sind, mit Vortheil angewendet, weil sie wenig Zeit erfordert, mit Ausnahme der Mittagsstunden zu gelegenen, durch andere Beobachtungen nicht in Anspruch genommenen Zeit ausgeführt werden kann und dabei eine völlig genügende Schärfe gewährt. Auch kann die Zeitbestimmung nach diesem Verfahren mit Vortheil mit der Messung des Azimuthes eines irdischen Objectes verbunden werden.

ACHTES CAPITEL.

BESTIMMUNG DER POLHÖHE.

1. Aus beobachteten Zenithdistanzen.

185. Beobachtet man die Zenithdistanz z eines Gestirnes, dessen Rectascension α und Declination δ bekannt sind, zur Uhrzeit u und kennt man den Stand Δu der Uhr gegen Sternzeit, so ist auch der Stundenwinkel $t = u + \Delta u - \alpha$ bekannt und man kann die Polhöhe des Beobachtungsortes aus der Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \qquad (a)$$

berechnen. Setzt man:

$$\sin\delta = m \sin M$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos M,$$

so wird $\cos z = m \cos(\varphi - M)$ und:

$$\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos t}, \quad \cos(\varphi - M) = \frac{\cos z \sin M}{\sin\delta}.$$

Da der dem $\cos(\varphi - M)$ entsprechende, 180^0 nicht überschreitende Winkel positiv oder negativ genommen werden kann, so erhält man aus letzter Gleichung zwei Werthe von φ, von welchen jener als der dem Beobachtungsorte entsprechende zu nehmen ist, welcher der stets näherungsweise bekannten Breite des Ortes zunächst liegt.

186. Um den Einfluss von Fehlern in den Rechnungselementen auf die berechnete Polhöhe kennen zu lernen, differenzire man die Gl. (a) nach allen darin vorkommenden Grössen; man erhält, behufs Reduction von den Glgn. (19) und (24) Gebrauch machend:

$$d\varphi = \sec A\, dz - \cos\varphi \operatorname{tg} A\, dt + \sec A \cos q\, d\delta, \qquad (202)$$

wo A das Azimuth und q den parallaktischen Winkel bedeutet.

Die Coefficienten von dz und dt werden ein Minimum für $A = 0$ oder $= 180^0$, d. i., wenn der Stern im Meridiane beobachtet wird. In diesem Falle wird $\operatorname{tang} A = 0$, es hat ein Fehler im Stundenwinkel, d. i. in der Rectascension des Gestirnes oder dem angenommenen Uhrstande keinen Einfluss auf die berechnete Polhöhe. Beobachtet man aber die Zenithdistanz des Gestirnes zu beiden Seiten des Meridians in gleichem Azimuthe oder Stundenwinkel, so erhält tang A, also auch der Coefficient von dt in beiden Fällen entgegengesetztes Zeichen und es wird daher das Mittel aus den aus beiden Beobachtungen berechneten Werthen der Polhöhe frei sein von dem Einflusse eines Fehlers im Uhrstande oder in der Rectascension.

Im Meridiane erreicht auch der Coefficient von dz, sec A, seinen kleinsten Werth, und zwar $+1$ oder -1, je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith beobachtet wurde. Beobachtet man daher zwei Sterne auf entgegengesetzten Seiten des Zeniths, so wird das Mittel der aus beiden Beobachtungen abgeleiteten Polhöhen von dem Einflusse eines constanten Fehlers in den gemessenen Zenithdistanzen frei sein. Auf diese Art wird z. B. der Einfluss der Biegung des Fernrohres, deren Ausdruck von der Form $a \sin z$ ist [§. 125], eliminirt, wenn beide Sterne in nahe gleichen Zenithdistanzen südlich und nördlich vom Zenith beobachtet werden, zu welchem Zwecke die Sterne so zu wählen sind, dass die Summe beider Declinationen nahe gleich der doppelten Polhöhe sei.

Der Coefficient $\sec A \cos q$ von $d\delta$ erlangt für Sterne, welche südlich vom Zenith culminiren ($\delta < \varphi$), seinen kleinsten Werth $= +1$ im Meridiane. Für nördlich vom Zenith culminirende Sterne ($\delta > \varphi$) wird dieser Coefficient im Meridiane ein Maximum, und zwar $= +1$ in der oberen, $= -1$ in der unteren Culmination,*) während derselbe seinen kleinsten Werth $= 0$ in der grössten östlichen oder westlichen Digression des Sternes erreicht, wo $q = 90^0$ wird.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass bei Sternen, welche nicht dem Pole nahe stehen, es am vortheilhaftesten ist, die Zenithdistanzen im Meridiane zu messen, dass diese Vortheile aber auch noch erreicht werden, wenn die Messung in der Nähe des Meridians erfolgt, weil die Differenzialquotienten daselbst ihre Zahlenwerthe nur sehr langsam ändern und der Einfluss constanter Fehler durch entsprechende Anordnung der Beobachtungen eliminirt werden kann, mit Ausnahme eines Fehlers in der Declination des Sternes, welcher stets mit seinem vollen Betrage auf die berechnete Polhöhe übergeht; aus letzterem Grunde sind Sterne zu wählen, deren Declination möglichst genau bekannt ist.

Bei dem Pole nahe stehenden Sternen, deren Azimuth sich von 180^0 wenig entfernt, bleibt der Coefficient von dt immer sehr klein, jener von $d\delta$ zwischen den Grenzen 0 und ± 1 eingeschlossen und können daher solche

---

*) Mit Hilfe der 1ten der Glgn. (s) S. 400 und der Gl. (22) bringt man den Coefficienten leicht auf die Form:

$$\sec A \cos q = \frac{\tang \varphi - \tang \delta \cos t}{\tang \varphi \cos t - \tang \delta},$$

aus welcher sich die obigen Bemerkungen leicht folgern lassen.

Sterne, namentlich der Polarstern, in allen Stundenwinkeln mit Vortheil beobachtet werden; dabei erhalten die Coefficienten von dt und $d\delta$ für um 180^0 oder 12^h verschiedene Stundenwinkel sehr nahe gleichen Zahlenwerth und entgegengesetztes Zeichen, so dass das Mittel aus mehreren Beobachtungen von dem Einflusse constanter Fehler in der Rectascension und Declination des Sternes frei sein wird, wenn die Beobachtungen paarweise auf um 180^0 verschiedene Stundenwinkel vertheilt werden.

187. Die Messung der Meridian-Zenithdistanz eines Sternes, d. i. der Zenithdistanz desselben zur Zeit seiner Culmination, führt auf dem einfachsten Wege zur Kenntniss der Polhöhe. Bezeichnet man nämlich die Meridian-Zenithdistanz mit ζ, so ist nach §. 23:

für Obere Culmination, südlich vom Zenith: $\varphi = \delta + \zeta$,
„ „ „ nördlich „ „ $\varphi = \delta - \zeta$,
„ Untere Culmination $\varphi = 180^0 - (\delta + \zeta)$. (203)

Der auf diese Art erhaltene Werth der Polhöhe ist, abgesehen von einem Fehler in der Zenithdistanz ζ, noch mit dem Fehler der angenommenen Declination des Sternes behaftet.

Beobachtet man aber einen dem Pole nahe stehenden Stern in beiden Culminationen, so hat man, wenn die Meridian-Zenithdistanzen in der oberen und unteren Culmination beziehungsweise mit ζ und ζ', die Declinationen zur Zeit der Beobachtung mit δ, δ' bezeichnet werden, die beiden Gleichungen:

$$\varphi = \delta - \zeta, \text{ und } \varphi = 180^0 - (\delta' + \zeta'),$$

deren arithmetisches Mittel den Werth:

$$\varphi = 90^0 - \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')$$

darbietet, welcher von einem Fehler in der Declination des Sternes frei ist, da die Differenz $\delta - \delta'$ nur die Aenderung derselben durch Präcession, Nutation und Aberration in der Zwischenzeit zwischen beiden Culminationen darstellt, welche mit grosser Schärfe bekannt ist.

188. Die im Vorigen angegebene Methode zur Bestimmung der Polhöhe durch directe Beobachtung der Meridian-Zenithdistanzen wird jedoch mit Vortheil nur auf Sternwarten, wo im Meridian fest aufgestellte Instrumente zur Verfügung stehen, angewendet. Bei Benützung von transportablen Instrumenten, wie Universal-Instrumenten, Sextanten u. dgl., beobachtet man eine Reihe von Zenithdistanzen in der Nähe und zu beiden Seiten des Meridians, welches Verfahren unter dem Namen: Methode der Circum-Meridian-Zenithdistanzen oder Circum-Meridianhöhen bekannt ist.

Statt nun aus jeder einzelnen Zenithdistanz nach den Formeln in §. 185 die Polhöhe zu berechnen, ist es vortheilhafter, aus den beobachteten Zenithdistanzen z zunächst die Meridian-Zenithdistanz ζ abzuleiten, mittelst welcher man sofort nach den Formeln (203) die Polhöhe findet.

Setzt man zu diesem Zwecke in der Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

$\cos t = 1 - 2 \sin\frac{1}{2} t^2$, so kommt:

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2} t^2,$$

oder:

$$\cos z = \cos(\delta - \varphi) - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2} t^2.$$

Es ist aber, wenn ζ die Meridian-Zenithdistanz bedeutet: $\zeta = \varphi - \delta$ oder $\zeta = \delta - \varphi$, je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith culminirt, somit in beiden Fällen:

$$\cos z - \cos\zeta = -2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2} t^2,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\zeta + z) \sin\tfrac{1}{2}(\zeta - z) = -\cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2} t^2;$$

man hat daher für obere Culmination:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - z) = -\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin\frac{1}{2}(\zeta + z)} \sin\tfrac{1}{2} t^2, \tag{204}$$

wo $\zeta - z$ die Reduction der beobachteten Zenithdistanz z auf die Meridian-Zenithdistanz in der oberen Culmination ist.

Findet aber die Beobachtung näher an der unteren Culmination statt, so zähle man den Stundenwinkel vom nördlichen Theile des Meridians ab; man hat dann in der ersten der obigen Gleichungen $180^0 - t$ statt t zu schreiben und erhält:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

oder $\cos t = 1 - 2 \sin\frac{1}{2} t^2$ setzend:

$$\begin{aligned}\cos z &= -\cos(\varphi + \delta) + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2} t^2 \\ &= \cos[180^0 - (\varphi + \delta)] + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2} t^2,\end{aligned}$$

d. i., weil in der unteren Culmination die Meridian-Zenithdistanz $\zeta = 180^0 - (\varphi + \delta)$ ist,

$$\cos z - \cos\zeta = 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2} t^2,$$

woraus für untere Culmination:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\zeta - z) = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin\frac{1}{2}(\zeta + z)} \sin\tfrac{1}{2} t^2 \tag{205}$$

folgt, wo $\zeta - z$ die Reduction der beobachteten Zenithdistanz auf die Meridian-Zenithdistanz in der unteren Culmination ist.

Setzt man im zweiten Theile der Glgn. (204) und (205) für ζ den entsprechenden Werth aus den Glgn. (203), so erhalten dieselben folgende Form:

Für O. C. südlich vom Zenith:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = - \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta + z)} \sin \tfrac{1}{2} t^2 ; \tag{206}$$

für O. C. nördlich vom Zenith:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = - \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \frac{1}{2} (\delta - \varphi + z)} \sin \tfrac{1}{2} t^2 ; \tag{207}$$

für U. C.:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta - z)} \sin \tfrac{1}{2} t^2 . \tag{208}$$

Bei der Rechnung nach diesen Formeln wird im zweiten Theile für φ ein genäherter Werth angenommen; sollte der angenommene Werth von dem aus der Berechnung der Beobachtungen hervorgehenden Werthe von φ erheblich abweichen, so ist die Rechnung zu wiederholen, indem man nunmehr von letzterem als Näherungswerth ausgeht. Da $\frac{1}{2} (\zeta - z)$ immer ein sehr kleiner Bogen ist, so ist der Einfluss eines Fehlers in dem angenommenen Werthe von φ nur gering. Bezeichnet man letzteren Fehler mit $\Delta \varphi$, den daraus entspringenden Fehler in der berechneten Polhöhe mit $d\varphi$, so ist, wie man durch Differenziation der vorstehenden Gleichungen mit Zuziehung jener (203) leicht findet,

für obere Culmination:

$$d\varphi = \mp \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\zeta - z) \left[2 \operatorname{tg} \varphi \pm \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\zeta + z) \right] \Delta \varphi, \tag{a}$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith culminirt;

für untere Culmination:

$$d\varphi = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\zeta - z) \left[2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\zeta + z) \right] \Delta \varphi. \tag{b}$$

Um aus dem $\log \sin \frac{1}{2} (\zeta - z)$, welchen die Rechnung nach obigen Formeln ergibt, sofort $\zeta - z$ in Bogensecunden zu erhalten, kann man sich der folgenden Tafel bedienen, aus welcher man mit dem Argumente:

$$\log \sin \tfrac{1}{2} (\zeta - z) = \log \sin \tfrac{1}{2} x$$

die Zahl R entnimmt, welche, zu diesem Logarithmus addirt, den Logarithmus von $x = \zeta - z$ in Bogensecunden gibt.

$$\log x'' = \log \sin \tfrac{1}{2} x + R$$

$\frac{1}{2} x$	$\log \sin \frac{1}{2} x$	R	$\frac{1}{2} x$	$\log \sin \frac{1}{2} x$	R
0° 7′ 44″	7.3521	5.615455	0° 40′ 13″	8.0681	5.615465
0 12 10	7.5489	5.615456	0 42 10	8.0887	5.615466
0 17 40	7.7109	5.615457	0 44 5	8.1080	5.615467
0 21 45	7.8012	5.615458	0 45 53	8.1254	5.615468
0 25 15	7.8660	5.615459	0 47 40	8.1419	5.615469
0 28 15	7.9147	5.615460	0 49 20	8.1569	5.615470
0 31 0	7.9551	5.615461	0 50 57	8.1709	5.615471
0 33 35	7.9898	5.615462	0 52 33	8.1843	5.615472
0 35 55	8.0190	5.615463	0 54 3	8.1965	5.615473
0 38 7	8.0448	5.615464	0 55 33	8.2084	5.615474

Bis $\frac{1}{2}x = 0^0\ 7'\ 44''$ gilt $R = 5.615455$. — Die folgenden Zahlen R entsprechen den zugehörigen Werthen von $\frac{1}{2}x$, so dass jede dieser Zahlen von der Mitte des vorhergehenden bis zur Mitte des folgenden Intervalles gilt.

189. Werden die Zenithdistanzen mit einem Universal-Instrumente gemessen, so ist in jeder der beiden Kreislagen die gleiche Anzahl von Beobachtungen zu machen, entweder in der Art, dass man zuerst in der einen, dann in der andern Kreislage Einstellungen in gleicher Anzahl vornimmt, oder indem man auf n Einstellungen in der ersten Kreislage die doppelte Anzahl in den anderen folgen lässt und wieder mit n Einstellungen in der ersten Kreislage schliesst. Die Berechnung der Beobachtungen geschieht dann am einfachsten in der Art, dass man zunächst die jeder einzelnen Einstellung entsprechende wahre Zenithdistanz z ableitet. Vorausgesetzt, dass die Ablesung am Verticalkreise bei Kreis Rechts mit wachsender Zenithdistanz zunimmt, hat man, wenn mit $Z.\ P.$ der Zenithpunct, mit R und L die Lesungen des Kreises (Mittel beider Nonien oder Mikroskope) bei K. R. und K. L., mit a, i die Ablesungen der Libelle (von der Mitte der Skala aus), und zwar mit a jene des nach Aussen oder gegen den Stern, mit i jene des nach Innen gekehrten Blasenendes, endlich mit r die Refraction bezeichnet werden:

$$\text{bei K. R. } z = (R - Z.\ P.) + \tfrac{1}{2}\mu\,(i - a) + r,$$
$$\text{„ K. L. } z = (Z.\ P. - L) + \tfrac{1}{2}\mu\,(i - a) + r,$$

wo die Refractionen mit den durch die Differenzen $R - Z.\ P.$ und $Z.\ P. - L$ hinreichend nahe gegebenen scheinbaren Zenithdistanzen berechnet werden können. Den Zenithpunkt findet man leicht entweder durch Beobachtung eines irdischen Objectes (§. 123), oder aus den Beobachtungen des Sternes selbst nach dem S. 335 in der Anmerkung angegebenen Verfahren.

Die Stundenwinkel t ergeben sich aus den beobachteten Uhrzeiten mit Zuziehung des Standes der Uhr gegen Sternzeit und der Rectascension des Sternes,*) wornach die Reduction auf den Meridian für jede Beobachtung nach den Formeln des vorhergehenden §. berechnet werden kann. Durch Verbindung derselben mit den wahren Zenithdistanzen erhält man die noch mit dem Fehler des angenommenen Zenithpunctes behafteten Meridian-Zenithdistanzen, von welchen je zwei, entgegengesetzten Kreislagen entsprechende und symmetrisch liegende zu einem arithmetischen Mittel zu vereinigen sind,

---

*) Ist der Stern an einer nach mittlerer Zeit regulirten Uhr beobachtet, so hat man die beobachtete, um den Stand der Uhr gegen mittlere Zeit corrigirte Uhrzeit in Sternzeit zu verwandeln, deren Vergleichung mit der Rectascension des Sternes sofort den Stundenwinkel liefert. Oder: man verwandle die Rectascension (= Sternzeit der Culmination) in mittlere Zeit; die Differenz zwischen dieser und der um den Stand der Uhr gegen mittlere Zeit verbesserten Uhrzeit der Beobachtung gibt den Stundenwinkel ausgedrückt in mittlerer Zeit, welcher dann noch nach dem Verhältnisse 1^h mittl. Zeit $= 1^h + 9^s.856$ Sternzeit in Sternzeit auszudrücken ist.

wodurch sich die vom Fehler des angenommenen Zenithpunctes befreiten Meridian-Zenithdistanzen ergeben. Aus diesen findet man endlich mit Zuziehung der Declination des beobachteten Sternes nach (203) die Polhöhe.

Eine solche aus mehreren auf beide Kreislagen symmetrisch vertheilten Beobachtungen bestehende Reihe wird gewöhnlich ein „Satz“ (auch „Stand“) genannt. Zur Erzielung eines genaueren Resultates wird man mehrere Sätze beobachten, und hiebei, behufs Elimination der periodischen Theilungsfehler, bei jedem Satze durch Drehung des Kreises den Zenithpunct um $\frac{180^0}{n}$ ändern, wenn n die Anzahl der zu beobachteten Sätze bedeutet. Ist der beobachtete Stern der Polarstern, so empfiehlt es sich aus den am Schlusse des §. 186 angeführten Gründen, die n Sätze gleichmässig auf je zwei um nahe 12^h verschiedene Stundenwinkel zu vertheilen.

Bei der Beobachtung des Sternes stellt man das Fernrohr so ein, dass der Horizontalfaden dem Sterne im Sinne seiner Bewegung in Zenithdistanz etwas voraus liegt, so dass nach kurzer Zeit der Durchgang des Sternes durch den Horizontalfaden u. zw. zur Vermeidung des in §. 124 betrachteten Fehlers auch möglichst nahe am verticalen Mittelfaden erfolgt, zu welchem Momente des Durchganges des Sternes die Uhrzeit zu beobachten ist. Sollten statt des einen Horizontalfadens zwei nahe liegende horizontale Fäden vorhanden sein, so beobachtet man die Zeit, wann der Stern dem Augenmasse nach in der Mitte zwischen den beiden Fäden steht; wenn die beiden Horizontalfäden nicht zu entfernt von einander abstehen, so gewährt diese Art der Beobachtung denselben Grad der Genauigkeit, als wenn der Durchgang des Sternes durch einen Faden beobachtet würde. Nach der Beobachtung des Durchganges des Sternes am Horizontalfaden erfolgt die Ablesung der Libelle des Höhenkreises und hierauf die Ablesung der Mikroskope des Höhenkreises. Da die Fehler in den Ablesungen des Höhenkreises im vollen Betrage auf die abgeleitete Zenithdistanz, also auch auf die aus dieser abgeleitete Polhöhe übergehen, so ist es geboten, die Lesung jedes Mikroskopes um den Fehler des Schraubenmikrometers nach §. 112 zu verbessern.

Die auf solche Art bestimmte Polhöhe ist noch mit dem Einflusse der Biegung des Fernrohres behaftet. Da nach §. 125 die hieraus resultirende Correction der gemessenen Zenithdistanz $+ a \sin z$ ist, wenn a die Constante der Biegung im Horizonte bedeutet, so wird, wenn man mit φ_0 die ohne Rücksicht auf die Biegung berechnete Polhöhe bezeichnet, vermöge der Glgn. (203), die verbesserte Polhöhe φ,

für südlich vom Zenith culminirende Sterne:

$$\varphi = \varphi_0 + a \sin z,$$

für nördlich vom Zenith culminirende Sterne:

$$\varphi = \varphi_0 - a \sin z.$$

Beobachtet man daher mehrere Sterne südlich und nördlich vom Zenith, so liefert jeder derselben eine solche Gleichung, aus welcher die wahrscheinlichsten Werthe von φ und a nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden können. Am einfachsten und wol auch am zweckmässigsten ist es, nebst dem Polarstern noch einige südliche Sterne zu beobachten, deren Meridian-Zenithdistanzen im Mittel der mittleren Zenithdistanz des Polarsternes $(90^0 - \varphi)$ bis auf etwa 5^0 nahe kommen; man kann dann die den südlichen Sternen entsprechenden Gleichungen in ein Mittel vereinigen, aus dessen Verbindung mit der dem Polarsterne entsprechenden Gleichung die Werthe von φ und a sich ergeben.

Betreffend die Wahl der Sterne mag noch bemerkt werden, dass Sterne, welche nahe am Zenith culminiren, zu vermeiden sind, weil, wie ein Blick auf die Formeln im vorhergehenden §. zeigt, mit abnehmender Meridian-Zenithdistanz der Factor von $\sin \frac{1}{2} t^2$, somit auch der Einfluss eines Fehlers in t, d. i. in der beobachteten Zeit zunimmt. Eben so wird man, wegen der mit wachsender Zenithdistanz zunehmenden Unsicherheit der Refraction, Beobachtungen in geringeren Höhen zu vermeiden haben.

190. Beispiel. 1864, September 22, wurden auf dem Dreieckspuncte „Hohe Schneeberg“ bei Bodenbach in Böhmen mit einem Universal-Instrumente von Starke & Kammerer mit 10zölligem Verticalkreise die folgenden Zenithdistanzen des Polarsternes beobachtet:

Kreislage	Uhr	Mikroskop I	Mikroskop II	Libelle a	Libelle i	Barom.	Aeuss. Therm.
						mm	
K. L.	$16^h\ 6^m\ 37^s.0$	$64^0\ 53'\ 12''.5$	$53'\ 2''.2$	16.65	17.90	702.90	$15^0.2$ C.
	8 34 .5	53 42 .5	53 33 .0	16.60	18.10	$16^0.2$ C.	
	10 22 .0	54 10 .6	53 59 .8	16.95	17.70		
	12 12 .0	54 40 .6	54 31 .3	15.95	18.85		
	14 3 .0	55 6 .0	54 57 .0	17.15	18.60		
K. R.	16 17 26 .0	145 15 59 .2	16 12 .1	18.35	16.50		
	19 47 .0	15 23 .4	15 38 .4	18.95	15.85		
	21 29 .0	14 55 .5	15 9 .6	18.95	15.80		
	23 31 .5	14 22 .4	14 37 .2	19.50	15.40	702.90	$14^0.9$
	25 9 .5	13 56 .6	14 10 .1	19.75	15.05	$16^0.2$	

Scheinbarer Ort des Sternes: $\alpha = 1^h\ 10^m\ 42^s.23$; $\delta = 88^0\ 35'\ 14''.57$.

Sternzeit $=$ Uhrzeit $+\ 1^m\ 26^s.84$ um $16^h\ 16^m$ Uhrzeit; täglicher Gang $= +\ 2^s.044$; Zenithpunct Z. P. $= 105^0\ 5'\ 58''$; 1 Scalentheil der Libelle $\mu = 2''.257$.

Angenommen: $\varphi = 50^0\ 47'\ 36''$; $\log \cos\varphi \cos\delta = 8.192658$.

Ableitung der wahren Zenithdistanzen z.

Kreis-lage	Kreis-Lesung	$Z. P. - L.$ $R. - Z. P.$	$\frac{1}{2}\mu(i-a)$	Refract.	z
K. L.	64° 53′ 7″.35	40° 12′ 50″.65	+ 1″.41	+ 44″.58	40° 13′ 36″.64
	53 37 .75	12 20 .25	1 .69	44 .57	13 6 .51
	54 5 .20	11 52 .80	0 .85	44 .56	12 38 .21
	54 35 .95	11 22 .05	3 .27	44 .56	12 9 .88
	55 1 .50	10 56 .50	+ 0 .51	44 .55	11 41 .56
K. R.	145 16 5 .65	10 7 .65	— 2 .09	+ 44 .54	10 50 .10
	15 30 .90	9 32 .90	3 .50	44 .53	10 13 .93
	15 2 .55	9 4 .55	3 .55	44 .52	9 45 .52
	14 29 .80	8 31 .80	4 .63	44 .51	9 11 .68
	14 3 .35	40 8 5 .35	— 5 .30	+ 44 .50	40 8 44 .55

Berechnung der Reduction $\zeta - z$ auf den Meridian in den U. C. nach Gl. (208).

$\varphi+\delta-z$	$\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)$	t	$\frac{1}{2}t$	log cos $\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)$
99° 9′ 13″.93	49° 34′ 37″.0	2^h 57^m 21^s.6	22° 10′ 12″.0	9.811861
9 44 .06	34 52 .0	2 59 19 .1	22 24 53 .2	811823
10 12 .36	35 6 .2	3 1 6 .6	22 38 19 .5	811789
10 40 .69	35 20 .3	2 56 .6	22 52 4 .5	811753
11 9 .01	35 34 .5	4 47 .6	23 5 57 .0	811719
12 0 .47	36 0 .2	8 10 .6	23 31 19 .5	811655
12 36 .64	36 18 .3	10 31 .6	23 48 57 .0	811610
13 5 .05	36 32 .5	12 13 .6	24 1 42 .0	811575
13 38 .89	36 49 .4	14 16 .1	24 17 0 .7	811533
99 14 6 .02	49 37 3 .0	3 15 54 .1	24 29 15 .7	9.811500

$\log \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)}$	log sin $\frac{1}{2}t$	log sin $\frac{1}{2}(\zeta-z)$	log $\frac{1}{2}(\zeta-z)$	$\zeta-z$
8.380797	9.576751	7.534299	3.149755	+ 23′ 31″.74
380835	581277	543389	158845	24 1 .60
380869	585370	551609	167065	24 29 .15
380905	589511	559927	175383	24 57 .56
380939	593644	568227	183683	25 26 .45
381003	601085	583173	198629	26 19 .90
381048	606165	593378	208834	26 57 .46
381083	609795	600673	216129	27 24 .86
381125	614108	609341	224797	27 58 .02
8.381158	9.617522	7.616202	3.231658	+ 28 24 .74

Verbindet man endlich durch Addition die Reduction auf den Meridian $\zeta - z$ mit den Zenithdistanzen z im ersten Tableau, so erhält man die Meridian-Zenithdistanzen ζ, und durch Vereinigung je zweier derselben (der 1ten mit der letzten, der 2ten mit der vorletzten etc.) die von dem Fehler des angenommenen Zenithpunctes befreiten Meridian-Zenithdistanzen, aus welchen mit Zuziehung der Declination nach der 3ten der Glgn. (203) die Polhöhe hervorgeht.

Kreislage	Mer.-Zen.-Dist. ζ	ζ Mittel aus beiden Kreislagen	φ
K. L.	40° 37′ 8″.38	40° 37′ 8″.83	50° 47′ 36″.60
	8 .11	8 .91	36 .52
	7 .36	8 .87	36 .56
	7 .44	9 .41	36 .02
	8 .01	9 .01	36 .42
K. R.	40 37 10 .00	Mittel: φ =	50° 47′ 36″.42
	11 .39		
	10 .38		
	9 .70		
	9 .29		

191. Statt der in §. 188 entwickelten strengen Formeln zur Berechnung der Reduction auf den Meridian kann man in den meisten Fällen mit Vortheil Reihenentwicklungen anwenden. In §. 188 hatten wir die Gleichung:

$$\cos z = \cos \zeta \mp \cos \varphi \cos \delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2,$$

wo z die beobachtete, ζ die Meridian-Zenithdistanz bedeutet, das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem sich ζ auf obere oder untere Culmination bezieht, und in letzterem Falle der Stundenwinkel t vom nördlichen Theile des Meridians aus zu zählen ist. Setzen wir die stets kleine Grösse:

$$\cos \varphi \cos \delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 = h,$$

so wird:

$$\cos z = \cos \zeta \mp h, \tag{a}$$

oder:

$$z = \text{arc} \cos (\cos \zeta \mp h),$$

und es kann nun diese Function nach dem Taylor'schen Lehrsatze in eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickelt werden. Setzt man:

$$\cos \zeta = x, \quad \text{arc} \cos x = f(x),$$

so wird:

$$z = \text{arc} \cos (x \mp h),$$

somit:

$$z = f(x) \mp \frac{df}{dx} h + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} h^2 \mp \tfrac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} h^3 + \ldots.$$

Nun ist:

$$f(x) = \text{arc} \cos x = \zeta,$$

$$\frac{df}{dx} = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sin \zeta},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sin\zeta^2}\operatorname{cotg}\zeta,$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}[1+3x^2(1-x^2)^{-1}] = -\frac{1+3\operatorname{cotg}\zeta^2}{\sin\zeta^3},$$

folglich, wenn man sofort $f(x) = \zeta$ ausdrückt:

$$\zeta = z \mp \frac{h}{\sin\zeta} + \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{\sin\zeta^2}\operatorname{cotg}\zeta \mp \tfrac{1}{6}\frac{h^3}{\sin\zeta^3}(1+3\operatorname{cotg}\zeta^2) + \ldots . \quad (b)$$

Setzt man nun für h seinen Werth, so wie für ζ der Reihe nach die Werthe aus den Glgn. (203), und dividirt die mit den Potenzen von h multiplicirten Glieder durch $\sin 1''$, um sie in Bogensecunden auszudrücken, so erhält man, bis zur zweiten Potenz von h, d. i. bis zur vierten Potenz von $\sin\frac{1}{2}t$ gehend, und der Kürze wegen:

$$m = \frac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}, \quad n = \frac{2\sin\frac{1}{2}t^4}{\sin 1''}$$

setzend:

für südliche Sterne:

$$\varphi = \delta + z - A\,.\,m + A^2\operatorname{cotg}(\varphi-\delta)\,.\,n, \quad (209)$$

$$\text{wo } A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)};$$

für nördliche Sterne:

Ob. Culm. $\varphi = \delta - z + A\,.\,m - A^2\operatorname{cotg}(\delta-\varphi)\,.\,n,$ (210)

$$\text{wo } A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta-\varphi)};$$

Unt. Culm. $\varphi = 180^0 - \delta - z - A\,.\,m + A^2\operatorname{cotg}(\varphi+\delta)\,.\,n,$ (211)

$$\text{wo } A = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi+\delta)};$$

in letzterer Formel ist der Stundenwinkel vom nördlichen Meridian ab zu zählen.

Die Werthe von m und n oder deren Logarithmen können den S. 328 citirten Hilfstafeln mit dem Argumente t = Stundenwinkel unmittelbar entnommen werden; zur Berechnung der Coefficienten von m und n ist ein genäherter Werth der Polhöhe anzuwenden.

In obigen Formeln sind die Glieder 6ter und höherer Ordnung vernachlässigt, weil nur, wenn dies gestattet ist, der Gebrauch derselben einen Vortheil vor den strengen Formeln (§. 188) gewährt. Das Glied 6ter Ordnung ist:

für südliche Sterne:

$$-\tfrac{2}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right\}^3[1+3\operatorname{cotg}(\varphi-\delta)^2]\frac{2\sin\frac{1}{2}t^6}{\sin 1''};$$

für nördliche Sterne:

Ob. Culm.: $+\tfrac{2}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta-\varphi)}\right\}^3[1+3\operatorname{cotg}(\delta-\varphi)^2]\frac{2\sin\frac{1}{2}t^6}{\sin 1''},$

Unt. Culm.: $-\frac{2}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi+\delta)}\right\}^3\left[1+3\operatorname{cotg}(\varphi+\delta)^2\right]\frac{2\sin\frac{1}{2}t^6}{\sin 1''}$,

wornach für gegebene Werthe von φ und δ der Stundenwinkel berechnet werden kann, für welchen der Werth dieses Gliedes eine bestimmte, mit Rücksicht auf den geforderten Grad der Genauigkeit der Rechnung nicht zu überschreitende Grenze $\Delta\varphi$ erreicht. Hiernach findet man z. B. für $\Delta\varphi = 0''.1$ und $\Delta\varphi = 0''.01$:

	$\Delta\varphi = 0''.1$	$\Delta\varphi = 0''.01$
für $\varphi = 40^0$, $\delta = -10^0$:	$t = 32^m\ 19^s$	$22^m\ \ 1^s$
„ $\varphi = 50^0$, $\delta = +10^0$:	$t = 29\ \ 37$	$20\ \ 10$
„ $\varphi = 60^0$, $\delta = +30^0$:	$t = 28\ \ 22$	$19\ \ 19$

wo die Combinationen von φ und δ so gewählt sind, dass $\varphi - \delta = 90^0 - \varphi$, d. i. gleich der mittleren Meridian-Zenithdistanz des Polarsternes ist. Für eine bestimmte Polhöhe nimmt, wie aus obigen Ausdrücken sofort ersichtlich ist, der einer gegebenen Fehlergrenze entsprechende Stundenwinkel zu oder ab, je nachdem $\varphi - \delta$ grösser oder kleiner wird.

Die Formeln (210) und (211) können auch zur Reduction von Beobachtungen des Polarsternes benützt werden, und zwar, weil für diesen Stern die Grösse A wegen des im Zähler befindlichen Faktors $\cos\delta$ klein wird, je nach der Polhöhe bis zu Stundenwinkeln von nahe 3^h bis $3^h.5$, beziehungsweise 2 bis $2^h.5$, wenn der Betrag des vernachlässigten Gliedes 6^{ter} Ordnung $0''.1$, beziehungsweise $0''.01$ nicht überschreiten soll. Bei grösseren Stundenwinkeln sind entweder die strengen Formeln (§. 188), oder die später (§. 193) folgenden Reihenentwickelungen zu benützen.

Die Stundenwinkel t bildet man am bequemsten, indem man mit dem bekannten Stande und Gange der Uhr die Uhrzeit der Culmination des beobachteten Gestirnes ableitet, und diese von den beobachteten Uhrzeiten (oder umgekehrt) subtrahirt. Man erhält dadurch die Stundenwinkel in Uhrzeit ausgedrückt und hat dieselben erforderlichenfalls noch auf Sternzeit oder, wenn die Sonne beobachtet wurde, auf wahre Sonnenzeit zu reduciren, was hier leicht auf folgende Weise geschehen kann. Sei t der durch die Uhrdifferenz gegebene, t' der wahre Stundenwinkel, so hat man:

$$\sin\tfrac{1}{2}t' = \sin\left(\tfrac{1}{2}t\,.\,\frac{t'}{t}\right) = \sin m\,.\,\tfrac{1}{2}t, \text{ wenn } m = \frac{t'}{t};$$

folglich mit Benützung der Reihenentwickelung für den Sinus eines vielfachen Bogens:

$$\sin\tfrac{1}{2}t' = \sin m\,.\,\tfrac{1}{2}t = \cos\tfrac{1}{2}t\left[m\sin\tfrac{1}{2}t - \frac{m\,(m^2-2^2)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin\tfrac{1}{2}t^3 + \ldots\right].$$

Quadrirt man diese Gleichung, setzt $1-\sin\frac{1}{2}t^2$ für $\cos\frac{1}{2}t^2$ und, der Kürze wegen, $m^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \varkappa$, so kommt:

$$\sin \tfrac{1}{2}t'^2 = \varkappa \sin \tfrac{1}{2}t^2 - \frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{3} \sin \tfrac{1}{2}t^4 + \ldots,$$

oder:

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}t'^2}{\sin 1''} = \varkappa \, . \, \frac{2 \sin \frac{1}{2}t^2}{\sin 1''},$$

da schon das 2^{te} Glied, weil $\varkappa$ stets nahe $= 1$ und $\sin \frac{1}{2}t^4$ sehr klein ist, unmerklich wird. Man kann daher zur Bildung der Grössen $m = \frac{2 \sin \frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}$ und $n = \frac{2 \sin \frac{1}{2}t^4}{\sin 1''}$ sofort die durch die Uhrdifferenzen gegebenen Stundenwinkel benützen und hat dann nur in den Glgn. (209) u. fg. statt des Faktors A den Faktor $\varkappa A$ anzuwenden.

Die Grösse $\varkappa$ ergibt sich leicht auf folgende Art:

1. Ist ein Stern an einer nach mittlerer Zeit regulirten Uhr beobachtet, deren Gang gegen mittlere Zeit in 24^h Uhrzeit $= x^s$ ist, positiv, wenn die Uhr zurückbleibt, so sind 24^h Uhrzeit $= (24^h + x^s)$ mittlere Zeit $= \lambda\,(24^h + x^s)$ Sternzeit, wo $\lambda = 1.00273791$ (S. 119), oder 1^s Uhrzeit $= \lambda \left(1 + \frac{x^s}{86400}\right)$ Sternzeit, somit $t' = t \, . \, \lambda \left(1 + \frac{x^s}{86400}\right)$, und

$$\varkappa = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \lambda^2 \left(1 + \frac{x^s}{86400}\right)^2.$$

Zu den Logarithmen übergehend, erhält man mit Vernachlässigung der höheren Potenzen des stets sehr kleinen Bruches $\frac{x^s}{86400}$:

$$\log \varkappa = 0.002375 + 0.00001005 \, x^s.$$

2. Ist ein Stern an einer der Sternzeit folgenden Uhr beobachtet, so fällt in dem vorhergehenden Ausdruck das erste Glied weg, welches die Umwandlung von mittlerer Zeit in Sternzeit bewirkte und man hat:

$$\log \varkappa = 0.00001005 \, x^s,$$

wo x^s den täglichen Gang der Uhr gegen Sternzeit bedeutet.

Ist das beobachtete Gestirn die Sonne, so sind die Stundenwinkel in wahrer Sonnenzeit auszudrücken. Bezeichnet man mit ε und ε' die Zeitgleichung im mittleren Mittage zweier aufeinanderfolgenden Tage, so ist, zufolge der Beziehung zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit und der Zeitgleichung (S. 117), die Länge des mittleren Tages oder 24^h mittlere Zeit $= 24^h - (\varepsilon' - \varepsilon) = 24^h - \Delta\varepsilon$ wahre Zeit, wo $\Delta\varepsilon$ die Aenderung der Zeitgleichung in 24^h mittlerer Zeit bedeutet, positiv, wenn die Zeitgleichung zunimmt. Ist daher:

3. die Sonne an einer der Sternzeit folgenden Uhr beobachtet, deren täglicher Gang gegen Sternzeit $= x^s$ ist, so hat man: 24^h Uhrzeit $= (24^h + x^s)$ Sternzeit $= \lambda' \, (24^h + x^s)$ mittlere Zeit, wo $\lambda' = \frac{1}{\lambda} = 0.9972696$, somit 24^h Uhrzeit $= \lambda' \, (24^h - \varDelta\varepsilon + x)$ wahre Zeit, oder 1^s Uhrzeit $= \lambda' \left(1 + \frac{x^s - \varDelta\varepsilon}{86400}\right)$ wahre Zeit, womit man auf demselben Wege wie in 1) findet:

$$\log \varkappa = 9.997625 + 0.00001005 \, (x^s - \varDelta\varepsilon).$$

4. Ist endlich die Sonne an einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr, deren täglicher Gang gegen mittlere Zeit $= x^s$ ist, beobachtet, so hat man:

$$\log \varkappa = 0.00001005 \, (x^s - \varDelta\varepsilon).$$

Wenn der Uhrgang x, wie gewöhnlich, nur wenige Zeitsecunden beträgt, so wird man, da auch $\varDelta\varepsilon$ nicht über 30^s steigt, wenn nicht die äusserste Schärfe der Rechnung gefordert wird, in den Fällen 1) und 3) das 2[te] Glied in dem Ausdrucke von $\log \varkappa$ meist vernachlässigen, und in den Fällen 2) und 4) $\log \varkappa = 0$, oder $\varkappa = 1$ annehmen können.

192. Beispiel. 1874, August 22, wurden auf der astronomisch-geodätischen Station „Kremsmünster" in Oberösterreich mit dem in 190 erwähnten Universal-Instrumente die folgenden Zenithdistanzen des Sternes α Orionis von Dr. Tinter beobachtet:

Kreislage	Uhr	Mikroskop I.	Mikroskop II.	Libelle a	Libelle i	Barom.	Aeuss. Therm.
R.	$5^h\,30^m\,33^s.6$	$40^\circ 45' 30''.49$	$45'\,21''.32$	16.1	19.2	mm 731.66	$16^\circ.0$ C.
	32 46.8	43 32 .05	43 24 .58	20.5	14.9	$16^\circ.2$ C.	$(5^h\,29^m)$
	35 3.2	41 31 .58	41 23 .71	16.3	19.0		
	37 1.6	40 10 .63	40 4 .31	16.4	18.8		
	38 46.8	39 13 .78	39 4 .96	16.2	19.0		
	40 44.8	38 21 .02	38 12 .97	15.0	20.0		
	42 41.2	37 51 .12	37 42 .62	17.0	18.0		
	5 44 28.4	40 37 35 .27	37 26 .61	18.0	17.0		
L.	5 48 8.4	319 18 25 .64	18 18 .08	16.3	18.7		
	50 35.6	17 55 .14	17 47 .53	16.4	18.4		
	52 37.2	17 11 .00	17 4 .02	16.3	18.4		
	54 18.0	16 20 .95	16 12 .40	16.5	18.1		
	56 21.2	15 4 .31	14 56 .01	17.2	17.2		
	5 58 26.4	13 29 .95	13 22 .88	17.4	17.0	mm	
	6 0 32.8	11 37 .00	11 30 .22	17.4	16.9	731.92	$14^\circ.8$ C.
	6 2 0.4	319 10 11 .84	10 3 .20	17.2	17.0	$17^\circ.1$ C.	$(6^h\,4^m)$

Scheinbarer Ort des Sternes: $\alpha = 5^h\,48^m\,22^s.02$, $\delta = 7^\circ\,23'\,6''.78$.

Sternzeit $=$ Uhr $+ \,2^m\,13^s.32$; Zenithpunct $= 359^\circ\,57'\,58''$; 1 Scalentheil der Libelle $\mu = 2''.08$.

Angenommene Polhöhe $\varphi = 48^\circ\,3'\,22''.8$.

Ableitung der wahren Zenithdistanzen z:

Kreis-lage	Kreis-Lesung	$R.-Z.P.$ $Z.P.-L.$	$\frac{\mu}{2}(i-a)$	Refract.	z
R.	40° 45′ 25″.91	40° 47′ 27″.91	+ 3.22	+ 47.12	40° 48′ 18″.25
	43 28 .33	45 30 .33	− 5.82	47.10	46 11 .61
	41 27 .65	43 29 .65	+ 2.81	47.07	44 19 .53
	40 7 .47	42 9 .47	+ 2.50	47.05	42 59 .02
	39 9 .37	41 11 .37	+ 2.91	47.03	42 1 .31
	38 17 .00	40 19 .00	+ 5.20	47.03	41 11 .23
	37 46 .88	39 48 .88	+ 1.04	47.03	40 36 .95
	40 37 30 .95	40 39 32 .95	− 1.04	+ 47.03	40 40 18 .94
L.	319 18 21 .85	40 39 36 .15	+ 2.50	+ 47.07	40 40 25 .67
	17 51 .34	40 6 .66	+ 2.08	47.10	40 55 .84
	17 7 .50	40 50 .50	+ 2.18	47.12	41 39 .80
	16 16 .68	41 41 .32	+ 1.66	47.18	42 30 .16
	15 0 .17	42 57 .83	+ 0.00	47.24	43 45 .07
	13 26 .42	44 31 .58	− 0.42	47.30	45 18 .46
	11 33 .62	46 24 .38	− 0.52	47.37	47 11 .23
	319 10 7 .52	40 47 50 .48	− 0.21	+ 47.43	40 48 37 .70

Die weitere Rechnung nach Glchg. 209, deren zwei letzte Glieder: $-Am$ und $A^2 \operatorname{cotg}(\varphi-\delta)\, n$ in der folgenden Tabelle der Kürze halber mit I. und II. bezeichnet sind, steht nun wie folgt:

$$\varphi = 48^0\ 3'\ 23'' \qquad \log\cos\varphi = 9.82504 \qquad \log A^2 = 0.01472$$
$$\delta = 7\ 23\ 7 \qquad \log\cos\delta = 9.99638 \qquad \log\operatorname{cotg}(\varphi-\delta) = 0.06588$$
$$\varphi - \delta = 40^0\ 40'\ 16'' \qquad 9.82142 \qquad 0.08060$$
$$\log\sin(\varphi-\delta) = 9.81406 \qquad A^2\operatorname{cotg}(\varphi-\delta) = 1.204$$
$$\log A = 0.00736$$

Kreis-lage	Stunden-winkel	log m	n	log I	I	II	I + II −	$\delta + z$	φ
	m s				′ ″	″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″
R.	15 35.10	2.67829	0.55	2.68565	8 4.90	0.66	8 4.24	48 11 25.03	48 3 20.79
	13 21.90	2.54485	0.30	2.55221	5 56.62	0.36	5 56.26	9 18.39	22.13
	11 5.50	2.38295	0.15	2.39031	4 5.64	0.18	4 5.46	7 26.31	20.85
	9 7.10	2.21280	0.07	2.22016	2 46.02	0.08	2 45.94	6 5.80	19.86
	7 21.90	2.02733	0.03	2.03469	1 48.32	0.04	1 48.28	5 8.09	19.81
	5 23.90	1.75753	0.01	1.76489	58.19	0.01	58.18	4 18.01	19.83
	3 27.50	1.37076	0.00	1.37812	23.88	0.00	23.88	3 43.73	19.85
	1 40.30	0.73932	0.00	0.74668	5.58	0.00	5.58	48 3 25.72	48 3 20.14
L.	1 59.70	0.89291	0.00	0.90027	7.95	0.00	7.95	48 3 32.45	48 3 24.50
	4 26.90	1.58941	0.00	1.59677	39.52	0.00	39.52	4 2.62	23.10
	6 28.50	1.91548	0.02	1.92284	1 23.72	0.02	1 23.70	4 46.58	22.88
	8 9.30	2.11583	0.04	2.12319	2 12.80	0.05	2 12.75	5 36.94	24.19
	10 12.50	2.31087	0.10	2.31823	3 28.08	0.12	3 27.96	6 51.85	23.89
	12 17.70	2.47239	0.22	2.47975	5 1.82	0.26	5 1.56	8 25.24	23.68
	14 24.10	2.60972	0.40	2.61708	6 54.08	0.48	6 53.60	10 18.01	24.41
	15 51.70	2.69356	0.59	2.70092	8 22.25	0.72	8 21.53	48 11 44.48	48 3 22.95

Man hat daher für die Polhöhe, indem man das Mittel von je zwei dem Wechsel der Kreislage symmetrisch liegenden Werthen nimmt, folgende Resultate:

$$\begin{array}{r}
\varphi = 48^0\ 3'\ 21''.87 \\
23\ .27 \\
22\ .27 \\
21\ .88 \\
22\ .00 \\
21\ .36 \\
21\ .47 \\
48\ \ 3\ \ 22\ .32 \\
\hline
\text{Mittel: } \varphi = 48^0\ 3'\ 22''.06
\end{array}$$

193. Zur Reduction von Beobachtungen des Polarsternes, welcher, wie schon in §. 186 bemerkt wurde, in jedem Stundenwinkel mit Vortheil zur Bestimmung der Polhöhe benützt werden kann, bedient man sich auch oft einer der folgenden Reihenentwickelungen, welche nach Potenzen der Poldistanz fortschreiten und für jeden Werth des Stundenwinkels brauchbar bleiben.

Sei $p = 90^0 - \delta$ die Poldistanz des Sternes, so hat man:

$$\cos z = \sin \varphi \cos p + \cos \varphi \sin p \cos t.$$

Setzt man nun:

$$z = 90^0 - \varphi + x, \tag{a}$$

wo x, d. i. der Unterschied zwischen der Zenithdistanz und dem Complement der Polhöhe, stets ein kleiner, die Poldistanz nicht überschreitender Bogen ist, so erhält man, nach Division der Gleichung durch $\cos \varphi$:

$$\operatorname{tg} \varphi \cos x - \sin x = \operatorname{tg} \varphi \cos p + \sin p \cos t,$$

oder, für die Functionen der kleinen Bogen p und x die entsprechenden Reihen bis zu den Gliedern 4^{ter} Ordnung substituirend:

$$x = -p \cos t + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi\, (p^2 - x^2) + \tfrac{1}{6}\, (p^3 \cos t + x^3) - \tfrac{1}{24} \operatorname{tg} \varphi\, (p^4 - x^4).$$

Hieraus findet man leicht x durch successive Näherung.

Es ist $x = -p \cos t$ ein erster genäherter Werth, welcher, im 2^{ten} Theile mit Weglassung der 3^{ten} und 4^{ten} Potenzen von p und x substituirt, als zweiten genäherten Werth:

$$x = -p \cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{tg} \varphi \sin t^2$$

gibt. Dieser, im 2^{ten} Theile mit Weglassung der 4^{ten} Potenzen von p und x substituirt, ergibt als dritten genäherten Werth:

$$x = -p \cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{tg} \varphi \sin t^2 + \tfrac{1}{6} p^3 (1 + 3 \operatorname{tg} \varphi^2) \cos t \sin t^2,$$

durch dessen Substitution endlich, nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned} x = &-p \cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{tg} \varphi \sin t^2 + \tfrac{1}{6} p^3 (1 + 3 \operatorname{tg} \varphi^2) \cos t \sin t^2 \\ &+ \tfrac{1}{24} p^4 \operatorname{tg} \varphi \sin t^2\, [8 - 9 \sin t^2 + (12 - 15 \sin t^2) \operatorname{tg} \varphi^2] \end{aligned} \tag{b}$$

folgt. Setzt man diesen Werth von x in obige Gl. (a), so erhält man, p in Bogensecunden ausdrückend, mit Hinweglassung des Gliedes 4^{ter} Ordnung:

$$\begin{aligned} \varphi = 90^0 - z - p \cos t + \tfrac{1}{2}\, p^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\varphi \sin t^2 \\ + \tfrac{1}{6}\, p^3 \sin 1''^2 (1 + 3 \operatorname{tg}\varphi^2) \cos t \sin t^2. \end{aligned} \tag{212}$$

Das Glied 4^{ter} Ordnung wird:

$$\begin{aligned} &+ \tfrac{1}{24}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi \sin t^2 (8 - 9 \sin t^2) \\ &+ \tfrac{1}{24}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi^3 \sin t^2 (12 - 15 \sin t^2); \end{aligned}$$

der erste Theil erlangt, wie man durch Differenziation nach t leicht findet, für $\cos t = 0$ und $\sin t = \pm \frac{2}{3}$ die Maximalwerthe:

$$- \tfrac{1}{24}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi, \text{ bzw. } + \tfrac{2}{27}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi,$$

welche für $p = 1^0\, 20' = 4800''$ erst für $\varphi = 75^0.2$, bzw. $65^0.9$ den Werth $0''.01$ erreichen, daher dieser Theil immer unmerklich bleibt. Der zweite Theil erhält für $\cos t = 0$ und $\sin t^2 = \frac{2}{5}$ die Maximalwerthe:

$$- \tfrac{1}{8}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi^3, \text{ bzw. } + \tfrac{1}{10}\, p^4 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi^3,$$

welche für $p = 1^0\, 20'$ und $\varphi = 47^0.7$, bzw. $49^0.8$ den Werth $0''.01$, und für $\varphi = 60^0$ die Werthe $0''.039$, bzw. $0''.031$ erreichen; es kann daher auch dieser Theil mit Rücksicht auf die unvermeidliche Unsicherheit der beobachteten Zenithdistanzen vernachlässigt werden.

Das Glied 3^{ter} Ordnung in (212) erhält für $\sin t^2 = \frac{2}{3}$ seinen grössten Zahlenwerth:

$$\pm \tfrac{1}{9} \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, p^3 \sin 1''^2 (1 + 3 \operatorname{tg}\varphi^2),$$

welcher für obigen Werth von p und für $\varphi = 50^0$: $\pm\, 1''.05$ wird.

Bei der Rechnung nach Gl. (212) ist im zweiten Theile für φ ein genäherter Werth der Polhöhe zu substituiren. Ein Fehler $= \delta\varphi$ Secunden in dem angenommenen Werthe der Polhöhe erzeugt im Gliede 2^{ter} Ordnung den Fehler $\frac{1}{2}\, p^2 \sin 1''^2 \sec\varphi^2 \sin t^2\, \delta\varphi$, im Gliede 3^{ter} Ordnung den Fehler $p^3 \sin 1''^3 \operatorname{tg}\varphi \sec\varphi^2 \cos t \sin t^2\, \delta\varphi$; für jene Werthe von t, welche diese Glieder zu einem Maximum machen und für $p = 1^0\, 20'$, $\varphi = 60^0$, werden diese Fehler beziehungsweise $0''.00108\, \delta\varphi$ und $0''.000034\, \delta\varphi$, woraus erhellt, dass ein auf 5 bis 10 Secunden genäherter Werth von φ hinreichend genau ist, wenn die Rechnung auf $0''.01$ scharf geführt werden soll.

Zur Erleichterung der Rechnung kann man sich der von Dr. Th. Albrecht in dem S. 328 citirten Werke gegebenen Hilfstafeln bedienen. Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$\varphi = 90^0 - z - p \cos t + M \sin t^2 + N,$$

wo

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{2}\, p^2 \sin 1'' \operatorname{tg}\varphi, \\ N &= \tfrac{1}{6}\, p^3 \sin 1''^2 (1 + 3 \operatorname{tg}\varphi^2) \cos t \sin t^2, \end{aligned}$$

so geben zwei Tafeln die mit dem speciellen Werthe der Poldistanz: $p_0 = 1^0\, 18' = 4680''$ berechneten Werthe M_0 und N_0 der Grössen M und N, die erstere mit dem Argumente φ, die letztere mit den Argumenten φ und t, und es ist dann:

$$M = \frac{p^2}{p_0^{\,2}} M_0, \quad N = \frac{p^3}{p_0^{\,3}} N_0,$$

wo auch die Werthe der Factoren $\frac{p^2}{p_0^{\,2}}$ und $\frac{p^3}{p_0^{\,3}}$ zwei Tafeln mit dem Argumente p entnommen werden können.

Zu einer anderen, ähnlichen Reihenentwickelung gelangt man, wenn man im 2ten Theile der Gl. (b) oder (212) statt der Polhöhe die beobachtete Zenithdistanz z einführt. Da $\varphi = 90^0 - (z - x)$, so hat man zufolge des Taylor'schen Lehrsatzes:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}(z - x) = \operatorname{cotg} z + \frac{x}{\sin z^2} + x^2 \frac{\operatorname{cotg} z}{\sin z^2},$$

wobei es genügt, bei der Entwickelung von $\operatorname{tg}\varphi$ nur bis zu Gliedern 2ter Ordnung zu gehen, weil $\operatorname{tg}\varphi$ in obigen Gleichungen nur in den Gliedern 2ter und höherer Ordnung erscheint. Aus Gl. (b) folgt nun, bis auf Grössen 2ter Ordnung genau:

$$x = -p\cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{cotg} z \sin t^2,$$
$$x^2 = p^2 \cos t^2,$$

somit:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg} z - p\frac{\cos t}{\sin z^2} + \tfrac{1}{2} p^2 \frac{\operatorname{cotg} z\,(2 - \sin t^2)}{\sin z^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi^2 = \operatorname{cotg} z^2 - 2p\frac{\operatorname{cotg} z \cos t}{\sin z^2},$$

wo die in p und p^2 multiplicirten Glieder mit $\sin 1''$, beziehungsweise $\sin 1''^2$ zu multipliciren sind, wenn p in Secunden ausgedrückt wird.

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (212) erhält man nun:

$$\begin{aligned}\varphi = 90^0 - z - p\cos t &+ \tfrac{1}{2} p^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} z \sin t^2 \\ &- \tfrac{1}{3} p^3 \sin 1''^2 \cos t \sin t^2.\end{aligned} \tag{213}$$

Das Glied 4ter Ordnung:

$$+ \tfrac{1}{8} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z^3 \sin t^4$$
$$- \tfrac{1}{24} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z \sin t^2 (4 - 9\sin t^2)$$

kann auch bei dieser Reihe vernachlässigt werden. Der zweite Theil erlangt für $\cos t = 0$ und $\sin t^2 = \frac{2}{9}$ die Maximalwerthe:

$$+ \tfrac{5}{24} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z, \text{ bzw. } + \tfrac{1}{54} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z,$$

d. i. für $p = 1^0\,20'$: $0''.0126 \operatorname{cotg} z$ und $0''.0011 \operatorname{cotg} z$, von welchen der letztere immer verschwindend bleibt, der erstere aber erst in Breiten von nahe 60^0 den Werth $0''.02$ erreicht. Der erste Theil wird für $\sin t = \pm 1$ ein Maximum $= + \frac{1}{8} p^4 \sin 1''^3 \operatorname{cotg} z^3$, d. i. für $p = 1^0\,20'$: $0''.00756 \operatorname{cotg} z^3$

er erreicht für $z = 42^{\circ}.3$ den Werth $0''.01$ und steigt für $\varphi = 60^{\circ}$ auf $0''.033$ bis $0''.05$.

Das Glied 3^{ter} Ordnung in (213) erhält für $\sin t^2 = \frac{2}{3}$ seinen grössten Werth $= \pm \frac{2}{9} \sqrt{\frac{1}{3}}\, p^3 \sin 1''^2$, d. i. $\pm\, 0''.40$ für $p = 1^{0}\ 20'$. Handelt es sich daher darum, die Rechnung nur innerhalb einer Bogensecunde genau zu führen, so kann auch dieses Glied vernachlässigt werden und es genügt die einfache Formel:

$$\varphi = 90^{0} - z - p \cos t + \tfrac{1}{2}\, p^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} z \sin t^2.$$

Der englische Nautical Almanac enthält in jedem Jahrgange Hilfstafeln, welche die Rechnung nach dieser Formel zu erleichtern bestimmt sind; die directe Rechnung ist jedoch so einfach, dass sie kaum mehr Zeit erfordert, als jene mit Benützung der Tafeln, und jedenfalls genauer.

Beispiel. Berechnen wir die in §. 190 angeführten Beobachtungen des Polarsternes nach Gl. (212). Nach Substitution des angenommenen Werthes der Polhöhe $\varphi = 50^{0}\ 47'\ 36''$ geht dieselbe in folgende über:

$$\begin{aligned}\varphi = 90^{0} - z - p \cos t &+ (4.47297 - 10)\, p^2 \sin t^2 \\ &+ (9.33399 - 20)\, p^3 \sin t^2 \cos t,\end{aligned}$$

in welcher die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind, und welche Gleichung zur Reduction aller an demselben Orte beobachteten Zenithdistanzen des Polarsternes benützt werden kann, wenn kein Anlass vorliegt, den zur Berechnung der Coefficienten angenommenen Werth der Polhöhe durch einen genaueren zu ersetzen.

Am Beobachtungstage, 1864, September 22, war $\delta = 88^{0}\ 35'\ 14''.57$, $p = 1^{0}\ 24'\ 45''.43 = 5085''.43$; hiemit wird:

$$\varphi = 90^{0} - z - (3.706328) \cos t + (1.88563) \sin t^2 + (0.4530) \sin t^2 \cos t.$$

Mit den in §. 190 bereits abgeleiteten Werthen der wahren Zenithdistanzen z und der Stundenwinkel t steht nun die Rechnung wie folgt, wobei mit I, II, III die auf $90^{0} - z$ folgenden drei Glieder bezeichnet sind.

Kreis-lage	t $180^{0} +$	$\sin t$ $-$	$\cos t$ $-$	log I $+$	log II $+$	log III $-$	I $+$	II $+$	III $-$
K. L.	44° 20′ 24″.0	9.844424	9.854431	3.560759	1.57448	9.9963	60′ 37″.13	37″.539	0″.991
	44 49 46.5	848190	850773	557101	58201	0.0002	60 6.62	38.195	1.000
	45 16 39.0	851578	847371	553699	58879	0035	59 38.48	38.796	1.008
	45 44 9.0	854992	843835	550163	59561	0068	59 9.47	39.410	1.016
	46 11 54.0	858381	840209	546537	60239	0100	58 39.95	40.030	1.023
K. R.	47 2 39.0	864439	833424	539752	61451	0153	57 45.39	41.163	1.036
	47 37 54.0	868544	828592	534920	62272	0187	57 7.05	41.949	1.044
	48 3 24.0	871460	825033	531361	62855	0210	56 39.08	42.516	1.050
	48 34 1.5	874906	820689	527017	63544	0235	56 5.25	43.196	1.056
	48 58 31.5	9.877618	9.817157	3.523485	1.64087	0.0254	55 37.99	43.739	1.060

Kreis-lage	z	$90^0 - z$	I + II + III	φ	φ
K. L.	40° 13′ 36″.64	49° 46′ 23″.36	1° 1′ 13″.68	50° 47′ 37″.04	50° 47′ 36″.58
	13 6 .51	46 53 .49	1 0 43 .82	37 .31	36 .51
	12 38 .21	47 21 .79	1 0 16 .27	38 .06	36 .55
	12 9 .88	47 50 .12	0 59 47 .86	37 .98	36 .00
	11 41 .56	48 18 .44	0 59 18 .96	37 .40	36 .41
K. R.	10 50 .10	49 9 .90	0 58 25 .52	35 .42	
	10 13 .93	49 46 .07	0 57 47 .95	34 .02	
	9 45 .52	50 14 .48	0 57 20 .55	35 .03	
	9 11 .68	50 48 .32	0 56 47 .39	35 .71	
	40 8 44 .55	51 15 .45	0 56 20 .67	36 .12	
				Mittel: φ =	50° 47′ 36″.41

194. Hat man Circummeridian-Zenithdistanzen der Sonne beobachtet, so ist bei der Berechnung der Beobachtungen auf die Veränderlichkeit der Declination der Sonne Rücksicht zu nehmen. Bezeichnet man mit δ_1, δ_2, ... δ_r die den Zeiten der beobachteten Zenithdistanzen z_1, z_2, ... z_r entsprechenden Declinationen der Sonne, so hat man nach Gl. (209):

$$\varphi = \delta_1 + z_1 - A \,.\, m_1 + A^2 \operatorname{cotg} (\varphi - \delta) \,.\, n_1 \,,$$
$$\varphi = \delta_2 + z_2 - A \,.\, m_2 + A^2 \operatorname{cotg} (\varphi - \delta) \,.\, n_2 \,,$$
$$\vdots$$
$$\varphi = \delta_r + z_r - A \,.\, m_r + A^2 \operatorname{cotg} (\varphi - \delta) \,.\, n_r \,,$$

welche Gleichungen die aus den einzelnen beobachteten Zenithdistanzen folgenden Werthe der Polhöhe geben, aus welchen sodann das Mittel zu nehmen ist. Hiebei genügt es, die Coefficienten von m und n mit dem Mittel der Declinationen zu berechnen und daher in sämmtlichen Gleichungen als constant zu betrachten.

Verzichtet man aber auf die Kenntniss der aus den einzelnen Zenithdistanzen folgenden Werthe der Polhöhe und begnügt sich mit der Ableitung des Mittels derselben, so hat man, aus obigen Gleichungen das Mittel nehmend:

$$\varphi = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r}{r} + \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_r}{r} - A \,.\, \frac{\Sigma m}{r} + A^2 \operatorname{cotg} (\varphi - \delta) \,.\, \frac{\Sigma n}{r} \,,$$

wo nun für $\frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r}{r}$ die dem Mittel der Beobachtungszeiten entsprechende Declination der Sonne genommen werden kann, weil für die kurze Dauer der Beobachtungsreihe die Aenderung der Declination der Sonne als der Zeit proportional betrachtet werden darf.

Am bequemsten wird die Rechnung nach folgendem von Gauss angegebenen Verfahren vorgenommen, bei welchem auch die den einzelnen Zenithdistanzen entsprechenden Werthe der Polhöhe richtig erhalten werden.

Bezeichnet man mit δ_0 die Declination der Sonne zur Zeit der Culmination oder im wahren Mittag, mit β die stündliche Aenderung derselben in Bogensecunden ausgedrückt, positiv, wenn die Declination zunimmt, so ist die dem Stundenwinkel t entsprechende Declination $\delta = \delta_0 + \beta t$, wo t in Stunden auszudrücken ist; man hat daher nach Gl. (209) mit Hinweglassung des stets sehr kleinen Gliedes 4ter Ordnung:

$$\varphi = \delta_0 + z + \beta t - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}.$$

Man setze nun:

$$\beta t - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} t^2}{\sin 1''} = - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} (t - y)^2}{\sin 1''},$$

wodurch die vorhergehende Gleichung in folgende, der Form nach mit jener (209) übereinstimmende übergeht:

$$\varphi = \delta_0 + z - \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin\frac{1}{2} (t - y)^2}{\sin 1''}, \tag{a}$$

so hat man zur Bestimmung von y die Gleichung:

$$\beta t = \frac{2}{\sin 1''} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} [\sin\tfrac{1}{2} t^2 - \sin\tfrac{1}{2} (t - y)^2],$$

oder, weil $\sin p^2 - \sin q^2 = \sin(p + q) \sin(p - q)$ ist:

$$\beta t = \frac{2}{\sin 1''} \frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \sin(t - \tfrac{1}{2} y) \sin\tfrac{1}{2} y,$$

woraus folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2} y = \tfrac{1}{2} \beta \sin 1'' \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} \cdot \frac{t}{\sin(t - \frac{1}{2} y)}.$$

Da nun β eine Bogenminute nicht überschreitet, so wird $\frac{1}{2} y$ sehr klein und man kann daher ohne merklichen Fehler, wenn y in Bogensecunden ausgedrückt wird:

$$y = \beta \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} \cdot \frac{t}{\sin t}$$

setzen, wo im Zähler des zweiten Theiles t in Stunden auszudrücken ist. Es ist aber: $t^h = \frac{t^s}{3600} = \frac{t''}{15.3600} = \frac{206265}{15.3600} t$, wo t im Bogenmass für den Halbmesser $= 1$ zu verstehen ist, folglich $\frac{t^h}{\sin t} = \frac{206265}{15.3600}$ wird, indem, da der Stundenwinkel t 10 bis höchstens 15 Zeitminuten nicht überschreiten wird und y sehr klein ist, ohne merklichen Fehler $\frac{t}{\sin t} = 1$ gesetzt werden kann. Man hat daher, y in Zeitsecunden ausdrückend:

$$y = \frac{206265}{15^2.3600} \beta \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta},$$

oder, wenn man mit μ die 48stündige Aenderung der Declination der Sonne (vom wahren Mittag des vorhergehenden bis zu jenem des folgenden Tages), in Bogensecunden ausgedrückt, bezeichnet, also $\beta = \frac{\mu}{48}$ setzt:

$$y^s = \frac{\mu}{188.5} \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta} = \frac{\mu}{188.5} (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta) = \frac{\mu}{188.5} \cdot \frac{1}{A}, \quad (214)$$

wo $A = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}$ die in Gl. (209) eingeführte Hilfsgrösse A bedeutet.

Hiernach ist, wie der Vergleich mit Gl. (43), S. 100, zeigt, y nichts anderes, als der Stundenwinkel der grössten Höhe der Sonne, somit $t - y$ in Gl. (a) der, nicht vom Meridian oder wahren Mittag, sondern von der Zeit der grössten Höhe an gezählte Stundenwinkel.

Man kann daher die ganze Rechnung nach Gl. (209) mit der im wahren Mittag stattfindenden Declination der Sonne ausführen, und hat nur die Stundenwinkel von der Zeit der grössten Höhe ab zu zählen.

Beispiel. 1859, August 15, wurden an einem Orte bei Wien, dessen genäherte Polhöhe $\varphi = 48^0\ 5'$ und dessen östliche Länge von Berlin $11^m\ 34^s$ war, mit einem sechszölligen Prismenkreise von Pistor und Martins die folgenden Circummeridianhöhen des oberen Randes der Sonne beobachtet:

	Kreis Ob. ⊙ Rand	Chronometer
	$112^0\ 54'\ 0''$	$23^h\ 59^m\ 18^s.8$
	54 40	0 0 20 .8
	54 50	1 24 .4
	55 20	2 30 .4
	55 30	3 38 .0
	55 30	5 7 .2
	55 10	6 18 .8
	54 30	7 22 .8
	54 0	8 38 .8
	112 52 30	0 9 51 .2
Mittel	= 112 54 36 .0	

Barometer 744.0^{mm}; Inn. Therm. $+ 21^0.1$ C.
Aeuss. „ $+ 23\ .0$ C.
Uhrzeit im wahren Mittag $= 0^h\ 3^m\ 57^s.44$
Tägl. Gang gegen mittl. Zeit $= + 1^s.990$
Neigung des Glashorizontes $= - 4''.6$
(die der ⊙ zugekehrte Seite tiefer)
Collimationsfehler des Kreises $= - 11'\ 47''.0$

Dem Berliner Jahrbuche entnimmt man für den bezeichneten Tag:

Declination der ⊙ im wahren Mittag $\delta_0 = + 14^0\ 10'\ 28''.8$; $\log\mu = 3.35017\,n$.
Halbmesser der ⊙ $= 15'\ 49''.1$; Aequat.-Horiz.-Parallaxe $= 8''.47$.
Aenderung der Zeitgleichung in 24^h: $\Delta E = - 11^s.45$.

Berechnen wir zunächst den Coefficienten von m *) in Gl. (209) und die Uhrzeit der grössten Höhe der Sonne.

---

*) Der Coefficient von n wird im vorliegenden Beispiele nicht benöthiget, weil in Folge der kleinen Stundenwinkel die Werthe von n verschwindend klein werden.

$\varphi = 48^0\ 5'\ 0''$	$\log\cos\varphi = 9.82481$	$\log\mu = 3.35017n$
$\delta_0 = 14\ 10\ 29$	$\log\cos\delta_0 = 9.98657$	$\log 188.5 = 2.27531$
$\varphi - \delta_0 = 33\ 54\ 31$	9.81138	$\log A = 0.06485$
	$\log\sin(\varphi-\delta_0) = 9.74653$	$\log y = 1.01001$
$\varDelta E = -11^s.45$	$\log A = 0.06485$	$y = -10^s.23$
Tägl. Gang $x = +\ 1.99$	$\log\varkappa = 0.00014$	Uhrzeit i. w. Mittag $= 0^h\ 3^m\ 57^s.44$
$x - \varDelta E = +13.44$	$\log\varkappa A = 0.06499$	Uhrzeit d. grössten Höhe $= 0^h\ 3^m\ 47^s.2$
$\log\varkappa = 0.00014$ (S. 423)		

Verbindet man nun die Uhrzeit der grössten Höhe mit den beobachteten Uhrzeiten durch Subtraction, so erhält man die folgenden von der Uhrzeit der grössten Höhe gezählten Werthe $t - y$ der Stundenwinkel, welchen die der Hilfstafel entnommenen Werthe von m beigefügt sind.

$t - y$	m
$4^m\ 28^s.4$	$39''.29$
3 26 .4	23 .23
2 22 .8	11 .12
1 16 .8	3 .21
0 9 .2	0 .04
1 20 .0	3 .49
2 31 .6	12 .53
3 35 .6	25 .35
4 51 .6	46 .37
6 4 .0	72 .26
	$\Sigma m = 236.89$

$$\tfrac{1}{10}\Sigma m = 23''.689$$
$$\log \tfrac{1}{10}\Sigma m = 1.37455$$
$$\log\varkappa A = 0.06499$$
$$1.43954$$
$$\varkappa A\,.\,\tfrac{1}{10}\Sigma m = 27''.51$$

Die weitere Rechnung mit dem Mittel der Kreis-Lesungen ist nun folgende:

Mittel der Lesungen		112^0	$54'$	$36''.0$
Collimationsfehler	$-$		11	47 .0
		112	42	49 .0
		56	21	24 .5
Correction des Horizontes	$-$			4 .6
Scheinbare Höhe des oberen ⊙ Randes		56	21	19 .9
Refraction	$-$			36 .2
Halbmesser der ⊙	$-$		15	49 .1
Höhenparallaxe	$+$			4 .7
Wahre Höhe der ⊙		56	4	59 .3
Wahre Zenithdistanz	$z =$	33	55	0 .7
	$\delta_0 =$	14	10	28 .8
	$-\varkappa A\,.\,\frac{1}{10}\Sigma m =$	$-$		27 .5
	$\varphi =$	48^0	$5'$	$2''.0$

Will man die Rechnung für jede einzelne Beobachtung durchführen, so findet man die wahren Höhen der Sonne nach dem Schema:

Wahre Höhe $= \frac{1}{2}$ Lesung $+$ ($\frac{1}{2}$ Collimf. $+$ Corr. d. Hor. $-$ Rad. $\odot$ $-$ Refr. $+$ Parall.)
$= \frac{1}{2}$ Lesung $- 22'\ 18''.7$,

somit:

$$\text{Wahre Zenithdistanz } z = 90^0\ 22'\ 18''.7 - \tfrac{1}{2} \text{ Lesung.}$$
$$\delta_0 = 14\ \ 10\ \ 28\ .8$$
$$\delta_0 + z = 104\ \ 32\ \ 47\ .5 - \tfrac{1}{2} \text{ Lesung.}$$

Die Rechnung ist nun folgende, wobei die Werthe von $\log m$ mit den bereits oben erhaltenen Stundenwinkeln $t - y$ als Argument der Hilfstafel entnommen sind:

$\frac{1}{2}$ Lesung	$\delta_0 + z$	$\log m$	$\log \varkappa A \,.\, m$	$\varkappa A \,.\, m$	φ	Abw. v. Mittel v
56°27′ 0″	48°5′47″.5	1.59428	1.65927	−45″.6	48°5′ 1″.9	+ 0″.1
27 20	5 27 .5	1.36613	1.43112	27 .0	5 0 .5	+ 1 .5
27 25	5 22 .5	1.04618	1.11117	12 .9	5 9 .6	− 7 .6
27 40	5 7 .5	0.50744	0.57243	3 .7	5 3 .8	− 1 .8
27 45	5 2 .5	8.66351	8.72850	0 .1	5 2 .4	− 0 .4
27 45	5 2 .5	0.54291	0.60790	4 .0	4 58 .5	+ 3 .5
27 35	5 12 .5	1.09812	1.16311	14 .6	4 57 .9	+ 4 .1
27 15	5 32 .5	1.40402	1.46901	29 .4	5 3 .1	− 1 .1
27 0	5 47 .5	1.66629	1.73128	53 .9	4 53 .6	+ 8 .4
26 15	6 32 .5	1.85890	1.92389	− 83 .9	5 8 .6	− 6 .6

Mittel: $\varphi = 48^0\ 5'\ 2''.0$

Die Summe der Fehlerquadrate wird $[vv] = 207.81$; hiemit folgt:

$$\text{wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung} = \pm\ 0.6745 \sqrt{\frac{207.81}{10-1}} = \pm\ 3''.2$$

$$\text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{des Mittels} = \pm\ \frac{3''.2}{\sqrt{10}} = \pm\ 1''.0,$$

in welchen Werthen selbstverständlich der Einfluss constanter Fehler, welche auf alle Beobachtungen gleichmässig einwirken, nicht inbegriffen ist.

Zu denselben Resultaten würde natürlich auch die Rechnung mit den wahren, den einzelnen Beobachtungszeiten entsprechenden Declinationen und den vom wahren Mittag an gezählten Stundenwinkeln führen. Hingegen gibt die Rechnung mit der dem Mittel der Uhrzeiten entsprechenden Declination und den vom wahren Mittag gezählten Stundenwinkeln zwar den aus sämmtlichen Beobachtungen folgenden Mittelwerth der Polhöhe richtig; die aus den einzelnen Beobachtungen auf diese Art berechneten Werthe der Polhöhe werden jedoch von den richtigen mehr oder weniger abweichen, weil hier nicht, wie bei dem Gauss'schen Verfahren, die Stundenwinkel der in die Rechnung eingeführten Declination entsprechend bestimmt werden.

195. Bei der Ableitung der Polhöhe aus beobachteten Zenithdistanzen von Fixsternen kann von der Anbringung der täglichen Aberration an den scheinbaren Ort des Sternes abgesehen werden. Denn es ist, wenn Θ die

Sternzeit der Beobachtung und α die Rectascension des Sternes bedeutet, der Stundenwinkel $t = \Theta - \alpha$, somit $dt = - d\alpha$; man hat daher, zufolge der Gl. (202):

$$d\varphi = \cos\varphi \operatorname{tg} A \, d\alpha + \cos q \sec A \, d\delta.$$

Lässt man nun $d\alpha$ und $d\delta$ die tägliche Aberration in Rectascension und Declination bedeuten, so ist vermöge der Glgn. (112):

$$d\alpha = \lambda \cos\varphi \cos t \sec\delta, \quad d\delta = \lambda \cos\varphi \sin t \sin\delta,$$

wo $\lambda = 0''.31$; hiemit wird:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cos\varphi}{\cos A} (\sin\varphi \sin A \cos t \sec\delta + \cos q \sin t \sin\delta),$$

oder, da $\cos\varphi \sin A = \sin q \cos\delta$:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cos\varphi}{\cos A} (\sin q \cos t + \cos q \sin\delta \sin t);$$

es ist aber der eingeklammerte Factor $= \sin A \cos z$, somit:

$$d\varphi = 0''.31 \cos\varphi \cos z \operatorname{tg} A.$$

Hieraus erhellt, dass, da bei Beobachtungen des Polarsternes, so wie von Circummeridian-Zenithdistanzen anderer Sterne, das Azimuth A immer sehr klein ist, der aus der Vernachlässigung der täglichen Aberration entspringende Fehler verschwindend klein, und überdies bei symmetrischer Vertheilung der Beobachtungen zu beiden Seiten des Meridians, in Folge des hiebei eintretenden Zeichenwechsels von $\operatorname{tg} A$, vollständig eliminirt wird.

2. Bestimmung der Polhöhe aus beobachteten Differenzen der Meridian-Zenithdistanzen zweier auf entgegengesetzten Seiten des Zeniths culminirender Sterne. (Talcott's Methode.)

196. Bezeichnet man mit δ, δ' die Declinationen zweier Sterne, von welchen der eine südlich, der andere nördlich vom Zenith culminirt, mit ζ, ζ' deren Meridian-Zenithdistanzen, so bestehen bekanntlich für die Polhöhe φ die Gleichungen: $\varphi = \delta + \zeta$ und $\varphi = \delta' - \zeta'$, aus deren Addition die folgende hervorgeht:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta'). \tag{215}$$

Bei Anwendung dieser Gleichung wird daher nicht die Bestimmung der absoluten Zenithdistanzen ζ und ζ', sondern nur die Differenz derselben erfordert und das Wesen der Talcott'schen Methode besteht darin, diese Differenz mikrometrisch, also ohne Zuhilfenahme von Kreistheilungen zu messen. Zu diesem Zwecke muss das Fernrohr des Instrumentes mit einem Schraubenmikrometer mit im Sinne der Zenithdistanz beweglichem Horizontalfaden versehen sein, und sind die beiden Sterne so zu wählen, dass sie in nahe gleichen Zenithdistanzen, der eine südlich, der andere nördlich vom Zenith culminiren, damit dieselben ohne Aenderung der Stellung des Fernrohres gegen das Zenith, durch blosse Drehung desselben aus dem südlichen in den nördlichen Meridian, oder umgekehrt, in das Gesichtsfeld gebracht werden können.

Zur Ausführung dieser Methode wird namentlich in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika, wo dieselbe, von Talcott eingeführt, bei der Küstenvermessung ausgedehnte Anwendung fand, ein besonders construirtes Instrument (Zenithteleskop) benützt. Dasselbe besteht im Wesentlichen aus einem um eine horizontale und verticale Axe drehbaren, geraden, mit prismatischem Oculare und Schraubenmikrometer versehenem Fernrohr, welches an dem einen Ende der Horizontalaxe angebracht ist und durch ein am andern Ende der Axe befindliches Gegengewicht balancirt wird. Die Horizontalaxe liegt, wie bei dem Universal-Instrumente, in zwei Vförmigen Lagern eines horizontalen Trägers, welcher mit dem oberen Ende einer um eine verticale, von einem auf Stellschrauben ruhenden Dreifusse getragenen Axe drehbaren Säule fest verbunden ist; ein auf dem Dreifusse befestigter Horizontalkreis, welcher mittelst eines mit dem unteren Ende der Säule verbundenen Nonius abgelesen wird, gestattet die Einstellung des Instrumentes in ein bestimmtes Azimuth. Eine auf die Horizontalaxe aufzusetzende Libelle dient zur gegenseitigen Senkrechtstellung beider Axen und Verticalstellung der Verticalaxe mittelst der Fussschrauben. Endlich ist unmittelbar mit dem Fernrohre, in einer zur Horizontalaxe senkrechten Ebene, eine empfindliche Libelle, um einen zu dieser Axe parallelen Zapfen drehbar, verbunden, so dass dieselbe in jeden beliebigen Winkel zur Absehenlinie des Fernrohres gebracht und mittelst einer Klemmschraube festgestellt werden kann, zu welchem Zwecke mit dem Fernrohre ein getheilter Kreis, mit dem Träger der Libelle aber, senkrecht auf letztere, eine Alhidade mit Nonius fest verbunden sind. Die Einrichtung ist so getroffen, dass nach gehöriger Justirung die Lesung am Kreise $= 0$ ist, wenn die Libelle senkrecht steht auf der durch den festen horizontalen Mittelfaden gebildeten Absehenlinie des Fernrohres, und ist die Theilung von Null aus nach beiden Seiten bis 90^0 beziffert. Die Ablesung des Kreises bei einspielender Libelle gibt daher, bei jeder Stellung des Fernrohres, die Zenithdistanz desselben und es dient somit der Kreis zur Einstellung des Fernrohres auf eine gegebene Zenithdistanz z; man bringt zu diesem Zwecke zunächst den Nonius durch Drehung der Libelle auf die Lesung z, und sodann durch Drehung des Fernrohres um die Horizontalaxe die Libelle nahe zum Einspielen. Das Fernrohr kann nun durch eine Klemmschraube festgestellt und demselben durch eine Einstellschraube noch eine feine Bewegung in Zenithdistanz ertheilt werden, lediglich zu dem Zwecke, um die Blase der Libelle nahe in die Mitte der Röhre zu bringen. — Für die Berichtigung des Instrumentes in Betreff der Stellung der Axen, der

Fäden und der Collimation des verticalen Mittelfadens finden die für das Universal-Instrument gegebenen Vorschriften entsprechende Anwendung. Der Winkelwerth einer Schraubenumdrehung des Mikrometers beträgt 40 bis 50 Bogensecunden, so dass, wenn die Trommel in hundert Theile getheilt ist, die Einstellung des Fadens auf 0″.04 bis 0″.05 genau abgelesen werden kann.

Aus dieser Einrichtung des Zenithteleskops ist übrigens ersichtlich, dass zur Ausführung der in Rede stehenden Beobachtungen auch ein Universal-Instrument verwendet werden kann, wenn das Fernrohr mit einem Schraubenmikrometer mit beweglichem Horizontalfaden versehen wird; die bei dem Zenithteleskop mit dem Fernrohre unmittelbar verbundene Libelle wird bei dem Universal-Instrumente durch die auf dem Mikroskopträger des Höhenkreises ruhende Alhidadenlibelle ersetzt. Dieser Umstand begründet einen Vorzug des Zenithteleskops insoferne, als bei unmittelbarer Verbindung der Libelle mit dem Fernrohre die wesentlichste Bedingung, d. i. die Unveränderlichkeit der Stellung der Libelle gegen das Fernrohr während der Dauer der Beobachtung beider Sterne in höherem Masse gesichert ist, als dies bei dem Universal-Instrumente der Fall sein wird, wo die Libelle getrennt von dem Fernrohre mit dem Mikroskopträger verbunden ist.

Selbstverständlich darf, wenn, wie bei dem in Fig. 51 und 52 (S. 246 und 247) dargestellten Universal-Instrumente, der Mikroskopträger auf die Horizontalaxe aufgebüchst ist, während der Dauer der Beobachtungen beider Sterne die Schraube μ (Fig. 52) nicht berührt werden, weil durch Drehung derselben die Neigung des Mikroskopträgers und somit auch der Libelle gegen das Fernrohr geändert wird.

Auch ein mit Umlegevorrichtung versehenes Passage-Instrument, ähnlich dem in Fig. 65 und 66 (S. 272 und 273) dargestellten, kann hiezu benützt werden, wenn, nebst dem Schraubenmikrometer mit beweglichem Horizontalfaden eine Libelle, in gleicher Weise wie bei dem Zenithteleskop, mit dem Fernrohre verbunden wird. Da bei diesen Instrumenten eine Drehung des Fernrohres um eine verticale Axe nicht vorgesehen ist, so besteht das Verfahren darin, dass man, nach Beobachtung des zuerst culminirenden Sternes, die Horizontalaxe sammt Fernrohr mittelst der Umlegevorrichtung aus den Lagern hebt, um 180° dreht und, ohne Aenderung der Stellung des Fernrohres, wieder in die Lager niederlässt, endlich mittelst der Schraube w (Fig. 66), durch welche dem Fernrohre sammt der Libelle eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt, die gegenseitige Lage derselben also nicht geändert wird, die Blase wieder nahe in die Mitte der Röhre zurückführt.

Die Talcott'sche Methode besitzt den Vortheil, dass sie die Polhöhe frei von Fehlern der Kreistheilung und von dem Einflusse der Biegung des Fernrohres und der Unsicherheit der Refraction gibt; ihre erfolgreiche Anwendung erfordert nur die möglichste Sicherung der Unveränderlichkeit der Beziehung zwischen Libelle und Fernrohr während der Dauer der Beobachtung beider

Sterne und ein sorgfältig construirtes Mikrometer. Ein Nachtheil der Methode liegt in dem Umstande, dass man in Folge der Bedingung der nahe gleichen Meridian-Zenithdistanzen beider Sterne bei der Auswahl derselben auf kleinere Sterne bis zur 6ten und 7ten Grösse herabzugehen genöthigt ist, deren aus den Sternkatalogen zu entnehmende Declinationen im Allgemeinen erheblich weniger genau sind, als jene der helleren Sterne, auf welche man sich bei anderen Methoden beschränken kann. Man muss daher eine grössere Anzahl von Sternpaaren beobachten, um den aus sämmtlichen Beobachtungen abzuleitenden Mittelwerth der Polhöhe von dem Einflusse der Declinationsfehler thunlichst befreit zu erhalten. Bei der Auswahl der Sternpaare ist es räthlich, darauf zu achten, dass die grössere Zenithdistanz sich möglichst gleichförmig auf die südlichen und nördlichen Sterne vertheilt, weil hiedurch der Einfluss eines Fehlers in dem angenommenen Winkelwerthe einer Schraubenumdrehung des Mikrometers vermindert wird. Dieser Einfluss wird umsomehr eliminirt, je näher die Bedingung $\Sigma\zeta = \Sigma\zeta'$ erfüllt ist.

197. Die Ausführung der Beobachtungen selbst, sowie deren Reduction ist sehr einfach. Wie bereits bemerkt, sind die zwei Sterne so zu wählen, dass sie in nahe gleichen Meridian-Zenithdistanzen, der eine nördlich, der andere südlich vom Zenith culminiren; es ist zweckmässig, die Differenz derselben das halbe Gesichtsfeld nicht erheblich überschreiten zu lassen, um Beobachtungen zu nahe am Rande zu vermeiden, und rücksichtlich der absoluten Zenithdistanzen nicht über 30^0 zu gehen. Ist g die Grenze, welche die Differenz der Meridian-Zenithdistanzen nicht überschreiten soll, und δ' die Declination des nördlichen Sternes, so muss jene des südlichen Sternes zwischen den Grenzen $\delta = 2\varphi - \delta' \mp g$ liegen. Die Differenz der Rectascensionen soll nicht zu gross sein, damit beide Beobachtungen bald aufeinander folgen, um für die Dauer derselben des unveränderten Zustandes des Instrumentes sicher zu sein; anderseits darf dieselbe nicht erheblich unter 3^m sinken, damit der Beobachter zur Ablesung des Mikrometers und der Libelle, sowie zur Drehung des Instrumentes um 180^0 die nöthige Zeit finde. Nachdem das Fernrohr auf die mittlere Zenithdistanz beider Sterne

$$z = \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') = \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$

gestellt und das Instrument nach der Seite des zuerst culminirenden Sternes in den Meridian orientirt ist, wird das Eintreten des Sternes in das Gesichtsfeld abgewartet, und im Momente der Culmination der bewegliche Mikrometerfaden auf den Stern scharf eingestellt. Dieser Moment wird, wenn das Instrument in den Meridian gut orientirt und der Collimationsfehler sehr klein ist, hinreichend nahe mit dem Durchgange des Sternes durch den verticalen Mittelfaden zusammenfallen; man kann ihn jedoch auch der Uhr entnehmen, indem man mittelst der scheinbaren Rectascension des Sternes und des Standes der Uhr die Uhrzeit der Culmination im Voraus berechnet. Hieranf wird das Mikrometer und die Libelle abgelesen, das Instrument um 180^0 gedreht und in gleicher Weise der zweite Stern beobachtet.

Es sei nun m_0 die einer bestimmten, übrigens willkürlichen Stellung des beweglichen Fadens entsprechende Lesung des Mikrometers; ζ_0 die dieser Stellung bei einspielender Libelle entsprechende scheinbare Zenithdistanz; m die Lesung des Mikrometers bei Einstellung auf den südlichen Stern: so wird, wenn wir mit R den Winkelwerth einer Schraubenumdrehung in Bogensecunden bezeichnen, und annehmen, dass die Mikrometer-Lesungen bei zunehmender Zenithdistanz abnehmen, $\zeta_0 + R(m_0 - m)$ die scheinbare Zenithdistanz des Sternes sein, wenn die Libelle einspielt. Ist dies aber nicht der Fall, und l die Ausweichung der Blase von der Mitte in Bogensecunden, positiv, wenn die Blase gegen Nord ausweicht, so wird die scheinbare Zenithdistanz $= \zeta_0 + R(m_0 - m) + l$, somit, wenn r die Refraction bedeutet, die wahre Zenithdistanz ζ des südlichen Sternes:

$$\zeta = \zeta_0 + Rm_0 - Rm + l + r.$$

Für den nördlichen Stern sei m' die Lesung des Mikrometers; l' die Ausweichung der Libelle, wieder positiv, wenn die Blase gegen Nord ausweicht; r' die Refraction, so wird, da die Grösse $\zeta_0 + Rm_0$ constant bleibt, so lange die Beziehung zwischen Fernrohr und Libelle sich nicht ändert, die wahre Zenithdistanz ζ' des nördlichen Sternes:

$$\zeta' = \zeta_0 + Rm_0 - Rm' - l' + r'.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\zeta - \zeta' = R(m' - m) + (l + l') + (r - r'), \tag{a}$$

und durch Substitution dieses Werthes von $\zeta - \zeta'$ in Gl. (215) erhalten wir:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}R(m' - m) + \tfrac{1}{2}(l + l') + \tfrac{1}{2}(r - r'). \tag{216}$$

Bezeichnen wir die Lesungen des nördlichen und südlichen Blasenendes der Libelle für den südlichen Stern mit n, s, für den nördlichen mit n', s', mit μ den Winkelwerth eines Scalentheiles in Bogensecunden, so ist:

$$l = \frac{\mu}{2}(n - s), \quad l' = \frac{\mu}{2}(n' - s'),$$

somit:

$$\tfrac{1}{2}(l + l') = \frac{\mu}{4}[(n + n') - (s + s')]. \tag{217}$$

Da ferner die Differenz der Zenithdistanzen ζ und ζ' klein ist, und diese selbst 30^0 meist nicht überschreiten werden, so wird die Differenz $r - r'$ der Refractionen stets so klein sein, dass wir die vom Barometer- und Thermometerstande abhängigen Veränderungen vernachlässigen und

$$r - r' = (\zeta - \zeta')\frac{dr}{dz}$$

setzen können, wo $\frac{dr}{dz}$ die Aenderung der mittleren Refraction bedeutet, welche, wenn wir $\zeta - \zeta'$ in Minuten ausdrücken, einer Aenderung der Zenithdistanz um eine Minute entspricht. Aus dem Bessel'schen Ausdrucke für die mittlere Refraction: $r = \alpha \operatorname{tg} z$ [§. 52] folgt nun: $\frac{dr}{dz} = \frac{\alpha}{\cos z^2}$, womit

$$r - r' = (\zeta - \zeta')\,\frac{\alpha}{\cos z^2}$$

wird, wo $\zeta - \zeta'$ in Bogenmaass zu verstehen ist; drückt man aber $\zeta - \zeta'$ in Minuten aus, so wird $r - r' = (\zeta - \zeta')\,\frac{\alpha \sin 1'}{\cos z^2}$. Setzt man nun nach Taf. I, Seite 141, für Zenithdistanzen zwischen 0^0 und 30^0 $\log \alpha = 1.7615$, und berücksichtiget, dass sehr nahe $\zeta - \zeta' = R\,(m' - m)$ ist, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\,(r - r') = \tfrac{1}{2}\,R\,(m' - m)\,\frac{0''.01680}{\cos z^2}, \qquad (218)$$

wo $\frac{1}{2}\,R\,(m' - m)$ das in Gl. (216) erscheinende zweite Glied, in Minuten ausgedrückt, bedeutet und für z das Mittel der Zenithdistanzen beider Sterne zu nehmen ist.*)

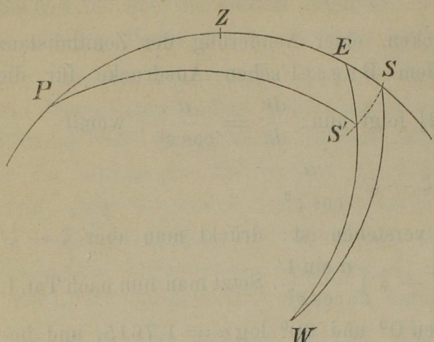
198. Es kann vorkommen, dass die Einstellung des Mikrometers auf den Stern zur Zeit der Culmination aus irgend einem Grunde misslingt; man kann dann die Einstellung ausserhalb des Meridians bei einem Stundenwinkel τ des Sternes vornehmen, welcher sich aus der beobachteten Uhrzeit der Einstellung und der Uhrzeit der Culmination ergibt, und hat dann an die nach Gl. (216) berechnete Polhöhe noch eine Correction anzubringen. Hiebei können zwei Fälle eintreten.

1. Das Instrument steht und bleibt im Meridiane und der Stern wird seitwärts vom verticalen Mittelfaden im Stundenwinkel τ beobachtet. Hiebei wird vorausgesetzt, dass bei Berichtigung der Fäden der bewegliche Mikrometerfaden mit aller Sorgfalt horizontal gestellt worden sei.

Sei (Fig. 91) PS der Meridian, P der Nordpol, SS' der Parallel des Sternes und dieser in S' beobachtet. Nimmt man, was hier zulässig ist, das Instrument und dessen Aufstellung als fehlerfrei an, so trifft die Horizontalaxe, gegen West verlängert, die scheinbare Himmelskugel im Westpuncte W, und die durch den Mikrometerfaden gebildete Visirebene schneidet die Himmelskugel in dem grössten Kreise $WS'E$, würde aber, wenn der Stern im Meridiane beobachtet worden wäre, die Kugel im grössten Kreise WS schneiden. Es ist daher

*) Bei der obigen Ableitung wurde angenommen, dass die Mikrometer-Lesungen bei zunehmender Zenithdistanz abnehmen; im Gegenfalle hat man nur die Lesungen m, m' mit negativem Zeichen in den Formeln (216) und (218) einzuführen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in diesen Formeln $m - m'$ an die Stelle von $m' - m$ treten zu lassen.

Fig. 91.



der Winkel $SWE = arc\,SE = x$ die Reduction der beobachteten Zenithdistanz auf den Meridian, welche, da der Punct E für Sterne von nördlicher Declination stets nördlich vom Puncte S liegt, der Stern mag südlich oder nördlich vom Zenith culminiren, bei einem südlichen Sterne zur beobachteten Zenithdistanz zu addiren, bei einem nördlichen von derselben zu subtrahiren ist, um die Meridian-Zenithdistanz zu erhalten.

Aus dem bei E rechtwinkeligen Dreiecke PES', in welchem $PS' = 90^0 - \delta$, $PE = 90^0 - \delta - x$ ist, folgt:

$$\operatorname{cotg}(\delta + x) = \operatorname{cotg}\delta \cos\tau.$$

Man hat aber nach dem Taylor'schen Satze, mit Vernachlässigung der im vorliegenden Falle stets unmerklichen höheren Potenzen von x:

$$\operatorname{cotg}(\delta + x) = \operatorname{cotg}\delta - \frac{x}{\sin\delta^2},$$

folglich, wenn man im zweiten Theile $\cos\tau = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\tau^2$ setzt, und x in Bogensecunden ausdrückt:

$$x = \sin 2\delta\,\frac{\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''},$$

oder:

$$x = \tfrac{1}{4}(15\,\tau)^2 \sin 1'' \sin 2\delta,$$

wo τ in Zeitsecunden auszudrücken ist.

In der Gl. (a) des vorhergehenden §. gibt nun der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, den wir kurz mit M bezeichnen wollen, die Differenz $\zeta - \zeta'$ der Meridian-Zenithdistanzen unter der dort gemachten Voraussetzung, dass beide Sterne im Meridiane beobachtet seien. Ist aber einer derselben ausserhalb des Meridians, der südliche in der Zenithdistanz z, oder der nördliche in der Zenithdistanz z' beobachtet, so stellt der Ausdruck M die Differenz $z - \zeta'$, beziehungsweise $\zeta - z'$ dar, und da $\zeta = z + x$, $\zeta' = z' - x$ ist, so hat man im ersten Falle: $M = z - \zeta' = \zeta - x - \zeta'$, im zweiten $M = \zeta - z' = \zeta - \zeta' - x$, folglich in beiden Fällen: $\zeta - \zeta' = M + x$, und vermöge der Gl. (215): $\varphi = \frac{1}{2}(\delta + \delta') + \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}x$. Es ist daher die Correction $\varDelta\varphi$ der nach Gl. (216) berechneten Polhöhe:

$$\varDelta\varphi = +\tfrac{1}{8}(15\,\tau)^2 \sin 1'' \sin 2\delta = +(6.1347 - 10)\,\tau^2 \sin 2\delta, \quad (219)$$

wo die eingeklammerte Zahl einen Logarithmus bedeutet, τ in Zeitsecunden auszudrücken ist und $\varDelta\varphi$ in Bogensecunden erhalten wird.

Sind beide Sterne ausserhalb des Meridians beobachtet, so ist für jeden Stern die Correction $\Delta\varphi$ nach (219) zu berechnen und die Summe beider Correctionen zu der nach Gl. (216) berechneten Polhöhe zu addiren.

2. Man folgt dem Sterne ausserhalb des Meridians durch Drehung des Fernrohres um die Verticalaxe des Instrumentes (welches Verfahren selbstverständlich nur bei Benützung eines Zenithteleskops oder eines Universal-Instrumentes eintreten kann) und beobachtet den Stern nahe am verticalen Mittelfaden. In diesem Falle ist die Reduction x der beobachteten Zenithdistanz auf die Meridian-Zenithdistanz offenbar identisch mit der in §. 191 entwickelten Reduction auf den Meridian und daher nach Gl. (209) und (210), mit Vernachlässigung des von der 4ten Potenz des Stundenwinkels abhängigen Gliedes:

$$x = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''},$$

welcher Betrag sowol bei südlichen als bei nördlichen Sternen von der beobachteten Zenithdistanz zu subtrahiren ist, um die Meridian-Zenithdistanz zu erhalten. Man hat daher, je nachdem der südliche oder nördliche Stern ausserhalb des Meridians beobachtet ist: $M = z - \zeta' = \zeta + x - \zeta'$, oder $M = \zeta - z' = \zeta - \zeta' - x$, somit $\zeta - \zeta' = \mp x$, und die Correction $\Delta\varphi$ der nach Gl. (216) berechneten Polhöhe $\Delta\varphi = \mp x$, d. i.:

$$\Delta\varphi = \mp \tfrac{1}{2} \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}, \tag{220}$$

wo das obere Zeichen für südliche, das untere für nördliche Sterne zu nehmen ist.*)

---

*) Bei etwas grösserem Werthe von τ wird, wenn die Rechnung bis auf $0''.01$ genau geführt werden soll, das Glied 4ter Ordnung noch zu berücksichtigen sein, und umsomehr, je kleiner ζ ist; man hat dann:

$$\Delta\varphi = \mp \tfrac{1}{2} \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''} \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta}\right)^2 \operatorname{cotg}\zeta \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^4}{\sin 1''}.$$

Z. B. für $\varphi = 48^0\,12'$, $\delta = 63^0\,3'$, $\zeta = \delta - \varphi = 14^0\,51'$, $\tau = 6^m$ findet man:

$$\Delta\varphi = 41''.655 - 0''.032 = 41''.62.$$

Der durch einen Fehler $= d\tau^s$ im Stundenwinkel erzeugte Fehler in $\Delta\varphi$ ist:

$$d\,.\,\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}\,(15\,d\tau)\,\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta}\sin\tau = (15\,d\tau)\,\frac{\Delta\varphi\sin 1''}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau};$$

in vorstehendem Beispiel wird $d\,.\,\Delta\varphi = 0.0154\,(15\,d\tau)$, also für $d\tau = 1^s$, $d\,.\,\Delta\varphi = 0''.23$, welcher Betrag der wahrscheinlichen Unsicherheit der mikrometrischen Bestimmung der Differenz der Zenithdistanzen schon nahe kommt. Es ist daher räthlich, sich bei diesem Verfahren auf sehr kleine Stundenwinkel zu beschränken.

199. Beispiel.*) Zur Bestimmung der Polhöhe der Station Roslyn, eines Punctes der Küstenvermessung in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika (Virginia), wurden 21 Sternpaare beobachtet, von welchen sechs Paare in der folgenden Tabelle verzeichnet sind, nebst den zur Anstellung der Beobachtungen erforderlichen Daten, wobei als genäherte Polhöhe $\varphi = 37^0\ 14'$ angenommen ist. Die Nummern der Sterne beziehen sich auf den Stern-Katalog der British Association for the advancement of science.

Stern	Grösse	AR	δ	Meridian-Zenithdistanz	Einstellung
B. A. C. 4843	6	$14^h\ 33^m\ 21^s$	$+\ 45^0\ 3'$	$7^0\ 49'$ N.	$7^0\ 55'$.
„ 4902	6	14 43 37	29 14	8 0 S.	
„ 4902	6	14 43 37	29 14	8 0 S.	8 0
„ 4965	$5\frac{1}{2}$	14 57 55	45 14	8 0 N.	
„ 4991	6	15 2 2	26 52	10 22 S.	10 21
„ 5092	7	15 20 21	47 35	10 21 N.	
„ 5092	7	15 20 21	47 35	10 21 N.	10 24
„ 5192	5	15 36 33	26 46	10 28 S.	
„ 5911	$5\frac{1}{2}$	17 22 49	48 23	11 9 N.	11 4
„ 5922	$4\frac{1}{2}$	17 24 45	26 14	11 0 S.	
„ 6453	5	18 48 30	22 28	14 46 S.	14 47
„ 6530	6	18 58 38	52 3	14 49 N.	

Folgende Tabelle enthält je eine Beobachtung jedes Sternpaares:

Datum 1852	Stern No. B.A.C.	Stern N. S.	Mikrometer Lesung m u. m'	Mikrometer $m' - m$	Libelle n n'	Libelle s s'	Libelle $(n+n') - (s+s')$	τ
Juli 9	4843 4902	N. S.	$29^R.590$ 12 .340	$+\ 17^R.250$	32.4 34.0	35.0 35.3	— 3.9	
„ 9	4902 4965	S. N.	12 .340 13 .990	+ 1 .650	34.0 33.8	35.3 37.0	— 4.5	
„ 9	4991 5092	S. N.	23 .810 25 .525	+ 1 .715	31.2 39.2	39.5 33.0	— 2.1	
„ 9	5092 5192	N. S.	25 .525 14 .800	+ 10 .725	39.2 32.8	33.0 41.0	— 2.0	
„ 19	5911 5922	N. S.	14 .805 26 .675	— 11 .870	48.5 43.0	43.6 49.0	— 1.1	$10^s.9$
„ 20	6453 6530	S. N.	8 .225 5 .360	— 2 .865	44.4 50.2	49.4 43.5	+ 1.7	20 .5

*) Obiges Beispiel, sowie die folgenden auf diese Methode Bezug habenden, sind W. Chauvenet's Spherical and practical Astronomy, 2. Ed., 1864, Vol. II, p. 349 u. ff. entnommen.

Die Sterne No. 5911 und 6453 sind in den Stundenwinkeln $10^s.9$, beziehungsweise $20^s.5$ beobachtet, während das Instrument im Meridiane verblieb.

Der nächste Schritt ist die Ableitung der scheinbaren Declinationen der Sterne für die Zeit der Beobachtung aus den mittleren Declinationen, wobei in Betreff der letzteren nicht nur der B. A. C., sondern auch andere Kataloge, in welchen dieselben zu finden sind, zu Hilfe genommen werden.

Der Winkelwerth einer Schraubenumdrehung des Mikrometers war $R = 41''.40$, jener eines Scalentheils der Libelle $\mu = 1''.65$. Hiemit steht die Berechnung der Polhöhe wie folgt:

Stern	δ und δ'	$\frac{1}{2}(\delta + \delta')$	Correctionen				φ
			Mikrom. $\frac{1}{2}R(m'-m)$	Lib. $\frac{1}{2}(l+l')$	Refr.	Red. a. d. Mer.	
4843 4902	$+45^\circ\ 2'\ 56''.66$ 29 14 1.85	$37^\circ\ 8'\ 29''.21$	$+5'\ 57''.08$	$-1''.61$	$+0''.10$		$37^\circ\ 14'\ 24''.78$
4902 4965	29 14 1.85 45 13 43.64	37 13 52.75	+0 34.15	−1.86	+0.01		25.05
4991 5092	26 52 24.73 47 35 16.37	37 13 50.55	+0 35.50	−0.87	+0.01		25.19
5092 5192	47 35 16.37 26 46 13.52	37 10 44.95	+3 42.01	−0.83	+0.06		26.19
5911 5922	48 23 22.47 26 13 41.36	37 18 31.92	−4 5.71	−0.45	−0.07	$+0''.02$	25.71
6453 6530	22 27 47.31 52 3 0.31	37 15 23.81	−0 59.31	+0.70	−0.02	+0.04	25.22
						Mittel:	$\varphi = 37^\circ\ 14'\ 25''.36$

200. Wie schon früher bemerkt wurde, muss, um den Einfluss der Fehler in den angenommenen Declinationen der Sterne thunlichst zu eliminiren, eine grössere Anzahl von Sternpaaren beobachtet werden, wobei im Allgemeinen auch jedes einzelne Sternpaar mehrmals beobachtet sein wird. Es handelt sich dann darum, aus der Gesammtheit der Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth der Polhöhe abzuleiten. Sind m Sternpaare beobachtet, und φ_1, φ_2, ..., φ_m die Mittel der aus den Beobachtungen jedes Sternpaares berechneten Werthe der Polhöhe, ferner p_1, p_2 ..., p_m die Gewichte derselben, so ist der wahrscheinlichste Werth φ_0 der Polhöhe nach Gl. (19):

$$\varphi_0 = \frac{p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 + \cdots + p_m\varphi_m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m} = \frac{[p\varphi]}{[p]},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieses Werthes zufolge der Glgn. (22), (23) und (24):

$$r_{\varphi_0} = \pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{[pvv]}{(m-1)\,[p]}},$$

wenn mit v die Abweichungen der einzelnen Werthe φ_1, φ_2, ... von φ_0 bezeichnet werden.

Die einfachste Annahme für die Gewichte p ist, dieselben der Anzahl der Beobachtungen eines jeden Sternpaares gleich zu setzen. Diese Annahme beruht auf der Voraussetzung, dass nicht nur der zufällige Beobachtungsfehler für alle berechneten Werthe von φ derselbe sei, was jedenfalls sehr nahe der Fall sein wird, sondern auch der wahrscheinliche Fehler der angenommenen Declinationen für alle beobachteten Sterne der gleiche sei. Letzteres wird im Allgemeinen nicht stattfinden. Bei der Schwierigkeit einer zuverlässigen Schätzung dieser Fehler wird jedoch durch eine Berücksichtigung derselben die Genauigkeit des Endresultates nicht merklich gewinnen.

Soll übrigens auf die wahrscheinlichen Fehler der Declinationen Rücksicht genommen werden, so bestimmen sich die Gewichte p auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit e den aus dem Zusammenwirken aller zufälligen Fehlerquellen (Fehler in der Einstellung des Mikrometerfadens auf den Stern, in der Auffassung des Momentes der Culmination, in den Lesungen des Mikrometers und der Libelle, Aenderung in der Beziehung zwischen Libelle und Fernrohr zwischen den Beobachtungen beider Sterne) entspringenden wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, mit welchem der aus einer Beobachtung eines Sternpaares abgeleitete Werth der Polhöhe behaftet ist, welcher Fehler offenbar den Gesammtfehler des auf das 1te Glied $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$ folgenden Aggregates von Gliedern in Gl. (216) darstellt, so ist nach Gl. (26) $\frac{e}{\sqrt{n}}$ der hieraus entstehende Fehler des Mittels aus n Beobachtungen desselben Sternpaares. Hiezu tritt nach der für alle n Beobachtungen constante Fehler des Gliedes $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$. Bezeichnet man daher mit ε_δ, $\varepsilon_{\delta'}$, die w. Fehler der Declinationen, mit ε_φ den w. Fehler des Mittels aus n Beobachtungen desselben Sternpaares, so ist zufolge Gl. (39):

$$\varepsilon_\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\left(\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_{\delta'}^2\right) + \frac{e^2}{n}.$$

Da nun das Gewicht dem Quadrate des w. Fehlers umgekehrt proportional ist, so hat man:

$$p = \frac{1}{\tfrac{1}{4}\left(\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_{\delta'}^2\right) + \frac{e^2}{n}},$$

oder, da die Wahl der Gewichtseinheit willkürlich ist:

$$p = \frac{1}{\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_{\delta'}^2 + \frac{4e^2}{n}}.$$

Zu einer genäherten Kenntniss der Declinationsfehler ε_δ wird man gelangen können, wenn ein umfänglicheres Beobachtungsmaterial zur Schätzung des Grades der Genauigkeit der Sternpositionen in den verschiedenen benützten Sternkatalogen vorliegt.

Der Fehler e aber ergibt sich aus den an einer Station angestellten Beobachtungen auf folgende Art: Seien m Sternpaare beobachtet, und n_1, n_2, ..., n_m die Anzahl der Beobachtungen des 1^{ten}, 2^{ten}, ..., m^{ten} Paares; ferner v_1, v_2, ..., v_m die Abweichungen der einzelnen Werthe von φ von den für jedes Sternpaar sich ergebenden Mitteln φ_1, φ_2, ..., φ_m, so hat man, zufolge der Gl. (25):

$$(n_1 - 1)\, e^2 = q^2\, [v_1 v_1],$$
$$(n_2 - 1)\, e^2 = q^2\, [v_2 v_2],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n_m - 1)\, e^2 = q^2\, [v_m v_m],$$

wo $q = 0.6745$ den Factor zur Verwandlung der mittleren Fehler in wahrscheinliche bedeutet; durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$(n - m)\, e^2 = q^2\, [vv],$$

wo $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ die Gesammtzahl aller Beobachtungen, und $[vv] = [v_1 v_1] + [v_2 v_2] + \ldots + [v_m v_m]$ die Summe der Quadrate aller übrigbleibenden Fehler ist. Man hat daher:

$$e = 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{n - m}}.$$

201. Zur Reduction der Beobachtungen wird, nebst dem Winkelwerthe μ eines Scalentheiles der Libelle, die Kenntniss des Winkelwerthes R einer Umdrehung der Schraube des Mikrometers erfordert. Man bestimmt denselben am sichersten durch Beobachtung von Durchgängen eines dem Pole nahe stehenden Sternes, am zweckmässigsten des Polarsternes, zur Zeit der grössten Digression, wo bekanntlich die Bewegung des Sternes nahe in verticaler Richtung erfolgt.

Bezeichnet man Zenithdistanz und Stundenwinkel des Sternes zur Zeit der grössten Digression mit z_0 und t_0, so hat man [Glgn. (51) und (52)]:

$$\cos z_0 = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}, \quad \cos t_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta},$$

ferner, wenn u_0 die Uhrzeit der grössten Digression:

$$u_0 = \alpha \pm t_0 - \varDelta u,$$

wo das obere Zeichen für die westliche, das untere für die östliche Digression gilt und $\varDelta u$ den Stand der Uhr gegen Sternzeit bedeutet.

Man stellt das Fernrohr auf die Zenithdistanz z_0, richtet dasselbe etwa 30^m vor der Zeit u_0 auf den Stern, indem man denselben nahe an den verticalen Mittelfaden bringt, klemmt das Instrument in dieser Stellung fest und bringt, im Falle grösserer Ausweichung der Blase, die Libelle nahe zum Einspielen. Hierauf stellt man den Mikrometer-Faden, ein wenig von dem Sterne in der Richtung seiner Bewegung, auf eine bestimmte Lesung, beobachtet die Uhrzeit u des Durchganges des Sternes und notirt den Stand der Libelle. Auf gleiche Weise wird nun eine Reihe von Durchgängen beobachtet, indem man nach jedem derselben den Faden verstellt, am zweckmässigsten um denselben Betrag, z. B. eine halbe Umdrehung der Schraube, bis derselbe auf der anderen Seite des festen horizontalen Mittelfadens ungefähr in den gleichen Abstand von letzterem gelangt ist, welchen er bei dem ersten Durchgange hatte.

Es sei nun m_0 die unbekannte, der obigen Zenithdistanz z_0 zur Uhrzeit u_0 entsprechende Lesung des Mikrometers bei einspielender Libelle; m die Lesung desselben bei irgend einem zur Uhrzeit u beobachteten Durchgange, z die correspondirende Zenithdistanz, l die Ausweichung der Blase von der Mitte in Scalentheilen der Libelle, positiv, wenn die Blase gegen Nord ausweicht, r die Refraction, so hat man, wenn die Mikrometer-Lesungen mit zunehmender Zenithdistanz abnehmen:

$$z = z_0 + (m_0 - m)\, R - \mu\, l + r; \qquad (a)$$

für einen anderen Durchgang wird:

$$z' = z_0 + (m_0 - m')\, R - \mu\, l' + r', \qquad (b)$$

und durch Subtraction beider Gleichungen kommt:

$$(m' - m)\, R = (z - z_0 + \mu\, l) - (z' - z_0 + \mu\, l') + (r' - r).$$

Bezeichnet man mit Δr die Aenderung der Refraction bei der Zenithdistanz z_0 für 1′ Aenderung der Zenithdistanz, so ist $r' - r = (z' - z)\, \Delta r$, d. i. sehr nahe $= -(m' - m)\, R \,.\, \Delta r$, wo R in Bogenminuten auszudrücken ist. Führt man diesen Werth von $r' - r$ in obige Gleichung ein und setzt, der Kürze wegen:

$$\Delta z = (z - z_0) + \mu\, l,$$
$$\Delta z' = (z' - z_0) + \mu\, l',$$

so erhält man:

$$R = \frac{\Delta z - \Delta z'}{m' - m} - R \,.\, \Delta r. \qquad (221)$$

Das stets sehr kleine Glied $- R \,.\, \Delta r$, in welchem R in Bogenminuten auszudrücken ist, gibt die Correction des ohne Berücksichtigung der Refraction berechneten Werthes von R, und da dasselbe von der Differenz der Zenithdistanzen z, z' unabhängig ist, so genügt es, diese Correction an dem aus sämmtlichen Beobachtungen folgenden Mittelwerthe von R anzubringen.

Es erübrigt noch die Berechnung der Differenzen $z - z_0$. Bezeichnet man den zur Zenithdistanz z gehörigen Stundenwinkel mit t, das Azimuth, von Nord gezählt, mit A, so hat man [Gl. (26)]:

$$\cos\delta \cos t = \cos\varphi \cos z - \sin\varphi \sin z \cos A,$$
$$\cos\delta \sin t = \sin z \sin A.$$

Zur Zeit der grössten Digression geht das Dreieck zwischen Zenith, Pol und Stern in ein am Sterne rechtwinkeliges über und gibt, unter Anwendung der 6ten, dann der 3ten und 4ten der Formeln (18):

$$\cos t_0 = \cos z_0 \sin A_0$$
$$\sin t_0 = \frac{\sin z_0}{\cos\varphi} = \frac{\cos z_0 \cos A_0}{\sin\varphi}.$$

Durch Multiplication je zweier dieser Gleichungen erhält man nun:

$$\cos\delta \sin t_0 \cos t = \sin z_0 \cos z - \cos z_0 \sin z \cos A \cos A_0,$$
$$\cos\delta \cos t_0 \sin t = \cos z_0 \sin z \sin A \sin A_0,$$

und hieraus durch Subtraction:

$$\cos\delta \sin(t - t_0) = -\sin z_0 \cos z + \cos z_0 \sin z \cos(A - A_0),$$
$$= \sin(z - z_0) - 2\cos z_0 \sin z \sin\tfrac{1}{2}(A - A_0)^2.$$

Für den Polarstern und für $z - z_0 = 15'$ erreicht das letzte Glied noch nicht eine Einheit der 7ten Decimalstelle und kann daher stets vernachlässiget werden, wodurch

$$\sin(z - z_0) = \sin(t - t_0)\cos\delta$$

wird. Es ist aber $(t - t_0) =$ der Differenz der Uhrzeiten $(u - u_0)$ in Sternzeit ausgedrückt; man hat daher, $z - z_0$ in Bogensecunden ausdrückend:

$$z - z_0 = \pm \sin(u - u_0)\frac{\cos\delta}{\sin 1''}, \tag{222}$$

wo das obere Zeichen für westliche, das untere für östliche Digression gilt.

Beispiel. Zur Bestimmung des Mikrometerwerthes des zu den im vorhergehenden §. angeführten Beobachtungen auf der Station Roslyn benützten Zenithteleskops wurden an demselben Orte am 30. Juni 1852 bei einer Temperatur von $76^0.5$ Fahr. Durchgänge des Polarsternes in der östlichen Digression beobachtet. Der Stand der Uhr war $\varDelta u = -24^m\ 46^s.8$; der Werth eines Niveautheiles $\mu = 1''.65$.

Mit den Werthen:

$$\varphi = 37^0\ 14'\ 25'', \quad \delta = 88^0\ 30'\ 56'', \quad \alpha = 1^h\ 5^m\ 36^s.8$$

findet man zunächst:

$$z_0 = 52^0\ 44'\ 42'', \quad t_0 = 5\ \ 55\ \ 29.1$$
$$\alpha - t_0 = 19\ \ 10\ \ 7.7$$
$$\varDelta u = -\ \ 24\ \ 46.8$$
$$u_0 = 19\ \ 34\ \ 54.5$$

Der Mikrometerfaden wurde nach jedem Durchgange um eine halbe Schraubenumdrehung verstellt und wurden 59 Durchgänge beobachtet, von welchen im Folgenden 14 nach je zwei Umdrehungen beobachtete beispielsweise ausgezogen sind.

No. der Beob.	Mikr. m	Libelle N	Libelle S	l	u	$u-u_0$	$z-z_0$	μl	$z-z_0+\mu l$ $=\Delta z$
	R				h m s	m s	″	″	″
1	6	42.2	44.8	− 1.30	19 11 39.0	−23 15.5	+ 541.33	− 2.15	+ 539.18
2	8	"	"	"	15 14.2	19 40.3	458.10	− 2.15	455.95
3	10	"	"	"	18 46.8	16 7.7	375.73	− 2.15	373.58
4	12	"	"	"	22 23.4	12 31.1	291.71	− 2.15	289.56
5	14	42.5	44.2	− 0.85	25 58.8	8 55.7	208.12	− 1.40	206.72
6	16	"	"	"	29 29.4	5 25.1	126.30	− 1.40	124.90
7	18	"	"	"	33 4.4	− 1 50.1	+ 42.77	− 1.40	+ 41.37
8	20	42.6	44.2	− 0.80	36 36.4	+ 1 41.9	− 39.61	− 1.32	− 40.93
9	22	"	"	"	40 11.6	5 17.1	123.20	− 1.32	124.52
10	24	42.7	44.2	− 0.75	43 43.3	8 48.8	205.43	− 1.24	206.67
11	26	"	"	"	47 15.0	12 20.5	287.62	− 1.24	288.86
12	28	41.9	45.1	− 1.60	50 46.7	15 52.2	369.72	− 2.64	372.36
13	30	"	"	"	54 19.3	19 24.8	452.08	− 2.64	454.72
14	32	"	"	"	57 52.8	+22 58.3	− 534.70	− 2.64	− 537.34

Verbindet man nun durch Subtraction die Werthe von Δz und m, welche der 1ten und 8ten, der 2ten und 9ten etc. Beobachtung entsprechen, so erhält man:

Beob.	$\Delta z - \Delta z'$	$m' - m$	R	v	v^2
1 und 8	580″.11	14	41″.436	+ 0.042	0.0018
2 „ 9	580 .47	"	462	+ 0.068	0046
3 „ 10	580 .25	"	446	+ 0.052	0027
4 „ 11	578 .42	"	316	− 0.078	0060
5 „ 12	579 .08	"	363	− 0.031	0010
6 „ 13	579 .62	"	401	+ 0.007	0000
7 „ 14	578 .71	"	336	− 0.058	0.0034
			Mittel = 41″.394		$[vv]$ = 0.0195

$$\text{Wahrsch. Fehler des Mittels} = 0.6745 \sqrt{\frac{0.0195}{6 \times 7}} = \pm\, 0''.014.$$

Die Aenderung der Refraction für 1′ Aenderung Zenithdistanz bei $z_0 = 52^0\ 45'$ ist $\Delta r = 0''.046$, daher die Correction des obigen Mittels $= -\,0''.046 \,.\, \frac{41.4}{60} = -\,0''.032$; das Resultat dieser Beobachtungen ist daher:

$$R = 41''.362 \pm 0''.014.$$

Strenger ist die Behandlung der Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Es besteht, mit Weglassung der Refraction, für jede Beobachtung die Gleichung:

$$z = z_0 + (m_0 - m)\, R - \mu l,$$

in welcher m_0 die unbekannte, der Zenithdistanz z_0 entsprechende Lesung bedeutet. Setzt man nun, unter M_0 und R_0 genäherte Werthe von m_0 und R verstanden:

$$m_0 = M_0 + x, \quad R = R_0 + y,$$

so erhält man:

$$z = z_0 + (M_0 + x - m)(R_0 + y) - \mu l,$$

oder, mit Vernachlässigung des bei geeigneter Wahl von M_0 und R_0 unmerklichen Productes xy:

$$R_0 x + (M_0 - m)\, y = n, \tag{223}$$

wo

$$n = z - z_0 + \mu l - (M_0 - m)\, R_0 \tag{224}$$

eine bekannte Grösse ist. Jede Beobachtung liefert eine solche Gleichung, aus deren Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von x und y hervorgehen.

In obigem Beispiele erkennt man sofort aus der nahen Gleichheit der den Lesungen $m = 18$ und 20 entsprechenden Werthe von Δz, dass $M_0 = 19$ ein sehr genäherter Werth von m_0 ist, und findet durch Combination zweier beliebigen Beobachtungen nach (221) leicht $R_0 = 41''.4$ als genäherten Werth von R. Hiemit erhält man die Bedingungsgleichungen (223):

$$\begin{array}{ll}
41.4x + 13y = +0''.98 & 41.4x - y = +0''.47 \\
41.4x + 11y = +0\ .55 & 41.4x - 3y = -0\ .32 \\
41.4x + 9y = +0\ .98 & 41.4x - 5y = +0\ .33 \\
41.4x + 7y = -0\ .24 & 41.4x - 7y = +0\ .94 \\
41.4x + 5y = -0\ .28 & 41.4x - 9y = +0\ .24 \\
41.4x + 3y = +0\ .70 & 41.4x - 11y = +0\ .68 \\
41.4x + y = -0\ .03 & 41.4x - 13y = +0\ .86
\end{array}$$

und aus diesen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 23995.44\,x &= +\ 242.60, \\ 910\,y &= -\ \ \ 1.96, \end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$\begin{array}{ll} x = +\ 0.010, & y = -\ 0.002, \\ m_0 = \ \ 19.010. & R = \ \ 41.398. \end{array}$$

Durch Substitution der Werthe von x und y in die Bedingungsgleichungen erhalten wir die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler $= 2.891$; hiemit wird der mittlere Fehler einer Gleichung

$$= \sqrt{\frac{2.891}{14-2}} = \pm\ 0''.485,$$

folglich, da nach Gl. (88) 910 das Gewicht von y ist, der wahrscheinliche Fehler von y oder R:

$$= 0.6745 \frac{0.485}{\sqrt{910}} = \pm\ 0.''011.$$

Bringt man endlich an obigem Werthe von R noch die Correction wegen Refraction, $= -\ 0''.032$ an, so hat man:

$$R = 41''.366 \pm 0''.011.$$

Der kleinere wahrscheinliche Fehler zeigt, dass, wie vorauszusehen, dieser nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete Werth von R die Beobachtungen besser darstellt, als der oben durch Combination je zweier Beobachtungen gefundene.

202. Auch der Winkelwerth μ eines Scalentheiles der Libelle kann mit Hilfe des Schraubenmikrometers bestimmt werden, mit Vortheil namentlich dann, wenn, wie bei dem Zenithteleskope oder einem zur Ausführung der Talcott'schen Methode eingerichteten Passagen-Instrumente, die Libelle mit dem Fernrohre verbunden ist. Man erhält dadurch zunächst den Winkelwerth der Libelle ausgedrückt in Theilen einer Schraubenumdrehung R, in der Form:

$$\mu = \lambda R; \tag{225}$$

dies ist genügend, um R nach der im vorhergehenden §. dargestellten Methode, in Bogensecunden ausgedrückt, zu bestimmen, wornach, sobald λ bekannt, auch μ in Bogensecunden erhalten wird.

Behufs Bestimmung von λ richte man das Fernrohr auf ein scharf begrenztes irdisches Object, am besten das Fadenkreuz eines Collimator-Fernrohres, bringe die Blase in die Nähe des einen Endes der Röhre, und stelle hierauf den Mikrometerfaden scharf auf das Object ein: die Lesung des Mikrometers sei m, die Ausweichung der Blase von der Mitte $= l$. Hierauf bringe man die Blase mittelst der Schraube, durch welche dem Fernrohre sammt der Libelle eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt wird, in die Nähe des anderen Endes der Röhre und stelle wieder den Faden auf das Object ein; die Lesung des Mikrometers sei m', die Ausweichung der Blase $= l'$. Dann ist $\mu\,(l - l') = \lambda R\,(l - l')$ die Winkelbewegung der Libelle, $R\,(m' - m)$ jene des Fernrohres, folglich, da diese beiden Bewegungen gleich sein müssen, wenn die Stellung der Libelle gegen das Fernrohr unverändert geblieben ist:

$$\lambda = \frac{m' - m}{l - l'}. \tag{226}$$

Beispiel. Mit demselben Zenithteleskop, auf welches sich die im vorhergehenden §. angeführten Beobachtungen beziehen, wurden 1852, Juni 30, auf der Station Roslyn, zur Bestimmung des Werthes eines Niveautheiles, 21 Beobachtungen bei einer Temperatur von 90° Fahr. gemacht, von welchen die folgenden einen Theil bilden.

No. der Beob.	Lesungen			2l	Differenzen		λ
	d. Mikr.	d. Libelle		2l'			
	m m'	N	S		m'—m	l—l'	
1	19.41	54.0	11.4	+ 42.6			
	21.06	11.2	53.9	— 42.7	1.65	42.65	0.03869
2	21.11	56.1	8.2	+ 47.9			
	22.96	10.5	54.0	— 43.5	1.85	45.70	0.04048
3	23.05	55.5	8.8	+ 46.7			
	25.06	5.2	59.0	— 53.8	2.01	50.25	0.04000
4	25.17	55.0	9.1	+ 45.9			
	27.04	8.8	55.2	— 46.4	1.87	46.15	0.04052
5	27.09	59.0	4.8	+ 54.2			
	29.15	9.0	54.7	— 45.7	2.06	49.95	0.04124
6	29.19	56.0	7.8	+ 48.2			
	31.15	9.2	54 4	— 45.2	1,96	46.70	0.04197
7	11.76	58.2	5.8	+ 52.4			
	13.90	5.5	58.5	— 53.0	2.14	52.70	0.04061
8	13.96	59.6	5.0	+ 54.6			
	16.17	4.5	60.1	— 55.6	2.21	55.10	0.04011
						Mittel:	$\lambda = 0.04045$

Durch Vergleichung der Einzelwerthe von λ mit dem Mittel findet man die übrigbleibenden Fehler, aus deren Quadratsumme $= 0.00000638$ sich der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung von λ mit $\pm\ 0.00023$ ergibt. Es folgt daher aus diesen Beobachtungen:

$$\lambda = 0.04045 \pm 0.00023$$

und

$$\mu = 0.04045\, R \pm 0.00023\, R. \qquad (c)$$

Ist auf diese Art der Winkelwerth eines Niveautheiles, in Theilen von R ausgedrückt, bekannt geworden, so kann die Bestimmung von R nach dem in §. 201 dargestellten Verfahren vorgenommen werden, wobei nur an die Stelle der Gl. (221) die folgende:

$$R = \frac{(z - z_0) - (z' - z_0)}{m' - m + \lambda(l' - l)} \qquad (227)$$

tritt, welche sich durch Subtraction der Glgn. (a) und (b) ergibt, wenn man $\mu = \lambda R$ setzt, und vorläufig die Refraction weglässt, deren Einfluss wieder, wie dort, erst an dem aus sämmtlichen Beobachtungen folgenden Mittelwerthe von R angebracht wird. Will man aber die Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen, so bleiben die Glgn. (223) und (224) unverändert, nur ist in letzteren λR_0 an die Stelle von μ zu setzen. Die auf diese Art mit dem Werthe $\lambda = 0.04045$ durchgeführte Berechnung von R führt selbstverständlich wieder zu dem bereits oben erhaltenen Werthe von $R = 41''.366$, und mit diesem ergibt sich dann nach Gl. (c) der Werth eines Niveautheiles $\mu = \lambda R = 1''.673$. Die sämmtlichen zur Bestimmung von λ und R auf Station Roslyn gemachten Beobachtungen ergaben:

$$\lambda = 0.03985 \pm 0.00013, \quad R = 41''.400 \pm 0''.011,$$

aus welchen der an früherer Stelle angewendete Werth $\mu = 1''.650$ folgt.

3. Bestimmung der Polhöhe aus beobachteten Durchgängen von Sternen durch den ersten Vertical.

203. Beobachtet man die Zeit des Durchganges eines Sternes, dessen Rectascension α und Declination δ bekannt sind, durch einen bestimmten Vertical, dessen Azimuth A bekannt ist, so kann die Polhöhe φ mittelst der Gl. (22):

$$\sin\varphi \cos t - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta = \operatorname{cotg} A \sin t \tag{a}$$

berechnet werden, wenn man noch den Stand der Uhr Δu gegen Sternzeit kennt, womit sich der Stundenwinkel t aus der beobachteten Uhrzeit u mittelst der Gleichung $t = u + \Delta u - \alpha$ ergibt.

Durch Differenziation der obigen Gleichung erhält man:

$$d\varphi = \frac{\cos\delta \cos q}{\sin A \cos z}\, dt - \frac{\operatorname{tg} z}{\sin A}\, dA + \frac{\sin q}{\sin A \cos z}\, d\delta,$$

wo z die Zenithdistanz und q den parallaktischen Winkel des Sternes zur Zeit der Beobachtung bedeuten.

Wie man sieht, werden die Coefficienten von dt und dA um so kleiner, je näher A an $\pm 90^0$ liegt und je kleiner die Zenithdistanz z ist, weil, für $A = \pm 90^0$, $\sin A$ im Nenner seinen grössten Zahlenwerth $= 1$ erreicht, und in diesem Falle auch der Zähler des Coefficienten von dt, welcher (s. §. 17) in der Form:

$$\cos\delta \cos q = \sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A$$

geschrieben werden kann, klein wird.

Es ist also am vortheilhaftesten, den Stern im ersten Vertical zu beobachten, daher $\delta < \varphi$ sein muss, und, damit die Zenithdistanz klein werde, Sterne zu wählen, für welche $\varphi - \delta$, d. i. die Meridian-Zenithdistanz klein ist.

Der Coefficient von $d\delta$ kann, da allgemein $\cos\delta \sin q = \cos\varphi \sin A$, auch in der Form: $\dfrac{\cos\varphi}{\cos\delta \cos z}$ geschrieben werden und wird im ersten Vertical, wo nach Gl. (46) $\cos z = \dfrac{\sin\delta}{\sin\varphi}$ ist, gleich $\dfrac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}$; derselbe bleibt daher, wenn $\varphi - \delta$ klein ist, stets nahe $= 1$ und ein Fehler in δ geht, so wie bei den in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Methoden zur Bestimmung der Polhöhe, nahezu mit seinem vollen Betrage auf den berechneten Werth von φ über. Man muss daher Sterne wählen, deren Declination möglichst genau bestimmt ist.

Die Berechnung der Polhöhe aus Gl. (a) würde nun die Kenntniss des Azimuthes A erfordern, welche nicht vorausgesetzt werden kann. Beobachtet man jedoch den Durchgang des Sternes durch denselben Verticalkreis auf der Ost- und Westseite des Meridians, so ergibt sich hieraus sowohl Polhöhe als Azimuth.

Nehmen wir an, dass die Gl. (a) sich auf den östlichen Durchgang beziehe und schreiben wir, um dies anzudeuten, t_o statt t, so lautet dieselbe:

$$\sin\varphi \cos t_o - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta = \operatorname{cotg} A \sin t_o.$$

Für den Durchgang des Sternes durch denselben Vertical auf der Westseite geht A über in $180^0 + A$. Bezeichnen wir daher den Stundenwinkel auf der Westseite mit t_w, so haben wir, da $\operatorname{cotg}(180^0 + A) = \operatorname{cotg} A$, für den westlichen Durchgang die Gleichung:

$$\sin\varphi \cos t_w - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta = \operatorname{cotg} A \sin t_w.$$

Durch Gleichsetzung der aus beiden Gleichungen folgenden Werthe von $\operatorname{cotg} A$, und Multiplication der resultirenden Gleichung mit $\sin t_o \sin t_w$ kommt:

$$\operatorname{tg}\varphi \sin(t_w - t_o) = \operatorname{tg}\delta (\sin t_w - \sin t_o),$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi \sin\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) \cos\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) = \operatorname{tg}\delta \sin\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) \cos\tfrac{1}{2}(t_w + t_o),$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\delta \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(t_w + t_o)}{\cos\frac{1}{2}(t_w - t_o)}. \tag{228}$$

Durch Subtraction der obigen Gleichungen erhält man ferner:

$$\operatorname{cotg} A (\sin t_w - \sin t_o) = \sin\varphi (\cos t_w - \cos t_o),$$

oder

$$\operatorname{cotg} A \sin\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) \cos\tfrac{1}{2}(t_w + t_o) = \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(t_w + t_o) \sin\tfrac{1}{2}(t_o - t_w),$$

und hieraus:

$$\operatorname{cotg} A = - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(t_o + t_w) \sin\varphi. \tag{229}$$

Bezeichnet man mit T_o, T_w die Sternzeiten des Durchganges des Sternes in Ost und West durch den Vertical, dessen Azimuth $= A$, so ist:

$$t_o = T_o - \alpha, \quad t_w = T_w - \alpha$$

$$\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) = \tfrac{1}{2}(T_w - T_o); \quad \tfrac{1}{2}(t_o + t_w) = \tfrac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha,$$

somit:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\frac{1}{2}(T_w - T_o)} \cos\left[\tfrac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha\right], \tag{230}$$

$$\operatorname{cotg} A = - \operatorname{tg}\left[\tfrac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha\right] \sin\varphi, \tag{231}$$

oder, wenn man

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha \tag{232}$$

setzt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\frac{1}{2}(T_w - T_o)}\cos\lambda, \tag{233}$$

$$\operatorname{cotg} A = -\sin\varphi\operatorname{tg}\lambda. \tag{234}$$

Die vorstehenden Formeln gelten für jeden Werth des Azimuthes A.

Beobachtet man aber den Stern im ersten Vertical, so ist $A = 90^0$, $\operatorname{cotg} A = 0$, somit, vermöge der Gl. (231) oder (234), auch

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha = o,$$

wie natürlich, weil dann T_0 und T_w die Sternzeiten des Durchganges des Sternes durch den ersten Vertical in Ost und West sind und folglich das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(T_o + T_w) =$ der Sternzeit der Culmination des Sternes, d. i. $= \alpha$ wird. Bezeichnet man daher, wie dies im Weiteren stets geschehen soll, die Sternzeiten des Durchganges des Sternes durch den ersten Vertical in Ost und West mit ϑ_0 und ϑ_w, so folgt aus (230) oder (233):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)}, \tag{235}$$

welche Gleichung, da $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_0)$, d. i. die halbe Zwischenzeit zwischen den Durchgängen des Sternes durch den ersten Vertical in Ost und West, in Sternzeit ausgedrückt, offenbar gleich ist dem Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical, mit Gl. (47) übereinstimmt.

Bezeichnet man mit u_0 und u_w die Uhrzeiten der Durchgänge des Sternes durch den Vertical in Ost und West, mit Δu_0 und Δu_w die zugehörigen Uhrstände, so werden die Differenzen $T_w - T_o$, beziehungsweise $\vartheta_w - \vartheta_o$ in obigen Gleichungen $= (u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)$, wo $\Delta u_w - \Delta u_0$ den Gang der Uhr in der Zwischenzeit darstellt. Hieraus erhellt, dass diese Differenzen unabhängig sind von einem Fehler im Uhrstande und deren Bestimmung nur die Kenntniss des Ganges der Uhr erfordert. Die in obigen Gleichungen erscheinende Summe $T_o + T_w = (u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)$ hängt hingegen vom Uhrstande ab; ist jedoch das Azimuth A nur wenig von 90^0 verschieden, so wird $\frac{1}{2}(T_o + T_w)$ nahe gleich der Sternzeit α der Culmination des Sternes, also die Winkelgrösse $\lambda = [\frac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha]$ sehr klein, und daher ein kleiner Fehler im Uhrstande nur einen unmerklichen Einfluss auf den Cosinus derselben, somit auch auf den nach Gl. (230) oder (233) berechneten Werth der Polhöhe haben.

Die Anwendung der vorstehenden Gleichungen auf die Berechnung von Beobachtungen setzt übrigens voraus, dass die Absehenlinie des Fernrohres bei der Drehung desselben um die Horizontalaxe einen Verticalkreis beschreibe, wozu erfordert wird, dass die Absehenlinie auf der Horizontalaxe senkrecht stehe und letztere Axe horizontal sei, also der Collimationsfehler des Instrumentes so wie die Neigung der Horizontalaxe gleich Null seien, was im Allgemeinen nicht der Fall sein wird. Es wird jedoch später gezeigt werden, dass, wenn man das Fernrohr in der Zwischenzeit zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes in seinen Lagern umlegt, auch der Einfluss des Collimationsfehlers eliminirt wird, so dass, abgesehen von dem Einflusse der zufälligen Beobachtungsfehler in den beobachteten Fadenantritten und des Fehlers in der Declination des Sternes, die berechnete Polhöhe nur noch durch die Neigung der Horizontalaxe, welche mit Hilfe der Libelle jederzeit bestimmt und in Rechnung gezogen werden kann, und einen Fehler im Uhrgange, welcher für die wenige Stunden nicht überschreitende Zwischenzeit stets hinreichend genau bekannt angenommen werden kann, beeinflusst wird. In dieser Art ausgeführt, gewährt daher diese Methode der Bestimmung der Polhöhe einen hohen Grad der Genauigkeit und ist frei von dem Einflusse der Theilungsfehler der Kreise, der Biegung des Fernrohres und der Unsicherheit der Refraction. Wesentlich bleibt nur die genaue Bestimmung der Neigung der Horizontalaxe mittelst der Libelle und möglichste Stabilität in Bau und Aufstellung des Instrumentes, damit die Unveränderlichkeit des Azimuthes des Instrumentes in der Zwischenzeit zwischen den Durchgängen des Sternes in Ost und West genügend gesichert sei.

204. Im ersten Vertical bildet der Stern mit dem Zenith und Nordpol ein am Zenith rechtwinkeliges Dreieck, aus welchem sich die Beziehungen des Stundenwinkels und der Zenithdistanz des Sternes im ersten Vertical, welche Grössen in diesem Abschnitte ausschliessend mit σ und ζ bezeichnet werden sollen, zur Declination und Polhöhe leicht ergeben. Einige derselben, welche häufiger zur Anwendung kommen, mögen hier zusammengestellt werden.

Zufolge der Glgn. (18) hat man:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\delta \sec\sigma, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\zeta = \cos\varphi \operatorname{tg}\sigma, \tag{2}$$

$$\sin\zeta = \cos\delta \sin\sigma, \tag{3}$$

$$\sin\delta = \sin\varphi \cos\zeta. \tag{4}$$

Durch Verbindung von 1) mit 2) und von 2) mit 3) erhält man:

$$\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\zeta = \sin\varphi \sin\sigma \tag{5}$$

$$\cos\varphi \cos\zeta = \cos\delta \cos\sigma. \tag{6}$$

Aus 4) folgt ferner: $\sin\delta^2 = \sin\varphi^2 \cos\zeta^2 = \sin\varphi^2 - \sin\varphi^2 \sin\zeta^2$; hieraus: $\sin\varphi^2 \sin\zeta^2 = \sin\varphi^2 - \sin\delta^2 = \sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)$, folglich:

$$\sin\varphi \sin\zeta = \sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}, \tag{7}$$

womit sich noch in Verbindung mit den vorausgehenden Gleichungen ergibt:

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}}{\sin\delta}, \tag{8}$$

$$\sin\sigma = \frac{\sqrt{\sin(\varphi - \delta)\sin(\varphi + \delta)}}{\sin\varphi\cos\delta},$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\sqrt{\sin(\varphi - \delta)\sin(\varphi + \delta)}}{\cos\varphi\sin\delta}. \qquad 10)$$

Aus 1) hat man ferner: $\cos\sigma = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi}$, folglich:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = 1 - \cos\sigma = 1 - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin\varphi\cos\delta},$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 = 1 + \cos\sigma = 1 + \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin\varphi\cos\delta},$$

und hieraus:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma = \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}}, \qquad 11)$$

$$\sin(\varphi - \delta) = 2\sin\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2, \qquad 12)$$

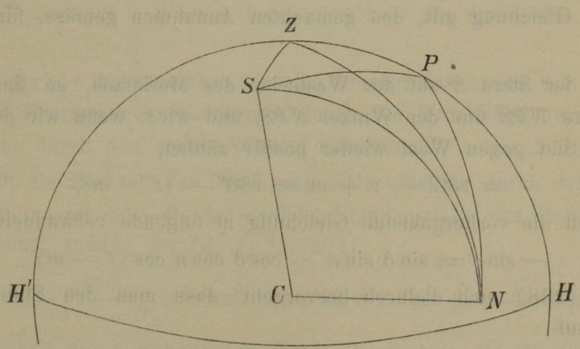
$$\sin(\varphi - \delta) = \sin(\varphi + \delta)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\sigma^2. \qquad 13)$$

205. Zur Anstellung der Beobachtungen dient vorzugsweise das Passage-Instrument, welches eben zur Beobachtung von Gestirnen in einem bestimmten Verticalkreise zweckentsprechend construirt ist. Auch ein Universal-Instrument kann hiezu benützt werden, jedoch minder vortheilhaft, weil dieses, um eine verticale Axe drehbar, für die Unveränderlichkeit des Azimuthes der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohres zwischen den beiden Durchgängen des Sternes in Ost und West, worauf es wesentlich ankommt, erheblich geringere Gewähr bietet, als ein Passage-Instrument. Dasselbe soll mit einer Vorrichtung zur Umlegung der Horizontalaxe versehen sein (s. §. 127), um diese leicht, rasch und — bei gehöriger Vorsicht — ohne Gefahr einer Aenderung des Azimuthes bewerkstelligen zu können.

Das Instrument ist so aufzustellen, dass die Drehungsaxe des Fernrohres möglichst nahe in die Ebene des Meridians oder in die Richtung Süd-Nord zu liegen kommt. Am einfachsten geschieht dies, wenn es die Umstände erlauben, zunächst mittelst eines Universal-Instrumentes das Azimuth eines irdischen Objectes zu messen, von welchem ausgehend sofort die Richtung des ersten Verticals erhalten wird, in welche sodann das Fernrohr des Passage-Instrumentes, nachdem die Horizontalaxe horizontal gestellt und der Collimationsfehler möglichst nahe weggeschafft worden ist, leicht gebracht werden kann. Ist dieses Verfahren nicht auszuführen, so benützt man zur Orientirung des Instrumentes einen hellen Stern von kleiner nördlicher Declination, welcher in mässiger Höhe durch den ersten Vertical geht, berechnet Zenithdistanz und Stundenwinkel desselben im ersten Vertical und aus letzterem mit Zuziehung der Rectascension und des Uhrstandes die Uhrzeit des Durchganges durch den ersten Vertical. Einige Minuten vor dieser Zeit richte man nun das Fernrohr auf den Stern, bringe denselben durch Drehung des Instrumentes in Azimuth auf den Mittelfaden und erhalte ihn an demselben bis zu dem Momente der berechneten Uhrzeit. Waren hiebei zur Bewirkung der erforderlichen Drehung die zur Azimuthal-Correction dienenden Schrauben ($\delta\delta$ Fig. 66, S. 273) nicht ausreichend und musste daher eine Drehung des Instrumentes mit freier Hand vorgenommen werden, so wird der Erfolg dieser ersten Operation nur ein genäherter und eine Verbesserung durch Wiederholung derselben mit einem zweiten Sterne vorzunehmen sein. An späterem Orte (§. 215) werden sich Mittel ergeben, das Azimuth des Instrumentes aus Beobachtungen zu bestimmen, wornach dasselbe erforderlichenfalls noch corrigirt werden kann. Jedenfalls ist es räthlich, dasselbe möglichst klein zu halten, weil dadurch die Reduction der Beobachtungen wesentlich erleichtert wird. Wir haben uns nun mit der Aufgabe zu beschäftigen, aus den mit dem Einflusse der Instrumentalfehler: Neigung und Azimuth der Drehungsaxe des Fernrohres und Collimation der Absehenlinie des Mittelfadens behafteten Beobachtungen die Polhöhe abzuleiten.

206. Es sei (Fig. 92) *HPZ* der Meridian, *C* der Mittelpunct des Instrumentes, *CN* die Drehungsaxe des Fernrohres, welche, gegen Nord verlängert, die scheinbare Himmelskugel in dem Puncte *N* (dem nördlichen Pole des grössten Kreises des Instrumentes) trifft. Die Höhe dieses Punctes über dem Horizonte, gleich der Neigung der Drehungsaxe, positiv genommen, wenn das

Fig. 92.



Nordende das höhere ist, sei $= i$, sein Azimuth, von Nord gegen Ost positiv gezählt, $= k$; die Declination desselben sei $= n$, der Stundenwinkel $= m$, letzterer, so wie das Azimuth k, von Nord gegen Ost positiv genommen. Von diesen vier Grössen bestimmen je zwei, Höhe und Azimuth, oder Stundenwinkel und Declination des Punktes *N* die Aufstellung des Instrumentes.

In dem vom Puncte N mit dem Nordpol und Zenith gebildeten Dreieck NPZ ist:

$$PZ = 90^0 - \varphi,\ NZ = 90^0 - i,\ NP = 90^0 - n,$$
$$\angle NZP = k,\ \angle NPZ = 180^0 - m,$$

und man hat durch Anwendung der Formeln (6) auf dieses Dreieck die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin n &= \sin\varphi \sin i + \cos\varphi \cos i \cos k, \\ \cos n \sin m &= \sin k \cos i, \\ -\cos n \cos m &= \cos\varphi \sin i - \sin\varphi \cos i \cos k \end{aligned} \tag{236}$$

oder, wenn i und k so klein sind, dass die Sinus mit den Bögen vertauscht und die Cosinus gleich 1 gesetzt werden können:

$$\begin{aligned} \sin n &= i \sin\varphi + \cos\varphi, \\ \cos n \sin m &= k, \\ -\cos n \cos m &= i \cos\varphi - \sin\varphi. \end{aligned} \tag{237}$$

Sei ferner CS die Absehenlinie des Mittelfadens auf einen Stern gerichtet, dessen Declination $= \delta$, dessen Stundenwinkel, von Süd gegen Ost positiv gezählt, $= t$ ist. Die Absehenlinie CS schliesse mit dem Kreisende der Drehungsaxe des Fernrohres den Winkel $90^0 + c$ ein, wo c den Collimationsfehler bedeutet, und nehmen wir an, dass CN das Kreisende und gegen Nord gerichtet sei. In dem Dreiecke NPS ist dann:

$$SN = 90^0 + c,\ PS = 90^0 - \delta,\ PN = 90^0 - n,$$
$$\angle NPS = 180^0 - (t + m),$$

folglich:

$$-\sin c = \sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \cos(t + m). \tag{238}$$

Diese Gleichung gilt, den gemachten Annahmen gemäss, für Stern Ost, Kreis Nord.

Steht der Stern S auf der Westseite des Meridians, so ändert sich in dem Dreiecke NPS nur der Winkel NPS, und wird, wenn wir den Stundenwinkel von Süd gegen West wieder positiv zählen,

$$= 180^0 - t + m = 180^0 - (t - m),$$

wodurch sich die vorhergehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$-\sin c = \sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \cos(t - m), \tag{238*}$$

welche aus (238) auch dadurch hervorgeht, dass man den Stundenwinkel t negativ nimmt.

Beobachtet man aber den Stern bei Kreis Süd, so kommt der Mittelfaden auf die entgegengesetzte Seite des grössten Kreises des Instrumentes zu liegen, wodurch die Seite $NS = 90^0 - c$ wird, und es ändert sich daher in den beiden vorhergehenden Gleichungen das Zeichen von c.

Es genügt daher, in den weiteren Ableitungen von der für Stern Ost, Kreis Nord giltigen Gl. (238) auszugehen, da aus den so erhaltenen Resultaten die für die anderen Fälle: Stern West oder Kreis Süd geltenden einfach durch Aenderung des Zeichens von t, beziehungsweise c erhalten werden können.

In die Gl. (238) kann man an Stelle der Grössen m und n auch jene i und k einführen. Durch Auflösung des $\cos(t+m)$ und Substitution der Werthe für $\sin n$, $\cos n \sin m$ und $\cos n \cos m$ aus den Glgn. (236) folgt nämlich:

$$\frac{\sin c}{\cos k \cos i} + \frac{(\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t)}{\cos k \cos i} \sin i + \cos\delta \sin t \operatorname{tg} k =$$
$$= \sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta,$$

oder, da der Coefficient von $\sin i$ gleich $\cos z$ ist, wenn z die Zenithdistanz des Sternes am Mittelfaden bedeutet:

$$\frac{\sin c}{\cos k \cos i} + \frac{\cos z \operatorname{tg} i}{\cos k} + \cos\delta \sin t \operatorname{tg} k = \sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta, \tag{239}$$

welche Gleichung noch strenge ist. In der Praxis werden aber c und i immer so klein sein, dass $\sin c = c$, $\operatorname{tg} i = i$ und $\cos i = 1$ gesetzt werden kann; wird auch bezüglich des Azimuthes k dieselbe Voraussetzung gemacht, so geht mit Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser Grössen obige Gleichung in folgende über:

$$c + i \cos z + k \cos\delta \sin t = \sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta. \tag{239*}$$

Die vorstehenden Gleichungen enthalten die Theorie des Passage-Instrumentes bei seiner Aufstellung im ersten Vertical und es lassen sich aus denselben verschiedene Methoden zur Berechnung der Polhöhe ableiten, von welchen einige der vorzüglichsten dargestellt werden sollen.

207. Erste Methode. Dieselbe besteht darin, aus der beobachteten Uhrzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden die Sternzeit des Durchganges durch den ersten Vertical abzuleiten.

Sei ϑ_0 die Sternzeit des Durchganges des Sternes durch den ersten Vertical in Ost, so ist $\alpha - \vartheta_0$ der östliche Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical, somit, zufolge der Gl. 1) [§. 204]:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos(\alpha - \vartheta_0)}, \text{ oder: } \cos\varphi \sin\delta = \sin\varphi \cos\delta \cos(\alpha - \vartheta_0),$$

und man erhält durch Substitution dieses Werthes in die Gl. (239*):

$$c + i \cos z + k \cos\delta \sin t = \sin\varphi \cos\delta\, [\cos t - \cos(\alpha - \vartheta_0)]$$
$$= 2 \sin\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \vartheta_0 - t) \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \vartheta_0 + t).$$

Sind nun, wie vorausgesetzt, die Instrumentalfehler c, i, k klein, so fällt der Mittelfaden sehr nahe mit dem ersten Vertical zusammen und es wird daher sehr nahe $t = \alpha - \vartheta_0$ sein, so dass man, da die linke Seite der Gleichung eine sehr kleine Grösse ist, im zweiten Theile statt des $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \vartheta_0 - t)$ den Bogen und $\sin t$ statt $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \vartheta_0 + t)$ setzen kann. Hiedurch kommt:

$$\frac{c}{\sin\varphi \cos\delta \sin t} + \frac{i \cos z}{\sin\varphi \cos\delta \sin t} + \frac{k}{\sin\varphi} = \alpha - \vartheta_0 - t.$$

Die Coefficienten von c und i vereinfachen sich durch die Bemerkung, dass, da der Stern nahe am ersten Vertical beobachtet ist, z und t sehr nahe der Zenithdistanz ζ und dem Stundenwinkel σ im ersten Vertical gleich sein werden, daher man in diesen sehr kleinen Gliedern $\cos\zeta$ statt $\cos z$ und $\cos\delta \sin t = \cos\delta \sin\sigma = \sin\zeta$ [Gl. 3) §. 204] setzen kann.

Ist endlich u_0 die beobachtete Uhrzeit des Antrittes des Sternes am Mittelfaden, $\varDelta u_0$ der Stand der Uhr gegen Sternzeit, so ist

$$t = \alpha - (u_0 + \varDelta u_0),$$

und es folgt daher aus obiger Gleichung:

$$\vartheta_0 = u_0 + \varDelta u_0 - \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} - \frac{i_0}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \frac{k}{\sin\varphi},$$

wo i_0 die bei dem östlichen Durchgange des Sternes beobachtete Neigung der Drehungsaxe des Fernrohres bedeutet.

Diese Gleichung gilt, der Ableitung zufolge, für Stern Ost, Kreis Nord. Wurde der Stern im Westen beobachtet, so ändert sich nur das Zeichen von t und mit diesem, da $\cos\delta \sin t = \sin\zeta$ gesetzt wurde, das Zeichen von ζ. Erfolgte aber die Beobachtung bei Kreis Süd, so ist c mit entgegengesetzten Zeichen zu rechnen. Man hat daher für die vier möglichen Fälle folgende Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{St. O. K. N.:} \quad \vartheta_0 = u_0 + \varDelta u_0 - \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} - \frac{i_0}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \frac{k}{\sin\varphi},\\
&\text{St. W. K. N.:} \quad \vartheta_w = u_w + \varDelta u_w + \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \frac{i_w}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \frac{k}{\sin\varphi},\\
&\text{St. O. K. S.:} \quad \vartheta_0 = u_0 + \varDelta u_0 + \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} - \frac{i_0}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \frac{k}{\sin\varphi},\\
&\text{St. W. K. S.:} \quad \vartheta_w = u_w + \varDelta u_w - \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \frac{i_w}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \frac{k}{\sin\varphi}.
\end{aligned}\right\} \quad (240)$$

Mittelst dieser Gleichungen ist man nun im Stande, wenn die Fehler c, i, k des Instrumentes und der Uhrfehler $\varDelta u$ bekannt sind, aus der beobachteten Uhrzeit u des Sternes am Mittelfaden die Sternzeit ϑ seines Durchganges durch den ersten Vertical abzuleiten, aus welcher mit Zuziehung der Rectascension der Stundenwinkel σ, und mit diesem und der Declination nach Gl. 1) [§. 204] die Polhöhe sich ergibt. Hiebei wird aber nicht bloss die Kenntniss der genannten Reductionselemente erfordert, sondern es bleibt die berechnete Polhöhe auch mit dem Einflusse der Fehler der für dieselben angenommenen Werthe behaftet.

Beobachtet man den Stern in Ost und West in derselben Kreislage, so erhält man durch Subtraction der zwei ersten, oder der zwei letzten der vorstehenden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)\right] \pm \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \frac{\tfrac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin\varphi \operatorname{tg} z},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern bei Kreis Nord oder Kreis Süd beobachtet wurde. Dieser Werth von $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ ist unabhängig vom Uhrstande, dem Azimuthe k des Instrumentes und der Rectascension des Sternes, und der hiemit nach Gl. (235) berechnete Werth von φ hängt, abgesehen von der stets zu berücksichtigenden Neigung der Axe, nur noch von dem Uhrgange $(\varDelta u_w - \varDelta u_o)$ in der Zwischenzeit und der Collimation c ab. Ist letztere unbekannt, so kann man, dieselbe vernachlässigend, zunächst einen mit dem Einflusse des Collimationsfehlers behafteten Werth von φ mittelst der Gl. (235) berechnen; beobachtet man dann den Stern an einem der folgenden Abende in der entgegengesetzten Kreislage, so wird, wie das doppelte Zeichen des von c abhängigen Gliedes der obigen Gleichung zu erkennen gibt, das Mittel aus den aus beiden Beobachtungen folgenden Werthen von φ frei sein vom Einflusse des Collimationsfehlers, vorausgesetzt, dass dieser in der Zwischenzeit sich nicht geändert hat.

Beobachtet man aber den Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen, indem man das Fernrohr in der Zwischenzeit in seinen Lagern umlegt, so hat man durch Subtraction der 1ten und 2ten, oder der 2ten und 3ten der Glgn. (240):

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)\right] + \frac{\tfrac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta}, \tag{241}$$

oder, wenn man:

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)\right] \tag{242}$$

setzt, wo Θ die halbe beobachtete Zwischenzeit, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet:

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = \Theta + \frac{\tfrac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta}, \tag{243}$$

und hiemit zufolge Gl. (235):

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\delta \sec\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o). \tag{244}$$

Hier ist nun die Differenz $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ von der Rectascension des Sternes, dem Uhrstande, der Collimation und dem Azimuthe des Instrumentes, so lange letzteres so klein ist, dass die bei Ableitung der Glgn. (240) vernachlässigten höheren Potenzen desselben keinen merklichen Einfluss haben, unabhängig, und es bedarf die in Uhrzeit ausgedrückte Zwischenzeit $(u_w - u_o)$ nur der Reduction auf Sternzeit durch Anbringung des Uhrganges $(\varDelta u_w - \varDelta u_o)$ in der Zwischenzeit und der Correction wegen der Neigung der Axe.

Letzterer Correction kann übrigens noch einfacher dadurch Rechnung getragen werden, dass man zunächst mit der wegen Neigung der Axe noch nicht verbesserten Zwischenzeit Θ einen Werth φ' der Polhöhe berechnet, und sodann diesen wegen der Neigung corrigirt. Durch Differenziation der Gl. (244) nach φ und $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ findet man nämlich mit Berücksichtigung der Gl. 2) [§. 204]:

$$d\varphi = \sin\varphi \operatorname{tg}\zeta \,.\, d\,\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o). \tag{m}$$

Setzt man nun, gemäss der Gl. (243): $d\,\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = \dfrac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta}$, so wird $d\varphi = \frac{1}{2}(i_o + i_w)$. Man kann daher die Formeln in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \Theta &= \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)\right], \\ \operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{tg}\delta \sec\Theta, \\ \varphi &= \varphi' + \tfrac{1}{2}(i_o + i_w). \end{aligned} \tag{244*}$$

Die Gl. (m) gibt den Fehler der Polhöhe, welcher durch einen Fehler in der nach Gl. (241) oder (243) berechneten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ erzeugt wird. Letzterer setzt sich aus drei Fehlern zusammen, nämlich 1) dem Fehler in dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(i_o + i_w)$ beider Neigungen, 2) dem Fehler in der beobachteten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u_w - u_o)$ und 3) dem Fehler in dem angenommenen Uhrgange $\frac{1}{2}(\Delta u_w - \Delta u_o)$.

Der von einem Fehler in den Neigungen herrührende Fehler in φ wird, mit Rücksicht auf Gl. (m): $d\varphi = d\,\frac{1}{2}(i_o + i_w)$, woraus folgt, dass der ganze Betrag des Fehlers in dem arithmetischen Mittel der Neigungen auf die berechnete Polhöhe übergeht, was übrigens aus der letzten der Glgn. (244*) unmittelbar erhellt. Es ist daher die Bestimmung der Neigung der Axe mit Sorgfalt vorzunehmen und zu empfehlen, nicht nur die Axe vor und nach jedem Durchgange zu nivelliren, sondern auch die Libelle stets möglichst nahe berichtigt und die Neigung der Axe selbst möglichst klein zu erhalten, damit die Ausweichungen der Blase von der Mitte klein bleiben und hiedurch der Einfluss eines Fehlers in dem angenommenen Werthe eines Scalentheiles unmerklich wird. Da übrigens in obige Gleichungen nur die Summe der Neigungen bei K. O. und K. W. eingeht, in welcher bekanntlich der Einfluss einer Ungleichheit der Zapfenhalbmesser eliminirt ist, so kann letztere unberücksichtigt bleiben.

Der Einfluss eines Fehlers in der beobachteten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u_w - u_o)$ wird:

$$d\varphi = \sin\varphi \operatorname{tg}\zeta \; d\,\tfrac{1}{2}(u_w - u_o).$$

Hieraus erhält man z. B. für $\varphi = 50^0$, und:

	$\varphi - \delta$	ζ	$d\varphi =$	für $d\,\frac{1}{2}\,(u_w - u_o) = 0^s.1$
$\delta = 49^0$	1^0	$9^0\ 52$	$0.1332\ d\,\frac{1}{2}\,(u_w - u_o)$	$d\varphi = 0''.200$
48	2	14 3	0.1916 "	$d\varphi = 0\ .287$
47	3	17 19	0.2387 "	$d\varphi = 0\ .358$
46	4	20 7	0.2805 "	$d\varphi = 0\ .421$

Um den Einfluss eines Fehlers im Uhrgange zu erhalten, hat man statt $d\,\frac{1}{2}\,(\vartheta_w - \vartheta_o)$ in Gl. (m) zu setzen:

$$d\,\tfrac{1}{2}\,(\varDelta u_w - \varDelta u_o) = \frac{\frac{1}{2}\,(u_w - u_o)}{24}\,dg = \frac{\sigma}{24}\,dg\,,$$

wenn g den Gang der Uhr gegen Sternzeit in 24^h und σ den Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical bedeutet, womit

$$d\varphi = \tfrac{1}{24}\,\sigma\,\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\zeta\,dg$$

wird. Hiernach wird für die oben gemachten Annahmen: $\varphi = 50^0$, und:

	$\varphi - \delta$	σ	$d\varphi =$	für $dg = 0^s.1$
$\delta = 49^0$	1^0	$1^h.010$	$0.0056\ dg$	$d\varphi = 0''.008$
48	2	1 .418	$0.0113\ dg$	$d\varphi = 0\ .017$
47	3	1 .724	$0.0171\ dg$	$d\varphi = 0\ .026$
46	4	1 .978	$0.0231\ dg$	$d\varphi = 0\ .035$

Der Einfluss der hier betrachteten Fehler wird daher, bei gleichem Betrage derselben, um so grösser, je grösser $\varphi - \delta$ wird, übereinstimmend mit dem schon in §. 203 erhaltenen Resultate. (Vergl. übrigens §. 218.)

Differenzirt man Gl. (244) nach φ und δ, so kommt:

$$d\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\,\delta}\,d\delta\,,$$

woraus erhellt, dass, da der Coefficient von $d\delta$ stets nahe $= 1$ bleibt, wenn $\varphi - \delta$ klein ist, der Fehler der Declination nahezu mit seinem vollen Betrage auf die Polhöhe übergeht.

Statt der Gl. (244), oder jener (244*) kann man sich zur Berechnung von φ auch einer der Formeln 12) oder 13) [§. 204] bedienen, welche, da $\sigma = \frac{1}{2}\,(\vartheta_w - \vartheta_o)$ ist, die Form:

$$\sin\,(\varphi - \delta) = 2\,\sin\varphi\,\cos\delta\,\sin\tfrac{1}{4}\,(\vartheta_w - \vartheta_o)^2 \tag{245}$$

und

$$\sin\,(\varphi - \delta) = \sin\,(\varphi + \delta)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{4}\,(\vartheta_w - \vartheta_o)^2 \tag{246}$$

annehmen, und die Differenz $(\varphi - \delta)$ geben, wobei im 2^{ten} Theile für φ ein möglichst angenäherter Werth zu substituiren und für $\frac{1}{4}\,(\vartheta_w - \vartheta_o)$ der Werth aus Gl. (241) durch Halbirung zu entnehmen ist. Da $\varphi - \delta$ klein, so genügt es, die Rechnung nach diesen Formeln mit sechsstelligen Logarithmen zu führen.

Durch Differenziation nach φ und δ erhält man für die Formel (245)

$$d(\varphi - \delta) = \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \operatorname{cotg} \varphi \, d\varphi - \operatorname{tg}(\varphi - \delta) \operatorname{tg} \delta \, d\delta,$$

für jene (246):

$$d(\varphi - \delta) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \delta)}{\operatorname{tg}(\varphi + \delta)} \, d(\varphi + \delta),$$

wornach der Einfluss eines Fehlers in den angenommenen Werthen von φ und δ auf den berechneten Werth der Differenz $(\varphi - \delta)$ bestimmt werden kann, welcher, vermöge des kleinen Factors $\operatorname{tg}(\varphi - \delta)$ meist unmerklich sein wird. Man sieht übrigens, dass der Gebrauch der Gl. (246), abgesehen von der bequemeren Rechnung, vortheilhafter ist, als jener der Gl. (245), weil der Coefficient von $d\varphi$ bei (246) stets erheblich kleiner ist, als jener bei (245), was auch für den Coefficienten $d\delta$ gilt, sobald φ, je nach dem Werthe von $(\varphi - \delta)$, grösser als 30^0 bis 33^0 ist.

Durch Differenziation der Glgn. (245) und (246) nach $\varphi - \delta$ und $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ erhält man für (245):

$$d(\varphi - \delta) = \frac{\sin \varphi \sin \zeta}{\cos(\varphi - \delta)} \, d \tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o),$$

und für (246):

$$d(\varphi - \delta) = \frac{2 \operatorname{tg}(\varphi - \delta)}{\sin \sigma} \, d \tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o),$$

welche Formeln den Einfluss eines Fehlers in der halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ auf den berechneten Werth von $(\varphi - \delta)$ geben. Man erhält hieraus, der Kürze wegen $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = \sigma$ setzend, für die obigen Annahmen: $\varphi = 50^0$, und:

	$\varphi - \delta$	für Gl. (245):	für Gl. (246):
$\delta = 49^0$	1^0	$d(\varphi - \delta) = 0.1313 \, d\sigma$	$d(\varphi - \delta) = 0.1337 \, d\sigma$
48	2	„ $= 0.1861 \, d\sigma$	„ $= 0.1925 \, d\sigma$
47	3	„ $= 0.2284 \, d\sigma$	„ $= 0.2402 \, d\sigma$
46	4	„ $= 0.2642 \, d\sigma$	„ $= 0.2825 \, d\sigma$

208. Die Berechnung von φ nach den vorstehenden Formeln setzt voraus, dass die bei Entwickelung der Glgn. (240) vernachlässigten höheren Potenzen des Azimuthes k des Instrumentes auf die Differenz $\vartheta_w - \vartheta_o$ keinen merklichen Einfluss nehmen. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so wird man sich zur Berechnung von φ der Gl. (230) oder (233) bedienen, welche für jeden Werth des Azimuthes gelten, und wobei es sich nur noch um die Bestimmung der Grösse $\lambda = \frac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha$ handelt. Mit Weglassung des Gliedes $\frac{k}{\sin \varphi}$ geben aber die Glgn. (240) die von dem Einflusse der Collimation und Neigung befreite Sternzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden, also die in Gl. (230) oder (233) mit T_o beziehungsweise T_w bezeichneten Zeiten. Durch Subtraction zweier zu entgegengesetzten Kreislagen gehörigen Gleichungen erhält man daher, übereinstimmend mit Gl. (241):

$$\tfrac{1}{2}(T_w - T_o) = \tfrac{1}{2}[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)] + \frac{\tfrac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta}$$

und durch Addition:

$$\tfrac{1}{2}(T_o + T_w) = \tfrac{1}{2}[(u_o + u_w) + (\varDelta u_o + \varDelta u_w)] \mp \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \frac{\tfrac{1}{2}(i_w - i_o)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gl. (232):

$$\lambda = \tfrac{1}{2}[(u_o + u_w) + (\varDelta u_o + \varDelta u_w)] - \alpha + \frac{\tfrac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta \mp c}{\sin\varphi \sin\zeta}, \qquad (247)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern in Ost bei Kr. N. oder Kr. S. beobachtet ist.*) Berücksichtiget man nun, dass die Grösse $\lambda = \tfrac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha$ stets klein ist und nur der Cosinus derselben in die Gleichung (230) oder (233) eingeht, so kann man, mit Vernachlässigung des von c und i abhängigen Gliedes, genügend genau:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}[(u_o + u_w) + (\varDelta u_o + \varDelta u_w)] - \alpha \qquad (248)$$

setzen und daher die zur Berechnung von φ dienenden Formeln, analog jenen (244*), in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \tfrac{1}{2}[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)], \\ \lambda &= \tfrac{1}{2}[(u_o + u_w) + (\varDelta u_o + \varDelta u_w)] - \alpha, \\ \operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{tg}\delta \sec\Theta \cos\lambda, \\ \varphi &= \varphi' + \tfrac{1}{2}(i_o + i_w), \end{aligned}\right\} \qquad (249)$$

in welchen durch den Hinzutritt des Factors $\cos\lambda$ dem Einflusse des Azimuthes des Instrumentes Rechnung getragen ist, und welche, wenn λ so klein, dass $\cos\lambda = 1$ wird, wieder in jene (244*) übergehen.

Die Grösse λ ist übrigens nichts anderes, als der genäherte Werth des Stundenwinkels m des nördlichen Poles des grössten Kreises des Instrumentes, d. i. des Punctes N (Fig. 92), in welchem die gegen Nord verlängerte Drehungsaxe des Fernrohres die Himmelskugel trifft. Denn mit Beibehaltung der obigen Bedeutung von T_o und T_w geben die Glgn. (240): $\vartheta_o = T_o - \frac{k}{\sin\varphi}$ und $\vartheta_w = T_o - \frac{k}{\sin\varphi}$, aus welchen durch Addition, da $\tfrac{1}{2}(\vartheta_o + \vartheta_w) = \alpha$ ist:

$$\frac{k}{\sin\varphi} = \tfrac{1}{2}(T_o + T_w) - \alpha = \lambda$$

folgt. Aus den zwei letzten der Glgn. (236) folgt aber für $i = o$: $\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg} k}{\sin\varphi}$,

*) Wird der Stern in Ost und West in derselben Kreislage beobachtet, so verschwindet c aus den Ausdrücken von $\tfrac{1}{2}(T_o + T_w)$ und λ.

oder, wenn k klein ist, : $m = \frac{k}{\sin\varphi}$, und es ist daher:

$$m = \frac{k}{\sin\varphi} = \lambda, \tag{250}$$

wo λ durch die Gl. (247), oder wenn c unbekannt, näherungsweise durch Gl. (248) bestimmt ist. Die Beziehung $m = \lambda$ gilt strenge, wenn nebst i auch $c = o$ ist. Denn in diesem Falle geht die Gl. (234), weil, je nachdem der Stern in West oder Ost steht, $A \pm 90^0 = 180 + k$, also $\operatorname{cotg} A = -\operatorname{tg} k$ wird, über in: $\operatorname{tg} k = \sin\varphi \operatorname{tg}\lambda$, welche Gleichung, mit der oben aus (236) erhaltenen: $\operatorname{tg} k = \sin\varphi \operatorname{tg} m$ verbunden, $\operatorname{tg} m = \operatorname{tg}\lambda$, also $m = \lambda$ gibt.

Setzt man in der vorletzten der Glgn. (249) $\cos\lambda = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\lambda^2$, und

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\delta \sec\Theta,$$

so kommt:

$$\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\sin(\varphi' - \varphi_0)}{\cos\varphi' \cos\varphi_0} = -2\operatorname{tg}\varphi_0 \sin\tfrac{1}{2}\lambda^2.$$

oder, da, wenn λ klein, sehr nahe $\varphi' = \varphi_0 = \varphi$ ist:

$$\varphi' = \varphi_0 - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\,.\,\lambda^2,$$

folglich, mit Rücksicht auf Gl. (250):

$$\varphi' = \varphi_0 - \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{cotg}\varphi,$$

oder in Bogensecunden:

$$\varphi' = \varphi_0 - \tfrac{1}{2}k^2 \sin 1'' \operatorname{cotg}\varphi,$$

wo k in Bogensecunden auszudrücken ist. Das zweite Glied rechter Hand gibt den Fehler, welcher durch das Azimuth des Instrumentes in Folge der in den Glgn. (240) vernachlässigten höheren Potenzen desselben in der nach Gl. (244) oder (244*) berechneten Polhöhe entsteht; er erreicht, für $\varphi = 50^0$, den Betrag von $0''.01$ für $k = 70''.1$ und nimmt mit k in quadratischem Verhältnisse zu.

209. Wir haben bisher angenommen, dass der Stern in Ost und West am Mittelfaden beobachtet wurde; zur Erhöhung der Genauigkeit werden aber auch die Durchgänge des Sternes an den Seitenfäden beobachtet, und es wird daher erforderlich, die an letzteren beobachteten Antrittszeiten auf den Mittelfaden zu reduciren.

Für den Durchgang des Sternes durch den Mittelfaden besteht die aus dem Dreiecke NPS (Fig. 92) folgende Gleichung (238) bezw. (238*):

$$-\sin c = \sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \cos(t \pm m),$$

wo t der Stundenwinkel am Mittelfaden und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Stern in Ost oder West beobachtet wird.

Sei nun f der Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden, positiv, wenn ersterer nördlich von letzterem, so wird für den Antritt des Sternes am Seitenfaden in dem Dreiecke NPS die Seite $NS = 90^0 + c - f$, wodurch obige

Gleichung, wenn t' den Stundenwinkel am Seitenfaden bedeutet, in folgende übergeht:

$$\sin(f-c) = \sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \cos(t' \pm m).$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraction:

$$\sin(f-c) + \sin c = \cos\delta \cos n \left[\cos(t \pm m) - \cos(t' \pm m)\right],$$

oder:

$$2 \sin\tfrac{1}{2} f \cos(\tfrac{1}{2} f - c) = 2 \cos\delta \cos n \sin\left[\tfrac{1}{2}(t + t') \pm m\right] \sin\tfrac{1}{2}(t' - t).$$

Da nun c immer nur wenige Bogensecunden betragen und $\frac{1}{2} f$ nicht leicht $6'$ überschreiten wird, kann $\cos(\frac{1}{2} f - c) = \cos\frac{1}{2} f$ gesetzt werden, wodurch die linke Seite der Gleichung $= \sin f$ wird. Ferner ist, je nachdem der Stern in Ost oder West, $t' - t = l$ oder $t - t' = l$ die gesuchte Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden und man hat daher aus der letzten Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2} l = \pm \frac{\sin f}{2 \cos\delta \cos n \sin\left[\frac{1}{2}(t + t') \pm m\right]}.$$

Die Grössen n und m lassen sich durch i und k ausdrücken. Aus der 1ten der Glgn. (236) folgt nämlich, wenn man, was hier immer zulässig, $\cos k = 1$ setzt: $\sin n = \cos(\varphi - i)$, also $\cos n = \sin(\varphi - i)$, und nach Gl. (250) ist, hinreichend genau, $m = \frac{k}{\sin\varphi}$. Da jedoch das Azimuth k des Instrumentes zur Zeit der Beobachtung mit der für die vorliegende Aufgabe erforderlichen Schärfe nicht immer bekannt ist und überdies behufs Ableitung der Stundenwinkel t, t' aus den beobachteten Uhrzeiten eine genaue Kenntniss des Uhrstandes erfordert wird, so ist es vortheilhaft, die Formel von diesen Elementen unabhängig zu machen, was auf mehrfache Weise geschehen kann.

Eliminirt man zunächst den Stundenwinkel t' am Seitenfaden mittelst der Gleichungen: $t' = t + l$ oder $t' = t - l$, je nachdem der Stern in Ost oder West, so kommt:

$$\sin\tfrac{1}{2} l = \pm \frac{\sin f}{2 \cos\delta \sin(\varphi - i) \sin(t \pm m \pm \frac{1}{2} l)}. \qquad (a)$$

Zufolge der Glgn. (247) und (250) ist aber:

$$m = \tfrac{1}{2}\left[(u_o + \varDelta u_o) + (u_w + \varDelta u_w)\right] - \alpha + \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta \mp c}{\sin\varphi \sin\zeta},$$

wo u_o und u_w die Uhrzeiten des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden und α die Rectascension bedeuten; da ferner für Stern Ost:

$$t = \alpha - (u_o + \varDelta u_o),$$

für Stern West:

$$t = (u_w + \varDelta u_w) - \alpha$$

ist, so wird:

$$t \pm m = \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)\right] \pm \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta \mp c}{\sin\varphi \sin\zeta}.$$

Setzt man also:

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)\right], \tag{251}$$

$$\eta = \Theta \pm \frac{\tfrac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta \mp c}{\sin\varphi\,\sin\zeta}, \tag{252}$$

so wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}l = \pm\frac{\sin f}{2\cos\delta\,\sin(\varphi - i)\,\sin(\eta \pm \tfrac{1}{2}l)}, \tag{253}$$

wo Θ die halbe beobachtete Zwischenzeit des östlichen und westlichen Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet.

In dem Ausdrucke von η gilt für das auf Θ folgende Correctionsglied das obere Zeichen für den östlichen, das untere für den westlichen Durchgang, und von den beiden Zeichen von c das obere oder untere, je nachdem der Stern in Ost bei Kreis Nord oder bei Kreis Süd beobachtet wurde.*) Die Differenz der Neigungen $\frac{1}{2}(i_w - i_o)$ ist wegen Ungleichheit der Zapfenhalbmesser, im Falle diese merklich ist, zu verbessern.

In der letzten Gleichung (253) gelten die oberen Zeichen für Stern Ost, die unteren für Stern West, und ist für südliche Fäden f negativ zu nehmen, wodurch auch l das Zeichen wechselt. Da übrigens das Zeichen, mit welchem die Reduction l an der am Seitenfaden beobachteten Zeit anzubringen ist, um die auf den Mittelfaden reducirte Zeit zu erhalten, nicht zweifelhaft ist, so kann man obige Formel, f und l stets positiv betrachtend, auch in der Form:

$$\sin\tfrac{1}{2}l = \frac{\sin f}{2\cos\delta\,\sin(\varphi - i)\,\sin(\eta \pm \tfrac{1}{2}l)} \tag{254}$$

schreiben, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der Seitenfaden nördlich oder südlich vom Mittelfaden. Zur Substitution im Nenner des zweiten Theiles der Gleichung erhält man einen genäherten Werth von l aus den Beobachtungen selbst durch Subtraction der am Seiten- und Mittelfaden beobachteten Zeiten. Ist $\varphi - \delta$ nicht sehr klein, so genügt es, im Nenner $\sin\varphi$ statt $\sin(\varphi - i)$ zu setzen.

Die Berechnung von l wird bequemer, wenn man, was immer zulässig, $\sin f = f = 15 f^s \sin 1''$ setzt, wo f^s die Fadendistanz in Zeitsecunden ausgedrückt bedeutet, und überdies, um auch l sofort in Zeitsecunden zu erhalten, die Näherungsformel: $\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}$ **) benützt, also

---

*) Hiebei ist vorausgesetzt, dass der Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet wurde; erfolgen beide Beobachtungen in derselben Kreislage, so verschwindet c aus dem obigen Ausdrucke von m und aus Gl. (252).

**) Es ist nämlich: $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 - \ldots$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \ldots$$

$$\sqrt[3]{\cos x} = 1 - \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{72}x^4 - \ldots,$$

folglich $\dfrac{\sin x}{x} - \sqrt[3]{\cos x} = \tfrac{1}{45}x^4 + \ldots$, oder $\sin x = x\sqrt[3]{\cos x} + \tfrac{1}{45}x^5 + \ldots$. Setzt

$$\sin\tfrac{1}{2}l = \tfrac{1}{2}l\sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}l} = \tfrac{1}{2}\,15\,l^s \sin 1''\sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}l}$$

setzt; hiemit wird:

$$l^s = \frac{f^s}{\cos\delta\,\sin(\varphi - i)\sin(\eta \pm \tfrac{1}{2}l)\sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}l}}. \tag{255}$$

Der Factor $\sqrt[3]{\cos\frac{1}{2}l}$ wird meist so nahe $= 1$, dass man ihn vernachlässigen kann; im Gegenfalle bildet man den Logarithmus desselben und dessen dekadische Ergänzung leicht im Kopfe, und legt letztere zu dem ohne Rücksicht auf diesen Factor berechneten Werth von $\log l^s$ hinzu.

Man kann der Gl. (253), sowie ähnlich geformten, noch eine andere zur numerischen Rechnung bequeme Gestalt geben. Setzt man:

$$F = \frac{\sin f}{\cos\delta\,\sin(\varphi - i)\sin 1''} = \frac{15\,f^s \sin 1''}{\cos\delta\,\sin(\varphi - i)\sin 1''},$$

also:

$$F = \frac{15\,f^s}{\cos\delta\,\sin(\varphi - i)}, \tag{256}$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$2\sin\tfrac{1}{2}l\sin(\eta \pm \tfrac{1}{2}l) = \pm F\sin 1'',$$

woraus man nach Auflösung des $\sin(\eta \pm \frac{1}{2}l)$ und Substition von $1 - \cos l$ für $2\sin\frac{1}{2}l^2$:

$$\cos(\eta \pm l) = \cos\eta - F\sin 1'', \tag{b}$$

und endlich, für die Cosinus die Sinus der halben Winkel einführend:

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\eta \pm l)^2}{\sin 1''} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\eta^2}{\sin 1''} + F \tag{257}$$

erhält, wo das obere Zeichen für Stern Ost, das untere für Stern West gilt, und F für nördliche Fäden positiv, für südliche negativ zu nehmen ist.

Die Rechnung erfolgt in der Art, dass man zunächst für die einzelnen Seitenfäden die Werthe von F nach (256) berechnet, sodann mit dem Argumente η in Zeit den $\log\frac{2\sin\frac{1}{2}\eta^2}{\sin 1''}$ der mehrerwähnten Hilfstafel für $\log\frac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}$ entnimmt,*) und die diesem Logarithmus entsprechende Zahl mit den Werthen

---

man daher $\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}$, so wird der Fehler dieser Gleichung, in Bogensecunden ausgedrückt, $= + \frac{1}{45}x^5 \sin 1''^4 + \ldots$, also z. B. für $x = 4^\circ$: $+ 0''.0076$, für $x = 10^\circ$: $+ 0''.742$, und bleibt daher, da der Winkel $x = \frac{1}{2}l$ im äussersten Falle 2° nur wenig überschreiten kann, ganz unmerklich.

*) Die 2te Auflage des Werkes: „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen von Prof. Dr. Th. Albrecht", Leipzig 1879, enthält eine sechsstellige Tafel für $\log\frac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}$ von $t = 30^m$ bis $t = 2^h$, eine fünfstellige Tafel für dieselbe Grösse von $t = 0$ bis $t = 30^m$, sowie eine Tafel für die Zahlenwerthe $\frac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}$ von $t = 0$ bis 20^m, welche Tafeln für alle Fälle genügen, so lange $\varphi - \delta$ kleiner als 4°.

von F durch Addition (bei nördlichen Fäden) oder Subtraction (bei südlichen Fäden) verbindet, und endlich, mit den Logarithmen der so erhaltenen Summen bezw. Differenzen als Argument abermals in die Hilfstafel eingehend, derselben die Werthe von $\eta \pm l$ in Zeit entnimmt, aus welchen sich durch Verbindung mit η sofort die Werthe von l in Zeit ergeben.

Die Benützung der vorstehenden Formeln setzt voraus, dass behufs Bildung der Grösse Θ der Stern in Ost und West am Mittelfaden beobachtet sei. Ist dies nicht der Fall, oder will man überhaupt die Reduction auf den Mittelfaden unabhängig von beobachteten Durchgängen berechnen, so kann man, wieder von der obigen Gleichung (a) ausgehend, statt der beobachteten Zwischenzeit Θ den Stundenwinkel σ des Sternes im ersten Vertical einführen.

Aus den Glgn. (238) und (238*) folgt nämlich:

$$\cos(t \pm m) = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n + \frac{\sin c}{\cos\delta \cos n},$$

wo im 2ten Gliede rechts ohne merklichen Fehler c statt $\sin c$ und $\sin\varphi$ statt $\cos n$ gesetzt werden kann. Durch Division der 1ten und 3ten der Glgn. (237) erhält man aber mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von i:

$$\frac{\operatorname{tg} n}{\cos m} = \frac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\sin\varphi - i\cos\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi + i \operatorname{cosec}\varphi^2,$$

somit, da $\cos m$ nahe $= 1$, und daher dieser Factor in dem sehr kleinen von i abhängigen Gliede weggelassen werden kann:

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{cotg}\varphi \cos m + i \operatorname{cosec}\varphi^2. \tag{258}$$

Setzt man nun $\cos m = 1 - 2\sin\frac{1}{2}m^2 = 1 - \frac{1}{2}m^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{k^2}{\sin\varphi^2}$, so wird:

$$\cos(t \pm m) = \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\varphi + \frac{i \operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi^2} + \frac{c}{\sin\varphi\cos\delta} - \frac{1}{2}k^2 \frac{\operatorname{cotg}\varphi \operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi^2}.$$

Es ist aber $\operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\varphi = \cos\sigma$, wenn σ den Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical bedeutet, folglich, wenn man:

$$t \pm m = \gamma$$

setzt und die Differenz $\cos\gamma - \cos\sigma$ in ein Product umformt:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma - \gamma) = \frac{i \operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi^2} + \frac{c}{\sin\varphi\cos\delta} - \frac{1}{2}k^2\frac{\cos\sigma}{\sin\varphi^2}.$$

Da nun der zweite Theil dieser Gleichung, also auch $\frac{1}{2}(\sigma - \gamma)$ sehr klein ist, so kann man $\sigma - \gamma$ statt $2\sin\frac{1}{2}(\sigma - \gamma)$ und $\sin\sigma$ statt $\sin\frac{1}{2}(\sigma + \gamma)$ setzen und erhält dadurch:

$$\gamma - \sigma = -\frac{1}{\sin\varphi\cos\delta\sin\sigma}\left(\frac{i\sin\delta}{\sin\varphi} + c\right) + \frac{1}{2}k^2 \sin 1'' \frac{\operatorname{cotg}\sigma}{\sin\varphi^2},$$

folglich mit Rücksicht auf Gl. 3) und 4) [§. 204]:

$$\gamma = t \pm m = \sigma - \frac{i \cos\zeta + c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \tfrac{1}{2} k^2 \sin 1'' \frac{\operatorname{cotg}\sigma}{\sin\varphi^2},$$

in welchem Ausdrucke, in Folge seiner Ableitung aus den für Kreis Nord geltenden Glgn. (238) und (238*), c bei Kreis Süd mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen ist und das vom Azimuthe k abhängige Glied vernachlässiget werden kann, da dessen Einfluss nur merklich wird, wenn k ungewöhnlich gross und $\varphi - \delta$ sehr klein ist. So wird z. B. für $\varphi = 50^0$, $\delta = 49^0\,45'$, also $\varphi - \delta = 15'$: $\sigma = 7^0\,36'\,48''$, und hiemit für $k = 2' = 120''$, dieses Glied $= 0''.445$, dessen Vernachlässigung in dem für $f = -12' = -48^s$ berechneten Werthe von $l = 16^m\,50^s.5$ den Fehler $dl = -0^s.037$ erzeugt, welcher wie das Quadrat von k abnimmt, und daher für kleinere Werthe von k stets unmerklich bleibt.

Man hat daher:

$$\gamma = \sigma - \frac{i \cos\zeta \pm c}{\sin\varphi \sin\zeta}, \quad \begin{cases} + \text{ Kr. Nord} \\ - \text{ Kr. Süd} \end{cases} \tag{259}$$

wo σ aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \sigma^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}$$

zu berechnen ist, und mit diesem Werthe von $\gamma = t \pm m$ zufolge der Gl. (a):

$$\sin \tfrac{1}{2} l = \frac{\sin f}{2 \cos\delta \sin(\varphi - i) \sin(\gamma \pm \frac{1}{2} l)}, \tag{260}$$

oder:

$$l^s = \frac{f^s}{\cos\delta \sin(\varphi - i) \sin(\gamma \pm \frac{1}{2} l) \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} l}}, \tag{261}$$

in welchen Gleichungen das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Fäden gilt, und statt welchen wieder wie oben die folgenden angewendet werden können:

$$F = \frac{15 f^s}{\cos\delta \sin(\varphi - i)}, \tag{262}$$

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} (\gamma \pm l)^2}{\sin 1''} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} + F,$$

wo das obere Zeichen für Stern Ost, das untere für Stern West gilt, und F für südliche Seitenfäden negativ zu nehmen ist.

Man kann die Reduction auf den Mittelfaden auch in Form einer Reihe darstellen, indem man von der oben [S. 469] erhaltenen Gl. (b):

$$\cos(\eta \pm l) = \cos\eta - F \sin 1''$$

ausgeht, welche die Form der Gl. (a) in §. 191 hat und daher auf gleiche Weise in eine Reihe entwickelt werden kann. Setzt man a. a. O.: $z = \eta \pm l$, $\zeta = \eta$ und $h = F \sin 1'' = \dfrac{\sin f}{\cos\delta \sin(\varphi - i)}$ oder genügend genau:

$$h = \frac{f}{\cos\delta \sin\varphi},$$

so erhält man, bis zur 3^{ten} Potenz von f gehend, zufolge der Gl. (b) [§. 191]:

$$\pm l = \frac{f}{\cos\delta \sin\varphi \sin\eta} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{f}{\cos\delta \sin\varphi \sin\eta}\right)^2 \operatorname{cotg}\eta +$$
$$+ \tfrac{1}{6}\left(\frac{f}{\cos\delta \sin\varphi \sin\eta}\right)^3 (1 + 3 \cot\eta^2),$$

wo linker Hand das obere Zeichen für Stern Ost, das untere für Stern West gilt und für südliche Seitenfäden f negativ zu nehmen ist. Drückt man die hier noch in Bogenmass zu verstehenden Grössen f und l in Zeitsecunden aus, so hat man mit Weglassung des doppelten Zeichens von l und der Kürze wegen:

$$f_0 = \frac{f^s}{\cos\delta \sin\varphi \sin\eta}$$

setzend:

$$l^s = f_0 - \frac{15 \sin 1''}{2} f_0^2 \operatorname{cotg}\eta + \frac{(15 \sin 1'')^2}{6} f_0^3 (1 + 3 \operatorname{cotg}\eta^2),$$

oder:

$$l^s = f_0 - (5.56064 - 10) f_0^2 \operatorname{cotg}\eta + (0.9452 - 10) f_0^3 (1 + 3 \operatorname{cotg}\eta^2), \quad (263)$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Für südliche Fäden wird f_0 negativ und sind dann alle drei Glieder zu addiren.

Der Winkel η ist durch die Gl. (252) bestimmt und kann auch durch den Winkel γ [Gl. (259)] ersetzt werden, oder, mit Vernachlässigung der von der Neigung der Axe und Collimation abhängigen Correctionsglieder, durch einen der Winkel Θ oder σ. Man kann sich dieser Reihe mit einigem Vortheil, gegenüber den obigen geschlossenen Formeln bedienen, so lange $\varphi - \delta$ nicht kleiner als etwa $1^0\ 30'$ ist; für kleinere Werthe von $\varphi - \delta$ würde wenigstens bei den vom Mittelfaden entfernteren Seitenfäden das Glied 4^{ter} Ordnung:

$$- \frac{(15 \sin 1'')^3}{8} f_0^4 \operatorname{cotg}\eta (3 + 5 \operatorname{cotg}\eta^2)$$
$$(6.6820 - 20)$$

noch mitzunehmen sein, ja selbst dieses, wenn $\varphi - \delta$ sehr klein wird, nicht mehr ausreichen.

Lässt man in Gl. (263) σ, d. i. den Stundenwinkel im ersten Vertical an die Stelle von η treten und setzt zur Abkürzung:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\sin(\varphi - \delta) \sin(\varphi + \delta)}},$$

so wird zufolge der Glgn. 9) und 10) [§. 204]: $f_0 = f^s N$, $\operatorname{cotg}\sigma = N \cos\varphi \sin\delta$, und man erhält, mit Weglassung des Gliedes 3^{ter} Ordnung, die von Hansen gegebene Formel:

$$l^s = f^s N - (5.56064-10)\,(f^s N)^2\, N \cos\varphi \sin\delta, \qquad (264)$$

deren man sich bedienen kann, sobald $\varphi-\delta$ grösser als 5^0 ist. Solche Sterne werden mit Vortheil zur genaueren Bestimmung des Azimuthes des Instrumentes beobachtet. [S. §. 216.]

Zur Uebersicht sind in der folgenden Tabelle die Werthe der Glieder der 3^{ten} und 4^{ten} Ordnung der Gl. (263) angeführt, berechnet für $\varphi = 50^0$ und $f = 10' = 40^s$.

$\varphi-\delta$	Glied 3. Ordn.	Glied 4. Ordn.
0^0 15′	$33^s.83$	$14^s.11$
0 30	5 .96	1 .24
0 45	2 .15	0 .30
1 0	1 .05	0 .11
1 30	0 .38	0 .026
2 0	0 .18	0 .010
3 0	0 .066	0 .002
4 0	0 .032	0 .001
5 0	0 .018	—

Die in den vorstehenden Formeln erscheinenden, durch die Glgn. (252), bezw. (259) bestimmten Winkel η und γ erhalten selbstverständlich denselben Werth, wenn die Winkel Θ, bezw. σ fehlerfrei sind, und die Genauigkeit, mit welcher die Formeln die Reduction auf den Mittelfaden ergeben, hängt, abgesehen von einem Fehler in der angenommenen Fadendistanz f, lediglich von der Genauigkeit ab, mit welcher die Winkel Θ oder σ aus den gegebenen Elementen sich bestimmen. Der Winkel Θ ist mit den zufälligen Beobachtungsfehlern der Fadenantritte am Mittelfaden behaftet, während zur Bestimmung des Winkels σ, nebst einem genauen Werthe von δ, ein schon nahe richtiger Werth von φ erfordert wird, weil ein Fehler in den angenommenen Werthen von φ und δ einen erheblich grösseren Fehler in σ erzeugt, wie aus der aus Gl. 1) [§. 204] folgenden Gleichung:

$$d\sigma = \frac{2\,\mathrm{cotg}\,\sigma}{\sin 2\varphi}\,d\varphi - \frac{2\,\mathrm{cotg}\,\sigma}{\sin 2\delta}\,d\delta$$

erhellt, da $\mathrm{cotg}\,\sigma$ stets mehrmals grösser ist als die Einheit und mit abnehmendem Werthe von $\varphi-\delta$ rasch zunimmt. Es ist jedoch immer leicht, durch provisorische Berechnung einer oder mehrerer Beobachtungen, selbst nur mit Benützung der Durchgänge durch den Mittelfaden, einen zu diesem Zwecke hinreichend genauen Werth von φ sich zu verschaffen.

Die von i und c abhängigen Correctionsglieder der Winkel Θ und σ in den Ausdrücken (252) und (259) können, auch wenn i und c sehr klein sind, des kleinen Nenners wegen merkliche Werthe erlangen. Der von der

Neigung i abhängige Theil kann, da diese bekannt, wenn erforderlich, immer berücksichtiget werden; was aber den Collimationsfehler betrifft, so bleibt derselbe bei einem gut construirten Instrumente erfahrungsmässig durch längere Zeit nahe constant, und kann daher, wenn er durch sorgfältige Berichtigung nahe weggeschafft wurde, meist ohne merklichen Fehler vernachlässiget werden, oder es wird, wenn man ihn von Zeit zu Zeit durch Beobachtungen bestimmt, stets ein für den vorliegenden Zweck genügend genauer Werth zur Verfügung stehen. Im Allgemeinen wird das Correctionsglied von Θ, da in demselben nur die halbe Differenz der Neigungen, $\frac{1}{2}(i_w - i_o)$, erscheint, stets beträchtlich kleiner sein, als jenes des Winkels σ und erhält für St. O. und St. W. denselben Zahlenwerth mit entgegengesetztem Zeichen, was bei jenem von σ nicht der Fall ist.

Der Einfluss eines Fehlers in den Winkeln η oder γ auf den berechneten Werth von l ist übrigens durch die Gleichung:

$$\frac{dl}{d\eta} = \frac{dl}{d\gamma} = -\frac{\sin f}{\sin\varphi \cos\delta} \frac{\operatorname{cotg}(\sigma \pm \frac{1}{2}l)}{\sin(\sigma \pm \frac{1}{2}l)}$$

gegeben, welche durch Differenziation der Gl. (254) oder (260) leicht erhalten wird, wobei im zweiten Factor rechter Hand σ statt η oder γ gesetzt ist und das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Seitenfäden gilt.

Zur Uebersicht sind in der folgenden Tabelle die Werthe dieser Differenzialquotienten für $\varphi = 50^0$ und einen Seitenfaden, dessen südlicher Abstand vom Mittelfaden $f = 12'$ ist, für verschiedene Werthe von $\varphi - \delta$ zusammengestellt, und die Werthe von σ und l, sowie des Factors $\frac{1}{\sin\varphi \sin\zeta}$, mit welchem der Zähler der Correctionsglieder in Gl. (252) und (259) zu multipliciren ist, beigefügt.

$\varphi - \delta$	σ	l	$\frac{dl}{d\eta} = \frac{dl}{d\gamma}$	$\frac{1}{\sin\varphi \sin\zeta}$
0^0 15′	7^0 36′ 48″	16^m $50^s.5$	— 1.2320	15.249
0 30	10 44 50	9 42 .6	0.2887	10.779
0 45	13 8 18	7 34 .6	0.1657	8.798
1 0	15 8 38	6 25 .6	0.1160	7.617
1 30	18 28 52	5 8 .7	0.0723	6.215
2 0	21 15 54	4 24 .8	0.0522	5.379
2 30	23 41 32	3 54 .9	0.0408	4.809
3 0	25 51 54	3 34 .0	0.0333	4.388
3 30	27 50 36	3 17 .6	0.0281	4.060
4 0	29 40 2	3 4 .4	— 0.0242	3.797

Man ersieht hieraus, dass, so lange $\varphi - \delta$ nicht unter 2^0 bis $1^0.5$ sinkt, die erforderliche Genauigkeit in der Bestimmung von l unschwer zu erreichen ist, und selbst das Correctionsglied in (252) oder (259), wenn i

und c sehr klein, vernachlässigt werden kann, weil in diesem Falle der hieraus entspringende Fehler in l im Vergleiche zu den unvermeidlichen zufälligen Beobachtungsfehlern in den beobachteten Fadenantritten stets sehr klein bleibt, namentlich für die dem Mittelfaden näher stehenden Seitenfäden; bei kleineren Werthen von $\varphi - \delta$ empfiehlt es sich allerdings, den Winkel η oder γ so genau als möglich zu bestimmen.

Ein Fehler in den Winkeln η oder γ bewirkt übrigens, wie ein Blick auf die entwickelten Formen zeigt, dass die Werthe von l für sämmtliche Seitenfäden entweder zu gross oder zu klein erhalten werden, und zwar, so lange $\varphi - \delta$ nicht zu klein ist, nahe um denselben Betrag für je zwei zu beiden Seiten des Mittelfadens in gleichen Abständen befindliche Seitenfäden. Da nun die Werthe von l an die beobachteten Uhrzeiten für die dem Mittelfaden vorausgehenden und die demselben folgenden Seitenfäden mit entgegengesetztem Zeichen anzubringen sind, so werden die aus einem kleinen Fehler in η oder γ entspringenden Fehler von l sich im Mittel aus sämmtlichen Fäden sehr nahe aufheben und daher der mit diesen für St. O. und St. W. erlangten Mitteln berechnete Werth von φ frei sein von dem Einflusse dieser Fehler, wenn das Fadennetz zu beiden Seiten des Mittelfadens nahe symmetrisch ist, und, im Falle der Durchgang an einem Seitenfaden nicht beobachtet worden wäre, auch der an dem auf der anderen Seite des Mittelfadens in gleichem Abstande liegenden Seitenfaden beobachtete Durchgang vom Mittel ausgeschlossen wird. Nur in dem Falle, wenn man für jeden einzelnen Faden aus der Differenz der an demselben in Ost und West beobachteten und auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten $u_w - u_o$ die Polhöhe ableiten wollte, würden die in Rede stehenden Fehler eine minder gute Uebereinstimmung der einzelnen Werthe von φ, und daher auch z. B. bei Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers des Mittels, wobei gleichfalls die aus den einzelnen Fäden folgenden Differenzen $u_w - u_o$ in Anspruch genommen werden, einen zu grossen Werth desselben zur Folge haben.

Wesentlich ist aber eine möglichst genaue Kenntniss der Fadendistanzen f; man kann dieselben leicht aus einer grösseren Anzahl von im ersten Vertical beobachteten Sterndurchgängen bestimmen; durch Subtraction der am Mittelfaden und an den Seitenfäden beobachteten Uhrzeiten ergeben sich die Werthe von l, aus welchen mittelst der vorstehenden Gleichungen, durch Auflösung nach f, die Werthe von f erhalten werden, wobei die Werthe der Winkel η oder γ so genau als möglich zu bestimmen sind.

210. Beispiel. 1864, September 26, wurde auf dem astronomisch-trigonometrischen Puncte: Hohe Schneeborg bei Bodenbach in Böhmen mit einem Repsold'schen Passage-Instrumente folgende Beobachtung des Sternes α Persei im ersten Vertical gemacht:

Faden*)	St. O. K. N.	St. W. K. S.
I	$1^h\ 56^m\ 14^s.0$	$4^h\ 20^m\ 11^s.0$
II	57 9 .6	21 13 .0
III	58 2 .5	22 11 .5
IV	59 0 .0	23 13 .3
V	2 0 1 .5	24 16 .8
VI	1 0 .6	25 16 .9
VII	2 2 .7	26 18 .1
VIII	3 0 .2	27 13 .0
IX	4 2 .3	28 11 .3
X	4 58 .5	29 2 .9
XI	2 5 57 .7	4 29 55 .4

Neigung: $i_o = -6''.842$ $\qquad i_w = -8''.146$

Uhrstand: $\varDelta u_o = +1^m\ 34^s.18$ $\qquad \varDelta u_w = +1^m\ 34^s.41$

Der scheinbare Ort des Sternes war:

$$\alpha = 3^h\ 14^m\ 43^s.43, \quad \delta = +49^0\ 22'\ 30''.00.$$

Zur Reduction der Beobachtungen nehmen wir an:

$$\varphi = 50^0\ 47'\ 36''; \ c = +1''.5$$

und finden mittelst der Formeln 4) und 7) [§. 204]:

$$\log\cos\zeta = 9.9910, \ \log\sin\varphi\ \sin\zeta = 9.1933$$
$$\log\sin\varphi\ \mathrm{tg}\,\zeta = 9.2023.$$

Die angegebenen Uhrstände beziehen sich auf die am Mittelfaden VI in Ost und West beobachteten Uhrzeiten.

Die Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden wollen wir mittelst der Gl. (256) berechnen, zu welchem Zwecke zunächst der Winkel η nach den Formeln (251) und (252) zu bestimmen ist. Wir haben als Uhrzeiten am Mittelfaden:

$$\begin{aligned}
u_o &= 2^h\ 1^m\ 0^s.6\\
u_w &= 4\ \ 25\ 16\ .9\\
u_w - u_o &= 2\ \ 24\ 16\ .3\\
\varDelta u_w - \varDelta u_o &= +\ \ 0\ .23\\
2\Theta &= 2\ \ 24\ 16\ .53\\
\Theta &= 1\ \ 12\ \ 8\ .26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 15 &= 1.176091\\
\log\sin\varphi &= 9.889229\\
\log\cos\delta &= 9.813651\\
\log\frac{15}{\sin\varphi\ \cos\delta} &= 1.473211
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_w - i_o\text{**)} &= -\ 1''.304\\
\tfrac{1}{2}(i_w - i_o) &= -\ 0\ .652\\
&\ \ 9.8142\,n\\
\log\cos\zeta &= 9.9910\\
&\ \ 9.8052\,n\\
\tfrac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta &= -\ 0.639\\
-\ c &= -\ 1.500\\
&\ -\ 2.139\\
&\ \ 0.3302\,n\\
\log\sin\varphi\ \sin\zeta &= 9.1933\\
&\ \ 1.1369\,n\\
\text{Corr. Glied} &= -13''.7 = -0^s.91
\end{aligned}$$

*) Die Bezeichnung der Fäden mit I., II. . . . . XI. entspricht der Reihenfolge, in welcher dieselben bei Kreis Nord von einem Sterne in Osten angetreten werden.

**) Die Zapfengleichung war an dem benützten Instrumente $= o$, daher die Differenz $i_w - i_o$ keine Correction erfordert.

$$\text{St. O.} \quad \eta = \Theta - 0^s.91 = 1^h\ 12^m\ 7^s.35$$

$$\text{St. W.} \quad \eta = \Theta + 0^s.91 = 1^h\ 12^m\ 9^s.17$$

$$\text{St. O.} \quad \log \frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} = 4.005585$$

$$\text{St. W.} \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad = 4.005947$$

$$\text{St. O.} \quad \frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} = 10129''.43$$

$$\text{St. W.} \quad \frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} = 10137\ .88$$

Mit diesen Grössen steht nun die Berechnung der l nach Gl. (257), mit Benützung der Albrecht'schen Hilfstafel für $\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$, wie folgt:

Faden	f	$\log f^s$	$\log F$	F	$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \eta^2}{\sin 1''} \pm F = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\eta \pm l)^2}{\sin 1''}$ St. O.	St. W.
I	$46^s.190$	1.664548	3.137759	$1373''.28$	$11502''.71$	$8764''.60$
II	37 .089	1.569245	3.042456	1102 .70	11232 .13	9035 .18
III	28 .364	1.452767	2.925978	843 .29	10972 .72	9294 .59
IV	19 .107	1.281193	2.754404	568 .07	10697 .50	9569 .81
V	9 .333	0.970021	2.443232	277 .48	10406 .91	9860 .40
VII	9 .631	0.983671	2.456882	286 .34	9843 .09	10424 .22
VIII	18 .389	1.264558	2.737769	546 .72	9582 .71	10684 .60
IX	27 .780	1.443732	2.916943	825 .93	9303 .50	10963 .81
X	36 .205	1.558769	3.031980	1076 .41	9053 .02	11214 .29
XI	44 .861	1.651869	3.125080	1333 .77	8795 .66	11471 .65

Faden	$\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\eta \pm l)^2}{\sin 1''}$ St. O.	St. W.	$\eta + l$ St. O.	$\eta - l$ St. W.	l St. O.	l St. W.
I	4.060800	3.942732	$76^m\ 53^s.98$	$67^m\ 3^s.02$	$+\ 4^m\ 46^s.63$	$+\ 5^m\ 6^s.15$
II	4.050462	3.955937	75 58 .88	68 5 .10	3 51 .53	4 4 .07
III	4.040314	3.968230	75 5 .45	69 3 .77	2 58 .10	3 5 .40
IV	4.029282	3.980903	74 8 .08	70 5 .15	2 0 .73	2 4 .02
V	4.017321	3.993895	73 6 .72	71 9 .03	+ 0 59 .37	+ 1 0 .14
VII	3.993131	4.018043	71 5 .25	73 10 .40	− 1 2 .10	− 1 1 .23
VIII	3.981488	4.028759	70 8 .00	74 5 .38	1 59 .35	1 56 .21
IX	3.968646	4.039961	69 5 .77	75 3 .60	3 1 .58	2 54 .43
X	3.956794	4.049772	68 9 .17	75 55 .23	3 58 .18	3 46 .06
XI	3.944268	4.059626	67 10 .19	76 47 .69	− 4 57 .16	− 4 38 .52

Hiemit erhält man die folgenden auf den Mittelfaden reducirten Uhrzeiten:

Faden	St. O. K. N.	St. W. K. S.
I	$2^h\ 1^m\ 0^s.63$	$4^h\ 25^m\ 17^s.15$
II	1 .13	17 .07
III	0 .60	16 .90
IV	0 .73	17 .32
V	0 .87	16 .94
VI	0 .60	16 .90
VII	0 .60	16 .87
VIII	0 .85	16 .79
IX	0 .72	16 .87
X	0 .32	16 .84
XI	0 .54	16 .88
Mittel	$u_0 = 2^h\ 1^m\ 0^s.69$	$u_w = 4^h\ 25^m\ 16^s.96$

Wir finden zunächst nach Gl. (248):

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(u_0 + u_w) &= 3^h\ 13^m\ 8^s.82 \\
\tfrac{1}{2}(\varDelta u_0 + \varDelta u_w) &= +\ 1\ 34.30 \\
&\quad 3\ 14\ 43.12 \\
\alpha &= 3\ 14\ 43.43 \\
\lambda &= \quad -\ 0.31 = -4''.6,
\end{aligned}$$

also λ so klein,*) dass zur Berechnung von φ irgend eine der Gleichungen (244), (244*), (245) oder (246) benützt werden kann. Am einfachsten wird die Rechnung nach (244*):

$$\begin{aligned}
u_0 &= 2^h\ 1^m\ 0^s.69 \\
u_w &= 4\ 25\ 16.96 \\
u_w - u_0 &= 2\ 24\ 16.27 \\
\varDelta u_w - \varDelta u_0 &= +\quad 0.23 \\
2\Theta &= 2\ 24\ 16.50 \\
\Theta &= 1\ 12\ 8^s.25 \\
&= 18^0\ 2'\ 3''.75
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} \delta &= 0.0665832 \\
\log \cos \Theta &= 9.9781216 \\
\log \operatorname{tg} \varphi' &= 0.0884616 \\
\varphi' &= 50^0\ 47'\ 43''.30 \\
\tfrac{1}{2}(i_0 + i_w) &= -\quad 7.49 \\
\varphi' &= 50^0\ 47'\ 35''.81
\end{aligned}$$

Will man sich einer der Glgn. (244), (245) oder (246) bedienen, so ist zunächst nach Gl. (243) die Grösse $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_0)$ zu bilden. Man hat:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(i_0 + i_w) &= -\ 7''.494 \\
\log &= 0.8747\,n \\
\log \sin \varphi \operatorname{tg} \zeta &= 9.2024 \\
&\quad 1.6723\,n
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}(i_0 + i_w)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \zeta} &= -\ 47''.02 \\
\Theta &= 18^0\ 2'\ 3.75 \\
\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_0) &= 18^0\ 1'\ 16''.73 \\
\tfrac{1}{4}(\vartheta_w - \vartheta_0) &= 9\ 0\ 38.36
\end{aligned}$$

*) Ein genauerer Werth von λ würde sich mittelst der Gl. (247) ergeben, wo der Werth des 2. von i und c abhängigen Gliedes schon oben $= -0^s.91$ gefunden wurde; mit Berücksichtigung desselben wird $\lambda = -0^s.31 - 0^s.91 = -1^s.22$ womit nach Gl. (250) als genäherter Werth des Azimuthes: $k = \lambda \sin \varphi = -0^s.945 = -14''.2$ folgt.

Hiemit erhält man:

Nach Gl. (244):

$$\log \operatorname{tg} \delta = 0.0665832$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = 9.9781538$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.0884294$$
$$\varphi = 50^0\ 47'\ 35''.81$$

Nach Gl. (245):

$$\log \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_w - \vartheta_o) = 9.194842$$
$$\log \sin \varphi = 9.889229$$
$$\log \cos \delta = 9.813651$$
$$\log 2 = 0.301030$$
$$\log \sin(\varphi - \delta) = 8.393594$$
$$\varphi - \delta = 1^0\ 25'\ 5''.80$$
$$\delta = 49\ \ 22\ \ 30\ .00$$
$$\varphi = 50^0\ 47'\ 35''.80$$

Nach Gl. (246):

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(\vartheta_w - \vartheta_o) = 9.200235$$
$$\log \sin(\varphi + \delta) = 9.993125$$
$$\log \sin(\varphi - \delta) = 8.393595$$
$$\varphi - \delta = 1^0\ 25'\ 5''.81$$
$$\delta = 49\ \ 22\ \ 30\ .00$$
$$\varphi = 50\ \ 47\ \ 35\ .81$$

Zur Rechnung nach den zwei letzten Gleichungen wurde der Werth $\varphi = 50^0\ 47'\ 36''$ und $\varphi + \delta = 100^0\ 10'\ 6''$ angenommen, und es bedarf kaum der Erwähnung, dass, wenn der resultirende Werth von φ von dem angenommenen merklich abweichen würde, die Rechnung mit ersterem zu wiederholen wäre, was insbesondere bei dem Gebrauch der Gl. (245) gilt.

Wir haben oben zur Berechnung der Reduction auf den Mittelfaden den Winkel η benützt, zu dessen Bestimmung die beiden am Mittelfaden beobachteten Durchgangszeiten in Anspruch genommen werden. Wollte man, unabhängig von der Beobachtung, die Reduction mit Hilfe des Winkels γ (Gl. 259) berechnen, so ergibt sich derselbe auf folgende Weise:

$$\varphi = 50^0\ 47'\ 36''.0$$
$$\delta = 49\ \ 22\ \ 30\ .0$$
$$\varphi - \delta = 1\ \ 25\ \ 6\ .0$$
$$\varphi + \delta = 100\ \ 10\ \ 6\ .0$$
$$\log \sin(\varphi - \delta) = 8.393611$$
$$\log \sin(\varphi + \delta) = 9.993125$$
$$8.400486$$
$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\sigma = 9.200243$$
$$\tfrac{1}{2}\sigma = 9^0\ \ 0'\ \ 39''.0$$
$$\sigma = 18\ \ 1\ \ 18\ .0$$
$$\sigma = 1^h\ 12^m\ 5^s.20$$
$$\text{Corr. Gl.} = -2\ .22$$
$$\text{"} = -4\ .05$$
$$\text{St. O. } \gamma = 1^h\ 12^m\ 7^s.42$$
$$\text{St. W. } \gamma = 1\ \ 12\ \ 9\ .25$$

	St. O. K. N.	St. W. K. S.
$i =$	$-6''.842$	$-8''.146$
	$0.8352\,n$	$0.9109\,n$
$\log \cos \zeta =$	9.9910	9.9910
$\log i \cos \zeta =$	$0.8262\,n$	$0.9019\,n$
$i \cos \zeta =$	$-6''.702$	$-7''.978$
$c =$	$+1.\ 500$	$-1\ .500$
$i \cos \zeta \pm c =$	$-5''.202$	$-9''.478$
	$0.7162\,n$	$0.9767\,n$
$\log \sin \varphi \sin \zeta =$	9.1933	-9.1933
	$1.5229\,n$	$1.7834\,n$
Corr. Glied $=$	$33''.33$	$-60''.73$
$=$	$-2^s.22$	$-4^s.05$

Diese Werthe von γ stimmen sehr nahe mit den oben für η erhaltenen überein und würden daher für l die gleichen Werthe ergeben.

Will man auch den wahrscheinlichen Fehler des nach dieser Methode berechneten Werthes von φ ableiten, so weit derselbe nur von den zufälligen Fehlern der beobachteten Fadenantritte des Sternes abhängt, so wird man zunächst die den einzelnen Fäden entsprechenden Differenzen der auf den Mittelfaden reducirten Uhrzeiten, und die Abweichungen v derselben von ihrem arithmetischen Mittel bilden; bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler einer dieser Differenzen mit ε, jenen des arithmetischen Mittels mit r, so ist, wenn n die Anzahl der Fäden:

$$\varepsilon = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \quad r = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Sind dann $\varepsilon\varphi$ der wahrscheinliche Fehler des aus einem Faden folgenden Werthes von φ, $r\varphi$ der w. Fehler des aus dem Mittel aller Fäden abgeleiteten Werthes von φ, so hat man, zufolge der Gl. (m) [S. 462]:

$$\varepsilon\varphi = \tfrac{15}{2} \sin\varphi \operatorname{tg}\zeta \,.\, \varepsilon, \quad r\varphi = \tfrac{15}{2} \sin\varphi \operatorname{tg}\zeta \,.\, r.$$

Für das vorliegende Beispiel findet man:

$u_w - u_0$	v	vv
$2^h\ 24^m\ 16^s.52$	$-\ 0^s.25$	0.0625
15 .94	+ 0 .33	.1089
16 .30	— 0 .03	.0009
16 .59	— 0 .32	.1024
16 .07	+ 0 .20	.0400
16 .30	— 0 .03	.0009
16 .27	0 .00	.0000
15 .94	+ 0 .33	.1089
16 .15	+ 0 .12	.0144
16 .52	— 0 .25	.0625
16 .34	— 0 .07	.0049
Mittel = $2^h\ 24^m\ 16^s.27$		$[vv] = 0{,}5063$

Hiemit erhält man:

$$\varepsilon\varphi = \pm\ 0''.181; \quad r\varphi = \pm\ 0''.055.$$

211. Zweite Methode. Der Umstand, dass bei der im Vorhergehenden dargestellten Methode der Berechnung von Beobachtungen im ersten Vertical die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden einen grösseren Müheaufwand erfordert, welcher übrigens durch die Einfachheit der Ableitung der Polhöhe aus den zwei Mitteln der auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten wieder aufgewogen wird, ausserdem aber hiezu eine genaue Kenntniss der Fadendistanzen f erforderlich ist, macht es wünschenswerth, Methoden zu besitzen, welche weder die Reduction auf den Mittelfäden, noch die Kenntniss der Fadendistanzen erheischen.

Nehmen wir an, der Stern sei in Ost bei Kreis Nord an einem Seitenfaden beobachtet, dessen nördlicher Abstand vom Mittelfaden $= f$ ist, so dass also die Absehenlinie dieses Fadens mit dem Kreisende der Axe den Winkel $90^0 + c - f$ bildet, so haben wir in Gl. (238 $c-f$ statt c zu setzen, wodurch die Gl. (239*) in folgende übergeht:

$$-f + c + i \cos z + k \cos\delta \sin t = \sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta,$$

in welcher z und t Zenitdistanz und Stundenwinkel des Sternes am Seitenfaden bedeuten. Setzen wir $\cos t = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} t^2$, so verwandelt sich diese Gl. in folgende:

$$\sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 - f + c + i \cos z + k \cos\delta \sin t.$$

Wird der Stern an demselben Faden auf der Westseite beobachtet, so ändert $\sin t$ sein Zeichen; dasselbe gilt für f und c, wenn die Beobachtung bei Kreis Süd erfolgt. Lässt man daher z_0 und t_0 Zenithdistanz und Stundenwinkel auf der Ostseite, z_w und t_w dieselben Grössen auf der Westseite bedeuten, so hat man für die vier möglichen Fälle folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{St. O. K. N.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin \frac{1}{2} t^2_0 - f + c + i_0 \cos z_0 + k \cos\delta \sin t_0, \\
\text{St. W. K. S.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin \frac{1}{2} t^2_w + f - c + i_w \cos z_w - k \cos\delta \sin t_w, \\
\text{St. O. K. S.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin \frac{1}{2} t^2_0 + f - c + i_0 \cos z_0 + k \cos\delta \sin t_0, \\
\text{St. W. K. N.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin \frac{1}{2} t^2_w - f + c + i_w \cos z_w - k \cos\delta \sin t_w,
\end{array}\right\} (m)$$

woraus erhellt, dass im Mittel aus der 1ten und 2ten, oder der 3ten und 4ten Gleichung, d. i. aus zwei an demselben Faden in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen gemachten Beobachtungen des Sternes f und c verschwinden.

Setzt man nun, unter ζ die Zenithdistanz im ersten Vertical verstanden:

$$z_0 = \zeta \pm \Delta z_0, \qquad z_w = \zeta \pm \Delta z_w,$$

wo die oberen Zeichen für Kreis Nord (Seitenfaden nördlich vom Mittelfaden), die unteren für Kreis Süd (Seitenfaden südlich vom Mittelfaden) gelten, so kann man, mit Rücksicht darauf, dass i stets sehr klein ist und die Differenzen Δz in den äussersten praktisch vorkommenden Fällen 4 bis 5 Grade nicht überschreiten:

$$\cos z = \cos\zeta \mp \Delta z \sin\zeta$$

setzen. Dadurch erhalten die von der Neigung abhängigen Glieder in den Glgn. (m) die Form: $i \cos\zeta \mp i \Delta z \sin\zeta$, wo das 2te Glied nicht nur an und für sich sehr klein ist, sondern auch zu dem arithmetischen Mittel aus der 1ten und 2ten, oder der 3ten und 4ten Gleichung nur den stets verschwindend kleinen Beitrag $\pm \frac{1}{2} (i_w \Delta z_w - i_0 \Delta z_0) \sin\zeta$ liefert und daher immer vernachlässigt werden kann.

Da ferner, mit Rücksicht auf die Gl. 3) [§. 204],

$$k \cos\delta \sin t = k \sin\zeta + k (\cos\delta \sin t - \sin\zeta) =$$
$$= k \sin\zeta + k \cos\delta (\sin t - \sin\sigma)$$

ist, so kann man die vom Azimuth k abhängigen Glieder der Glgn. (m) auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{St. O. K. N.:} & + k \sin\zeta + k \cos\delta (\sin t_0 - \sin\sigma), \\ \text{St. W. K. S.:} & - k \sin\zeta - k \cos\delta (\sin t_w - \sin\sigma), \\ \text{St. O. K. S.:} & + k \sin\zeta + k \cos\delta (\sin t_0 - \sin\sigma), \\ \text{St. W. K. N.:} & - k \sin\zeta - k \cos\delta (\sin t_w - \sin\sigma), \end{array}\right\} \quad (n)$$

Vernachlässigt man nun auch in diesen Ausdrücken das zweite mit dem Producte der kleinen Factoren k und $(\sin t - \sin\sigma)$ behaftete Glied, welches als von 2ter Ordnung betrachtet werden kann, mit dem Vorbehalte, den Einfluss desselben später näher zu untersuchen, so verwandeln sich die Glgn. (m) in folgende:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{St. O. K. N.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin\tfrac{1}{2} t_0^2 - f + c + i_0 \cos\zeta + k \sin\zeta, \\ \text{St. W. K. S.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin\tfrac{1}{2} t_w^2 + f - c + i_w \cos\zeta - k \sin\zeta, \\ \text{St. O. K. S.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin\tfrac{1}{2} t_0^2 + f - c + i_0 \cos\zeta + k \sin\zeta, \\ \text{St. W. K. N.:} & \sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin\tfrac{1}{2} t_w^2 - f + c + i_w \cos\zeta - k \sin\zeta. \end{array}\right\} \quad (265)$$

Man ersieht hieraus, dass, wenn man den Stern in Ost und West an demselben Faden in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet, das Mittel aus den aus beiden Beobachtungen abgeleiteten Werthen von $\sin(\varphi - \delta)$ von der Fadendistanz f, dem Collimationsfehler c und dem Azimuth k, wenn letzteres so klein ist, dass der Einfluss des vernachlässigten Gliedes 2ter Ordnung unmerklich wird, endlich von einem kleinen Fehler in dem angenommenen Uhrstande, weil dieser die Stundenwinkel t_0 und t_w in entgegengesetztem Sinne beeinflusst, unabhängig ist, und nur der Correction wegen der Neigung der Axe:

$$= + \tfrac{1}{2} (i_0 + i_w) \cos\zeta$$

bedarf, wobei eine etwa vorhandene Ungleichheit der Zapfendurchmesser unbeachtet bleiben kann, weil dieselbe die Neigungen i_0 und i_w in gleichem Betrage und entgegengesetztem Sinne beeinflusst.

Um endlich die Differenz $\varphi - \delta$ sofort in Bogensecunden ausgedrückt zu erhalten, hat man bekanntlich:

$$x'' = \frac{\operatorname{arc} x}{\sin 1''} = \frac{\operatorname{arc} x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 1''}, \quad \text{somit:} \quad \sin x = x'' \sin 1'' \,.\, \frac{\sin x}{\operatorname{arc} x},$$

also:

$$\sin(\varphi - \delta) = (\varphi - \delta)'' \sin 1'' \,.\, \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\operatorname{arc}(\varphi - \delta)}.$$

Durch Substitution dieses Werthes von $\sin(\varphi - \delta)$ in die Glgn. (265) gehen dieselben, wenn zur Abkürzung:

$$C = \sin\varphi \cos\delta \, \frac{\operatorname{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)}$$

gesetzt, und der, der Einheit stets nahe kommende Factor $\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)}$ in den kleinen von c, i und k abhängigen Gliedern weggelassen wird, in folgende über:

$$\begin{aligned}
&\text{St. O. K. N.:}\ \varphi-\delta = C\,\frac{2\sin\frac{1}{2}t_0^2}{\sin 1''} - f\,\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)} + c + i_0\cos\zeta + k\sin\zeta,\\
&\text{St. W. K. S.:}\ \varphi-\delta = C\,\frac{2\sin\frac{1}{2}t_w^2}{\sin 1''} + f\,\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)} - c + i_w\cos\zeta - k\sin\zeta,\\
&\text{St. O. K. S.:}\ \varphi-\delta = C\,\frac{2\sin\frac{1}{2}t_0^2}{\sin 1''} + f\,\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)} - c + i_0\cos\zeta + k\sin\zeta,\\
&\text{St. W. K. N.:}\ \varphi-\delta = C\,\frac{2\sin\frac{1}{2}t_w^2}{\sin 1''} - f\,\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)} + c + i_w\cos\zeta - k\sin\zeta,
\end{aligned}\tag{266}$$

in welcher nunmehr $(\varphi-\delta)$, f c, i und k in Bogensecunden zu verstehen sind.

Der Factor $\operatorname{arc}(\varphi-\delta) : \sin(\varphi-\delta)$ kann mittelst der Gleichung:

$$\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)} = \frac{(\varphi-\delta)''\sin 1''}{\sin(\varphi-\delta)}$$

berechnet, oder einer Hilfstafel entnommen werden, welche $\log\frac{\operatorname{arc}x}{\sin x}$ mit dem Argumente $x=\varphi-\delta$ gibt, wobei ein genäherter Werth von $\varphi-\delta$ genügt. Einfacher findet man denselben, so lange $\varphi-\delta$ den Werth $2^0\,46'\,40''$ nicht überschreitet, mit Hilfe der in vielen Logarithmentafeln am Fusse jeder Seite der Zahlenlogarithmen angeführten Zahlen S, mittelst welcher nach der Formel: $\log\sin x = \log x'' + S$ aus dem Logarithmus der in dem Winkel x enthaltenen Zahl von Secunden der $\log\sin x$ erhalten wird. Es ist dann, wie leicht zu ersehen:

$$\log\frac{\operatorname{arc}x}{\sin x} = \log\sin 1'' - S = 4.685575 - S,$$

wo die dem Winkel $x=(\varphi-\delta)$ entsprechende Zahl S unmittelbar der Tafel entnommen wird. Auch kann man den für kleine Winkel geltenden Näherungsausdruck (s. Anmerkung S. 468):

$$\log\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)} = \tfrac{1}{3}\log\sec(\varphi-\delta)$$

benützen, welcher bis zu $\varphi-\delta = 4^0$ noch auf $0''.0076$ oder 2 Einheiten der 7. Decimalstelle genau ist; man bildet diese Grösse leicht im Kopfe, indem man die dekadische Ergänzung von $\log\cos(\varphi-\delta)$ durch 3 dividirt.

Durch Addition der zwei ersten, oder der zwei letzten der Glgn. (266) folgt nun:

$$\varphi-\delta = \tfrac{1}{2}\left\{C.\frac{2\sin\frac{1}{2}t^2{}_0}{\sin 1''} + C.\frac{2\sin\frac{1}{2}t^2{}_w}{\sin 1''}\right\} + \tfrac{1}{2}(i_0+i_w)\cos\zeta. \tag{267}$$

Die Berechnung erfolgt daher in der Art, dass man für jeden Faden aus den an demselben in Ost und West beobachteten Uhrzeiten u_0 und u_w mit

Zuziehung des Uhrstandes und der Rectascension des Sternes die Stundenwinkel:

$$t_o = \alpha - (u_o + \varDelta u_o) = (\alpha - \varDelta u_o) - u_o\,,$$
$$t_w = u_w + \varDelta u_w - \alpha = u_w - (\alpha - \varDelta u_w)$$

ableitet, mit diesen Stundenwinkeln als Argument der Hilfstafel die Werthe von $\log \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ entnimmt, diese mit $\log C$ verbindet, und aus den zugehörigen Zahlen $C \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$ das arithmetische Mittel nimmt, welchem sodann, oder auch blos dem Mittelwerthe aus allen auf diese Art für die einzelnen Fäden erlangten Mittel, noch die Correction wegen der Neigung beizufügen ist.

Beispiel. Berechnen wir nach dieser Methode die im vorhergehenden Paragraphe angeführte Beobachtung von α Persei, so haben wir mit dem angenommenen Werthe:

$$\varphi = 50^0\ 47'\ 36'', \text{ und } \delta = 49^0\ 22'\ 30''.00 : \varphi - \delta = 1^0\ 25'\ 6'';$$

hiemit:

$$\log \sin \varphi = 9.889229$$
$$\log \cos \delta = 9.813651$$
$$\tfrac{1}{3} \log \sec (\varphi - \delta) = 0.000044$$
$$\log C = 9.702924$$

Die S. 476 angegebenen Uhrstände:

$$\varDelta u_o = +\ 1^m\ 34^s.18 \text{ und } \varDelta u_w = +\ 1^m\ 34^s.41$$

beziehen sich auf die Uhrzeit am Mittelfaden in Ost und West, und können für die Dauer eines jeden der beiden Durchgänge als constant angenommen werden. Mit der Rectascension $\alpha = 3^h\ 14^m\ 43^s.43$ hat man daher zur Bestimmung der Stundenwinkel:

$$t_o = (\alpha - \varDelta u_o) - u_o = 3^h\ 13^m\ 9^s.25 - u_o,$$
$$t_w = u_w - (\alpha - \varDelta u_w) = u_w - (3^h\ 13^m\ 9^s.02).$$

Hiernach steht die Rechnung wie folgt:

Faden	Beobachtung St. O. K. N. u_o	Beobachtung St. W. K. S. u_w	t_o St. O. K. N.	t_w St. W. K. S.	$\log \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} t_o^2}{\sin 1''}$ St. O. K. N.	$\log \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''}$ St. W. K. S.
	h m s	h m s	h m s	h m s		
I	1 56 14.0	4 20 11.0	1 16 55.25	1 7 1.98	4.061037	3.942509
II	57 9.6	21 13.0	15 59.65	8 3.98	4.050607	3.955700
III	58 2.5	22 11.5	15 6.75	9 2.48	4.040563	3.967961
IV	59 0.0	23 13.3	14 9.25	10 4.28	4.029508	3·980724
V	2 0 1.5	24 16.8	13 7.75	11 7.78	4.017523	3.993643
VI	1 0.6	25 16.9	12 8.65	12 7.88	4.005843	4.005690
VII	2 2.7	26 18.1	11 6.55	13 9.08	3.993394	4.017784
VIII	3 0.2	27 13.0	10 9.05	14 3.98	3.981702	4.028488
IX	4 2.3	28 11.3	9 6.95	15 2.28	3.968891	4.039709
X	4 58.5	29 2.9	8 10.75	15 53.88	3.957128	4.049517
XI	2 5 57.7	4 29 55.4	1 7 11.55	1 16 46.38	3.944559	4.059382

Faden	$\log C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_0^2}{\sin 1''}$ St. O. K. N.	$\log C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''}$ St. W. K. S.	$C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_0^2}{\sin 1''}$ St. O. K. N.	$C \frac{2 \sin \frac{1}{2} t_w^2}{\sin 1''}$ St. W. K. S.	Summe	Mittel
I	3.763961	3.645433	5807.″12	4420.″11	10227.″23	5113.″61
II	3.753531	3.658624	5669.33	4556.42	5.75	2.88
III	3.743487	3.670885	5539.71	4686.89	6.60	3.30
IV	3.732432	3.683648	5400.47	4826.68	7.15	3.57
V	3.720447	3.696567	5253.48	4972.41	5.89	2.95
VI	3.708767	3.708614	5114.08	5112.27	6.35	3.17
VII	3.696318	3.720708	4969.56	5256.64	6.20	3.10
VIII	3.684626	3.731412	4837.56	5387.81	5.37	2.69
IX	3.671815	3.742633	4696.94	5528.83	5.77	2.88
X	3.660052	3.752441	4571.43	5655.11	6.54	3.27
XI	3.647483	3.762306	4441.02	5785.04	10226.06	5113.03

Mittel = 5113.13
= $1^0\ 25'\ 13''13$

Hiernach ergibt sich im Mittel aus allen 11 Fäden:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left\{C.\frac{2\sin\frac{1}{2}t_0^2}{\sin 1''}+C.\frac{2\sin\frac{1}{2}t_w^2}{\sin 1''}\right\} &= 1^0\ 25'\ 13''.13 \\
\tfrac{1}{2}(i_0+i_w)\cos\zeta &= \quad -\ 7\ .34 \\
\hline
\varphi-\delta &= 1^0\ 25'\ \ 5''.79 \\
\delta &= 49\ \ 22\ \ 30\ .00 \\
\hline
\varphi &= 50^0\ 47'\ 35''.79
\end{aligned}$$

212. Es erübrigt noch, den Einfluss des in den Glgn. (265) und (266) vernachlässigten zweiten Gliedes der Ausdrücke (n) [S. 482] auf den nach Gl. (267) berechneten Werth von $\varphi - \delta$ zu untersuchen.

Bezeichnen wir die hiedurch bedingte Correction dieses Werthes mit $\Delta(\varphi - \delta)$, so wird für das arithmetische Mittel sowohl der 1ten und 2ten, als auch der 3ten und 4ten Gleichung:

$$\Delta(\varphi - \delta) = \tfrac{1}{2}\, k \cos\delta\, (\sin t_o - \sin t_w),$$

oder:

$$\Delta(\varphi - \delta) = k \cos\delta \cos\tfrac{1}{2}(t_o + t_w) \sin\tfrac{1}{2}(t_o - t_w). \qquad (r)$$

Zufolge der Gl. (238) besteht nun für die Beobachtung eines Sternes in Ost bei Kreis Nord an einem Seitenfaden, welcher in dem Abstande f nördlich vom Mittelfaden liegt, dessen Absehenlinie also mit dem Kreisende den Winkel $90^0 + c - f$ einschliesst, die Gleichung:

$$-\sin(c - f) = \sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \cos(t_o + m),$$

welche für die Beobachtung an demselben Faden auf der Westseite bei Kreis Süd in folgende übergeht:

$$\sin(c - f) = \sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \cos(t_w - m),$$

und es wird bei beiden Beobachtungen der Seitenfaden, weil der Voraussetzung nach auf der Ostseite nördlich, auf der Westseite südlich vom Mittelfaden gelegen, früher als der Mittelfaden vom Sterne angetreten. Ist umgekehrt der Stern in Ost bei Kreis Süd, in West bei Kreis Nord beobachtet worden, in welchem Falle auf beiden Seiten der Seitenfaden später als der Mittelfaden vom Sterne angetreten wird, so ändert sich in obigen Gleichungen nur das Zeichen von $\sin(c-f)$, und es folgt daher durch Subtraction derselben für beide Fälle:

$$\mp 2\sin(c-f) = \cos\delta\cos n\,[\cos(t_w - m) - \cos(t_o + m)],$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Seitenfaden vor oder nach dem Mittelfaden angetreten wird.

Aus letzterer Gleichung folgt nun:

$$\mp \sin(c-f) = \cos\delta\cos n \sin\tfrac{1}{2}(t_o + t_w)\sin[\tfrac{1}{2}(t_o - t_w) + m],$$

und hieraus:

$$\sin[\tfrac{1}{2}(t_o - t_w) + m] = \mp \frac{\sin(c-f)}{\cos\delta\cos n\sin\frac{1}{2}(t_o + t_w)}.$$

Für den vorliegenden Zweck können die Instrumentalfehler c und $i = o$ angenommen werden, wodurch $n = 90^0 - \varphi$, $m = \dfrac{k}{\sin\varphi}$ wird, und die vorstehende Gleichung, da m klein, in folgende übergeht:

$$\sin\tfrac{1}{2}(t_o - t_w) = -\frac{k}{\sin\varphi}\cos\tfrac{1}{2}(t_o - t_w) \pm \frac{f}{\cos\delta\sin\varphi\sin\frac{1}{2}(t_o + t_w)}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Gl. (r) kommt:

$$\Delta(\varphi - \delta) = -k^2\frac{\cos\delta}{\sin\varphi}\cos\tfrac{1}{2}(t_o + t_w)\cos\tfrac{1}{2}(t_o - t_w) \pm kf\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(t_o + t_w)}{\sin\varphi}.$$

Setzt man nun, was hier näherungsweise zulässig ist, $\frac{1}{2}(t_o + t_w) = \sigma$ und $\cos\frac{1}{2}(t_o - t_w) = 1$, so erhält man:

$$\Delta(\varphi - \delta) = -k^2\frac{\cos\delta\cos\sigma}{\sin\varphi} \pm kf\frac{\operatorname{cotg}\sigma}{\sin\varphi},$$

oder, mit Rücksicht auf die Glgn. 6) und 2) [§. 204], und $\Delta(\varphi - \delta)$, k und f in Bogensecunden ausdrückend:

$$\Delta(\varphi - \delta) = -k^2\sin 1''\operatorname{cotg}\varphi\cos\zeta \pm kf\sin 1''\operatorname{cotg}\varphi\operatorname{cotg}\zeta, \quad (268)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Seitenfaden vor oder nach dem Mittelfaden angetreten wird.

Die Correction besteht daher aus zwei Theilen, von welchen der erste vom Quadrate des Azimuthes abhängige constant für alle Fäden und stets negativ ist; für $\varphi = 50^0$ und von dem für kleine Werthe von $\varphi - \delta$ der Einheit nahe kommenden Factor $\cos\zeta$ abgesehen, wird derselbe z. B. für $k = 30''$: $-0''.0037$, für $k = 1' = 60''$: $-0''.015$, für $k = 2' = 120''$: $-0''.059$, und nimmt mit k im quadratischen Verhältnisse zu. Es ist daher räthlich, das Azimuth des Instrumentes möglichst klein zu halten, damit der Einfluss dieses Gliedes überhaupt unmerklich wird.

Der zweite von der ersten Potenz des Azimuthes und der Fadendistanz f abhängige Theil erreicht, in Folge der Factoren f und $\operatorname{cotg}\zeta$, für denselben

Werth von k weit grössere Werthe, als der erste; das Doppelte von der Zeitfolge des Fadenantrittes in Bezug auf den Mittelfaden abhängige Vorzeichen gibt jedoch zu erkennen, dass dieser Theil des Fehlers im Mittel aus je zwei Werthen von $\varphi - \delta$, welche aus zwei vom Mittelfaden gleichweit abstehenden Seitenfäden abgeleitet sind, folglich auch im Mittel aus allen Fäden sich aufhebt, wenn das Fadennetz in Bezug auf den Mittelfaden symmetrisch, und der Durchgang in Ost und West vollständig an allen Fäden beobachtet ist. Wurde daher an irgend einem Seitenfaden der Durchgang nicht, oder nur auf einer Seite des Meridians beobachtet, so wird man, wenn unter den gegebenen Umständen der Fehler einen unzulässigen Werth erreicht, entweder die wenn auch vollständig erhaltene Beobachtung an dem auf der anderen Seite des Mittelfadens symmetrisch gelegenen Seitenfaden gänzlich ausschliessen, oder den aus letzterer abgeleiteten Werth von $\varphi - \delta$, wenn k und f bekannt sind, entsprechend zu verbessern haben. Diese Verbesserung wird übrigens an allen aus den einzelnen Seitenfäden folgenden Werthen von $\varphi - \delta$ in dem Falle anzubringen sein, wenn man aus den Abweichungen derselben von ihrem arithmetischen Mittel den wahrscheinlichen Fehler desselben bestimmen will, weil sonst diese Abweichungen nicht richtig erhalten werden.

Bei der im vorigen §. als Beispiel benützten Beobachtung von α Persei, 1884, September 26, war $k = -0^s.945 = -14''.2$ (s. Anmerk. S. 478), $\varphi = 50^0\ 47'.6$, $\zeta = 11^0\ 37'.2$; mit diesen Werthen wird nach Gl. (268) die Correction:

$$\Delta(\varphi - \delta) = -0''.00078 \mp (7.6126)\, f^s,$$

deren erstes Glied unmerklich ist. Das zweite, in welchem die eingeklammerte Zahl einen Logarithmus bedeutet und f in Zeitsecunden auszudrücken ist, liefert die in der 2ten Spalte der folgenden Zusammenstellung angeführten Correctionen, welche, an die von S. 485 in die 1te Spalte übertragenen Werthe des 1ten Gliedes der Gl. (267) angebracht, die in der 3ten Spalte befindlichen verbesserten Werthe geben.

Faden		Corr.	Verbess. Werthe	Abw. v. Mittel	vv
I	5113''.61	− 0''.19	5113''.42	− 0''.29	0.0841
II	2 .88	0 .15	2 .73	+ 0 .40	.1600
III	3 .30	0 .12	3 .18	− 0 .05	.0025
IV	3 .57	0 .08	3 .49	− 0 .36	.1296
V	2 .95	− 0 .04	2 .91	+ 0 .22	.0484
VI	3 .17	0 .00	3 .17	− 0 .04	.0016
VII	3 .10	+ 0 .04	3 .14	− 0 .01	.0001
VIII	2 .69	0 .08	2 .77	+ 0 .36	.1296
IX	2 .88	0 .11	2 .99	+ 0 .14	.0196
X	3 .27	0 .15	3 .42	− 0 .29	.0841
XI	5113 .03	+ 0 .18	5113 .21	− 0 .08	.0064
Mittel =	5113 .13		5113 .13		$[vv]$ = 0.6660

Das Mittel der verbesserten Werthe ist, wie man sieht, identisch mit jenem der unverbesserten, wie dies bei einer vollständigen Beobachtung an allen Fäden und einem nahe symmetrischen Fadennetze sein muss. Aus den Abweichungen vom Mittel findet man den wahrscheinlichen Fehler eines aus einem Faden abgeleiteten Werthes von $\varphi - \delta$:

$$\varepsilon_\varphi = \pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{10}} = \pm\, 0''.174,$$

und den wahrscheinlichen Fehler des Mittels aus allen 11 Fäden

$$r_\varphi = \pm\, \frac{0.174}{\sqrt{11}} = \pm\, 0''.053.$$

213. Dritte Methode. Von derselben Gleichung (239*), wie bei Entwicklung der zweiten Methode, ausgehend, kann man noch auf anderem Wege zu einem Verfahren gelangen, aus den an demselben Seitenfaden in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachteten Durchgängen des Sternes die Polhöhe abzuleiten.

Für die Beobachtung des Sternes in Ost, bei Kreis Nord, an einem Seitenfaden, dessen Absehenlinie mit dem Kreisende der Axe den Winkel $90^0 - C$ einschliesst, haben wir in Gl. (239*) $-C$ statt c zu setzen, und dadurch die Gleichung:

$$\cos\varphi \sin\delta = \sin\varphi \cos\delta \cos t_o + C - i_o \cos z_o - k \cos\delta \sin t_o,$$

welche sich für den westlichen Durchgang durch denselben Seitenfaden bei Kreis Süd, durch Aenderung der Zeichen von t und C in folgende verwandelt:

$$\cos\varphi \sin\delta = \sin\varphi \cos\delta \cos t_w - C - i_w \cos z_w + k \cos\delta \sin t_w.$$

Aus den bei der zweiten Methode (S. 481) angeführten Gründen kann man in den kleinen von der Neigung der Axe abhängigen Gliedern ohne merklichen Fehler z_o und z_w mit der Zenithdistanz ζ im ersten Vertical vertauschen und erhält dann durch Addition beider Gleichungen:

$$\cos\varphi \sin\delta = \sin\varphi \cos\delta \cos\tfrac{1}{2}(t_w + t_o) \cos\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) - \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\cos\zeta$$
$$+ k \cos\delta \cos\tfrac{1}{2}(t_w + t_o) \sin\tfrac{1}{2}(t_w - t_o).$$

Sind u_o, u_w die beobachteten Uhrzeiten der Durchgänge des Sternes am Seitenfaden, Δu_o, Δu_w die zugehörigen Uhrstände gegen Sternzeit, so ist:

$$t_o = \alpha - (u_o + \Delta u_o), \qquad t_w = (u_w + \Delta u_w) - \alpha,$$

somit:

$$\tfrac{1}{2}(t_w + t_o) = \tfrac{1}{2}[(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)] = \Theta,$$

wo Θ die beobachtete halbe Zwischenzeit, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet; ferner:

$$\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) = \tfrac{1}{2}[(u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)] - \alpha = \psi,$$

und obige Gleichung verwandelt sich durch Einführung dieser Grössen und Division durch $\cos\varphi \cos\delta$ in folgende:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi \cos\Theta \cos\psi - \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\cos\zeta}{\cos\varphi \cos\delta} + k\frac{\cos\Theta \sin\psi}{\cos\varphi}.$$

Setzen wir nun:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi' \cos\Theta \cos\psi,$$

so erhalten wir durch Subtraction beider Gleichungen:

$$(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')\cos\Theta\cos\psi = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\cos\zeta}{\cos\varphi\cos\delta} - k\frac{\cos\Theta\sin\psi}{\cos\varphi}.$$

oder, durch $\cos\Theta\cos\psi = \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\varphi'$ dividirend:

$$\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\varphi\cos\varphi'} = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\cos\zeta \sin\varphi'}{\cos\varphi\cos\varphi'\sin\delta} - k\frac{\operatorname{tg}\psi}{\cos\varphi},$$

d. i.

$$\sin(\varphi - \varphi') = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\cos\zeta\sin\varphi'}{\sin\delta} - k \operatorname{tg}\psi\cos\varphi',$$

oder, da $\varphi - \varphi'$ sehr klein ist, und daher auch in dem Coefficienten des von der Neigung abhängigen Gliedes $\sin\varphi$ statt $\sin\varphi'$ gesetzt werden kann, wodurch dieser Coefficient zufolge Gl. 4) [§. 204] = 1 wird:

$$\varphi - \varphi' = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) - k\operatorname{tg}\psi\cos\varphi'.$$

Man hat daher zur Berechnung folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \Theta &= \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\Delta u_w - \Delta u_o)\right] \\ \psi &= \tfrac{1}{2}\left[(u_o + u_w) + (\Delta u_o + \Delta u_w)\right] - \alpha \\ \operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{tg}\delta \sec\Theta \sec\psi \\ \varphi &= \varphi' + \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) - k\cos\varphi' \operatorname{tg}\psi. \end{aligned} \tag{269}$$

Der immer kleine Winkel ψ, und somit auch das vom Azimuth abhängige Correctionsglied $k\cos\varphi' \operatorname{tg}\psi$, erhalten für zwei zu beiden Seiten des Mittelfadens von diesem gleichweit abstehende Seitenfäden sehr nahe gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe. Es tritt daher auch hier, wie bei der vorher behandelten Reductionsmethode der Fall ein, dass der durch Vernachlässigung des Gliedes $k\cos\varphi' \operatorname{tg}\psi$ entstehende Fehler sich im Mittel der aus sämmtlichen Fäden folgenden Werthe von φ aufheben wird, wenn das Fadennetz genügend symmetrisch ist und beide Durchgänge in Ost und West vollständig an allen Fäden beobachtet sind, oder, im Falle an irgend einem Seitenfaden der Durchgang nicht oder nicht vollständig beachtet worden wäre, auch der wenngleich vollständig beobachtete Durchgang an dem auf der andern Seite des Mittelfadens symmetrisch gelegenen Seitenfaden entweder vom Mittel ausgeschlossen oder der aus demselben abgeleitete Werth von φ' durch Anbringung der Correction $-k\cos\varphi' \operatorname{tg}\psi$ verbessert wird. Sollen aber auch die den einzelnen Fäden entsprechenden Werthe von φ oder φ' richtig erhalten werden, z. B. behufs Ableitung des wahrscheinlichen Fehlers, so muss das

Glied $-k\cos\varphi'\operatorname{tg}\psi$ berücksichtiget werden, da dasselbe zwar immer klein, aber selbst für sehr kleine Werthe von k nicht unmerklich ist.

B e i s p i e l. Berechnen wir auch nach dieser Methode die Beobachtung von α Persei, 1864, September 26, so finden wir mit dem Werthe:

$$\varDelta u_w - \varDelta u_0 = +\ 0^s.23$$

[S. 476]:

Faden	Beobachtung		$(u_w - u_0) + (\varDelta u_w - \varDelta u_0)$		Θ	
	St. O. K. N. u_0	St. W. K. S. u_w	$u_w - u_0$	^{s} + 0.23	in Zeit	in Bogen
	$^h\ ^m\ ^s$	$^h\ ^m\ ^s$	$^h\ ^m\ ^s$	^{s}	$^h\ ^m\ ^s$	$^\circ\ '\ ''$
I	1 56 14.0	4 20 11.0	2 23 57.0	57.23	1 11 58.61	17 59 39.22
II	57 9.6	21 13.0	24 3.4	3.63	12 1.81	18 0 27.22
III	58 2.5	22 11.5	24 9.0	9.23	12 4.61	18 1 9.22
IV	1 59 0.0	23 13.3	24 13.3	13.53	12 6.76	18 1 41.47
V	2 0 1.5	24 16.8	24 15.3	15.53	12 7.76	18 1 56.47
VI	1 0.6	25 16.9	24 16.3	16.53	12 8.26	18 2 3.97
VII	2 2.7	26 18.1	24 15.4	15.63	12 7.81	18 1 57.22
VIII	3 0.2	27 13.0	24 12.8	13.03	12 6.51	18 1 37.72
IX	4 2.3	28 11.3	24 9.0	9.23	12 4.61	18 1 9.22
X	4 58.5	29 2.9	24 4.4	4.63	12 2.31	18 0 34.72
XI	2 5 57.7	29 55.4	2 23 57.7	57.93	1 11 58.96	17 59 44.47

Der Winkel ψ, in der Form: $\psi = \frac{1}{2}(u_0 + u_w) - [\alpha - \frac{1}{2}(\varDelta u_0 + \varDelta u_w)]$ geschrieben, wird mit dem S. 476, angeführten Werthen: $\alpha = 3^h\ 14^m\ 43^s.43$, $\frac{1}{2}(\varDelta u_0 + \varDelta u_w) = +\ 1^m\ 34^s.30$:

$$\psi = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_w) - 3^h\ 13^m\ 9^s.13,$$

und die weitere Rechnung ist daher folgende, wobei $\log\operatorname{tg}\delta = 0.0665832$:

Faden	$u_0 + u_w$	$\frac{1}{2}(u_0 + u_w)$	ψ in Zeit	ψ in Bogen
	$^h\ ^m\ ^s$	$^h\ ^m\ ^s$	$^m\ ^s$	$^\circ\ '\ ''$
I	6 16 25.0	3 8 12.50	− 4 56.63	− 1 14 9.4
II	18 22.6	9 11.30	3 57.83	0 59 27.4
III	20 14.0	10 7.00	3 2.13	0 45 31.9
IV	22 13.3	11 6.65	2 2.48	0 30 37.2
V	24 18.3	12 9.15	0 59.98	0 14 59.7
VI	26 17.5	13 8.75	− 0 0.38	− 0 0 5.7
VII	28 20.8	14 10.40	+ 1 1.27	+ 0 15 19.0
VIII	30 13.2	15 6.60	1 57.47	0 29 22.0
IX	32 13.6	16 6.80	2 57.67	0 44 25.0
X	34 1.4	17 0.70	3 51.57	0 57 53.6
XI	35 53.1	17 56.55	+ 4 47.42	+ 1 11 51.3

Faden	log cos Θ	log coc ψ	log cos Θ cos ψ	log tg φ'	φ'
I	9.9782205	9.9998989	9.9781194	0.0884638	50° 47′ 43″.81
II	1877	9350	1227	4605	43.05
III	1589	9619	1208	4624	43.49
IV	1369	9828	1197	4635	43.74
V	1265	9.9999959	1224	4608	43.12
VI	1214	0.0000000	1214	4618	43.35
VII	1260	9.9999957	1217	4615	43.28
VIII	1395	9842	1237	4595	42.81
IX	1589	9638	1227	4605	43.05
X	1826	9384	1210	4622	43.44
XI	9.9782170	9.9999051	9.9781221	4611	43.19

Mittel: $\varphi' = 50^0\ 47'\ 43''.30$

$$\varphi' = 50^0\ 47'\ 43''.30$$
$$\tfrac{1}{2}(i_o + i_w) = \quad -\quad 7\ .49$$
$$\varphi = 50^0\ 47'\ 35''.81.$$

Mit dem S. 478 (Anmerk.) bestimmten genäherten Werthe des Azimuthes: $k = -14''.2$ ($\log k \cos \varphi' = 0.9531_n$) findet man folgende verbesserte Werthe der den einzelnen Fäden entsprechenden Werthe von φ':

Faden	lg tg ψ	log $k \cos \varphi$ tg ψ	$k \cos \varphi$ tg ψ	$\varphi' - k \cos \varphi'$ tg ψ	v	vv
I	8.3339 n	9.2870	+ 0″.19	50° 47′ 43″.62	− 0.32	0.1024
II	8.2379 n	9.1910	0 .16	42 .89	+ 0.41	.1681
III	8.1221 n	9.0752	0 .12	43 .37	− 0.07	.0049
IV	7.9497 n	8.9028	0 .08	43 .66	− 0.36	.1296
V	7.6398 n	8.5929	0 .04	43 .08	+ 0.22	.0484
VI	5.4415 n	6.3946	+ 0 .00	43 .35	− 0.05	.0025
VII	7.6489	8.6020 n	− 0 .04	43 .32	− 0.02	.0004
VIII	7.9316	8.8847 n	0 .08	42 .89	+ 0.41	.1681
IX	8.1113	9.0644 n	0 .12	43 .17	+ 0.13	.0169
X	8.2264	9.1795 n	0 .15	43 .59	− 0.29	.0841
XI	8.3202	9.2733 n	− 0 .19	43 .38	− 0.08	.0064
				Mittel: 50° 47′ 43″.30		[vv] = 0.7318

Das Mittel stimmt überein mit dem oben erhaltenen der uncorrigirten Werthe von φ', und aus $[vv]$ findet man als wahrscheinlichen Fehler eines aus e i n e m Faden abgeleiteten Werthes von φ:

$$\varepsilon_\varphi = \pm\ 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{10}} = \pm\ 0''182$$

und als wahrscheinlichen Fehler des Mittels:

$$\nu_\varphi = \pm\ \frac{0''.182}{\sqrt{11}} = \pm\ 0''.055.$$

214. Vierte Methode. Ein anderes Verfahren, aus den an demselben Seitenfaden in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachteten Durchgängen des Sternes die Polhöhe abzuleiten, welches die Reduction auf den Mittelfaden und daher auch die Kenntniss der Fadendistanz f nicht erfordert, jedoch voraussetzt, dass der Stern in Ost und West am Mittelfaden beobachtet sei, ist folgendes:

Es sei in der einen Kreislage, z. B. Kreis Nord, der östliche Durchgang des Sternes an einem Seitenfaden beobachtet, dessen Absehenlinie mit dem Kreisende der Axe den Winkel $90^0 - C$ einschliesst, so haben wir in Gl. (238) $-C$ statt c zu setzen, und erhalten:

$$\sin C = \sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \cos(t + m),$$

oder, wenn wir durch $\cos\delta \cos n$ dividiren und die bei dieser Beobachtung stattfindenden Werthe von t, n und m mit $t_o\, n_o\, m_o$ bezeichnen:

$$\sin C \sec\delta \sec n_o = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n_o - \cos(t_o + m_o) \tag{a}$$

Für den westlichen Durchgang des Sternes durch denselben Faden bei Kreis Süd besteht die Gleichung:

$$-\sin C \sec\delta \sec n_w = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n_w - \cos(t_w - m_w),$$

wobei die Grössen $m_o\, n_o$ in $m_w\, n_w$ übergehen, wenn die Neigung der Achse sich geändert hat, während das Azimuth des Instrumentes, wie immer, als unverändert geblieben angenommen wird. Durch Addition beider Gleichungen kommt:

$$\sin C \sec\delta (\sec n_o - \sec n_w) = \operatorname{tg}\delta (\operatorname{tg} n_o + \operatorname{tg} n_w)$$
$$- [\cos(t_o + m_o) + \cos(t_w - m_w)].$$

Nun folgt aus der 1. der Glgn. (236) unter der zulässigen Annahme $\cos k = 1$: $\sin n = \cos(\varphi - i)$, somit $\sec n = \operatorname{cosec}(\varphi - i)$, oder nach dem Taylor'schen Satze mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von i: $\sec n = \operatorname{cosec}\varphi + i \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cosec}\varphi$; hiemit wird:

$$\sec n_o - \sec n_w = (i_o - i_w) \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cosec}\varphi,$$

eine immer sehr kleine Grösse, deren Product mit der gleichfalls kleinen Grösse $\sin C$ unmerklich wird, indem es z. B. für $i_o - i_w = 2''$, $C = 12' = 7200''$ und $\varphi = 50^0$ noch nicht 4 Einheiten der 8ten Decimalstelle erreicht, daher die linke Seite der obigen Gleichung $= o$ gesetzt werden kann.

Ferner folgt aus der 2ten der Glgn. (237): $\sin m = k \sec n$, d. i. $\sin m = k \operatorname{cosec}\varphi + ik \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cosec}\varphi$, folglich:

$$\sin m_w - \sin m_o = (i_w - i_o) k \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cosec}\varphi,$$

oder

$$m_w - m_o = (i_w - i_o) k \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cosec}\varphi \sec \tfrac{1}{2}(m_o + m_w),$$

welche Differenz stets sehr klein ist und z. B. für

$$i_w - i_o = 2'', k = 2' = 120'', \varphi = 50^0$$

den Betrag $0''.0011$ erlangt, daher $m_w = m_o = m$ gesetzt werden kann

Endlich wird, vermöge der Gl. (258):

$$\operatorname{tg} n_o + \operatorname{tg} n_w = 2 \operatorname{cotg} \varphi \cos m + (i_o + i_w) \operatorname{cosec} \varphi^2.$$

Hiemit verwandelt sich nun die letzte Gleichung in folgende:

$$o = \operatorname{tg} \delta \left[2 \operatorname{cotg} \varphi \cos m + (i_o + i_w) \operatorname{cosec} \varphi^2\right] - \left[\cos(t_o + m) + \cos(t_o - m)\right],$$

woraus nach Division mit 2 $\operatorname{cotg} \varphi \cos m$ folgt:

$$\operatorname{tg} \delta = \cos \tfrac{1}{2}(t_o + t_w) \cos\left[\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) - m\right] \operatorname{tg} \varphi \sec m - \\ - \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi}, \qquad (b)$$

wo in dem letzten sehr kleinen Gliede der, der Einheit stets nahekommende Factor sec m weggelassen ist.

Sind nun $u_o\, u_w$ die beobachteten Uhrzeiten des östlichen und westlichen Durchganges des Sternes durch den Seitenfaden, $\varDelta u_o$ und $\varDelta u_w$ die zugehörigen Uhrcorrectionen gegen Sternzeit, α die Rectascension des Sternes, so ist:

$$t_o = \alpha - (u_o + \varDelta u_o), \; t_w = (u_w + \varDelta u_w) - \alpha,$$

somit:

$$\tfrac{1}{2}(t_o + t_w) = \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)\right] = \Theta$$

wo Θ die halbe beobachtete Zwischenzeit, in Sternzeit ausgedrückt, bedeutet; ferner wird:

$$\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) = \tfrac{1}{2}\left[(u_w + u_o) + (\varDelta u_w + \varDelta u_o)\right] - \alpha$$

Zur Bestimmung des Winkels m muss die Beobachtung der zwei Durchgänge am Mittelfaden zu Hilfe genommen werden. Bezeichnet man die Uhrzeiten derselben mit $u_{m,o}$ und $u_{m,w}$, die correspondirenden Uhrcorrectionen mit $\varDelta u_{m,o}$, $\varDelta u_{m,w}$ so ist zufolge der Glgn. (250) und (247):

$$m = \tfrac{1}{2}\left[(u_{m,o} + u_{m,w}) + (\varDelta u_{m,o} + \varDelta u_{m,w})\right] - \alpha + \frac{\tfrac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \zeta \mp c}{\sin \varphi \sin \zeta},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern in Ost bei Kreis Nord oder Kreis Süd beobachtet wurde.

Setzen wir endlich:

$$\tfrac{1}{2}(t_w - t_o) - m = \mu,$$

so wird:

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left[(u_o + u_w) - (u_{m,o} + u_{m,w})\right] - \frac{\tfrac{1}{2}(i_w - i_o) \cos \zeta \mp c}{\sin \varphi \sin \zeta}. \text{*)}$$

Durch Einführung der Grössen Θ und μ geht die Gl. (b) in folgende über:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi \cos \Theta \cos \mu \sec m - \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \varphi \cos \varphi}.$$

---

*) Hiebei wurde das in der Differenz $\mu = \frac{1}{2}(t_w - t_o) - m$ auftretende Glied: $\frac{1}{2}\left[(\varDelta u_o + \varDelta u_w) - (\varDelta u_{m,o} + \varDelta u_{m,w})\right] = o$ angenommen, was immer zulässig, wenn die Uhr nahe der Sternzeit folgt. Im Gegenfalle wird man es meist bequemer finden, vorerst alle beobachteten Uhrzeiten auf Sternzeit zu reduciren, wo dann in den Formeln des Textes die $\varDelta u$ entfallen.

Setzen wir nun:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi' \cos\Theta \cos\mu \sec m\,,$$

so folgt durch Subtraction beider Gleichungen:

$$(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi') \cos\Theta \cos\mu \sec m = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi \cos\varphi}\,,$$

oder mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\varphi \cos\varphi'} \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi'} = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi \cos\varphi}\,,$$

d. i.:

$$\sin(\varphi - \varphi') = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}\,,$$

oder, da $\varphi - \varphi'$ sehr klein:

$$\varphi - \varphi' = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w).$$

Man hat daher zur Auflösung der Aufgabe die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \tfrac{1}{2}\left[(u_w - u_o) + (\varDelta u_w - \varDelta u_o)\right],\\
\mu &= \tfrac{1}{2}\left[(u_o + u_w) - (u_{m,\,o} + u_{m,\,w})\right] - \frac{\tfrac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta \mp c}{\sin\varphi \sin\zeta}\,,\\
m &= \tfrac{1}{2}\left[(u_{m,\,o} + u_{m,\,w}) + (\varDelta u_{m,\,o} + \varDelta u_{m,\,w})\right] - \alpha \qquad (270)\\
\operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{tg}\delta \sec\Theta \sec\mu \cos m,\\
\varphi &= \varphi' + \tfrac{1}{2}(i_o + i_w).
\end{aligned}$$

Hiebei wurde in dem Ausdrucke des Winkels m das von der Neigung und Collimation abhängige Correctionsglied vernachlässigt, weil m immer so klein sein wird, dass hiedurch die 7te Decimalstelle des $\cos m$ nicht beeinflusst wird. Was den Winkel μ betrifft, welcher für kleinere Werthe von $\varphi - \delta$ bei den vom Mittelfaden entfernteren Seitenfäden 1^0 überschreitet, so erhält der erste Theil des Ausdruckes rechter Hand für die dem Mittelfaden vorausgehenden und die demselben nachfolgenden Seitenfäden entgegengesetztes Vorzeichen, während das Correctionsglied für alle Fäden das gleiche Zeichen hat. Hieraus folgt wieder, wie bei den vorausgehenden Methoden, dass der durch Vernachlässigung des Correctionsgliedes entstehende Fehler in den Werthen von φ' sich im Mittel der aus sämmtlichen Fäden folgenden Werthe von φ' aufheben wird, wenn das Fadennetz symmetrisch ist und, im Falle an irgend einem Seitenfaden der Durchgang nicht, oder nicht vollständig beobachtet worden wäre, auch der wenn auch vollständig beobachtete Durchgang an dem auf der anderen Seite des Mittelfadens symmetrisch gelegenen Seitenfaden vom Mittel ausgeschlossen wird. Sollen aber auch die einzelnen Werthe von φ' richtig erhalten werden, so muss das Correctionsglied berücksichtiget werden.

B e i s p i e l. Berechnen wir auch nach dieser Methode die schon wiederholt benützte Beobachtung von α Persei, 1864, September 26. Nach den auf S. 476 befindlichen Angaben war:

$$\varDelta u_w - \varDelta u_o = + 0^s.23\,; \quad \varDelta u_{m,o} + \varDelta u_{m,w} = + 3^m\, 8^s.59\,;$$

mit letzterem Werthe und den am Mittelfaden beobachteten Uhrzeiten finden wir:

$$\begin{array}{rrrrl}
u_{m,o} + u_{m,w} = & 6^h & 26^m & 17^s.50 & \\
\varDelta u_{m,o} + \varDelta u_{m,w} = & + \; 3 & & 8\;.59 & \\
\hline
 & 6 & 29 & 26\;.09 & \\
 & 3 & 14 & 43\;.04 & \\
\alpha = & 3 & 14 & 43\;.43 & \\
\hline
m = & & & -\,0\;.39 & = -\,5''.8, \text{ also } \cos m = 1.
\end{array}$$

Ferner ergab sich S. 476 der Werth des Correctionsgliedes:

$$\frac{\frac{1}{2}\,(i_w - i_o)\cos\zeta - c}{\sin\varphi\,\sin\zeta} = -\,13''.7.$$

Die Werthe von Θ und $u_o + u_w$ finden sich schon auf S. 490 berechnet. Die weitere Rechnung ist dann folgende:

Faden	$u_o + u_w$	$(u_o + u_w) - (u_{m,o} + u_{m,w})$	$\frac{1}{2}(u_o + u_w) - \frac{1}{2}(u_{m,o} + u_{m,w})$ in Zeit	$\frac{1}{2}(u_o + u_w) - \frac{1}{2}(u_{m,o} + u_{m,w})$ in Bogen	μ
	h m s	m s	m s	° ′ ″	° ′ ″
I	6 16 25.0	− 9 52.5	− 4 56.25	− 1 14 3.7	− 1 13 50.0
II	18 22.6	7 54.9	3 57.45	0 59 21.7	0 59 8.0
III	20 14.0	6 3.5	3 1.75	0 45 26.2	0 45 12.5
IV	22 13.3	4 4.2	2 2.10	0 30 31.5	0 30 17.8
V	24 18.3	− 1 59.2	− 0 59.60	− 0 14 54.0	− 0 14 40.3
VI	26 17.5	0 0.0	0 0.00	0 0 0.0	+ 0 0 13.7
VII	28 20.8	+ 2 3.3	+ 1 1.65	+ 0 15 24.7	0 15 38.4
VIII	30 13.2	3 55.7	1 57.85	0 29 27.7	0 29 41.4
IX	32 13.6	5 56.1	2 58.05	0 44 30.7	0 44 44.4
X	34 1.4	7 43.9	3 51.95	0 57 59.2	0 58 12.9
XI	6 35 53.1	+ 9 35.6	+ 4 47.80	1 11 57.0	1 12 10.7

Faden	log cos Θ	log cos μ	log $\frac{\cos\Theta}{\cos\mu}$	log $tg\,\varphi'$	φ'	Abw. v. Mittel v	vv
I	9.9782205	9.9998998	9.9781203	0.0884629	50° 47′ 43″.60	− 0″.30	0.0900
II	1877	9358	1235	4597	42.86	+ 0.44	.1936
III	1589	9624	1213	4619	43.37	− 0.07	.0049
IV	1369	9831	1200	4632	43.67	− 0.37	.1369
V	1265	9.9999960	1225	4607	43.09	+ 0.21	.0441
VI	1214	0.0000000	1214	4618	43.35	− 0.05	.0025
VII	1260	9.9999955	1215	4617	43.33	− 0.03	.0009
VIII	1395	9838	1233	4599	42.91	+ 0.39	.1521
IX	1589	9632	1221	4611	43.19	+ 0.11	.0121
X	1826	9377	1203	4629	43.60	− 0.30	.0900
XI	2170	9043	1213	4619	43.37	− 0.07	.0049

Mittel: $\varphi' = 50°\; 47'\; 43.30$ $\quad [vv] = 0.7320$

Hiernach folgt im Mittel aus allen 11 Fäden:

$$\begin{aligned}\varphi' &= 50^0\,47'\,43''.30\\ \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) &= \quad -\quad 7\,.49\\ \hline \varphi &= 20^0\,47'\,35''.81,\end{aligned}$$

und man findet als wahrscheinlichen Fehler eines aus einem Faden abgeleiteten Werthes von φ:

$$\varepsilon\varphi = \pm\, 0.6745 \sqrt{\frac{[vv]}{10}} = \pm\, 0''.182,$$

und als wahrscheinlicher Fehler des Mittels:

$$r\varphi = \pm \frac{0''.182}{\sqrt{11}} = \pm\, 0''.055.$$

Die Berechnung des Correctionsgliedes in dem Ausdrucke von μ gibt folgende Werthe von φ':

$$\begin{aligned}\varphi' = 50^0\,47'\,&43''.74\\ &43\,.00\\ &43\,.44\\ &43\,.72\\ &43\,.09\\ &43\,.35\\ &43\,.28\\ &42\,.86\\ &43\,.09\\ &43\,.49\\ &43\,.23\\ \hline \text{Mittel: } \varphi' = 50^0\,47'\,&43''.30\end{aligned}$$

deren Mittel mit dem obigen übereinstimmt.

Aus den der Vergleichung der verschiedenen in den vorgehenden §§. dargestellten Reductionsmethoden geht hervor, dass, wenn das Instrument zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes durch den ersten Vertical in den Lagern umgelegt wird, der Collimationsfehler c und das Azimuth k des Instrumentes eliminirt werden, wenn diese Fehler so klein sind, dass der Einfluss der zweiten und höheren Potenzen derselben unmerklich wird; dass jedoch die Elimination strenge nur für den Mittelfaden stattfindet, während die aus den einzelnen Seitenfäden abgeleiteten Resultate mit einem merklichen Einflusse der ersten Potenzen dieser Fehler — sei es c oder k, je nach der angewendeten Reductionsmethode — behaftet bleiben, welcher als von zweiter Ordnung betrachtet werden kann und sich erst im Mittel der aus sämmtlichen Fäden folgenden Resultate aufhebt, wenn die Durchgänge in Ost und West vollständig und an einem hinreichend symmetrischen Fadennetze beobachtet sind. Eine wenigstens genäherte Kenntniss der Instrumentalfehler c und k ist daher nicht nur dann erforderlich, wenn man die aus den Seitenfäden folgenden einzelnen Resultate von dem Einflusse der ersten Potenzen dieser Fehler zu befreien wünscht, sondern auch zu dem Zwecke, um überhaupt beurtheilen zu können, ob dieselben klein genug sind, um den Einfluss der höheren Potenzen vernachlässigen zu können. Eine zu diesem Zwecke hinreichend genäherte Bestimmung von c und k lässt sich aber, wie wir in §. 216 sehen werden, durch eine zweckmässige Anordnung der Beobachtungen immer erlangen.

215. Ist $\varphi - \delta$ klein, so wird die Zwischenzeit zwischen den Antritten des Sternes an zwei aufeinanderfolgenden Fäden gross genug, um während derselben das Instrument umlegen zu können. Hierauf gründet sich eine von W. Struve angegebene Beobachtungsmethode, welche darin besteht, dass man zuerst in Ost in der einen Kreislage den Durchgang des Sternes an allen Seitenfäden auf der einen Seite des Mittelfadens beobachtet, hierauf das Instrument umlegt, und den weiteren Durchgang an denselben Fäden in dieser zweiten Kreislage beobachtet; das Instrument bleibt nun in dieser Lage und man beobachtet den westlichen Durchgang an denselben Fäden, legt sodann um, und schliesst mit der Beobachtung des Sternes wieder an denselben Fäden. Bei diesem Verfahren wird also nur die eine Hälfte der Seitenfäden in Anspruch genommen und der Stern an jedem dieser Fäden viermal beobachtet.

Die Berechnung der Polhöhe aus solchen Beobachtungen kann nach der ersten oder zweiten der im Vorhergehenden dargestellten Reductionsmethoden unmittelbar vorgenommen werden.

1. Bei Anwendung der ersten Methode (§. 207), welche die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden erfordert, erhält man mit den Mitteln der in den vier Lagen beobachteten, auf Sternzeit und den Mittelfaden reducirten und wegen der Neigung der Axe verbesserten Durchgangszeiten sofort die vier Gleichungen (240), und aus diesen durch Verbindung von je zweien, entgegengesetzten Kreislagen bei Stern Ost und Stern West entsprechenden, zwei Werthe von $\vartheta_w - \vartheta_o$, mit deren Mittel sich nach Gl. (244) die Polhöhe ergibt.

Als Beispiel mag die folgende, 1863, September 20, auf dem astronomisch-trigonometrischen Puncte „Spieglitzer Schneeberg“ an der Grenze von Böhmen, Mähren und Pr.-Schlesien mit demselben in §. 210 erwähnten Passage-Instrumente gemachte Beobachtung des Sternes η Ursae majoris dienen.

Faden	St. O. K. S.			St. O. K. N.			St. W. K. N.			St. W. K. S.		
	h	m	s	h	m	s	h	m	s	h	m	s
VII	13	12	18.5	13	17	33.5	14	8	20.5	14	13	36.0
VIII		10	9.0		20	24.5		5	30.5		15	45.0
IX		8	0.5		23	52.5	14	2	2.5		17	53.3
X		6	12.0		27	39.5	13	58	13.5		19	43.0
XI	13	4	24.5	13	33	0.0	13	52	54.7		21	30.7

Vor d. Durchg. $i = -2''.04$ | $-1''.82$

Nach d. „ $i = -1.77$ | -1.29

Mittel: $i_0 = -1''.905$ | $i_w = -1''.555$

$= -0^s.1270$ | $= -0^s.1037$

Uhrstand um $13^h.0$ Uhrzeit: $-48^s.02$; stündlicher Gang $= -0^s.0838$.

Scheinbarer Ort des Sternes: $\alpha = 13^h\, 42^m\, 8^s.82$; $\delta = 49^0\, 59'\, 48''.74$.

Zur Berechnung nehmen wir an: $\varphi = 50^0\, 12'\, 34''$; $c = -2''.0$.

Mit Rücksicht auf die längere Dauer der Durchgänge reduciren wir zunächst die beobachteten Uhrzeiten mit dem gegebenen Stande und Gange der Uhr auf Sternzeit und erhalten:

Faden	St. O. K. S.			St. O. K. N.			St. W. K. N.			St. W. K. S.		
	h	m	s	h	m	s	h	m	s	h	m	s
VII	13	11	30.46	13	16	45.46	14	7	32.38	14	12	47.88
VIII		9	20.97		19	36.45		4	42.39		14	56.88
IX		7	12.47		23	4.45	14	1	14.39		17	5.17
X		5	23.97		26	51.44	13	57	25.40		18	54.87
XI	13	3	36.47	13	32	11.93	13	52	6.61	14	20	42.57

Zur Berechnung der Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden müssen wir, da letzterer nicht beobachtet ist,*) den Winkel γ, Gl. (259) benützen. Mittelst der Formeln 4), 7) und 11) [§. 204] finden wir:

$$\log\cos\zeta = 9.9987,\ \log\sin\varphi\sin\zeta = 8.7812,\ \log\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\zeta = 8.7825,$$
$$\sigma = 7^0\, 1'\, 36''.76 = 28^m\, 6^s.45.$$

Mit den Mittelwerthen: $i = -1''.665 = -0^s.1110$ für Kreis Süd, und $= -1''.795 = -0^s.1197$ für Kreis Nord, berechnen wir den Winkel γ nach Gl. (259):

*) Bei sehr langsamer Bewegung des Sternes ist es möglich, auch den Antritt des Sternes vom Mittelfaden in Ost und West, und zwar entweder in entgegengesetzten Kreislagen oder in derselben Kreislage zu beobachten. Im ersteren Falle ergeben sich die Winkel Θ und η, gleichgiltig, ob der Mittelfaden in Ost bei Kreis Nord oder Kreis Süd beobachtet wurde, nach den Glgn. (251) und (252) und können die Reductionen auf den Mittelfaden für jede Kreislage in Ost und West mittelst einer der von dem Winkel η abhängigen Formeln berechnet werden. Im zweiten Falle erhält aber der Winkel Θ für beide Kreislagen verschiedene Werthe, von welchen nur einer aus den in der einen Kreislage beobachteten Durchgängen durch den Mittelfaden nach Gl. (251) sich ergibt, mit welchem der zugehörige Werth von η nach Gl. (252), in deren Correctionsgliede $c = o$ zu setzen ist, und mit diesem die dieser Kreislage entsprechenden Werthe von l berechnet werden können, während dies für die andere Kreislage in Ermangelung des zugehörigen Werthes von Θ nicht möglich ist.

	K. Süd	K. Nord
$\log i =$	$9.0453\,n$	$9.0781\,n$
$\log i \cos\zeta =$	$9.0440\,n$	$9.0768\,n$
$i \cos\zeta =$	$-\,0^s.1107$	$-\,0^s.1193$
$c =$	$-\,0\ .1333$	$-\,0\ .1333$
$i \cos\zeta \pm c =$	$+\,0\ .0226$	$-\,0\ .2526$
$\log =$	8.3541	$9.4024\,n$
$\log \sin\varphi \sin\zeta =$	8.7812	8.7812
	9.5729	$0.6212\,n$
Corr. Glied $=$	$+\,0^s.37$	$-\,4^s.18$
$\gamma = \sigma -$ Corr. Glied $=$	$28^m\ 6^s08$	$28^m\ 10^s63$

Benützen wir nun zur Berechnung der Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden die Formeln (262), so finden wir:

$$\log \frac{15}{\cos\delta \sin(\varphi - i)} = 1{,}482417,$$

und aus der Tafel für $\log \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}$:

für Kreis Süd: $\log \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 3.18994$, $\dfrac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 1548''.60$,

für Kreis Nord: $\log \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 3.19228$, $\dfrac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} = 1556\ .97$;

die weitere Rechnung steht mit den S. 477 angeführten Werthen der Fadendistanzen f wie folgt:

Faden	$\log f$	$\log F$	F	$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2}{\sin 1''} \pm F = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\gamma \pm l)^2}{\sin 1''}$ K. S.	K. N.
VII	0.983671	2.466088	292''.47	1841''.07	1264''.50
VIII	1.264558	2.746975	558 .44	2107 .04	998 .53
IX	1.443732	2.926149	843 .62	2392 .22	713 .35
X	1.558769	3.041186	1099 .48	2648 .03	457 .49
XI	1.651869	3.134286	1362 .34	2910 .94	194 .63

Faden	$\log \frac{2 \sin \frac{1}{2} (\gamma \pm l)^2}{\sin 1''}$ K. S.	K. N.	$\gamma \pm l$ K. S.		K. N.		l K. S.		K. N.	
			m	s	m	s	m	s	m	s
VII	3.265070	3.10192	30	38.63	25	23.40	2	32.55	2	47.23
VIII	3.323673	2.99936	32	47.18	22	33.59	4	41.10	5	37.04
IX	3.378801	2.85330	34	56.32	19	3.96	6	50.24	9	6.67
X	3.422931	2.66038	36	45.80	15	16.02	8	39.72	12	54.61
XI	3.464033	2.28921	38	32.94	9	57.41	10	26.86	18	13.22

Die auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten werden sonach:

Faden	St. O. K. S.	St. O. K. N.	St. W. K. N.	St. W. K. S.
	h m s	h m s	h m s	h m s
VII	13 14 3.01	13 13 58.23	14 10 19.61	14 10 15.33
VIII	2.07	59.41	19.43	15.78
IX	2.71	57.78	21.06	14.93
X	3.69	56.83	20.01	15.15
XI	3.33	58.71	19.83	15.71
Mittel:	13 14 2.96	13 13 58.19	14 10 19.99	14 10 15.38
$\frac{i}{\sin\varphi\, tg\,\zeta} =$	+ 2.10	+ 2.10	− 1.71	− 1.71
	13 14 5.06	13 14 0.29	14 10 18.28	14 10 13.67

womit sich nach (240) die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{array}{lllll}
1)\ \text{St. O. K. S.:} & \vartheta_o = 13^h & 14^m & 5^s.06 + 16.55\,c - 1.3014\,k, & \\
2)\ \text{St. O. K. N.:} & \vartheta_o = 13 & 14 & 0\,.29 - 16.55\,c - 1.3014\,k, & \\
3)\ \text{St. W. K. N.:} & \vartheta_w = 14 & 10 & 18\,.28 + 16.55\,c - 1.3014\,k, & \\
4)\ \text{St. W. K. S.:} & \vartheta_w = 14 & 10 & 13\,.67 - 16.55\,c - 1.3014\,k. &
\end{array}\right\} r)$$

Durch Subtraction folgt:

$$\begin{array}{rl}
3) - 1): & \vartheta_w - \vartheta_o = 56^m\ 13^s.22 \\
4) - 2): & \vartheta_w - \vartheta_o = 56\ \ 13\,.38 \\
\text{Mittel:} & \vartheta_w - \vartheta_o = 56\ \ 13\,.30
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = 28^m\ 6^s.65 = 7^0\ 1'\ 39''.75;$$

Hiemit findet man endlich nach Gl. (244):

$$\begin{array}{rl}
\log \operatorname{tg} \delta & = 0.0761383 \\
\log \cos \tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) & = 9.9967249 \\
\log \operatorname{tg} \varphi & = 0.0794134 \\
\varphi & = 50^0\ 12'\ 34''.16.
\end{array}$$

Meistens bedient man sich jedoch zur Berechnung derartiger Beobachtungen einer Methode, welche die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden nicht erfordert, insbesondere auch aus dem Grunde, weil die Werthe der Fadendistanzen f nicht immer so genau bekannt sind, als es erforderlich ist, wenn $\varphi - \delta$ sehr klein, und daher das Verhältniss $l : f$ nicht nur beträchtlich gross, sondern auch, je nachdem der Seitenfaden südlich oder nördlich vom Mittelfaden liegt, erheblich verschieden ist.

2. Die in §. 211 dargestellte zweite Reductionsmethode ist, sowie die erste, auf den vorliegenden Fall ohne weitere Aenderung anwendbar. Die an jedem einzelnen Faden beobachteten vier Antritte des Sternes liefern die vier Gleichungen (266), deren arithmetisches Mittel sofort, abgesehen von der Neigungs-Correction, einen Werth von $\varphi - \delta$ gibt.

Setzt man, der Kürze wegen:

$$\psi(t) = C \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2}{\sin 1''}, \tag{271}$$

wo

$$C = \sin \varphi \cos \delta \frac{\operatorname{arc}(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta)},$$

indem man noch dem Buchstaben ψ den Index n oder s, dem Buchstaben t den Index o oder w beifügt, je nachdem sich die Grösse $\psi(t)$ auf einen Fadenantritt bei K. N. oder K. S., beziehungsweise in Ost oder West bezieht, so wird das Mittel aus den Glgn. (266):

$$\varphi - \delta = \tfrac{1}{4}\left[\psi_n(t_o) + \psi_n(t_w) + \psi_s(t_o) + \psi_s(t_w)\right] + \tfrac{1}{2}(i^o + i_w) \cos \zeta. \tag{272}$$

Man überzeugt sich leicht, dass in der Summe der vier Werthe von $\psi(t)$ der Einfluss des zweiten von dem Producte kf abhängigen Gliedes der Gl. (268) sich aufhebt.

Die Berechnung des obigen Beispiels nach diesem Verfahren ist, mit Uebertragung der oben schon auf Sternzeit reducirten Durchgangszeiten, folgende:

$$\alpha = 13^h\ 42^m\ 8^s.82 \qquad \log\sin\varphi = 9.885581$$
$$\delta = 49^\circ\ 59'\ 48''.74 \qquad \log\cos\delta = 9.808096$$
$$\text{Angenommen: } \varphi = 50\ \ 12\ \ 34 \qquad \tfrac{1}{3}\log\sec(\varphi-\delta) = 0.000001$$
$$\varphi - \delta = 0\ \ 12\ \ 45 \qquad \log C = 9.693678$$

Durchgangszeiten, auf Sternzeit reducirt:

Faden	VII	VIII	IX	X	XI
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
St. O. K. S.	13 11 30.46	13 9 20.97	13 7 12.47	13 5 23.97	13 3 36.47
St. O. K. N.	13 16 45.46	13 19 36.45	13 23 4.45	13 26 51.44	13 32 11.93
St. W. K. N.	14 7 32.38	14 4 42.39	14 1 14.39	13 57 25.40	13 52 6.61
St. W. K. S.	14 12 47.88	14 14 56.88	14 17 5.17	14 18 54.87	14 20 42.57
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Stundenw. t	0 30 38.36	0 32 47.85	0 34 56.35	0 36 44.85	0 38 32.35
	25 23.36	22 32.37	19 4.37	15 17.38	9 56.89
	25 23.56	22 33.57	19 5.57	15 16.58	9 57.79
	30 39.06	32 48.06	34 56.35	36 46.05	38 33.75
$\log\dfrac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''}$	3.264942	3.323970	3.378813	3.422555	3.463811
	3.10190	2.99858	2.85361	2.66167	2.28845
	3.10201	2.99934	2.85452	2.66091	2.28976
	3.265271	3.324062	3.378813	3.423027	3.464335
$\log C\dfrac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''} = \psi(t)$	2.958620	3.017648	3.072491	3.116233	3.157489
	2.79558	2.69226	2.54729	2.35535	1.98213
	2.79569	2.69302	2.54820	2.35459	1.98344
	2.958949	3.017740	3.072491	3.116705	3.158013
$\psi_s\ (t_o) =$	909''.12	1041''.47	1181''.66	1306''.87	1437''.11
$\psi_n\ (t_o) =$	624 .57	492 .33	352 .61	226 .65	95 .97
$\psi_n\ (t_w) =$	624 .73	493 .20	353 .35	226 .25	96 .26
$\psi_s\ (t_w) =$	909 .81	1041 .69	1181 .66	1308 .29	1438 .84
Summe $= S =$	3068''.23	3068''.69	3069''.28	3068''.06	3068''.18
$\frac{1}{4}S =$	767 .06	767 .17	767 .32	767 .02	767 .05

$$\text{Mittel: } \tfrac{1}{4}S = 767''.15 = 0^\circ\ 12'\ 47''.12$$
$$\tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\cos\zeta = \qquad -\ 1\ .72$$
$$\varphi - \delta = 0^\circ\ 12'\ 45''.40$$
$$\delta = 49\ \ 59\ \ 48\ .74$$
$$\varphi = 50^\circ\ 12'\ 34''.14$$

3. Zu einer sehr bequemen Methode zur Berechnung derartiger Beobachtungen gelangt man endlich auf folgendem Wege:

Bezeichnet man wieder, wie in §. 214, den Winkel, welchen die Absehenlinie eines Seitenfadens mit dem Kreisende der Axe einschliesst, mit

$90^0 - C$, so hat man für den Durchgang des Sternes durch diesen Faden bei Stern Ost, Kreis Nord die Gl. (a) [§. 214]:

$$\sin C \sec\delta \sec n_1 = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n_1 - \cos(t_1 + m_1),$$

wo der Index 1 sich auf den ersten Durchgang des Sternes durch diesen Seitenfaden bezieht. Werden die analogen Grössen für die drei folgenden Durchgänge durch denselben Faden der Zeitfolge nach mit den Stellenzeigern 2, 3, 4 versehen, wobei also die Stellenzeiger 1 und 2 auf die zwei Durchgänge in Ost, jene 3 und 4 auf die Durchgänge in West sich beziehen, so kann aus den in §. 214 dargelegten Gründen ohne merklichen Fehler

$$\sec n_1 = \sec n_2 = \sec n_3 = \sec n_4, \text{ und } m_1 = m_2 = m_3 = m_4$$

gesetzt werden, weil die vier Secanten sich nur um Grössen von der Ordnung i unterscheiden, und in die kleine Grösse $\sin C$ multiplicirt sind, die Unterschiede der vier Grössen m aber von der Ordnung ik sind. Man hat daher für die vier an demselben Seitenfaden beobachteten Durchgänge die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{St. O. K. N:} & \sin C \sec\delta \sec n = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n_1 - \cos(t_1 + m), \\
\text{St. O. K. S:} & -\sin C \sec\delta \sec n = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n_2 - \cos(t_2 + m), \\
\text{St. W. K. S:} & -\sin C \sec\delta \sec n = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n_3 - \cos(t_3 - m), \\
\text{St. W. K. N:} & \sin C \sec\delta \sec n = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} n_4 - \cos(t_4 - m).
\end{array}$$

durch deren Addition sich die folgende ergibt:

$$\operatorname{tg}\delta(\operatorname{tg} n_1 + \operatorname{tg} n_2 + \operatorname{tg} n_3 + \operatorname{tg} n_4) =$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(t_1 + t_4)\cos[\tfrac{1}{2}(t_4 - t_1) - m] + 2\cos\tfrac{1}{2}(t_2 + t_3)\cos[\tfrac{1}{2}(t_3 - t_2) - m]$$

Nun ist vermöge der Gl. (258):

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} n_1 + \operatorname{tg} n_2 + \operatorname{tg} n_3 + \operatorname{tg} n_4 &= 4\operatorname{cotg}\varphi\cos m + (i_1 + i_2 + i_3 + i_4)\operatorname{cosec}\varphi^2 \\
&= 4\operatorname{cotg}\varphi\cos m + 2(i_o + i_w)\operatorname{cosec}\varphi^2,
\end{aligned}$$

wenn $i_o = \frac{1}{2}(i_1 + i_2)$ und $i_w = \frac{1}{2}(i_3 + i_4)$ die arithmetischen Mittel der zwei in Ost und West vor und nach dem Durchgange des Sternes beobachteten Neigungen bedeuten.

Ferner ist für zwei Beobachtungen in Ost und West in derselben Kreislage und an demselben Faden das Dreieck SPN (Fig. 92) congruent mit dem analogen auf der Westseite liegenden, folglich $t_1 + m = t_4 - m$, und ebenso $t_2 + m = t_3 - m$, also

$$\tfrac{1}{2}(t_4 - t_1) = \tfrac{1}{2}(t_3 - t_2) = m.$$

Hiernach wird die obige Gleichung:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{tg}\delta\operatorname{cotg}\varphi\cos m + (i_o + i_w)\operatorname{tg}\delta\operatorname{cosec}\varphi^2 &= \cos\tfrac{1}{2}(t_1 + t_4) + \cos\tfrac{1}{2}(t_2 + t_3) \\
&= 2\cos\tfrac{1}{4}[(t_1 + t_4) + (t_2 + t_3)]\cos\tfrac{1}{4}[(t_1 + t_4) - (t_2 + t_3)].
\end{aligned}$$

Sind nun u_1, u_2, u_3, u_4 die wegen Stand und Gang der Uhr bereits auf Sternzeit reducirten Durchgangszeiten, so ist:

$$t_1 = \alpha - u_1,\ t_2 = \alpha - u_2,\ t_3 = u_3 - \alpha,\ t_4 = u_4 - \alpha,$$

und:

$$t_1 + t_4 = u_4 - u_1,\ t_2 + t_3 = u_3 - u_2;$$

setzen wir also:

$$s = \tfrac{1}{4}\left[(u_4 - u_1) + (u_3 - u_2)\right],$$
$$d = \tfrac{1}{4}\left[(u_4 - u_1) - (u_3 - u_2)\right],$$

so wird:

$$\operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\varphi \cos m + \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec}\varphi^2 = \cos s \cos d,$$

wo:

$$m = \tfrac{1}{2}(t_4 - t_1) = \tfrac{1}{2}(u_1 + u_4) - \alpha,$$

oder:

$$m = \tfrac{1}{2}(t_3 - t_2) = \tfrac{1}{2}(u_2 + u_3) - \alpha,$$

folglich im Mittel:

$$m = \tfrac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - \alpha$$

ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt nun:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi \cos s \cos d \sec m - \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

wo im letzten sehr kleinen Gliede der der Einheit nahe gleiche Factor $\sec m$ weggelassen ist.

Setzen wir endlich:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi' \cos s \cos d \sec m,$$

so erhalten wir durch Subtraction beider Gleichungen:

$$(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')\cos s \cos d \sec m = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

oder, mit Rücksicht auf die vorhergehende:

$$\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\varphi\cos\varphi'}\cdot\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varphi'} = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

d. i.:

$$\sin(\varphi - \varphi') = \tfrac{1}{2}(i_o + i_w)\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi},$$

oder, da $\varphi - \varphi'$ sehr klein:

$$\varphi = \varphi' + \tfrac{1}{2}(i_o + i_w).$$

Die zur Rechnung dienenden Formeln sind also folgende:

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{4}\left[(u_4 - u_1) + (u_3 - u_2)\right],\\ d &= \tfrac{1}{4}\left[(u_4 - u_1) - (u_3 - u_2)\right],\\ m &= \tfrac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - \alpha,\\ \operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{tg}\delta \sec s \sec d \cos m,\\ \varphi &= \varphi' + \tfrac{1}{2}(i_o + i_w), \end{aligned} \tag{273}$$

wobei, wie oben bemerkt, $u_1, \ldots, u_4$ die bereits wegen Stand und Gang der Uhr auf Sternzeit gebrachten Durchgangszeiten sind.

Für unser Beispiel ist die Rechnung nach diesem Verfahren folgende:

Durchgangszeiten, auf Sternzeit reducirt.

	VII	VIII	IX	X	XI
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
St. O. K. S. $u_1 =$	13 11 30.46	13 9 20.97	13 7 12.47	13 5 23.97	13 3 36.47
St. O. K. N. $u_2 =$	13 16 45.46	13 19 36.45	13 23 4.45	13 26 51.44	13 32 11.93
St. W. K. N. $u_3 =$	14 7 32.38	14 4 32.39	14 1 14.39	13 57 25.40	13 52 6.61
St. W. K. S. $u_4 =$	14 12 47.88	14 14 56.88	14 17 5.17	14 18 54.87	14 20 42.57
$u_4 - u_1 =$	1 1 17.42	1 5 35.91	1 9 52.70	1 13 30.90	1 17 6.10
$u_3 - u_2 =$	0 50 46.92	0 45 5.94	0 38 9.94	0 30 33.96	0 19 54.68
$s =$	1 52 4.34	1 50 41.85	1 48 2.64	1 44 4.86	1 37 0.78
$d =$	0 10 30.50	0 20 29.97	0 31 42.76	0 42 56.94	0 57 11.42
$s =$	$28^\circ\ 1'\ 5''.10$	$27^\circ 40' 27''.75$	$27^\circ\ 0'\ 39''.60$	$26^\circ\ 1'\ 12''.90$	$24^\circ 15' 11''.70$
$d =$	2 37 37.50	5 7 29.55	7 55 41.40	10 44 14.10	14 17 51.30
$\frac{1}{4} s =$	7 0 16.27	6 55 6.94	6 45 9.90	6 30 18.22	6 3 47.92
$\frac{1}{4} d =$	0 39 24.37	1 16 52.39	1 58 55.35	2 41 3.52	3 34 27.82
	h m s				
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 =$	54 48 36.18	36.69	36.48	35.68	37.58
$\frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) =$	13 42 9.04	9.17	9.12	8.92	9.39
$m =$	+ 0.22	+ 0.35	+ 0.30	+ 0.10	+ 0.57

$$\text{Mittel } m = +\ 0^s.308 = +\ 4''.62$$

$\log \operatorname{tg} \delta =$	0.0761383	0.0761383	0.0761383	0.0761383	0.0761383
$\log \cos \frac{1}{4} s =$	9.9967465	9.9968260	9.9969767	9.9971949	9.9975637
$\log \cos \frac{1}{4} d =$	9.9999715	9.9998914	9.9997401	9.9995232	9.9991544
$\log \operatorname{tg} \varphi' =$	0.0794203	0.0794209	0.0794215	0.0794202	0.0794202
$\varphi' =$	$50^\circ 12' 35''.77$	$35''.91$	$36''.05$	$35''.75$	$35''.75$

$$\begin{aligned} \text{Mittel: } \varphi' &= 50^0\ 12'\ 35''.85 \\ \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) &= \quad -\ \ 1\ .73 \\ \hline \varphi &= 50\ \ 12\ \ 34\ .12 \end{aligned}$$

Die Rechnung wird durch Benützung einer von O. Struve publicirten Tafel,*) welche mit dem Argumente x in Zeit den $\log \sec \frac{1}{4} x$ gibt, noch erheblich vereinfacht, indem hiedurch für die obigen Grössen s und d die Verwandlung von Zeit in Bogen und die Division durch 4 erspart wird.

216. Es ist nun noch zu zeigen, wie die Instrumentalfehler durch Beobachtungen bestimmt werden können. Hiebei kann von der Neigung der Axe abgesehen werden, weil diese stets mit Hilfe der Libelle auf bekannte Weise (§. 102) erhalten wird. Es mag nur bemerkt werden, dass, weil in alle zur Berechnung der Polhöhe selbst dienenden Gleichungen, wie wir gesehen haben, nur das arithmetische Mittel der Neigungen zur Zeit des östlichen und westlichen Durchganges eingeht, dieses aber, zufolge der Glgn. (127) von dem Einflusse einer Ungleichheit der Zapfen-Durchmesser frei ist, die

*) Tabulae auxiliares ad transitus per planum primum verticale reducendos inservientes. — Edidit Otto Struve. — Petropoli, 1868.

daher rührende Correction der einzelnen Neigungen unterlassen werden kann; hingegen wird diese dann anzubringen sein, wenn in den Formeln die Differenz beider Neigungen, oder diese isolirt vorkommen, wie dies z. B. in den Glgn. (247), (252), (259) und den folgenden der Fall ist.

Lassen wir in den Glgn. (240) u_o und u_w die Mittel der an den verschiedenen Fäden beobachteten und auf den Mittelfaden reducirten Uhrzeiten bedeuten, und setzen der Kürze wegen:

$$S_o = u_o + \Delta u_o, \quad S_w = u_w + \Delta u_w,$$

wo also S_o und S_w die Sternzeiten des Durchganges des Sternes in Ost und West durch den Mittelfaden bezeichnen, so werden dieselben:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{St. O. K. N.:} & \vartheta_o = S_o - \dfrac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} - \dfrac{i_o}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \dfrac{k}{\sin\varphi}, \\ \text{St. W. K. N.:} & \vartheta_w = S_w + \dfrac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \dfrac{i_w}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \dfrac{k}{\sin\varphi}, \\ \text{St. O. K. S.:} & \vartheta_o = S_o + \dfrac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} - \dfrac{i_o}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \dfrac{k}{\sin\varphi}, \\ \text{St. W. K. S.:} & \vartheta_w = S_w - \dfrac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \dfrac{i_w}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \dfrac{k}{\sin\varphi}. \end{array}\right\} \quad (274)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man sofort, dass, um einen der Fehler c oder k isolirt zu bestimmen, der Durchgang eines Sternes in Ost und West in derselben Kreislage beobachtet werden muss. Man erhält dann durch Addition der 1ten und 2ten, oder der 3ten und 4ten Gleichung, da $\frac{1}{2}(\vartheta_o + \vartheta_w) = \alpha$ ist:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(S_o + S_w) + \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \frac{k}{\sin\varphi},$$

somit:

$$k = \sin\varphi \left[\tfrac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha\right] + \tfrac{1}{2}(i_w - i_o) \operatorname{cotg}\zeta. \quad (275)$$

Durch Subtraction derselben Gleichungen ergibt sich aber:

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = \tfrac{1}{2}(S_w - S_o) \pm \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \frac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta},$$

und hieraus:

$$c = \pm \sin\varphi \sin\zeta \left[\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) - \tfrac{1}{2}(S_w - S_o)\right] \mp \tfrac{1}{2}(i_o + i_w) \cos\zeta, \quad (276)$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die beiden Durchgänge bei Kreis Nord oder bei Kreis Süd beobachtet wurden, und $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$, d. i. der Stundenwinkel σ des Sternes im ersten Vertical mittelst der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(\vartheta_w - \vartheta_o)^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}$$

zu berechnen ist. Da in dem Ausdrucke von k in die Grösse $\frac{1}{2}(S_o + S_w)$ der Uhrstand eingeht, so wird zur Bestimmung von k nebst einem genauen Werthe der Rectascension des Sternes auch eine möglichst genaue Kenntniss des Uhrstandes erfordert. Ebenso verhält es sich für die Bestimmung von c

bezüglich der zur Berechnung von $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ anzuwendenden Werthe von φ und δ.

Aus Gl. (276) ersieht man, dass zur Bestimmung von c mit Vortheil Sterne beobachtet werden, welche in kleinem Abstande vom Zenith durch den ersten Vertical gehen, weil dann der Factor $\sin\zeta$ klein, und hiedurch der Einfluss eines Fehlers in $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ und $\frac{1}{2}(S_w - S_o)$ vermindert wird.

Hingegen zeigt die Gl. (275), dass es zur Bestimmung des Azimuthes k vortheilhaft ist, einen Stern zu wählen, welcher in grösserem Abstande vom Zenith durch den ersten Vertical geht, weil bei einem solchen, vermöge seiner schnelleren Bewegung, die beobachteten Fadenantritte, also auch die Zeiten S_0 und S_w genauer erhalten werden. Für solche Sterne wird aber die Zwischenzeit zwischen dem östlichen und westlichen Durchgang beträchtlich gross (für $\varphi - \delta = 10^0$ schon bei 6^h), womit die Gefahr einer erheblichen Aenderung des Azimuthes in der Zwischenzeit verbunden ist.

Wenn es sich daher um eine genauere Bestimmung des Azimuthes handelt, so ist es zweckmässiger, in derselben Kreislage zwei Sterne zu beobachten, welche bald nacheinander, der eine in Ost, der andere in West, in grösserer Zenithdistanz durch den ersten Vertical gehen. Lässt man dann in den Glgn. (274) die mit den Stellenzeigern o und w versehenen Buchstaben auf den in Ost, beziehungsweise West beobachteten Stern sich beziehen und bezeichnet ebenso deren Zenithdistanz im ersten Vertical mit ζ_o, bezw. ζ_w, so werden die zwei ersten Gleichungen:

$$(\vartheta_0 - S_0)\sin\varphi\sin\zeta_0 = -c - i_0\cos\zeta_0 - k\sin\zeta_o,$$
$$(\vartheta_w - S_w)\sin\varphi\sin\zeta_w = +c + i_w\cos\zeta_w - k\sin\zeta_w,$$

und man erhält durch Addition, wenn zur Abkürzung

$$M_0 = \frac{\sin\zeta_0}{\sin\zeta_0 + \sin\zeta_w},\quad M_w = \frac{\sin\zeta_w}{\sin\zeta_0 + \sin\zeta_w}$$

gesetzt wird:

$$k = \sin\varphi\,[(S_0 - \vartheta_0)\,M_0 + (S_w - \vartheta_w)\,M_w] + \frac{i_w\cos\zeta_w - i_0\cos\zeta_0}{\sin\zeta_0 + \sin\zeta_w}. \quad (277)$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich durch Verbindung der zwei letzten der Glgn. (274), wenn beide Sterne bei Kreis Süd beobachtet werden. Die in demselben erscheinenden Sternzeiten des Durchganges durch den ersten Vertical ϑ_0 und ϑ_w sind hier mittelst der Gleichungen:

$$\vartheta_0 = \alpha_0 - \sigma_0,\quad \vartheta_w = \alpha_w + \sigma_w,$$

und die Stundenwinkel im ersten Vertical, σ_0 und σ_w, mittelst einer der Glgn. 1) oder 11) [§. 204] zu berechnen.

Hat man, wie es zur Bestimmung von φ behufs Elimination von c und k in der Regel geschieht, den Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet, so lassen sich bei Beobachtung nur eines Sternes die beiden Fehler c und k nicht trennen, weil in den für beide Durchgänge sich ergebenden Gleichungen die zwei Glieder mit c und k gleiches Zeichen haben. Wurde z. B. der Stern in Ost bei Kreis Nord, in West bei Kreis Süd beobachtet, so erhält man durch Addition der ersten und letzten der Glgn. (274), weil $\frac{1}{2}(\vartheta_o + \vartheta_w) = \alpha$:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(S_o + S_w) - \frac{c}{\sin\varphi \sin\zeta} + \frac{\frac{1}{2}(i_w - i_o)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} - \frac{k}{\sin\varphi},$$

und hieraus

für St. O. K. N.; St. W. K. S.;

$$c + k\sin\zeta = \sin\varphi \sin\zeta\left[\tfrac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha\right] + \tfrac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta = A. \qquad (a)$$

Beobachtet man nun aber noch einen zweiten Stern, indem man in Ost bei Kreis Süd beginnt, so erhält man durch Addition der zweiten und dritten der Glgn. (274), wenn man die auf diesen Stern sich beziehenden Grössen mit accentuirten Buchstaben bezeichnet, auf gleiche Art

für St. O. K. S.; St. W. K. N.:

$$-c + k\sin\zeta' = \sin\varphi \sin\zeta'\left[\tfrac{1}{2}(S_o' + S_w') - \alpha'\right] + \tfrac{1}{2}(i_w' - i_o')\cos\zeta' = A', \quad (b)$$

und aus beiden Gleichungen (a) und (b) folgt nun:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{A + A'}{\sin\zeta + \sin\zeta'}, \\ c &= \frac{A\sin\zeta' - A'\sin\zeta}{\sin\zeta + \sin\zeta'}. \end{aligned}\right\} \qquad (278)$$

Werden daher, wie dies auf astronomisch-trigonometrischen Stationen gewöhnlich der Fall ist, an einem Abende mehrere Sterne zur Bestimmung der Polhöhe beobachtet, und zwar jeder derselben in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen, so ist es zweckmässig, die Beobachtung der Sterne in Ost abwechselnd in entgegengesetzten Kreislagen zu beginnen, weil dann die Beobachtungen das Materiale bieten nicht nur zur Berechnung der Polhöhe mit Elimination der ersten Potenzen von c und k, sondern auch zur Bestimmung dieser Instrumentalfehler selbst, welche Bestimmung, so weit die Kenntniss dieser Fehler nach dem am Schlusse des §. 213 Bemerkten wünschenswerth oder nothwendig ist, auch immer genügend genau sein wird. Hiebei wird man allerdings, wenn man sich zur Berechnung der Polhöhe einer der Methoden bedient, welche die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden nicht erfordern, zur Ableitung der Grössen S_o und S_w sich auf die am Mittelfaden in Ost und West beobachteten Durchgänge des Sternes beschränken müssen und daher, wegen der den einzelnen beobachteten Fadenantritten anhaftenden zufälligen Beobachtungsfehler, eine grössere Sicherheit der Bestimmung von c und k nur bei Beobachtung mehrerer Sterne an einem Abende erwarten dürfen; jeder Stern gibt dann eine Gleichung von der Form:

$$\pm c + k\sin\zeta = m,$$

aus welchen c und k nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können.

Beispiel. 1864, Sept. 14, wurden auf der Station „Hohe Schneeberg“ die Sterne 31 o^1 Cygni und e Cygni beobachtet; nach Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden ergaben sich im Mittel aus allen Fäden folgende Uhrzeiten der Durchgänge der Sterne durch den Mittelfaden, welchen die Neigungen, Uhrstände und scheinbaren Oerter der Sterne beigefügt sind:

e Cygni.		31 o^1 Cygni.	
St. O. K. N.	St. W. K. S.	St. O. K. S.	St. W. K. N.
$u_o = 18^h 53^m 56^s.98$	$u_w = 20^h 58^m 49^s.33$	$u_o = 18^h\ 3^m\ 9^s.14$	$u_w = 22^h\ 13^m\ 14^s.97$
$i_o = -0^s.216$	$i_w = -0^s.315$	$i'_o = -0^s.250$	$i'_w = -0^s.234$
$\varDelta u_o = +1^m 11^s.29$	$\varDelta u_w = +1^m 11^s.47$	$\varDelta u_o = +1^m\ 11^s.21$	$\varDelta u_w = +1^m\ 11^s.59$
$\alpha = 19^h\ 57^m 33^s.70$	$\delta = 49^0\ 44'\ 9''.29$	$\alpha' = 20^h\ 9^m\ 24^s.22$	$\delta' = 46^0\ 20'\ 19''.57$

Mit dem angenommenen Werthe $\varphi = 50^0\ 47'\ 36''$ findet man nach den Formeln des §. 204:

Für e Cygni:
$$\begin{aligned} \log \sin\varphi \sin\zeta &= 9.1294 \\ \log \sin\zeta &= 9.2401 \\ \log \cos\zeta &= 9.9933 \\ \sin\zeta &= 0.1738 \end{aligned}$$

Für 31 o^1 Cygni:
$$\begin{aligned} \log \sin\varphi \sin\zeta' &= 9.4434 \\ \log \sin\zeta' &= 9.5542 \\ \log \cos\zeta' &= 9.9702 \\ \sin\zeta' &= 0.3583 \end{aligned}$$

Hiernach ist die weitere Rechnung nach den vorausgehenden Formeln (a), (b) und (278) folgende:

$$\begin{array}{ll} u_o = 18^h\ 53^m\ 56^s.98 & u_w = 20^h\ 58^m\ 49^s.33 \\ \varDelta u_o = +\ 1\ \ 11\ .29 & \varDelta u_w = +\ 1\ \ 11\ .47 \\ \hline S_o = 18\ \ 55\ \ \ 8\ .27 & S_w = 21\ \ \ 0\ \ \ 0\ .80 \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_o + S_w &= 39^h\ 55^m\ 9^s.07 \\ \tfrac{1}{2}(S_o + S_w) &= 19\ \ 57\ \ 34\ .535 \\ \alpha &= 19\ \ 57\ \ 33\ .70 \\ \tfrac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha &= +\ 0^s.835 \\ \log\left[\tfrac{1}{2}(S_o + S_w) - \alpha\right] &= 9.9217 \\ \log \sin\varphi \sin\zeta &= 9.1294 \\ & \ 9.0511 \\ & \ +\ 0.1125 \\ \tfrac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta &= -\ 0.0492 \\ c + k \sin\zeta &= +\ 0.0633 = A \\ \log A &= 8.8014 \\ \log \sin\zeta' &= 9.5542 \\ & \ 8.3556 \\ A \sin\zeta' &= 0.02268 \\ A + A' &= -\ 0.1416 \\ \log(A + A') &= 9.1511\,n \\ \log(\sin\zeta + \sin\zeta') &= 9.7260 \\ \log k &= 9.4251\,n \\ k &= -\ 0^s.266 = -\ 3''.99 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} u_o = 18^h\ \ 3^m\ \ 9^s.14 & u_w = 22^h\ 13^m\ 14^s.97 \\ \varDelta u_o = +\ 1\ \ 11\ .21 & \ +\ 1\ \ 11\ .59 \\ \hline S'_o = 18\ \ 4\ \ 20\ .35 & S'_w = 22\ 14\ \ 26\ .56 \end{array}$$

$$\begin{aligned} S'_o + S'_w &= 40^h\ 18^m\ 46^s.91 \\ \tfrac{1}{2}(S'_o + S'_w) &= 20\ \ \ 9\ \ 23\ .455 \\ \alpha' &= 20\ \ \ 9\ \ 24\ .22 \\ \tfrac{1}{2}(S'_o + S'_w) - \alpha' &= -\ 0^s.765 \\ \log\left[\tfrac{1}{2}(S'_o + S'_w) - \alpha'\right] &= 9\ .8837\,n \\ \log \sin\varphi \sin\zeta' &= 9\ .4434 \\ & \ 9\ .3271\,n \\ & \ -\ 0\ .2124 \\ \tfrac{1}{2}(i'_w - i'_o)\cos\zeta &= +\ 0\ .0075 \\ -c + k\sin\zeta' &= -\ 0\ .2049 = A' \\ \log A' &= 9\ .3115\,n \\ \log \sin\zeta &= 9\ .2401 \\ & \ 8\ .5516\,n \\ A' \sin\zeta &= -\ 0\ .03561 \\ A \sin\zeta' - A' \sin\zeta &= +\ 0.05829 \\ & \ 8.7656 \\ \log(\sin\zeta + \sin\zeta') &= 9.7260 \\ \log c &= 9.0396 \\ c &= +\ 0^s.110 = +\ 1''.65 \end{aligned}$$

Einfacher, als nach den entwickelten Glgn. (275), (276) und (278), wird übrigens die Rechnung und gleichförmig für alle Fälle, wenn man für die beobachteten Durchgänge die entsprechenden Grundgleichungen (240) numerisch darstellt, aus welchen sich dann c und k leicht durch einfache Elimination ergeben. Für das vorliegende Beispiel steht diese Rechnung wie folgt:

e Cygni.

St. O. K. N.		St. W. K. S.	
$u_o =$	$18^h\ 53^m\ 56^s.98$	$u_w =$	$20^h\ 58^m\ 49^s.33$
$\Delta u_o =$	$+\ 1\ \ 11\ .29$	$\Delta u_w =$	$+\ 1\ \ 11\ .47$
$\dfrac{i}{\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\zeta} =$	$+\ 1\ .58$	$=$	$-\ 2\ .30$
	$18\ \ 55\ \ \ 9\ .85$		$20\ \ 59\ \ 58\ .50$

31 o^1 Cygni.

St. O. K. S.		St. W. K. N.	
$u_o =$	$18^h\ \ 3^m\ \ 9^s.14$	$u_w =$	$22^h\ 13^m\ 14^s.97$
$\Delta u_o =$	$+\ 1\ \ 11\ .21$	$\Delta u_w =$	$+\ 1\ \ 11\ .59$
$\dfrac{i}{\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\zeta} =$	$+\ 0\ .84$	$=$	$-\ \ 0\ .79$
	$18\ \ 4\ \ 21\ .19$		$22\ \ 14\ \ 25\ .77$

Hiemit wird für *e* Cygni die 1[te] und 4[te] der Glgn. (240):

$$\begin{aligned}
\vartheta_o &= 18^h\ 55^m\ \ 9^s.85 - \ \ 7.424\,c - 1.291\,k\\
\vartheta_w &= 20\ \ 59\ \ 58\ .50 - \ \ 7.424\,c - 1.291\,k\\
\vartheta_o + \vartheta_w = 2\alpha &= 39\ \ 55\ \ \ 8\ .35 - 14.848\,c - 2.582\,k\\
2\alpha &= 39\ \ 55\ \ \ 7\ .40\\
\hline
0 &= \qquad\quad + 0^s.95 - 14.848\,c - 2.582\,k \quad . \ . \quad (\alpha)
\end{aligned}$$

Für 31 o^1 Cygni wird die 2[te] und 3[te] der Glgn. (240):

$$\begin{aligned}
\vartheta_o &= 18^h\ \ 4^m\ 21^s.19 + 3.6025\,c - 1.291\,k\\
\vartheta_w &= 22\ \ 14\ \ 25\ .77 + 3.6025\,c - 1.291\,k\\
\vartheta_o + \vartheta_w = 2\alpha &= 40\ \ 18\ \ 46\ .96 + 7.205\,c - 2.582\,k\\
2\alpha &= 40\ \ 18\ \ 48\ .44\\
\hline
0 &= \qquad\quad - 1^s.48 + 7.205\,c - 2.582\,k \quad . \ . \quad (\beta)
\end{aligned}$$

Aus den Glgn. (α) und (β) folgt nun durch Subtraction:

$0 = - 2^s.43 + 22.053\,c$, hieraus: $c = + 0^s,110 = + 1''.65$,

und durch Substitution dieses Werthes in eine der Glgn. (α) oder (β):

$$k = - 0^s.266 = - 3''.99.$$

Sind mehr als zwei Sterne abwechselnd in verschiedenen Kreislagen beobachtet, so gibt jeder derselben eine Gleichung von der Form der Glgn. (α) und (β), aus welchen c und k nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können.

Wird die Berechnung der Polhöhe nach der zweiten Methode [§. 211] vorgenommen, so ergeben sich hiebei die zur Bestimmung von c und k erforderlichen Daten. Setzt man nämlich wieder, wie in §. 215 [Glgn. 271] der Kürze wegen:

$$\psi(t) = C\,\frac{2\sin\frac{1}{2}t^2}{\sin 1''},\quad \text{wo } C = \sin\varphi\cos\delta\,\frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)},$$

indem man noch dem Buchstaben ψ den Index n oder s, dem Buchstaben t den Index o oder w beifügt, je nachdem sich die Grösse $\psi(t)$ auf einen Fadenantritt bei K. N. oder K. S., beziehungsweise in Ost oder West bezieht, und überdies zur Abkürzung

$$r = \frac{\operatorname{arc}(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta)},$$

so erhalten die Glgn. (266) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
&\text{St. O. K. N.:} && \varphi-\delta = \psi_n(t_o) - rf + c + i_o\cos\zeta + k\sin\zeta,\\
&\text{St. W. K. S.:} && \varphi-\delta = \psi_s(t_w) + rf - c + i_w\cos\zeta - k\sin\zeta,\\
&\text{St. O. K. S.:} && \varphi-\delta = \psi_s(t_o) + rf - c + i_o\cos\zeta + k\sin\zeta,\\
&\text{St. W. K. N.:} && \varphi-\delta = \psi_n(t_w) - rf + c + i_w\cos\zeta - k\sin\zeta.
\end{aligned}$$

Wurde nun ein Stern in Ost und West in entgegengesetzten Kreislagen beobachtet und die Beobachtung in Ost bei K. N. begonnen, so folgt durch Subtraction der zwei ersten Gleichungen:

Für St. O. K. N.; St. W. K. S.:

$$c + k\sin\zeta = \tfrac{1}{2}[\psi_s(t_w) - \psi_n(t_o)] + rf + \tfrac{1}{2}(i_w - i_o)\cos\zeta = A; \quad (c)$$

für einen zweiten Stern, dessen Beobachtung in Ost bei Kreis Süd begonnen wurde, ergibt sich durch Subtraction der zwei letzten Gleichungen:

Für St. O. K. S.; St. W. K. N.;

$$-c + k\sin\zeta' = \tfrac{1}{2}[\psi_n'(t_w) - \psi_s'(t_o)] - r'f + \tfrac{1}{2}(i_w' - i_o')\cos\zeta' = A'. \quad (d)$$

Kennt man nun die Fadendistanzen f, so sind die zweiten Theile dieser Gleichungen, A und A' bekannt, und man findet aus denselben c und k wieder mittelst der Glgn. (278). Auf diese Art gibt jeder Faden, an welchem beide Sterne in Ost und West beobachtet sind, einen Werth von c und k. Da in die Summe $A + A'$ das Glied $(r - r')\,f$ eingeht, so können zur Bestimmung des Azimuthes k die Fadendistanzen f unberücksichtigt bleiben, wenn ohne merklichen Fehler $r = r'$ gesetzt werden kann.

Die Beobachtung eines Sternes nach Struve's Verfahren [§. 215] liefert nebst der Polhöhe stets auch die Elemente zur Bestimmung von c und k. Denn bei Anwendung der ersten Reductionsmethode [§. 207] erhält man die vier Gleichungen (240) und durch entsprechende Combination je zweier derselben je zwei Gleichungen für c und k. Bei Anwendung der zweiten Reductionsmethode [§. 211] ergeben sich für jeden Faden, an welchem alle vier Antritte beobachtet sind, die beiden obigen Glgn. (c) und (d), welche, wenn man in der zweiten, weil in diesem Falle auf denselben Stern sich beziehend, die Accente weglässt und zur Abkürzung:

$$a = \psi_s(t_w) - \psi_n(t_o),$$
$$b = \psi_n(t_w) - \psi_s(t_o)$$

setzt, die Form:

$$c + k \sin\zeta = \tfrac{1}{2}\, a + rf + \tfrac{1}{2}(i_w - i_o) \cos\zeta\,,$$
$$-\, c + k \sin\zeta = \tfrac{1}{2}\, b - rf + \tfrac{1}{2}(i_w - i_o) \cos\zeta,$$

annehmen, aus welchen durch Addition und Subtraction:

$$k = \tfrac{1}{4}\,(a + b) \operatorname{cosec}\zeta + \tfrac{1}{2}(i_w - i_o) \operatorname{cotg}\zeta\,, \tag{279}$$
$$c = \tfrac{1}{4}(a - b) + rf$$

folgt. Die Fadendistanz f ist in letzterer Formel mit positivem oder negativem Zeichen einzuführen, je nachdem der Faden bei Kreis Nord nördlich oder südlich vom Mittelfaden liegt. Der Factor r kann hier stets $= 1$ angenommen werden, da für Sterne, welche nach diesem Verfahren beobachtet werden können, $\varphi - \delta$ immer kleiner als 1^0 sein wird, für welchen Werth

$$\log r = 0.000022$$

ist und die Fadendistanzen selten bis auf wenige Einheiten der fünften Ziffer genau bekannt sein werden.

In §. 215 ergaben sich bei Berechnung des Beispiels nach der ersten Reductionsmethode die vier Gleichungen (r) [S. 500]:

1) St. O. K. S.: $\vartheta_o = 13^h\ 14^m\ \ 5^s.06 + 16.55\,c - 1.3014\,k,$
2) St. O. K. N.: $\vartheta_o = 13\ \ 14\ \ 0.29 - 16.55\,c - 1.3014\,k,$
3) St. W. K. N.: $\vartheta_w = 14\ \ 10\ \ 18.28 + 16.55\,c - 1.3014\,k,$
4) St. W. K. S.: $\vartheta_w = 14\ \ 10\ \ 13.67 - 16.55\,c - 1.3014\,k.$

Aus diesen folgt durch Subtraction:

$$\begin{aligned} 1) - 2):\ & 0 = +\ 4^s.77 + 33.10\,c, \\ 3) - 4):\ & 0 = +\ 4\,.61 + 33.10\,c, \\ \text{Mittel}:\ & 0 = +\ 4\,.69 + 33.10\,c; \\ & c = -\ 0^s.142 = -\ 2''.13. \end{aligned}$$

Ferner durch Addition:

$$\begin{aligned} 1) + 4):\ \vartheta_o + \vartheta_w &= 2\alpha = 27^h\ 24^m\ 18^s.73 - 2.603\,k, \\ 2) + 3):\ \vartheta_o + \vartheta_w &= 2\alpha = 27\ \ 24\ \ 18\,.57 - 2.603\,k, \\ \text{Mittel}:\ & 2\alpha = 27\ \ 24\ \ 18\,.65 - 2.603\,k \\ & 2\alpha = 27\ \ 24\ \ 17\,.64 \\ & 0 = +\ 1^s.01 - 2.603\,k \\ & k = +\ 0^s.388 = +\ 5''.82. \end{aligned}$$

Bei Berechnung desselben Beispiels nach der zweiten Reductionsmethode ergaben sich [S. 501] die Grössen $\psi\,(t)$ wie folgt:

Faden	VII	VIII	IX	X	XI
$\psi_s\ (t_o) =$	909''.12	1041''.47	1181''.66	1306''.87	1437''.11
$\psi_n\ (t_o) =$	624 .57	492 .33	352 .61	226 .65	95 .97
$\psi_n\ (t_w) =$	624 .73	493 .20	353 .35	226 .25	96 .26
$\psi_s\ (t_w) =$	909 .81	1041 .69	1181 .66	1308 .29	1438 .84

Da nach den S. 498 befindlichen Angaben $\frac{1}{4}$ cosec $\zeta = 3.179$, und

$$\tfrac{1}{2}(i_w - i_o) \operatorname{cotg} \zeta = +\, 2''.22$$

wird, so ist die Berechnung von c und k nach den Formeln (279) folgende:

	VII	VIII	IX	X	XI
$\psi_s(t_w) - \psi_n(t_o) = a =$	285″.24	549″.36	829″.05	1081″.64	1342″.87
$\psi_n(t_w) - \psi_s(t_o) = b =$	− 284 .39	− 548 .27	− 828 .31	− 1080 .62	− 1340 .85
$a + b =$	+ 0″.85	+ 1″.09	+ 0″.74	+ 1″.02	+ 2″.02
$\frac{1}{4}(a + b)$ cosec $\zeta =$	+ 2 .70	+ 3 .46	+ 2 .35	+ 3 .24	+ 6 .42
$k =$	+ 4 .92	+ 5 .68	+ 4 .57	+ 5 .46	+ 8 .64
$a - b =$	569″.63	1097″.63	1657″.36	2162″.26	2683″.72
$\frac{1}{4}(a - b) =$	142 .41	274 .41	414 .34	540 .56	670 .93
$f =$	− 144 .46	− 275 .83	− 416 .70	− 543 .07	− 672 .91
$c =$	− 2 .05	− 1 .42	− 2 .36	− 2 .51	− 1 .98

Hiernach ergibt sich im Mittel aus den fünf Fäden:

$$c = -\, 2''.06, \quad k = +\, 5''.85,$$

nahe übereinstimmend mit den obigen Werthen.

217. Allen bisherigen Berechnungen liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes durch den ersten Vertical der Collimationsfehler und das Azimuth des Instrumentes constant geblieben sind. Untersuchen wir nun den Einfluss, welchen eine in der Zwischenzeit eintretende Aenderung dieser Instrumentalfehler auf die berechnete Polhöhe nimmt.

Bezeichnet man den Collimationsfehler und das Azimuth beim östlichen Durchgange des Sternes, wie bisher, mit c und k, beim westlichen mit $c + \Delta c$ und $k + \Delta k$, so erhält man, wenn das Instrument zwischen beiden Durchgängen umgelegt wird, durch Subtraction der 1^{ten} und 4^{ten}, oder 2^{ten} und 3^{ten} der Glgn. (240), mit Rücksicht auf Gl. (242):

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o) = \Theta + \frac{\frac{1}{2}(i_o + i_w)}{\sin\varphi \operatorname{tg}\zeta} \mp \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{\sin\varphi \sin\zeta} - \frac{1}{2}\frac{\Delta k}{\sin\varphi}.$$

Setzt man nun in die Differenzialformel (m) [S. 462] einmal $\mp \frac{1}{2}\dfrac{\Delta c}{\sin\varphi \sin\zeta}$, dann $-\frac{1}{2}\dfrac{\Delta k}{\sin\varphi}$ statt $d\,\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$, so erhält man für die Correction, welche die berechnete Polhöhe in Folge der Aenderung der Collimation oder des Azimuthes erfordern würde, die Ausdrücke:

$$d\varphi = \mp \tfrac{1}{2}\Delta c \sec\zeta, \tag{280}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern in Ost bei Kreis Nord oder bei Kreis Süd beobachtet ist; ferner:

$$d\varphi = -\tfrac{1}{2}\Delta k \operatorname{tg}\zeta. \tag{281}$$

Aus ersterer Formel ersieht man, dass, da sec ζ für kleine Werthe von $\varphi - \delta$ nahe $= 1$ bleibt, eine Aenderung der Collimation in der Zwischenzeit nahe mit ihrem halben Betrage auf die berechnete Polhöhe übergeht. Da jedoch bei zweckmässiger Construction des Instrumentes, namentlich des Oculars, der Collimationsfehler erfahrungsmässig für längere Zeit nahe constant bleibt, so wird von dieser Seite kein merklicher Fehler zu besorgen sein, wenn das Instrument vorsichtig behandelt, insbesondere jeder Stoss oder stärkere Druck auf das Ocular vermieden wird.*)

Nach der zweiten der obigen Formeln erhält man für die Annahme $\Delta k = +1''$ und $\varphi = 50^0$:

Für $\varphi - \delta =$	$0^0\,30'$	1^0	2^0	3^0	4^0
$\operatorname{tg}\zeta =$	0.1220	0.1740	0.2502	0.3116	0.3662
$d\varphi =$	$-0''.06$	$0''.09$	$0''.12$	$0''.16$	$0''.18$,

welche Beträge mit zunehmender geographischer Breite etwas abnehmen und umgekehrt. Hieraus erhellt, dass schon eine sehr kleine Aenderung des Azimuthes einen merklichen Fehler in der Polhöhe zur Folge hat. Es ist daher wesentlich, dass die Constanz des Azimuthes schon durch solide Construction und feste Aufstellung des Passage-Instrumentes möglichst gesichert sei und durch vorsichtige Behandlung desselben, insbesondere bei den Umlegungen der Axe, kein Anlass zu einer Aenderung derselben gegeben werde. Ist daher das Instrument mit einer Umlegevorrichtung nicht versehen, oder werden die Beobachtungen mit einem Universal-Instrumente ausgeführt, so kann es sich empfehlen, die Umlegung der Axe während eines Abends gänzlich zu unterlassen und dafür am nächsten Abende dieselben Sterne in der anderen Kreislage zu beobachten; das Mittel aus den an beiden Abenden aus jedem Sterne abgeleiteten Werthen der Polhöhe, deren jeder noch mit dem Einflusse des Collimationsfehlers behaftet ist, wird dann frei sein von diesem Einflusse, wenn die Collimation in der Zwischenzeit unverändert geblieben ist; auch geben die Beobachtungen jedes Abendes die Mittel zur Bestimmung des Collimationsfehlers.

Abgesehen von den aus Unvollkommenheiten des Instrumentes oder seiner Aufstellung und aus nicht genügender Vorsicht in der Behandlung desselben entspringenden zufälligen Störungen, finden Aenderungen des Azimuthes sowie der Neigung in der Regel auch allmälig, der Zeit nahe proportional statt, insbesondere in Folge der während der Dauer der Beobachtungen eintretenden Aenderung der Temperatur. Bezeichnet man die stündliche Aenderung des

*) Bei gebrochenen Fernröhren mit Prisma in der Axe hat selbstverständlich jede Aenderung in der Lage des Prisma eine Aenderung des Collimationsfehlers zur Folge. Es ist daher darauf zu achten, dass das Prisma in dem hohlen Würfel unverrückbar befestigt ist.

Azimuthes mit (Δk), so ist, wenn σ den in Stunden ausgedrückten Stundenwinkel des Sternes im ersten Vertical, gleich der halben Zwischenzeit, bedeutet, $\Delta k = 2\,(\Delta k)\,\sigma$, womit

$$d\varphi = -(\Delta k)\,\sigma\,\mathrm{tg}\,\zeta$$

wird. Für $(\Delta k) = 1''$ und $\varphi = 50^0$ wird:

für $\varphi - \delta =$	$0^0\ 30'$	1^0	2^0	3^0	4^0
$\sigma =$	$0^h.716$	$1^h.010$	$1^h.418$	$1^h.724$	$1^h.978$
$d\varphi =$	$-0''.09$	$0''.18$	$0''.35$	$0''.54$	$0''.72$,

woraus ersichtlich ist, dass insbesondere bei grösseren Werthen von $\varphi - \delta$ schon eine stündliche Aenderung des Azimuthes um einen kleinen Bruchtheil einer Secunde einen merklichen Fehler der Polhöhe nach sich zieht. Hierin liegt der wesentlichste Grund, bei der Auswahl der Sterne sich auf solche von kleiner Meridian-Zenithdistanz zu beschränken.

218. Wir haben schon in §. 207 [S. 462] den Einfluss eines Fehlers von b e s t i m m t e m Betrage in der beobachteten halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u_w - u_o)$ oder $\frac{1}{2}(\vartheta_w - \vartheta_o)$ auf die berechnete Polhöhe untersucht und gefunden, dass derselbe um so kleiner wird, je kleiner $\varphi - \delta$ ist. Dieses Ergebniss wird jedoch durch den Umstand wesentlich modificirt, dass mit abnehmendem Werthe von $\varphi - \delta$ die Unsicherheit der beobachteten Fadenantritte erheblich zunimmt, weil die auf den Faden senkrechte Componente der Bewegung des Sternes um so kleiner wird, je kleiner $\varphi - \delta$ ist. Wir wollen daher noch mit Berücksichtigung dieses Umstandes den wahrscheinlichen Fehler der Polhöhe bestimmen, welcher aus der durch die zufälligen Fehler der beobachteten Fadenantritte entspringenden Unsicherheit der halben Zwischenzeit entspringt.

Bezeichnet man mit ε den wahrscheinlichen Fehler eines Fadenantrittes, so wird der wahrsch. Fehler der halben Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u_w - u_o)$: $\pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, und für das Mittel aus n Fäden: $\pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$. Hiemit folgt als wahrscheinlicher Fehler $\varepsilon\varphi$ der Polhöhe nach Gl. (m) [S. 462]:

$$\varepsilon\varphi = \pm \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\zeta\,.\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}.$$

Nun ist nach Gl. (138) für Verticalfäden:

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \sec\delta^2\,\sec p^2},$$

wo p den parallaktischen Winkel, v die Vergrösserung des Fernrohres bedeutet und für Beobachtungen nach der Aug- und Ohrmethode der Gehörfehler $a = 0^s.07 = 1''.05$, der Gesichtsfehler für die Vergrösserung $= 1 : b = 3^s.18 = 47''.7$ gesetzt werden kann. Es ist aber im ersten Vertical: $\cos\delta \cos p = \sin\varphi \sin\zeta$, somit:

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \operatorname{cosec}\varphi^2 \operatorname{cosec}\zeta^2},$$

welcher Werth um so grösser wird, je kleiner ζ, d. i. $\varphi - \delta$ ist. Hiemit wird nun:

$$\varepsilon\varphi = \pm \frac{\sec\zeta}{\sqrt{2n}} \sqrt{a^2 \sin\varphi^2 \sin\zeta^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2}, \tag{282}$$

und dieser Ausdruck, in welchen a und b in Bogensecunden einzusetzen sind, ändert sich mit ζ, oder $\varphi - \delta$ nur sehr wenig, weil das veränderliche erste Glied unter dem Wurzelzeichen gegen das constante zweite Glied stets erheblich kleiner bleibt und $\sec\zeta$ mit $\varphi - \delta$ sich nur wenig ändert. Aus diesem Grunde ist auch $\varepsilon\varphi$ der Vergrösserung des Fernrohres nahe verkehrt proportional. Für eine Vergrösserung $v = 80$ und $\varphi = 50^0$ findet man für:

	$\varphi - \delta = 0^0\ 30'$	1^0	2^0	3^0	4^0
für $n = 1$:	$\varepsilon\varphi = 0''.43$	$0''.44$	$0''.46$	$0''.48$	$0''.49$
für $n = 11$:	$\varepsilon\varphi = 0''.13$	$0''.13$	$0''.14$	$0''.14$	$0''.15.$

Man ersieht hieraus, dass, in so weit nur der Einfluss der zufälligen Fehler in den beobachteten Durchgangszeiten in Betracht kommt, und da auch der Einfluss eines kleinen Fehlers im Uhrgange nur gering ist (S. 463), ohne erhebliche Einbusse an Genauigkeit noch Sterne beobachtet werden können, deren Meridian-Zenithdistanz 4^0 und darüber beträgt; da jedoch mit zunehmendem Werthe derselben, also auch der Zwischenzeit zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange des Sternes, die Gefahr einer Aenderung des Azimuthes des Instrumentes beträchtlich wächst, so bleibt es immer räthlich, sich auf kleine Werthe von $\varphi - \delta$ zu beschränken.

219. Auch bei dieser Methode der Bestimmung der Polhöhe kann die tägliche Aberration der Fixsterne unberücksichtigt bleiben. Denn zufolge der Gl. (154) ist die durch die tägliche Aberration bewirkte Aenderung des von Süd über West von 0^0 bis 360^0 gezählten Stundenwinkels: $dt = - 0^s.021 \cos z$; hieraus folgt, dass der westliche Stundenwinkel t_w durch die tägliche Aberration verkleinert, der östliche Stundenwinkel t_o um denselben Betrag vergrössert wird, die tägliche Aberration daher auf die Summe $t_o + t_w$ oder die Differenz $\vartheta_w - \vartheta_o$, daher auch auf die berechnete Polhöhe keinen Einfluss hat.