen Objectes verbunden werden.

ACHTES CAPITEL.

BESTIMMUNG DER POLHÖHE.

1. Aus beobachteten Zenithdistanzen.

185. Beobachtet man die Zenithdistanz z eines Gestirnes, dessen Rectascension α und Declination δ bekannt sind, zur Uhrzeit u und kennt man den Stand Δu der Uhr gegen Sternzeit, so ist auch der Stundenwinkel $t = u + \Delta u - \alpha$ bekannt und man kann die Polhöhe des Beobachtungsortes aus der Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \qquad (a)$$

berechnen. Setzt man:

$$\sin\delta = m \sin M$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos M,$$

so wird $\cos z = m \cos(\varphi - M)$ und:

$$\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos t}, \quad \cos(\varphi - M) = \frac{\cos z \sin M}{\sin\delta}.$$

Da der dem $\cos(\varphi - M)$ entsprechende, 180^0 nicht überschreitende Winkel positiv oder negativ genommen werden kann, so erhält man aus letzter Gleichung zwei Werthe von φ, von welchen jener als der dem Beobachtungsorte entsprechende zu nehmen ist, welcher der stets näherungsweise bekannten Breite des Ortes zunächst liegt.

186. Um den Einfluss von Fehlern in den Rechnungselementen auf die berechnete Polhöhe kennen zu lernen, differenzire man die Gl. (a) nach allen darin vorkommenden Grössen; man erhält, behufs Reduction von den Glgn. (19) und (24) Gebrauch machend:

$$d\varphi = \sec A\, dz - \cos\varphi \operatorname{tg} A\, dt + \sec A \cos q\, d\delta, \qquad (202)$$

wo A das Azimuth und q den parallaktischen Winkel bedeutet.

Die Coefficienten von dz und dt werden ein Minimum für $A = 0$ oder $= 180^0$, d. i., wenn der Stern im Meridiane beobachtet wird. In diesem Falle wird $\operatorname{tang} A = 0$, es hat ein Fehler im Stundenwinkel, d. i. in der Rectascension des Gestirnes oder dem angenommenen Uhrstande keinen Einfluss auf die berechnete Polhöhe. Beobachtet man aber die Zenithdistanz des Gestirnes zu beiden Seiten des Meridians in gleichem Azimuthe oder Stundenwinkel, so erhält tang A, also auch der Coefficient von dt in beiden Fällen entgegengesetztes Zeichen und es wird daher das Mittel aus den aus beiden Beobachtungen berechneten Werthen der Polhöhe frei sein von dem Einflusse eines Fehlers im Uhrstande oder in der Rectascension.

Im Meridiane erreicht auch der Coefficient von dz, sec A, seinen kleinsten Werth, und zwar $+1$ oder -1, je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith beobachtet wurde. Beobachtet man daher zwei Sterne auf entgegengesetzten Seiten des Zeniths, so wird das Mittel der aus beiden Beobachtungen abgeleiteten Polhöhen von dem Einflusse eines constanten Fehlers in den gemessenen Zenithdistanzen frei sein. Auf diese Art wird z. B. der Einfluss der Biegung des Fernrohres, deren Ausdruck von der Form $a \sin z$ ist [§. 125], eliminirt, wenn beide Sterne in nahe gleichen Zenithdistanzen südlich und nördlich vom Zenith beobachtet werden, zu welchem Zwecke die Sterne so zu wählen sind, dass die Summe beider Declinationen nahe gleich der doppelten Polhöhe sei.

Der Coefficient $\sec A \cos q$ von $d\delta$ erlangt für Sterne, welche südlich vom Zenith culminiren ($\delta < \varphi$), seinen kleinsten Werth $= +1$ im Meridiane. Für nördlich vom Zenith culminirende Sterne ($\delta > \varphi$) wird dieser Coefficient im Meridiane ein Maximum, und zwar $= +1$ in der oberen, $= -1$ in der unteren Culmination,*) während derselbe seinen kleinsten Werth $= 0$ in der grössten östlichen oder westlichen Digression des Sternes erreicht, wo $q = 90^0$ wird.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass bei Sternen, welche nicht dem Pole nahe stehen, es am vortheilhaftesten ist, die Zenithdistanzen im Meridiane zu messen, dass diese Vortheile aber auch noch erreicht werden, wenn die Messung in der Nähe des Meridians erfolgt, weil die Differenzialquotienten daselbst ihre Zahlenwerthe nur sehr langsam ändern und der Einfluss constanter Fehler durch entsprechende Anordnung der Beobachtungen eliminirt werden kann, mit Ausnahme eines Fehlers in der Declination des Sternes, welcher stets mit seinem vollen Betrage auf die berechnete Polhöhe übergeht; aus letzterem Grunde sind Sterne zu wählen, deren Declination möglichst genau bekannt ist.

Bei dem Pole nahe stehenden Sternen, deren Azimuth sich von 180^0 wenig entfernt, bleibt der Coefficient von dt immer sehr klein, jener von $d\delta$ zwischen den Grenzen 0 und ± 1 eingeschlossen und können daher solche

---

*) Mit Hilfe der 1ten der Glgn. (s) S. 400 und der Gl. (22) bringt man den Coefficienten leicht auf die Form:

$$\sec A \cos q = \frac{\tang \varphi - \tang \delta \cos t}{\tang \varphi \cos t - \tang \delta},$$

aus welcher sich die obigen Bemerkungen leicht folgern lassen.

Sterne, namentlich der Polarstern, in allen Stundenwinkeln mit Vortheil beobachtet werden; dabei erhalten die Coefficienten von dt und $d\delta$ für um 180^0 oder 12^h verschiedene Stundenwinkel sehr nahe gleichen Zahlenwerth und entgegengesetztes Zeichen, so dass das Mittel aus mehreren Beobachtungen von dem Einflusse constanter Fehler in der Rectascension und Declination des Sternes frei sein wird, wenn die Beobachtungen paarweise auf um 180^0 verschiedene Stundenwinkel vertheilt werden.

187. Die Messung der Meridian-Zenithdistanz eines Sternes, d. i. der Zenithdistanz desselben zur Zeit seiner Culmination, führt auf dem einfachsten Wege zur Kenntniss der Polhöhe. Bezeichnet man nämlich die Meridian-Zenithdistanz mit ζ, so ist nach §. 23:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für Obere Culmination, südlich vom Zenith:} & \varphi = \delta + \zeta, \\ \text{„ \quad „ \quad „ \quad nördlich „ \quad „} & \varphi = \delta - \zeta, \\ \text{„ Untere Culmination} & \varphi = 180^0 - (\delta + \zeta). \end{array}\right\} \quad (203)$$

Der auf diese Art erhaltene Werth der Polhöhe ist, abgesehen von einem Fehler in der Zenithdistanz ζ, noch mit dem Fehler der angenommenen Declination des Sternes behaftet.

Beobachtet man aber einen dem Pole nahe stehenden Stern in beiden Culminationen, so hat man, wenn die Meridian-Zenithdistanzen in der oberen und unteren Culmination beziehungsweise mit ζ und ζ', die Declinationen zur Zeit der Beobachtung mit δ, δ' bezeichnet werden, die beiden Gleichungen:

$$\varphi = \delta - \zeta, \text{ und } \varphi = 180^0 - (\delta' + \zeta'),$$

deren arithmetisches Mittel den Werth:

$$\varphi = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')$$

darbietet, welcher von einem Fehler in der Declination des Sternes frei ist, da die Differenz $\delta - \delta'$ nur die Aenderung derselben durch Präcession, Nutation und Aberration in der Zwischenzeit zwischen beiden Culminationen darstellt, welche mit grosser Schärfe bekannt ist.

188. Die im Vorigen angegebene Methode zur Bestimmung der Polhöhe durch directe Beobachtung der Meridian-Zenithdistanzen wird jedoch mit Vortheil nur auf Sternwarten, wo im Meridian fest aufgestellte Instrumente zur Verfügung stehen, angewendet. Bei Benützung von transportablen Instrumenten, wie Universal-Instrumenten, Sextanten u. dgl., beobachtet man eine Reihe von Zenithdistanzen in der Nähe und zu beiden Seiten des Meridians, welches Verfahren unter dem Namen: Methode der Circum-Meridian-Zenithdistanzen oder Circum-Meridianhöhen bekannt ist.

Statt nun aus jeder einzelnen Zenithdistanz nach den Formeln in §. 185 die Polhöhe zu berechnen, ist es vortheilhafter, aus den beobachteten Zenithdistanzen z zunächst die Meridian-Zenithdistanz ζ abzuleiten, mittelst welcher man sofort nach den Formeln (203) die Polhöhe findet.

Setzt man zu diesem Zwecke in der Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

$\cos t = 1 - 2 \sin\frac{1}{2}t^2$, so kommt:

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2,$$

oder:

$$\cos z = \cos(\delta - \varphi) - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2.$$

Es ist aber, wenn ζ die Meridian-Zenithdistanz bedeutet: $\zeta = \varphi - \delta$ oder $\zeta = \delta - \varphi$, je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith culminirt, somit in beiden Fällen:

$$\cos z - \cos\zeta = - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\zeta + z) \sin\tfrac{1}{2}(\zeta - z) = - \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2;$$

man hat daher für obere Culmination:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - z) = - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin\frac{1}{2}(\zeta + z)} \sin\tfrac{1}{2}t^2, \tag{204}$$

wo $\zeta - z$ die Reduction der beobachteten Zenithdistanz z auf die Meridian-Zenithdistanz in der oberen Culmination ist.

Findet aber die Beobachtung näher an der unteren Culmination statt, so zähle man den Stundenwinkel vom nördlichen Theile des Meridians ab; man hat dann in der ersten der obigen Gleichungen $180^0 - t$ statt t zu schreiben und erhält:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

oder $\cos t = 1 - 2 \sin\frac{1}{2}t^2$ setzend:

$$\begin{aligned}\cos z &= - \cos(\varphi + \delta) + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2 \\ &= \cos[180^0 - (\varphi + \delta)] + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2,\end{aligned}$$

d. i., weil in der unteren Culmination die Meridian-Zenithdistanz $\zeta = 180^0 - (\varphi + \delta)$ ist,

$$\cos z - \cos\zeta = 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2,$$

woraus für untere Culmination:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - z) = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin\frac{1}{2}(\zeta + z)} \sin\tfrac{1}{2}t^2 \tag{205}$$

folgt, wo $\zeta - z$ die Reduction der beobachteten Zenithdistanz auf die Meridian-Zenithdistanz in der unteren Culmination ist.

Setzt man im zweiten Theile der Glgn. (204) und (205) für ζ den entsprechenden Werth aus den Glgn. (203), so erhalten dieselben folgende Form:

Für O. C. südlich vom Zenith:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = - \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta + z)} \sin \tfrac{1}{2} t^2 ; \tag{206}$$

für O. C. nördlich vom Zenith:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = - \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \frac{1}{2} (\delta - \varphi + z)} \sin \tfrac{1}{2} t^2 ; \tag{207}$$

für U. C.:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta - z)} \sin \tfrac{1}{2} t^2 . \tag{208}$$

Bei der Rechnung nach diesen Formeln wird im zweiten Theile für φ ein genäherter Werth angenommen; sollte der angenommene Werth von dem aus der Berechnung der Beobachtungen hervorgehenden Werthe von φ erheblich abweichen, so ist die Rechnung zu wiederholen, indem man nunmehr von letzterem als Näherungswerth ausgeht. Da $\frac{1}{2} (\zeta - z)$ immer ein sehr kleiner Bogen ist, so ist der Einfluss eines Fehlers in dem angenommenen Werthe von φ nur gering. Bezeichnet man letzteren Fehler mit $\Delta\varphi$, den daraus entspringenden Fehler in der berechneten Polhöhe mit $d\varphi$, so ist, wie man durch Differenziation der vorstehenden Gleichungen mit Zuziehung jener (203) leicht findet,

für obere Culmination:

$$d\varphi = \mp \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\zeta - z) \left[2 \operatorname{tg} \varphi \pm \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\zeta + z)\right] \Delta\varphi, \tag{a}$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith culminirt;

für untere Culmination:

$$d\varphi = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\zeta - z) \left[2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\zeta + z)\right] \Delta\varphi. \tag{b}$$

Um aus dem $\log \sin \frac{1}{2} (\zeta - z)$, welchen die Rechnung nach obigen Formeln ergibt, sofort $\zeta - z$ in Bogensecunden zu erhalten, kann man sich der folgenden Tafel bedienen, aus welcher man mit dem Argumente:

$$\log \sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = \log \sin \tfrac{1}{2} x$$

die Zahl R entnimmt, welche, zu diesem Logarithmus addirt, den Logarithmus von $x = \zeta - z$ in Bogensecunden gibt.

$$\log x'' = \log \sin \tfrac{1}{2} x + R$$

$\frac{1}{2} x$	$\log \sin \frac{1}{2} x$	R	$\frac{1}{2} x$	$\log \sin \frac{1}{2} x$	R
0° 7′ 44″	7.3521	5.615455	0° 40′ 13″	8.0681	5.615465
0 12 10	7.5489	5.615456	0 42 10	8.0887	5.615466
0 17 40	7.7109	5.615457	0 44 5	8.1080	5.615467
0 21 45	7.8012	5.615458	0 45 53	8.1254	5.615468
0 25 15	7.8660	5.615459	0 47 40	8.1419	5.615469
0 28 15	7.9147	5.615460	0 49 20	8.1569	5.615470
0 31 0	7.9551	5.615461	0 50 57	8.1709	5.615471
0 33 35	7.9898	5.615462	0 52 33	8.1843	5.615472
0 35 55	8.0190	5.615463	0 54 3	8.1965	5.615473
0 38 7	8.0448	5.615464	0 55 33	8.2084	5.615474

Bis $\frac{1}{2}x = 0^0\ 7'\ 44''$ gilt $R = 5.615455$. — Die folgenden Zahlen R entsprechen den zugehörigen Werthen von $\frac{1}{2}x$, so dass jede dieser Zahlen von der Mitte des vorhergehenden bis zur Mitte des folgenden Intervalles gilt.

189. Werden die Zenithdistanzen mit einem Universal-Instrumente gemessen, so ist in jeder der beiden Kreislagen die gleiche Anzahl von Beobachtungen zu machen, entweder in der Art, dass man zuerst in der einen, dann in der andern Kreislage Einstellungen in gleicher Anzahl vornimmt, oder indem man auf n Einstellungen in der ersten Kreislage die doppelte Anzahl in den anderen folgen lässt und wieder mit n Einstellungen in der ersten Kreislage schliesst. Die Berechnung der Beobachtungen geschieht dann am einfachsten in der Art, dass man zunächst die jeder einzelnen Einstellung entsprechende wahre Zenithdistanz z ableitet. Vorausgesetzt, dass die Ablesung am Verticalkreise bei Kreis Rechts mit wachsender Zenithdistanz zunimmt, hat man, wenn mit $Z.\ P.$ der Zenithpunct, mit R und L die Lesungen des Kreises (Mittel beider Nonien oder Mikroskope) bei K. R. und K. L., mit a, i die Ablesungen der Libelle (von der Mitte der Skala aus), und zwar mit a jene des nach Aussen oder gegen den Stern, mit i jene des nach Innen gekehrten Blasenendes, endlich mit r die Refraction bezeichnet werden:

$$\text{bei K. R. } z = (R - Z.\ P.) + \tfrac{1}{2}\mu\,(i - a) + r,$$
$$\text{„ K. L. } z = (Z.\ P. - L) + \tfrac{1}{2}\mu\,(i - a) + r,$$

wo die Refractionen mit den durch die Differenzen $R - Z.\ P.$ und $Z.\ P. - L$ hinreichend nahe gegebenen scheinbaren Zenithdistanzen berechnet werden können. Den Zenithpunkt findet man leicht entweder durch Beobachtung eines irdischen Objectes (§. 123), oder aus den Beobachtungen des Sternes selbst nach dem S. 335 in der Anmerkung angegebenen Verfahren.

Die Stundenwinkel t ergeben sich aus den beobachteten Uhrzeiten mit Zuziehung des Standes der Uhr gegen Sternzeit und der Rectascension des Sternes,*) wornach die Reduction auf den Meridian für jede Beobachtung nach den Formeln des vorhergehenden §. berechnet werden kann. Durch Verbindung derselben mit den wahren Zenithdistanzen erhält man die noch mit dem Fehler des angenommenen Zenithpunctes behafteten Meridian-Zenithdistanzen, von welchen je zwei, entgegengesetzten Kreislagen entsprechende und symmetrisch liegende zu einem arithmetischen Mittel zu vereinigen sind,

---

*) Ist der Stern an einer nach mittlerer Zeit regulirten Uhr beobachtet, so hat man die beobachtete, um den Stand der Uhr gegen mittlere Zeit corrigirte Uhrzeit in Sternzeit zu verwandeln, deren Vergleichung mit der Rectascension des Sternes sofort den Stundenwinkel liefert. Oder: man verwandle die Rectascension (= Sternzeit der Culmination) in mittlere Zeit; die Differenz zwischen dieser und der um den Stand der Uhr gegen mittlere Zeit verbesserten Uhrzeit der Beobachtung gibt den Stundenwinkel ausgedrückt in mittlerer Zeit, welcher dann noch nach dem Verhältnisse 1^h mittl. Zeit $= 1^h + 9^s.856$ Sternzeit in Sternzeit auszudrücken ist.

wodurch sich die vom Fehler des angenommenen Zenithpunctes befreiten Meridian-Zenithdistanzen ergeben. Aus diesen findet man endlich mit Zuziehung der Declination des beobachteten Sternes nach (203) die Polhöhe.

Eine solche aus mehreren auf beide Kreislagen symmetrisch vertheilten Beobachtungen bestehende Reihe wird gewöhnlich ein „Satz“ (auch „Stand“) genannt. Zur Erzielung eines genaueren Resultates wird man mehrere Sätze beobachten, und hiebei, behufs Elimination der periodischen Theilungsfehler, bei jedem Satze durch Drehung des Kreises den Zenithpunct um $\frac{180^0}{n}$ ändern, wenn n die Anzahl der zu beobachteten Sätze bedeutet. Ist der beobachtete Stern der Polarstern, so empfiehlt es sich aus den am Schlusse des §. 186 angeführten Gründen, die n Sätze gleichmässig auf je zwei um nahe 12^h verschiedene Stundenwinkel zu vertheilen.

Bei der Beobachtung des Sternes stellt man das Fernrohr so ein, dass der Horizontalfaden dem Sterne im Sinne seiner Bewegung in Zenithdistanz etwas voraus liegt, so dass nach kurzer Zeit der Durchgang des Sternes durch den Horizontalfaden u. zw. zur Vermeidung des in §. 124 betrachteten Fehlers auch möglichst nahe am verticalen Mittelfaden erfolgt, zu welchem Momente des Durchganges des Sternes die Uhrzeit zu beobachten ist. Sollten statt des einen Horizontalfadens zwei nahe liegende horizontale Fäden vorhanden sein, so beobachtet man die Zeit, wann der Stern dem Augenmasse nach in der Mitte zwischen den beiden Fäden steht; wenn die beiden Horizontalfäden nicht zu entfernt von einander abstehen, so gewährt diese Art der Beobachtung denselben Grad der Genauigkeit, als wenn der Durchgang des Sternes durch einen Faden beobachtet würde. Nach der Beobachtung des Durchganges des Sternes am Horizontalfaden erfolgt die Ablesung der Libelle des Höhenkreises und hierauf die Ablesung der Mikroskope des Höhenkreises. Da die Fehler in den Ablesungen des Höhenkreises im vollen Betrage auf die abgeleitete Zenithdistanz, also auch auf die aus dieser abgeleitete Polhöhe übergehen, so ist es geboten, die Lesung jedes Mikroskopes um den Fehler des Schraubenmikrometers nach §. 112 zu verbessern.

Die auf solche Art bestimmte Polhöhe ist noch mit dem Einflusse der Biegung des Fernrohres behaftet. Da nach §. 125 die hieraus resultirende Correction der gemessenen Zenithdistanz $+ a \sin z$ ist, wenn a die Constante der Biegung im Horizonte bedeutet, so wird, wenn man mit φ_0 die ohne Rücksicht auf die Biegung berechnete Polhöhe bezeichnet, vermöge der Glgn. (203), die verbesserte Polhöhe φ,

für südlich vom Zenith culminirende Sterne:

$$\varphi = \varphi_0 + a \sin z,$$

für nördlich vom Zenith culminirende Sterne:

$$\varphi = \varphi_0 - a \sin z.$$

Beobachtet man daher mehrere Sterne südlich und nördlich vom Zenith, so liefert jeder derselben eine solche Gleichung, aus welcher die wahrscheinlichsten Werthe von φ und a nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden können. Am einfachsten und wol auch am zweckmässigsten ist es, nebst dem Polarstern noch einige südliche Sterne zu beobachten, deren Meridian-Zenithdistanzen im Mittel der mittleren Zenithdistanz des Polarsternes $(90^0 - \varphi)$ bis auf etwa 5^0 nahe kommen; man kann dann die den südlichen Sternen entsprechenden Gleichungen in ein Mittel vereinigen, aus dessen Verbindung mit der dem Polarsterne entsprechenden Gleichung die Werthe von φ und a sich ergeben.

Betreffend die Wahl der Sterne mag noch bemerkt werden, dass Sterne, welche nahe am Zenith culminiren, zu vermeiden sind, weil, wie ein Blick auf die Formeln im vorhergehenden §. zeigt, mit abnehmender Meridian-Zenithdistanz der Factor von $\sin \frac{1}{2} t^2$, somit auch der Einfluss eines Fehlers in t, d. i. in der beobachteten Zeit zunimmt. Eben so wird man, wegen der mit wachsender Zenithdistanz zunehmenden Unsicherheit der Refraction, Beobachtungen in geringeren Höhen zu vermeiden haben.

190. Beispiel. 1864, September 22, wurden auf dem Dreieckspuncte „Hohe Schneeberg“ bei Bodenbach in Böhmen mit einem Universal-Instrumente von Starke & Kammerer mit 10zölligem Verticalkreise die folgenden Zenithdistanzen des Polarsternes beobachtet:

Kreislage	Uhr	Mikroskop I	Mikroskop II	Libelle a	Libelle i	Barom.	Aeuss. Therm.
						mm	
K. L.	$16^h\ 6^m\ 37^s.0$	$64^0\ 53'\ 12''.5$	$53'\ 2''.2$	16.65	17.90	702.90	$15^0.2$ C.
	8 34 .5	53 42 .5	53 33 .0	16.60	18.10	$16^0.2$ C.	
	10 22 .0	54 10 .6	53 59 .8	16.95	17.70		
	12 12 .0	54 40 .6	54 31 .3	15.95	18.85		
	14 3 .0	55 6 .0	54 57 .0	17.15	18.60		
K. R.	16 17 26 .0	145 15 59 .2	16 12 .1	18.35	16.50		
	19 47 .0	15 23 .4	15 38 .4	18.95	15.85		
	21 29 .0	14 55 .5	15 9 .6	18.95	15.80		
	23 31 .5	14 22 .4	14 37 .2	19.50	15.40	702.90	$14^0.9$
	25 9 .5	13 56 .6	14 10 .1	19.75	15.05	$16^0.2$	

Scheinbarer Ort des Sternes: $\alpha = 1^h\ 10^m\ 42^s.23$; $\delta = 88^0\ 35'\ 14''.57$.

Sternzeit $=$ Uhrzeit $+\ 1^m\ 26^s.84$ um $16^h\ 16^m$ Uhrzeit; täglicher Gang $= +\ 2^s.044$; Zenithpunct Z. P. $= 105^0\ 5'\ 58''$; 1 Scalentheil der Libelle $\mu = 2''.257$.

Angenommen: $\varphi = 50^0\ 47'\ 36''$; $\log \cos\varphi \cos\delta = 8.192658$.

Ableitung der wahren Zenithdistanzen z.

Kreis-lage	Kreis-Lesung	Z. P. — L. / R. — Z. P.	$\frac{1}{2}\mu(i-a)$	Refract.	z
K. L.	64° 53′ 7″.35	40° 12′ 50″.65	+ 1″.41	+ 44″.58	40° 13′ 36″.64
	53 37 .75	12 20 .25	1 .69	44 .57	13 6 .51
	54 5 .20	11 52 .80	0 .85	44 .56	12 38 .21
	54 35 .95	11 22 .05	3 .27	44 .56	12 9 .88
	55 1 .50	10 56 .50	+ 0 .51	44 .55	11 41 .56
K. R.	145 16 5 .65	10 7 .65	— 2 .09	+ 44 .54	10 50 .10
	15 30 .90	9 32 .90	3 .50	44 .53	10 13 .93
	15 2 .55	9 4 .55	3 .55	44 .52	9 45 .52
	14 29 .80	8 31 .80	4 .63	44 .51	9 11 .68
	14 3 .35	40 8 5 .35	— 5 .30	+ 44 .50	40 8 44 .55

Berechnung der Reduction $\zeta - z$ auf den Meridian in den U. C. nach Gl. (208).

$\varphi+\delta-z$	$\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)$	t	$\frac{1}{2}t$	log cos $\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)$
99° 9′ 13″.93	49° 34′ 37″.0	2^h 57^m $21^s.6$	22° 10′ 12″.0	9.811861
9 44 .06	34 52 .0	2 59 19 .1	22 24 53 .2	811823
10 12 .36	35 6 .2	3 1 6 .6	22 38 19 .5	811789
10 40 .69	35 20 .3	2 56 .6	22 52 4 .5	811753
11 9 .01	35 34 .5	4 47 .6	23 5 57 .0	811719
12 0 .47	36 0 .2	8 10 .6	23 31 19 .5	811655
12 36 .64	36 18 .3	10 31 .6	23 48 57 .0	811610
13 5 .05	36 32 .5	12 13 .6	24 1 42 .0	811575
13 38 .89	36 49 .4	14 16 .1	24 17 0 .7	811533
99 14 6 .02	49 37 3 .0	3 15 54 .1	24 29 15 .7	9.811500

$\log \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)}$	$\log \sin \frac{1}{2} t$	$\log \sin \frac{1}{2}(\zeta-z)$	$\log \frac{1}{2}(\zeta-z)$	$\zeta-z$
8.380797	9.576751	7.534299	3.149755	+ 23′ 31″.74
380835	581277	543389	158845	24 1 .60
380869	585370	551609	167065	24 29 .15
380905	589511	559927	175383	24 57 .56
380939	593644	568227	183683	25 26 .45
381003	601085	583173	198629	26 19 .90
381048	606165	593378	208834	26 57 .46
381083	609795	600673	216129	27 24 .86
381125	614108	609341	224797	27 58 .02
8.381158	9.617522	7.616202	3.231658	+ 28 24 .74

Verbindet man endlich durch Addition die Reduction auf den Meridian $\zeta - z$ mit den Zenithdistanzen z im ersten Tableau, so erhält man die Meridian-Zenithdistanzen ζ, und durch Vereinigung je zweier derselben (der 1ten mit der letzten, der 2ten mit der vorletzten etc.) die von dem Fehler des angenommenen Zenithpunctes befreiten Meridian-Zenithdistanzen, aus welchen mit Zuziehung der Declination nach der 3ten der Glgn. (203) die Polhöhe hervorgeht.

Kreislage	Mer.-Zen.-Dist. ζ	ζ Mittel aus beiden Kreislagen	φ
K. L.	40° 37′ 8″.38	40° 37′ 8″.83	50° 47′ 36″.60
	8 .11	8 .91	36 .52
	7 .36	8 .87	36 .56
	7 .44	9 .41	36 .02
	8 .01	9 .01	36 .42
K. R.	40 37 10 .00	Mittel: φ =	50° 47′ 36″.42
	11 .39		
	10 .38		
	9 .70		
	9 .29		

191. Statt der in §. 188 entwickelten strengen Formeln zur Berechnung der Reduction auf den Meridian kann man in den meisten Fällen mit Vortheil Reihenentwicklungen anwenden. In §. 188 hatten wir die Gleichung:

$$\cos z = \cos \zeta \mp \cos \varphi \cos \delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2,$$

wo z die beobachtete, ζ die Meridian-Zenithdistanz bedeutet, das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem sich ζ auf obere oder untere Culmination bezieht, und in letzterem Falle der Stundenwinkel t vom nördlichen Theile des Meridians aus zu zählen ist. Setzen wir die stets kleine Grösse:

$$\cos \varphi \cos \delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 = h,$$

so wird:

$$\cos z = \cos \zeta \mp h, \tag{a}$$

oder:

$$z = \operatorname{arc} \cos (\cos \zeta \mp h),$$

und es kann nun diese Function nach dem Taylor'schen Lehrsatze in eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickelt werden. Setzt man:

$$\cos \zeta = x, \quad \operatorname{arc} \cos x = f(x),$$

so wird:

$$z = \operatorname{arc} \cos (x \mp h),$$

somit:

$$z = f(x) \mp \frac{df}{dx} h + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} h^2 \mp \tfrac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} h^3 + \ldots .$$

Nun ist:

$$f(x) = \operatorname{arc} \cos x = \zeta,$$

$$\frac{df}{dx} = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sin \zeta},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sin\zeta^2}\operatorname{cotg}\zeta,$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}[1+3x^2(1-x^2)^{-1}] = -\frac{1+3\operatorname{cotg}\zeta^2}{\sin\zeta^3},$$

folglich, wenn man sofort $f(x) = \zeta$ ausdrückt:

$$\zeta = z \mp \frac{h}{\sin\zeta} + \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{\sin\zeta^2}\operatorname{cotg}\zeta \mp \tfrac{1}{6}\frac{h^3}{\sin\zeta^3}(1+3\operatorname{cotg}\zeta^2) + \ldots. \quad (b)$$

Setzt man nun für h seinen Werth, so wie für ζ der Reihe nach die Werthe aus den Glgn. (203), und dividirt die mit den Potenzen von h multiplicirten Glieder durch $\sin 1''$, um sie in Bogensecunden auszudrücken, so erhält man, bis zur zweiten Potenz von h, d. i. bis zur vierten Potenz von $\sin\frac{1}{2}t$ gehend, und der Kürze wegen:

$$m = \frac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}, \quad n = \frac{2\sin\frac{1}{2}t^4}{\sin 1''}$$

setzend:

für südliche Sterne:

$$\varphi = \delta + z - A\,.\,m + A^2\operatorname{cotg}(\varphi-\delta)\,.\,n, \quad (209)$$

$$\text{wo } A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)};$$

für nördliche Sterne:

Ob. Culm. $$\varphi = \delta - z + A\,.\,m - A^2\operatorname{cotg}(\delta-\varphi)\,.\,n, \quad (210)$$

$$\text{wo } A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta-\varphi)};$$

Unt. Culm. $$\varphi = 180^0 - \delta - z - A\,.\,m + A^2\operatorname{cotg}(\varphi+\delta)\,.\,n, \quad (211)$$

$$\text{wo } A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi+\delta)};$$

in letzterer Formel ist der Stundenwinkel vom nördlichen Meridian ab zu zählen.

Die Werthe von m und n oder deren Logarithmen können den S. 328 citirten Hilfstafeln mit dem Argumente t = Stundenwinkel unmittelbar entnommen werden; zur Berechnung der Coefficienten von m und n ist ein genäherter Werth der Polhöhe anzuwenden.

In obigen Formeln sind die Glieder 6ter und höherer Ordnung vernachlässigt, weil nur, wenn dies gestattet ist, der Gebrauch derselben einen Vortheil vor den strengen Formeln (§. 188) gewährt. Das Glied 6ter Ordnung ist:

für südliche Sterne:

$$-\tfrac{2}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right\}^3[1+3\operatorname{cotg}(\varphi-\delta)^2]\frac{2\sin\frac{1}{2}t^6}{\sin 1''};$$

für nördliche Sterne:

Ob. Culm.: $$+\tfrac{2}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta-\varphi)}\right\}^3[1+3\operatorname{cotg}(\delta-\varphi)^2]\frac{2\sin\frac{1}{2}t^6}{\sin 1''},$$

$$\text{Unt. Culm.: } -\tfrac{2}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi+\delta)}\right\}^3\left[1+3\operatorname{cotg}(\varphi+\delta)^2\right]\frac{2\sin\frac{1}{2}t^6}{\sin 1''},$$

wornach für gegebene Werthe von φ und δ der Stundenwinkel berechnet werden kann, für welchen der Werth dieses Gliedes eine bestimmte, mit Rücksicht auf den geforderten Grad der Genauigkeit der Rechnung nicht zu überschreitende Grenze $\Delta\varphi$ erreicht. Hiernach findet man z. B. für $\Delta\varphi = 0''.1$ und $\Delta\varphi = 0''.01$:

	$\Delta\varphi = 0''.1$	$\Delta\varphi = 0''.01$
für $\varphi = 40^0$, $\delta = -10^0$:	$t = 32^m\ 19^s$	$22^m\ 1^s$
„ $\varphi = 50^0$, $\delta = +10^0$:	$t = 29\ \ 37$	$20\ \ 10$
„ $\varphi = 60^0$, $\delta = +30^0$:	$t = 28\ \ 22$	$19\ \ 19$

wo die Combinationen von φ und δ so gewählt sind, dass $\varphi - \delta = 90^0 - \varphi$, d. i. gleich der mittleren Meridian-Zenithdistanz des Polarsternes ist. Für eine bestimmte Polhöhe nimmt, wie aus obigen Ausdrücken sofort ersichtlich ist, der einer gegebenen Fehlergrenze entsprechende Stundenwinkel zu oder ab, je nachdem $\varphi - \delta$ grösser oder kleiner wird.

Die Formeln (210) und (211) können auch zur Reduction von Beobachtungen des Polarsternes benützt werden, und zwar, weil für diesen Stern die Grösse A wegen des im Zähler befindlichen Faktors $\cos\delta$ klein wird, je nach der Polhöhe bis zu Stundenwinkeln von nahe 3^h bis $3^h.5$, beziehungsweise 2 bis $2^h.5$, wenn der Betrag des vernachlässigten Gliedes 6^ter^ Ordnung $0''.1$, beziehungsweise $0''.01$ nicht überschreiten soll. Bei grösseren Stundenwinkeln sind entweder die strengen Formeln (§. 188), oder die später (§. 193) folgenden Reihenentwickelungen zu benützen.

Die Stundenwinkel t bildet man am bequemsten, indem man mit dem bekannten Stande und Gange der Uhr die Uhrzeit der Culmination des beobachteten Gestirnes ableitet, und diese von den beobachteten Uhrzeiten (oder umgekehrt) subtrahirt. Man erhält dadurch die Stundenwinkel in Uhrzeit ausgedrückt und hat dieselben erforderlichenfalls noch auf Sternzeit oder, wenn die Sonne beobachtet wurde, auf wahre Sonnenzeit zu reduciren, was hier leicht auf folgende Weise geschehen kann. Sei t der durch die Uhrdifferenz gegebene, t' der wahre Stundenwinkel, so hat man:

$$\sin\tfrac{1}{2}t' = \sin\left(\tfrac{1}{2}t\,.\,\frac{t'}{t}\right) = \sin m\,.\,\tfrac{1}{2}t, \text{ wenn } m = \frac{t'}{t};$$

folglich mit Benützung der Reihenentwickelung für den Sinus eines vielfachen Bogens:

$$\sin\tfrac{1}{2}t' = \sin m\,.\,\tfrac{1}{2}t = \cos\tfrac{1}{2}t\left[m\sin\tfrac{1}{2}t - \frac{m(m^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin\tfrac{1}{2}t^3 + \ldots\right].$$

Quadrirt man diese Gleichung, setzt $1 - \sin\frac{1}{2}t^2$ für $\cos\frac{1}{2}t^2$ und, der Kürze wegen, $m^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \varkappa$, so kommt:

$$\sin \tfrac{1}{2} t'^2 = \varkappa \sin \tfrac{1}{2} t^2 - \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{3} \sin \tfrac{1}{2} t^4 + \ldots,$$

oder:

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} t'^2}{\sin 1''} = \varkappa \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''},$$

da schon das 2[te] Glied, weil $\varkappa$ stets nahe $= 1$ und $\sin \frac{1}{2} t^4$ sehr klein ist, unmerklich wird. Man kann daher zur Bildung der Grössen $m = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ und $n = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^4}{\sin 1''}$ sofort die durch die Uhrdifferenzen gegebenen Stundenwinkel benützen und hat dann nur in den Glgn. (209) u. fg. statt des Faktors A den Faktor $\varkappa A$ anzuwenden.

Die Grösse $\varkappa$ ergibt sich leicht auf folgende Art:

1. Ist ein Stern an einer nach mittlerer Zeit regulirten Uhr beobachtet, deren Gang gegen mittlere Zeit in 24^h Uhrzeit $= x^s$ ist, positiv, wenn die Uhr zurückbleibt, so sind 24^h Uhrzeit $= (24^h + x^s)$ mittlere Zeit $= \lambda\,(24^h + x^s)$ Sternzeit, wo $\lambda = 1{,}00273791$ (S. 119), oder 1^s Uhrzeit $= \lambda \left(1 + \frac{x^s}{86400}\right)$ Sternzeit, somit $t' = t \cdot \lambda \left(1 + \frac{x^s}{86400}\right)$, und

$$\varkappa = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \lambda^2 \left(1 + \frac{x^s}{86400}\right)^2.$$

Zu den Logarithmen übergehend, erhält man mit Vernachlässigung der höheren Potenzen des stets sehr kleinen Bruches $\frac{x^s}{86400}$:

$$\log \varkappa = 0.002375 + 0.00001005\, x^s.$$

2. Ist ein Stern an einer der Sternzeit folgenden Uhr beobachtet, so fällt in dem vorhergehenden Ausdruck das erste Glied weg, welches die Umwandlung von mittlerer Zeit in Sternzeit bewirkte und man hat:

$$\log \varkappa = 0.00001005\, x^s,$$

wo x^s den täglichen Gang der Uhr gegen Sternzeit bedeutet.

Ist das beobachtete Gestirn die Sonne, so sind die Stundenwinkel in wahrer Sonnenzeit auszudrücken. Bezeichnet man mit ε und ε' die Zeitgleichung im mittleren Mittage zweier aufeinanderfolgenden Tage, so ist, zufolge der Beziehung zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit und der Zeitgleichung (S. 117), die Länge des mittleren Tages oder 24^h mittlere Zeit $= 24^h - (\varepsilon' - \varepsilon) = 24^h - \Delta\varepsilon$ wahre Zeit, wo $\Delta\varepsilon$ die Aenderung der Zeitgleichung in 24^h mittlerer Zeit bedeutet, positiv, wenn die Zeitgleichung zunimmt. Ist daher:

3. die Sonne an einer der Sternzeit folgenden Uhr beobachtet, deren täglicher Gang gegen Sternzeit $= x^s$ ist, so hat man: 24^h Uhrzeit $= (24^h + x^s)$ Sternzeit $= \lambda' (24^h + x^s)$ mittlere Zeit, wo $\lambda' = \frac{1}{\lambda} = 0.9972696$, somit 24^h Uhrzeit $= \lambda' (24^h - \varDelta\varepsilon + x)$ wahre Zeit, oder 1^s Uhrzeit $= \lambda' \left(1 + \frac{x^s - \varDelta\varepsilon}{86400}\right)$ wahre Zeit, womit man auf demselben Wege wie in 1) findet:

$$\log \varkappa = 9.997625 + 0.00001005\,(x^s - \varDelta\varepsilon).$$

4. Ist endlich die Sonne an einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr, deren täglicher Gang gegen mittlere Zeit $= x^s$ ist, beobachtet, so hat man:

$$\log \varkappa = 0.00001005\,(x^s - \varDelta\varepsilon).$$

Wenn der Uhrgang x, wie gewöhnlich, nur wenige Zeitsecunden beträgt, so wird man, da auch $\varDelta\varepsilon$ nicht über 30^s steigt, wenn nicht die äusserste Schärfe der Rechnung gefordert wird, in den Fällen 1) und 3) das 2te Glied in dem Ausdrucke von $\log \varkappa$ meist vernachlässigen, und in den Fällen 2) und 4) $\log \varkappa = 0$, oder $\varkappa = 1$ annehmen können.

192. Beispiel. 1874, August 22, wurden auf der astronomisch-geodätischen Station „Kremsmünster" in Oberösterreich mit dem in 190 erwähnten Universal-Instrumente die folgenden Zenithdistanzen des Sternes α Orionis von Dr. Tinter beobachtet:

Kreislage	Uhr	Mikroskop I.	Mikroskop II.	Libelle a	Libelle i	Barom.	Aeuss. Therm.
R.	$5^h\,30^m\,33^s.6$	$40^0\,45'\,30''.49$	$45'\,21''.32$	16.1	19.2	mm 731.66	$16^0.0$ C.
	32 46.8	43 32 .05	43 24 .58	20.5	14.9	$16^0.2$ C.	($5^h\,29^m$)
	35 3.2	41 31 .58	41 23 .71	16.3	19.0		
	37 1.6	40 10 .63	40 4 .31	16.4	18.8		
	38 46.8	39 13 .78	39 4 .96	16.2	19.0		
	40 44.8	38 21 .02	38 12 .97	15.0	20.0		
	42 41.2	37 51 .12	37 42 .62	17.0	18.0		
	5 44 28.4	40 37 35 .27	37 26 .61	18.0	17.0		
L.	5 48 8.4	319 18 25 .64	18 18 .08	16.3	18.7		
	50 35.6	17 55 .14	17 47 .53	16.4	18.4		
	52 37.2	17 11 .00	17 4 .02	16.3	18.4		
	54 18.0	16 20 .95	16 12 .40	16.5	18.1		
	56 21.2	15 4 .31	14 56 .01	17.2	17.2		
	5 58 26.4	13 29 .95	13 22 .88	17.4	17.0		
	6 0 32.8	11 37 .00	11 30 .22	17.4	16.9	mm 731.92	$14^0.8$ C.
	6 2 0.4	319 10 11 .84	10 3 .20	17.2	17.0	$17^0.1$ C.	($6^h\,4^m$)

Scheinbarer Ort des Sternes: $\alpha = 5^h\,48^m\,22^s.02$, $\delta = 7^0\,23'\,6''.78$.

Sternzeit $=$ Uhr $+\,2^m\,13^s.32$; Zenithpunct $= 359^0\,57'\,58''$; 1 Scalentheil der Libelle $\mu = 2''.08$.

Angenommene Polhöhe $\varphi = 48^0\,3'\,22''.8$.

Ableitung der wahren Zenithdistanzen z:

Kreis-lage	Kreis-Lesung	$R. - Z.P.$ $Z.P. - L.$	$\frac{\mu}{2}(i-a)$	Refract.	z
R.	40° 45′ 25″.91	40° 47′ 27″.91	+ 3.22	+ 47.12	40° 48′ 18″.25
	43 28 .33	45 30 .33	− 5.82	47.10	46 11 .61
	41 27 .65	43 29 .65	+ 2.81	47.07	44 19 .53
	40 7 .47	42 9 .47	+ 2.50	47.05	42 59 .02
	39 9 .37	41 11 .37	+ 2.91	47.03	42 1 .31
	38 17 .00	40 19 .00	+ 5.20	47.03	41 11 .23
	37 46 .88	39 48 .88	+ 1.04	47.03	40 36 .95
	40 37 30 .95	40 39 32 .95	− 1.04	+ 47.03	40 40 18 .94
L.	319 18 21 .85	40 39 36 .15	+ 2.50	+ 47.07	40 40 25 .67
	17 51 .34	40 6 .66	+ 2.08	47.10	40 55 .84
	17 7 .50	40 50 .50	+ 2.18	47.12	41 39 .80
	16 16 .68	41 41 .32	+ 1.66	47.18	42 30 .16
	15 0 .17	42 57 .83	+ 0.00	47.24	43 45 .07
	13 26 .42	44 31 .58	− 0.42	47.30	45 18 .46
	11 33 .62	46 24 .38	− 0.52	47.37	47 11 .23
	319 10 7 .52	40 47 50 .48	− 0.21	+ 47.43	40 48 37 .70

Die weitere Rechnung nach Glchg. 209, deren zwei letzte Glieder: $-Am$ und $A^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta)\, n$ in der folgenden Tabelle der Kürze halber mit I. und II. bezeichnet sind, steht nun wie folgt:

$$\varphi = 48^0\ 3'\ 23''$$
$$\delta = \ \ 7\ \ 23\ \ \ 7$$
$$\varphi - \delta = 40^0\ 40'\ 16''$$

$$\log\cos\varphi = 9.82504$$
$$\log\cos\delta = 9.99638$$
$$9.82142$$
$$\log\sin(\varphi - \delta) = 9.81406$$
$$\log A = 0.00736$$

$$\log A^2 = 0.01472$$
$$\log\operatorname{cotg}(\varphi - \delta) = 0.06588$$
$$0.08060$$
$$A^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta) = 1.204$$

Kreis-lage	Stunden-winkel	log m	n	log I	I	II	I + II −	$\delta + z$	φ
	m s				′ ″	″	′ ″	0 ′ ″	0 ′ ″
R.	15 35.10	2.67829	0.55	2.68565	8 4.90	0.66	8 4.24	48 11 25.03	48 3 20.79
	13 21.90	2.54485	0.30	2.55221	5 56.62	0.36	5 56.26	9 18.39	22.13
	11 5.50	2.38295	0.15	2.39031	4 5.64	0.18	4 5.46	7 26.31	20.85
	9 7.10	2.21280	0.07	2.22016	2 46.02	0.08	2 45.94	6 5.80	19.86
	7 21.90	2.02733	0.03	2.03469	1 48.32	0.04	1 48.28	5 8.09	19.81
	5 23.90	1.75753	0.01	1.76489	58.19	0.01	58.18	4 18.01	19.83
	3 27.50	1.37076	0.00	1.37812	23.88	0.00	23.88	3 43.73	19.85
	1 40.30	0.73932	0.00	0.74668	5.58	0.00	5.58	48 3 25.72	48 3 20.14
L.	1 59.70	0.89291	0.00	0.90027	7.95	0.00	7.95	48 3 32.45	48 3 24.50
	4 26.90	1.58941	0.00	1.59677	39.52	0.00	39.52	4 2.62	23.10
	6 28.50	1.91548	0.02	1.92284	1 23.72	0.02	1 23.70	4 46.58	22.88
	8 9.30	2.11583	0.04	2.12319	2 12.80	0.05	2 12.75	5 36.94	24.19
	10 12.50	2.31087	0.10	2.31823	3 28.08	0.12	3 27.96	6 51.85	23.89
	12 17.70	2.47239	0.22	2.47975	5 1.82	0.26	5 1.56	8 25.24	23.68
	14 24.10	2.60972	0.40	2.61708	6 54.08	0.48	6 53.60	10 18.01	24.41
	15 51.70	2.69356	0.59	2.70092	8 22.25	0.72	8 21.53	48 11 44.48	48 3 22.95

Man hat daher für die Polhöhe, indem man das Mittel von je zwei dem Wechsel der Kreislage symmetrisch liegenden Werthen nimmt, folgende Resultate:

$$\begin{array}{rrrl} \varphi = & 48^0 & 3' & 21''.87 \\ & & & 23\ .27 \\ & & & 22\ .27 \\ & & & 21\ .88 \\ & & & 22\ .00 \\ & & & 21\ .36 \\ & & & 21\ .47 \\ & 48 & 3 & 22\ .32 \\ \hline \text{Mittel: } \varphi = & 48^0 & 3' & 22''.06 \end{array}$$

193. Zur Reduction von Beobachtungen des Polarsternes, welcher, wie schon in §. 186 bemerkt wurde, in jedem Stundenwinkel mit Vortheil zur Bestimmung der Polhöhe benützt werden kann, bedient man sich auch oft einer der folgenden Reihenentwickelungen, welche nach Potenzen der Poldistanz fortschreiten und für jeden Werth des Stundenwinkels brauchbar bleiben.

Sei $p = 90^0 - \delta$ die Poldistanz des Sternes, so hat man:

$$\cos z = \sin\varphi \cos p + \cos\varphi \sin p \cos t.$$

Setzt man nun:

$$z = 90^0 - \varphi + x, \tag{a}$$

wo x, d. i. der Unterschied zwischen der Zenithdistanz und dem Complement der Polhöhe, stets ein kleiner, die Poldistanz nicht überschreitender Bogen ist, so erhält man, nach Division der Gleichung durch $\cos\varphi$:

$$\operatorname{tg}\varphi \cos x - \sin x = \operatorname{tg}\varphi \cos p + \sin p \cos t,$$

oder, für die Functionen der kleinen Bogen p und x die entsprechenden Reihen bis zu den Gliedern 4ter Ordnung substituirend:

$$x = -p\cos t + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\,(p^2 - x^2) + \tfrac{1}{6}(p^3\cos t + x^3) - \tfrac{1}{24}\operatorname{tg}\varphi\,(p^4 - x^4).$$

Hieraus findet man leicht x durch successive Näherung.

Es ist $x = -p\cos t$ ein erster genäherter Werth, welcher, im 2ten Theile mit Weglassung der 3ten und 4ten Potenzen von p und x substituirt, als zweiten genäherten Werth:

$$x = -p\cos t + \tfrac{1}{2}p^2\operatorname{tg}\varphi\sin t^2$$

gibt. Dieser, im 2ten Theile mit Weglassung der 4ten Potenzen von p und x substituirt, ergibt als dritten genäherten Werth:

$$x = -p\cos t + \tfrac{1}{2}p^2\operatorname{tg}\varphi\sin t^2 + \tfrac{1}{6}p^3(1 + 3\operatorname{tg}\varphi^2)\cos t\sin t^2,$$

durch dessen Substitution endlich, nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned} x = &-p\cos t + \tfrac{1}{2}p^2\operatorname{tg}\varphi\sin t^2 + \tfrac{1}{6}p^3(1 + 3\operatorname{tg}\varphi^2)\cos t\sin t^2 \\ &+ \tfrac{1}{24}p^4\operatorname{tg}\varphi\sin t^2\,[8 - 9\sin t^2 + (12 - 15\sin t^2)\operatorname{tg}\varphi^2] \end{aligned} \tag{b}$$

folgt. Setzt man diesen Werth von x in obige Gl. (a), so erhält man, p in Bogensecunden ausdrückend, mit Hinweglassung des Gliedes 4ter Ordnung:

$$\begin{aligned}\varphi = 90^0 - z - p\cos t + \tfrac{1}{2}\, p^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\varphi \sin t^2 \\ + \tfrac{1}{6}\, p^3 \sin 1''^2 (1 + 3 \operatorname{tg}\varphi^2) \cos t \sin t^2.\end{aligned} \tag{212}$$

Das Glied 4ter Ordnung wird:

$$\begin{aligned}&+ \tfrac{1}{24}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi \sin t^2 (8 - 9 \sin t^2) \\ &+ \tfrac{1}{24}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi^3 \sin t^2 (12 - 15 \sin t^2);\end{aligned}$$

der erste Theil erlangt, wie man durch Differenziation nach t leicht findet, für $\cos t = 0$ und $\sin t = \pm \frac{2}{3}$ die Maximalwerthe:

$$- \tfrac{1}{24}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi, \text{ bzw. } + \tfrac{2}{27}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi,$$

welche für $p = 1^0\, 20' = 4800''$ erst für $\varphi = 75^0.2$, bzw. $65^0.9$ den Werth $0''.01$ erreichen, daher dieser Theil immer unmerklich bleibt. Der zweite Theil erhält für $\cos t = 0$ und $\sin t^2 = \frac{2}{5}$ die Maximalwerthe:

$$- \tfrac{1}{8}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi^3, \text{ bzw. } + \tfrac{1}{10}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi^3,$$

welche für $p = 1^0\, 20'$ und $\varphi = 47^0.7$, bzw. $49^0.8$ den Werth $0''.01$, und für $\varphi = 60^0$ die Werthe $0''.039$, bzw. $0''.031$ erreichen; es kann daher auch dieser Theil mit Rücksicht auf die unvermeidliche Unsicherheit der beobachteten Zenithdistanzen vernachlässigt werden.

Das Glied 3ter Ordnung in (212) erhält für $\sin t^2 = \frac{2}{3}$ seinen grössten Zahlenwerth:

$$\pm \tfrac{1}{9} \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, p^3 \sin 1''^2 (1 + 3 \operatorname{tg}\varphi^2),$$

welcher für obigen Werth von p und für $\varphi = 50^0$: $\pm\, 1''.05$ wird.

Bei der Rechnung nach Gl. (212) ist im zweiten Theile für φ ein genäherter Werth der Polhöhe zu substituiren. Ein Fehler $= \delta\varphi$ Secunden in dem angenommenen Werthe der Polhöhe erzeugt im Gliede 2ter Ordnung den Fehler $\frac{1}{2}\, p^2 \sin 1''^2 \sec\varphi^2 \sin t^2\, \delta\varphi$, im Gliede 3ter Ordnung den Fehler $p^3 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi \sec\varphi^2 \cos t \sin t^2\, \delta\varphi$; für jene Werthe von t, welche diese Glieder zu einem Maximum machen und für $p = 1^0\, 20'$, $\varphi = 60^0$, werden diese Fehler beziehungsweise $0''.00108\, \delta\varphi$ und $0''.000034\, \delta\varphi$, woraus erhellt, dass ein auf 5 bis 10 Secunden genäherter Werth von φ hinreichend genau ist, wenn die Rechnung auf $0''.01$ scharf geführt werden soll.

Zur Erleichterung der Rechnung kann man sich der von Dr. Th. Albrecht in dem S. 328 citirten Werke gegebenen Hilfstafeln bedienen. Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$\varphi = 90^0 - z - p\cos t + M \sin t^2 + N,$$

wo

$$\begin{aligned}M &= \tfrac{1}{2}\, p^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\varphi, \\ N &= \tfrac{1}{6}\, p^3 \sin 1''^2 (1 + 3 \operatorname{tg}\varphi^2) \cos t \sin t^2,\end{aligned}$$

so geben zwei Tafeln die mit dem speciellen Werthe der Poldistanz: $p_0 = 1^0\, 18' = 4680''$ berechneten Werthe M_0 und N_0 der Grössen M und N, die erstere mit dem Argumente φ, die letztere mit den Argumenten φ und t, und es ist dann:

$$M = \frac{p^2}{p_0^{\,2}} M_0, \quad N = \frac{p^3}{p_0^{\,3}} N_0,$$

wo auch die Werthe der Factoren $\frac{p^2}{p_0^{\,2}}$ und $\frac{p^3}{p_0^{\,3}}$ zwei Tafeln mit dem Argumente p entnommen werden können.

Zu einer anderen, ähnlichen Reihenentwickelung gelangt man, wenn man im 2ten Theile der Gl. (b) oder (212) statt der Polhöhe die beobachtete Zenithdistanz z einführt. Da $\varphi = 90^0 - (z - x)$, so hat man zufolge des Taylor'schen Lehrsatzes:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}(z - x) = \operatorname{cotg} z + \frac{x}{\sin z^2} + x^2 \frac{\operatorname{cotg} z}{\sin z^2},$$

wobei es genügt, bei der Entwickelung von $\operatorname{tg}\varphi$ nur bis zu Gliedern 2ter Ordnung zu gehen, weil $\operatorname{tg}\varphi$ in obigen Gleichungen nur in den Gliedern 2ter und höherer Ordnung erscheint. Aus Gl. (b) folgt nun, bis auf Grössen 2ter Ordnung genau:

$$x = -p\cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{cotg} z \sin t^2,$$
$$x^2 = p^2 \cos t^2,$$

somit:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg} z - p\,\frac{\cos t}{\sin z^2} + \tfrac{1}{2} p^2 \frac{\operatorname{cotg} z\,(2 - \sin t^2)}{\sin z^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi^2 = \operatorname{cotg} z^2 - 2p\,\frac{\operatorname{cotg} z \cos t}{\sin z^2},$$

wo die in p und p^2 multiplicirten Glieder mit $\sin 1''$, beziehungsweise $\sin 1''^2$ zu multipliciren sind, wenn p in Secunden ausgedrückt wird.

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (212) erhält man nun:

$$\begin{aligned}\varphi = 90^0 - z - p\cos t &+ \tfrac{1}{2} p^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} z \sin t^2 \\ &- \tfrac{1}{3} p^3 \sin 1''^2 \cos t \sin t^2.\end{aligned} \tag{213}$$

Das Glied 4ter Ordnung:

$$+ \tfrac{1}{8} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z^3 \sin t^4$$
$$- \tfrac{1}{24} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z \sin t^2 (4 - 9 \sin t^2)$$

kann auch bei dieser Reihe vernachlässigt werden. Der zweite Theil erlangt für $\cos t = 0$ und $\sin t^2 = \frac{2}{9}$ die Maximalwerthe:

$$+ \tfrac{5}{24} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z, \text{ bzw. } + \tfrac{1}{54} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z,$$

d. i. für $p = 1^0\,20'$: $0''.0126 \operatorname{cotg} z$ und $0''.0011 \operatorname{cotg} z$, von welchen der letztere immer verschwindend bleibt, der erstere aber erst in Breiten von nahe 60^0 den Werth $0''.02$ erreicht. Der erste Theil wird für $\sin t = \pm 1$ ein Maximum $= + \frac{1}{8} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z^3$, d. i. für $p = 1^0\,20'$: $0''.00756 \operatorname{cotg} z^3$

er erreicht für $z = 42^{0}.3$ den Werth $0''.01$ und steigt für $\varphi = 60^0$ auf $0''.033$ bis $0''.05$.

Das Glied 3ter Ordnung in (213) erhält für $\sin t^2 = \frac{2}{3}$ seinen grössten Werth $= \pm \frac{2}{9} \sqrt{\frac{1}{3}}\, p^3 \sin 1''^2$, d. i. $\pm 0''.40$ für $p = 1^0\, 20'$. Handelt es sich daher darum, die Rechnung nur innerhalb einer Bogensecunde genau zu führen, so kann auch dieses Glied vernachlässigt werden und es genügt die einfache Formel:

$$\varphi = 90^0 - z - p \cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} z \sin t^2.$$

Der englische Nautical Almanac enthält in jedem Jahrgange Hilfstafeln, welche die Rechnung nach dieser Formel zu erleichtern bestimmt sind; die directe Rechnung ist jedoch so einfach, dass sie kaum mehr Zeit erfordert, als jene mit Benützung der Tafeln, und jedenfalls genauer.

Beispiel. Berechnen wir die in §. 190 angeführten Beobachtungen des Polarsternes nach Gl. (212). Nach Substitution des angenommenen Werthes der Polhöhe $\varphi = 50^0\, 47'\, 36''$ geht dieselbe in folgende über:

$$\begin{aligned}\varphi = 90^0 - z - p \cos t &+ (4.47297 - 10)\, p^2 \sin t^2 \\ &+ (9.33399 - 20)\, p^3 \sin t^2 \cos t,\end{aligned}$$

in welcher die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind, und welche Gleichung zur Reduction aller an demselben Orte beobachteten Zenithdistanzen des Polarsternes benützt werden kann, wenn kein Anlass vorliegt, den zur Berechnung der Coefficienten angenommenen Werth der Polhöhe durch einen genaueren zu ersetzen.

Am Beobachtungstage, 1864, September 22, war $\delta = 88^0\, 35'\, 14''.57$, $p = 1^0\, 24'\, 45''.43 = 5085''.43$; hiemit wird:

$$\varphi = 90^0 - z - (3.706328) \cos t + (1.88563) \sin t^2 + (0.4530) \sin t^2 \cos t.$$

Mit den in §. 190 bereits abgeleiteten Werthen der wahren Zenithdistanzen z und der Stundenwinkel t steht nun die Rechnung wie folgt, wobei mit I, II, III die auf $90^0 - z$ folgenden drei Glieder bezeichnet sind.

Kreis-lage	t $180^0 +$	$\sin t$ $-$	$\cos t$ $-$	log I $+$	log II $+$	log III $-$	I $+$	II $+$	III $-$
K. L.	44° 20′ 24″.0	9.844424	9.854431	3.560759	1.57448	9.9963	60′ 37″.13	37″.539	0″.991
	44 49 46.5	848190	850773	557101	58201	0.0002	60 6.62	38.195	1.000
	45 16 39.0	851578	847371	553699	58879	0035	59 38.48	38.796	1.008
	45 44 9.0	854992	843835	550163	59561	0068	59 9.47	39.410	1.016
	46 11 54.0	858381	840209	546537	60239	0100	58 39.95	40.030	1.023
K. R.	47 2 39.0	864439	833424	539752	61451	0153	57 45.39	41.163	1.036
	47 37 54.0	868544	828592	534920	62272	0187	57 7.05	41.949	1.044
	48 3 24.0	871460	825033	531361	62855	0210	56 39.08	42.516	1.050
	48 34 1.5	874906	820689	527017	63544	0235	56 5.25	43.196	1.056
	48 58 31.5	9.877618	9.817157	3.523485	1.64087	0.0254	55 37.99	43.739	1.060

Kreislage	z	$90^0 - z$	I + II + III	φ	φ
K. L.	40° 13′ 36″.64	49° 46′ 23″.36	1° 1′ 13″.68	50° 47′ 37″.04	50° 47′ 36″.58
	13 6 .51	46 53 .49	1 0 43 .82	37 .31	36 .51
	12 38 .21	47 21 .79	1 0 16 .27	38 .06	36 .55
	12 9 .88	47 50 .12	0 59 47 .86	37 .98	36 .00
	11 41 .56	48 18 .44	0 59 18 .96	37 .40	36 .41
K. R.	10 50 .10	49 9 .90	0 58 25 .52	35 .42	
	10 13 .93	49 46 .07	0 57 47 .95	34 .02	
	9 45 .52	50 14 .48	0 57 20 .55	35 .03	
	9 11 .68	50 48 .32	0 56 47 .39	35 .71	
	40 8 44 .55	51 15 .45	0 56 20 .67	36 .12	
				Mittel: φ =	50° 47′ 36″.41

194. Hat man Circummeridian-Zenithdistanzen der Sonne beobachtet, so ist bei der Berechnung der Beobachtungen auf die Veränderlichkeit der Declination der Sonne Rücksicht zu nehmen. Bezeichnet man mit δ_1, δ_2, ... δ_r die den Zeiten der beobachteten Zenithdistanzen z_1, z_2, ... z_r entsprechenden Declinationen der Sonne, so hat man nach Gl. (209):

$$\varphi = \delta_1 + z_1 - A \cdot m_1 + A^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta) \cdot n_1,$$
$$\varphi = \delta_2 + z_2 - A \cdot m_2 + A^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta) \cdot n_2,$$
$$\vdots$$
$$\varphi = \delta_r + z_r - A \cdot m_r + A^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta) \cdot n_r,$$

welche Gleichungen die aus den einzelnen beobachteten Zenithdistanzen folgenden Werthe der Polhöhe geben, aus welchen sodann das Mittel zu nehmen ist. Hiebei genügt es, die Coefficienten von m und n mit dem Mittel der Declinationen zu berechnen und daher in sämmtlichen Gleichungen als constant zu betrachten.

Verzichtet man aber auf die Kenntniss der aus den einzelnen Zenithdistanzen folgenden Werthe der Polhöhe und begnügt sich mit der Ableitung des Mittels derselben, so hat man, aus obigen Gleichungen das Mittel nehmend:

$$\varphi = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r}{r} + \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_r}{r} - A \cdot \frac{\Sigma m}{r} + A^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta) \cdot \frac{\Sigma n}{r},$$

wo nun für $\frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r}{r}$ die dem Mittel der Beobachtungszeiten entsprechende Declination der Sonne genommen werden kann, weil für die kurze Dauer der Beobachtungsreihe die Aenderung der Declination der Sonne als der Zeit proportional betrachtet werden darf.

Am bequemsten wird die Rechnung nach folgendem von Gauss angegebenen Verfahren vorgenommen, bei welchem auch die den einzelnen Zenithdistanzen entsprechenden Werthe der Polhöhe richtig erhalten werden.

Bezeichnet man mit δ_0 die Declination der Sonne zur Zeit der Culmination oder im wahren Mittag, mit β die stündliche Aenderung derselben in Bogensecunden ausgedrückt, positiv, wenn die Declination zunimmt, so ist die dem Stundenwinkel t entsprechende Declination $\delta = \delta_0 + \beta t$, wo t in Stunden auszudrücken ist; man hat daher nach Gl. (209) mit Hinweglassung des stets sehr kleinen Gliedes 4ter Ordnung:

$$\varphi = \delta_0 + z + \beta t - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}.$$

Man setze nun:

$$\beta t - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} t^2}{\sin 1''} = - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} (t-y)^2}{\sin 1''},$$

wodurch die vorhergehende Gleichung in folgende, der Form nach mit jener (209) übereinstimmende übergeht:

$$\varphi = \delta_0 + z - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} (t-y)^2}{\sin 1''}, \tag{a}$$

so hat man zur Bestimmung von y die Gleichung:

$$\beta t = \frac{2}{\sin 1''} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \left[\sin\tfrac{1}{2} t^2 - \sin\tfrac{1}{2} (t-y)^2\right],$$

oder, weil $\sin p^2 - \sin q^2 = \sin(p+q) \sin(p-q)$ ist:

$$\beta t = \frac{2}{\sin 1''} \frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \sin(t - \tfrac{1}{2} y) \sin\tfrac{1}{2} y,$$

woraus folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2} y = \tfrac{1}{2} \beta \sin 1'' \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} \cdot \frac{t}{\sin(t - \frac{1}{2} y)}.$$

Da nun β eine Bogenminute nicht überschreitet, so wird $\frac{1}{2} y$ sehr klein und man kann daher ohne merklichen Fehler, wenn y in Bogensecunden ausgedrückt wird:

$$y = \beta \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} \cdot \frac{t}{\sin t}$$

setzen, wo im Zähler des zweiten Theiles t in Stunden auszudrücken ist. Es ist aber: $t^h = \frac{t^s}{3600} = \frac{t''}{15.3600} = \frac{206265}{15.3600} t$, wo t im Bogenmass für den Halbmesser $= 1$ zu verstehen ist, folglich $\frac{t^h}{\sin t} = \frac{206265}{15.3600}$ wird, indem, da der Stundenwinkel t 10 bis höchstens 15 Zeitminuten nicht überschreiten wird und y sehr klein ist, ohne merklichen Fehler $\frac{t}{\sin t} = 1$ gesetzt werden kann. Man hat daher, y in Zeitsecunden ausdrückend:

$$y = \frac{206265}{15^2.3600} \beta \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta},$$

oder, wenn man mit μ die 48stündige Aenderung der Declination der Sonne (vom wahren Mittag des vorhergehenden bis zu jenem des folgenden Tages), in Bogensecunden ausgedrückt, bezeichnet, also $\beta = \frac{\mu}{48}$ setzt:

$$y^s = \frac{\mu}{188.5} \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} = \frac{\mu}{188.5} (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta) = \frac{\mu}{188.5} \cdot \frac{1}{A}, \quad (214)$$

wo $A = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}$ die in Gl. (209) eingeführte Hilfsgrösse A bedeutet.

Hiernach ist, wie der Vergleich mit Gl. (43), S. 100, zeigt, y nichts anderes, als der Stundenwinkel der grössten Höhe der Sonne, somit $t - y$ in Gl. (a) der, nicht vom Meridian oder wahren Mittag, sondern von der Zeit der grössten Höhe an gezählte Stundenwinkel.

Man kann daher die ganze Rechnung nach Gl. (209) mit der im wahren Mittag stattfindenden Declination der Sonne ausführen, und hat nur die Stundenwinkel von der Zeit der grössten Höhe ab zu zählen.

Beispiel. 1859, August 15, wurden an einem Orte bei Wien, dessen genäherte Polhöhe $\varphi = 48^0\ 5'$ und dessen östliche Länge von Berlin $11^m\ 34^s$ war, mit einem sechszölligen Prismenkreise von Pistor und Martins die folgenden Circummeridianhöhen des oberen Randes der Sonne beobachtet:

Kreis Ob. ⊙ Rand	Chronometer
$112^0\ 54'\ 0''$	$23^h\ 59^m\ 18^s.8$
54 40	0 0 20 .8
54 50	1 24 .4
55 20	2 30 .4
55 30	3 38 .0
55 30	5 7 .2
55 10	6 18 .8
54 30	7 22 .8
54 0	8 38 .8
112 52 30	0 9 51 .2
Mittel = 112 54 36 .0	

Barometer 744.0^{mm}; Inn. Therm. $+ 21^0.1$ C.
Aeuss. „ $+ 23\ .0$ C.
Uhrzeit im wahren Mittag $= 0^h\ 3^m\ 57^s.44$
Tägl. Gang gegen mittl. Zeit $= + 1^s.990$
Neigung des Glashorizontes $= - 4''.6$
(die der ⊙ zugekehrte Seite tiefer)
Collimationsfehler des Kreises $= - 11'\ 47''.0$

Dem Berliner Jahrbuche entnimmt man für den bezeichneten Tag:

Declination der ⊙ im wahren Mittag $\delta_0 = + 14^0\ 10'\ 28''.8$; $\log\mu = 3.35017\,n$.
Halbmesser der ⊙ $= 15'\ 49''.1$; Aequat.-Horiz.-Parallaxe $= 8''.47$.
Aenderung der Zeitgleichung in 24^h: $\Delta E = - 11^s.45$.

Berechnen wir zunächst den Coefficienten von m *) in Gl. (209) und die Uhrzeit der grössten Höhe der Sonne.

---

*) Der Coefficient von n wird im vorliegenden Beispiele nicht benöthiget, weil in Folge der kleinen Stundenwinkel die Werthe von n verschwindend klein werden.

$\varphi = 48^\circ\ 5'\ 0''$	$\log\cos\varphi = 9.82481$	$\log\mu = 3.35017n$
$\delta_0 = 14\ 10\ 29$	$\log\cos\delta_0 = 9.98657$	$\log 188.5 = 2.27531$
$\varphi - \delta_0 = 33\ 54\ 31$	9.81138	$\log A = 0.06485$
	$\log\sin(\varphi - \delta_0) = 9.74653$	$\log y = 1.01001$
$\varDelta E = -11^s.45$	$\log A = 0.06485$	$y = -10^s.23$
Tägl. Gang $x = +\ 1.99$	$\log\varkappa = 0.00014$	Uhrzeit i. w. Mittag $= 0^h\ 3^m\ 57^s.44$
$x - \varDelta E = +13.44$	$\log\varkappa A = 0.06499$	Uhrzeit d. grössten Höhe $= 0^h\ 3^m\ 47^s.2$
$\log\varkappa = 0.00014$ (S. 423)		

Verbindet man nun die Uhrzeit der grössten Höhe mit den beobachteten Uhrzeiten durch Subtraction, so erhält man die folgenden von der Uhrzeit der grössten Höhe gezählten Werthe $t - y$ der Stundenwinkel, welchen die der Hilfstafel entnommenen Werthe von m beigefügt sind.

$t - y$	m
$4^m\ 28^s.4$	$39''.29$
3 26 .4	23 .23
2 22 .8	11 .12
1 16 .8	3 .21
0 9 .2	0 .04
1 20 .0	3 .49
2 31 .6	12 .53
3 35 .6	25 .35
4 51 .6	46 .37
6 4 .0	72 .26
	$\Sigma m = 236.89$

$$\tfrac{1}{10}\Sigma m = 23''.689$$
$$\log \tfrac{1}{10}\Sigma m = 1.37455$$
$$\log\varkappa A = 0.06499$$
$$1.43954$$
$$\varkappa A \cdot \tfrac{1}{10}\Sigma m = 27''.51$$

Die weitere Rechnung mit dem Mittel der Kreis-Lesungen ist nun folgende:

Mittel der Lesungen		112°	$54'$	$36''.0$
Collimationsfehler	$-$		11	47 .0
		112	42	49 .0
		56	21	24 .5
Correction des Horizontes	$-$			4 .6
Scheinbare Höhe des oberen ☉ Randes		56	21	19 .9
Refraction	$-$			36 .2
Halbmesser der ☉	$-$		15	49 .1
Höhenparallaxe	$+$			4 .7
Wahre Höhe der ☉		56	4	59 .3
Wahre Zenithdistanz	$z =$	33	55	0 .7
	$\delta_0 =$	14	10	28 .8
	$-\varkappa A \cdot \frac{1}{10}\Sigma m =$	$-$		27 .5
	$\varphi =$	48°	$5'$	$2''.0$

Will man die Rechnung für jede einzelne Beobachtung durchführen, so findet man die wahren Höhen der Sonne nach dem Schema:

Wahre Höhe $= \frac{1}{2}$ Lesung $+$ ($\frac{1}{2}$ Collimf. $+$ Corr. d. Hor. $-$ Rad. $\odot$ $-$ Refr. $+$ Parall.)
$= \frac{1}{2}$ Lesung $- 22' \; 18''.7$,

somit:

$$\text{Wahre Zenithdistanz } z = 90^\circ \, 22' \, 18''.7 - \tfrac{1}{2} \text{ Lesung.}$$
$$\delta_0 = 14 \;\; 10 \;\; 28\ .8$$
$$\delta_0 + z = 104 \;\; 32 \;\; 47\ .5 - \tfrac{1}{2} \text{ Lesung.}$$

Die Rechnung ist nun folgende, wobei die Werthe von $\log m$ mit den bereits oben erhaltenen Stundenwinkeln $t - y$ als Argument der Hilfstafel entnommen sind:

$\frac{1}{2}$ Lesung	$\delta_0 + z$	$\log m$	$\log \varkappa A\,.\,m$	$\varkappa A\,.\,m$	φ	Abw. v. Mittel v
56° 27′ 0″	48° 5′ 47″.5	1.59428	1.65927	−45″.6	48° 5′ 1″.9	+ 0″.1
27 20	5 27 .5	1.36613	1.43112	27 .0	5 0 .5	+ 1 .5
27 25	5 22 .5	1.04618	1.11117	12 .9	5 9 .6	− 7 .6
27 40	5 7 .5	0.50744	0.57243	3 .7	5 3 .8	− 1 .8
27 45	5 2 .5	8.66351	8.72850	0 .1	5 2 .4	− 0 .4
27 45	5 2 .5	0.54291	0.60790	4 .0	4 58 .5	+ 3 .5
27 35	5 12 .5	1.09812	1.16311	14 .6	4 57 .9	+ 4 .1
27 15	5 32 .5	1.40402	1.46901	29 .4	5 3 .1	− 1 .1
27 0	5 47 .5	1.66629	1.73128	53 .9	4 53 .6	+ 8 .4
26 15	6 32 .5	1.85890	1.92389	−83 .9	5 8 .6	− 6 .6

Mittel: $\varphi = 48^\circ \; 5' \; 2''.0$

Die Summe der Fehlerquadrate wird $[vv] = 207.81$; hiemit folgt:

$$\text{wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung} = \pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{207.81}{10-1}} = \pm\, 3''.2$$

$$\text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{des Mittels} = \pm\, \frac{3''.2}{\sqrt{10}} = \pm\, 1''.0,$$

in welchen Werthen selbstverständlich der Einfluss constanter Fehler, welche auf alle Beobachtungen gleichmässig einwirken, nicht inbegriffen ist.

Zu denselben Resultaten würde natürlich auch die Rechnung mit den wahren, den einzelnen Beobachtungszeiten entsprechenden Declinationen und den vom wahren Mittag an gezählten Stundenwinkeln führen. Hingegen gibt die Rechnung mit der dem Mittel der Uhrzeiten entsprechenden Declination und den vom wahren Mittag gezählten Stundenwinkeln zwar den aus sämmtlichen Beobachtungen folgenden Mittelwerth der Polhöhe richtig; die aus den einzelnen Beobachtungen auf diese Art berechneten Werthe der Polhöhe werden jedoch von den richtigen mehr oder weniger abweichen, weil hier nicht, wie bei dem Gauss'schen Verfahren, die Stundenwinkel der in die Rechnung eingeführten Declination entsprechend bestimmt werden.

195. Bei der Ableitung der Polhöhe aus beobachteten Zenithdistanzen von Fixsternen kann von der Anbringung der täglichen Aberration an den scheinbaren Ort des Sternes abgesehen werden. Denn es ist, wenn Θ die

Sternzeit der Beobachtung und α die Rectascension des Sternes bedeutet, der Stundenwinkel $t = \Theta - \alpha$, somit $dt = - d\alpha$; man hat daher, zufolge der Gl. (202):

$$d\varphi = \cos\varphi \operatorname{tg} A \, d\alpha + \cos q \sec A \, d\delta.$$

Lässt man nun $d\alpha$ und $d\delta$ die tägliche Aberration in Rectascension und Declination bedeuten, so ist vermöge der Glgn. (112):

$$d\alpha = \lambda \cos\varphi \cos t \sec\delta, \quad d\delta = \lambda \cos\varphi \sin t \sin\delta,$$

wo $\lambda = 0''.31$; hiemit wird:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cos\varphi}{\cos A} (\sin\varphi \sin A \cos t \sec\delta + \cos q \sin t \sin\delta),$$

oder, da $\cos\varphi \sin A = \sin q \cos\delta$:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cos\varphi}{\cos A} (\sin q \cos t + \cos q \sin\delta \sin t);$$

es ist aber der eingeklammerte Factor $= \sin A \cos z$, somit:

$$d\varphi = 0''.31 \cos\varphi \cos z \operatorname{tg} A.$$

Hieraus erhellt, dass, da bei Beobachtungen des Polarsternes, so wie von Circummeridian-Zenithdistanzen anderer Sterne, das Azimuth A immer sehr klein ist, der aus der Vernachlässigung der täglichen Aberration entspringende Fehler verschwindend klein, und überdies bei symmetrischer Vertheilung der Beobachtungen zu beiden Seiten des Meridians, in Folge des hiebei eintretenden Zeichenwechsels von $\operatorname{tg} A$, vollständig eliminirt wird.

2. Bestimmung der Polhöhe aus beobachteten Differenzen der Meridian-Zenithdistanzen zweier auf entgegengesetzten Seiten des Zeniths culminirender Sterne. (Talcott's Methode.)

196. Bezeichnet man mit δ, δ' die Declinationen zweier Sterne, von welchen der eine südlich, der andere nördlich vom Zenith culminirt, mit ζ, ζ' deren Meridian-Zenithdistanzen, so bestehen bekanntlich für die Polhöhe φ die Gleichungen: $\varphi = \delta + \zeta$ und $\varphi = \delta' - \zeta'$, aus deren Addition die folgende hervorgeht:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta'). \tag{215}$$

Bei Anwendung dieser Gleichung wird daher nicht die Bestimmung der absoluten Zenithdistanzen ζ und ζ', sondern nur die Differenz derselben erfordert und das Wesen der Talcott'schen Methode besteht darin, diese Differenz mikrometrisch, also ohne Zuhilfenahme von Kreistheilungen zu messen. Zu diesem Zwecke muss das Fernrohr des Instrumentes mit einem Schraubenmikrometer mit im Sinne der Zenithdistanz beweglichem Horizontalfaden versehen sein, und sind die beiden Sterne so zu wählen, dass sie in