

Mit diesen Werthen berechnet man nun:

$$\log F = 0.00953, \quad P = 1.021;$$

$$\frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos \delta'} = K = + 0.767, \quad \frac{\cos(\varphi - \delta')}{\cos \delta'} = I = + 0.644,$$

und erhält nach Gl. (190) die Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfäden:

$$I = + 55^s.90, \quad II = + 28^s.35, \quad IV = - 27^s.47, \quad V = - 55.37,$$

ferner:

$$m + n \operatorname{tg} \delta' + c \sec \delta' = Kk + Ii + c \sec \delta' = - 2^s.17 + 1^s.19 = - 0^s.98,$$

somit die Reduction auf den Meridian = - 0^s.98 P = - 1^s.00.

Endlich wird:

$$\frac{R}{(1 - \lambda) \cos \delta} = 62^s.79.$$

Man hat nun:

) I. Rand am Mittelfaden	0 ^h 26 ^m 28 ^s .10
	28.15
	28.00
	28.23
	28.13
Mittel	U = 0 26 28.12
Uhr correction . . .	Au = + 17.24
Durchgzt. d.) Rad.	+ 1 2.79
Red. a. d. Meridian . .	- 1.00
) Centrum im Merid. um	0 27 47.15 Stzt. = α .

Es war daher die beobachtete wahre oder geocentrische Rectascension des Mittelpunctes des Mondes im Augenblicke des Durchganges durch den Meridian des Beobachtungsortes: $\alpha = 0^h 27^m 47^s.15$.

5. Zeitbestimmung mit dem Passage- oder Universal-Instrumente aus beobachteten Sterndurchgängen ausserhalb des Meridians, im Vertical des Polarsternes.

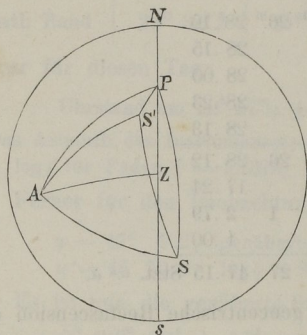
179. Da die Zahl der dem Pole nahe stehenden Fundamentalsterne, deren scheinbare Oerter in den astronomischen Ephemeriden gegeben sind, nur klein ist, so wird der Beobachter in Feldobservatorien, wo häufig die Zeit, von anderen Beobachtungen in Anspruch genommen, drängt, nicht immer in der Lage sein, den Meridiandurchgang eines solchen Polsternes abzuwarten; man kann in diesem Falle das Instrument zu beliebiger Zeit auf den Polstern

richten, wobei dann das Fernrohr einen dem Meridiane nahen Verticalkreis beschreibt, und in diesem Vertical den Polstern und einen vom Pole entfernten Fundamentalstern (Zeitstern) beobachten. Als Polstern wird am zweckmässigsten der auch in kleineren Instrumenten zu jeder Tageszeit sichtbare Polarstern (*a Ursae minoris*) gewählt und die Beobachtung desselben wegen seiner langsamen Bewegung meist auf einen Faden beschränkt, der Durchgang des Zeitsternes aber an sämtlichen Fäden beobachtet. Vor und nach der Beobachtung wird die Neigung der Axe mittelst der Libelle bestimmt und aus beiden Werthen das Mittel genommen.

Behufs Elimination des Collimationsfehlers ist in gleicher Weise eine Beobachtung des Polsternes in Verbindung mit einem zweiten Zeitsterne in der anderen Kreislage auszuführen. Hiebei wird das Azimuth des Instrumentes in der Regel ein anderes sein als bei der Beobachtung in der ersten Kreislage, und es sind daher die Beobachtungen für jede Kreislage besonders zu reduciren.

Es sei nun in Fig. 90, welche eine orthogonale Projection der scheinbaren Himmelskugel auf die Ebene des Horizontes darstellt, Z das Zenith, P der Pol, Ns der Meridian; die horizontale Umdrehungsaxe des Instrumentes treffe, gegen West verlängert, die Himmelskugel in einem Punkte A , dessen Höhe über dem Horizonte $= i$, dessen Azimuth, von Süd gegen West gezählt, $= 90^\circ - k$ ist, und dessen Stundenwinkel und Poldistanz beziehungsweise mit $90^\circ - m$ und $90^\circ + n$ bezeichnet werden mögen. Es ist daher:

Fig. 90.



Die Absenkenlinie des Fernrohrs schliesse mit dem Westende der Axe den Winkel $90^\circ + c$ ein, so ist, wenn S den am Mittelfaden beobachteten Zeitstern, S' den an irgend einem Seitenfaden, dessen östlicher Abstand vom Mittelfaden $= f$ ist, beobachteten Polstern bezeichnet:

$$\begin{aligned} AZ &= 90^\circ - i, & \angle AZs &= 90^\circ - k, \\ AP &= 90^\circ + n, & \angle APZ &= 90^\circ - m. \end{aligned}$$

Die Absenkenlinie des Fernrohrs schliesse mit dem Westende der Axe den Winkel $90^\circ + c$ ein, so ist, wenn S den am Mittelfaden beobachteten Zeitstern, S' den an irgend einem Seitenfaden, dessen östlicher Abstand vom Mittelfaden $= f$ ist, beobachteten Polstern bezeichnet:

$$AS = 90^\circ + c, \quad AS' = 90^\circ + c + f.$$

Setzen wir:

$$SS' = d, \quad \angle PSS' = \xi, \quad \angle ASS' = 90^\circ + \eta, \quad \angle APS = 90^\circ - y,$$

und bezeichnen mit α, α' die Rectascensionen, mit δ, δ' die Declinationen, mit u, u' die mit dem täglichen Gange der Uhr auf eine beliebig gewählte Epoche u_0 reducirten beobachteten Uhrzeiten des Zeit- beziehungsweise Polsternes, mit x den Stand der Uhr gegen Sternzeit zur Uhrzeit u_0 , so sind die Stundenwinkel, von Süd über West gezählt:

$$\begin{aligned}t &= u + x - \alpha, \\t' &= u' + x - \alpha',\end{aligned}$$

deren Differenz $\tau = (t' - t)$, d. i.:

$$\tau = (\alpha - u) - (\alpha' - u') \quad (a)$$

eine bekannte Grösse darstellt.

In dem Dreiecke SPS' ist nun $\angle SPS' = SPZ + ZPS' = 360^\circ - t + t' = 360^\circ + (t' - t) = 360^\circ + \tau$ und man hat daher:

$$\begin{aligned}\cos d &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos \tau \\ \sin d \sin \xi &= \cos \delta' \sin \tau \\ \sin d \cos \xi &= \cos \delta \sin \delta' - \sin \delta \cos \delta' \cos \tau,\end{aligned} \quad (b)$$

aus welchen Gleichungen sich die Grössen d und ξ bestimmen.

Aus dem Dreiecke ASS' folgt:

$$\sin(c + f) = \sin c \cos d + \cos c \sin d \sin \eta,$$

somit:

$$\sin \eta = \frac{\sin(c + f) - \sin c \cos d}{\cos c \sin d}. \quad (c)$$

Ferner ist in dem Dreiecke APS der Winkel $ASP = ASS' + PSS' = 90^\circ + \eta + \xi$, folglich:

$$\begin{aligned}\sin n &= \sin c \sin \delta + \cos c \cos \delta \sin(\xi + \eta) \\ \cos n \cos y &= \cos c \cos(\xi + \eta) \\ \cos n \sin y &= -\sin c \cos \delta + \cos c \sin \delta \sin(\xi + \eta),\end{aligned} \quad (d)$$

woraus n und y sich ergeben.

Endlich folgt aus dem Dreiecke APZ :

$$\sin i = -\sin n \sin \varphi + \cos n \cos \varphi \sin m,$$

und hieraus:

$$\sin m = \operatorname{tg} n \operatorname{tg} \varphi + \sin i \sec n \sec \varphi. \quad (e)$$

Nun ist $\angle SPZ = 360^\circ - t = \angle APS - \angle APZ = (90^\circ - y) - (90^\circ - m) = -(y - m)$, d. i. $t = 360^\circ + (y - m)$, und aus der Verbindung dieser Gleichung mit der obigen: $t = u + x - \alpha$ ergibt sich der Uhrstand:

$$x = \alpha - u + \frac{1}{15}(y - m). \quad (f)$$

Die Gleichungen (a) bis (f) enthalten die strenge Auflösung der Aufgabe. Der Umstand jedoch, dass m , n , ξ , η , y stets kleine Winkel sind, gestattet die Entwicklung von Näherungsformeln, welche eine völlig genügende Schärfe der Rechnung gewähren.

Die zwei letzten der Formeln (b) geben zunächst:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\sec \delta \sec \delta' \sin \tau}{1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \delta' \cos \tau}. \quad (b')$$

Aus (c) folgt ferner durch Auflösung von $\sin(c + f)$:

$$\sin \eta = \frac{\sin f}{\sin d} + \operatorname{tg} c \frac{\cos f - \cos d}{\sin d}.$$

Bezeichnet man nun die Zenithdistanzen der Sterne S, S' mit z, z' , ihre von Süd über West von 0 bis 360° gezählten Azimuthe mit A, A' , und setzt:

$$A - A' = 180^\circ - \Delta A,$$

so wird $\angle SZS' = 360^\circ - A + A' = 180^\circ + \Delta A$ und man hat aus dem Dreiecke SZS' :

$$\begin{aligned} \cos d &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \cos \Delta A \\ &= \cos(z + z') + 2 \sin z \sin z' \sin \frac{1}{2} \Delta A^2, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\sin \frac{1}{2} [d - (z + z')] = - \frac{\sin z \sin z'}{\sin \frac{1}{2} [d + (z + z')]} \sin \frac{1}{2} \Delta A^2.$$

Nun ist, wie man sich leicht überzeugt,*) ΔA eine kleine Grösse von der Ordnung f oder, wenn $f = 0$, d. i. der Polstern am Mittelfaden beobachtet ist, von der Ordnung der Grössen c und i , daher der Unterschied $d - (z + z')$ sehr klein von der Ordnung der Quadrate dieser Grössen; man kann daher in dem obigen Ausdrucke von $\sin \eta$ ohne merklichen Fehler $z + z'$ statt d schreiben und überdies im zweiten Gliede $\cos f = 1$ setzen, indem der hieraus entspringende Fehler, in beiden Gliedern auf die dritte Ordnung ansteigend, selbst auf die 7^{te} Decimalstelle von $\sin \eta$ ohne Einfluss bleibt. Man hat daher:

$$\sin \eta = \frac{\sin f}{\sin(z + z')} + c \frac{1 - \cos(z + z')}{\sin(z + z')}.$$

*) Man hat nämlich aus den Dreiecken AZS und AZS' :

$$\begin{aligned} - \sin c &= \sin i \cos z + \cos i \sin z \cos AZS, \\ - \sin(c + f) &= \sin i \cos z' + \cos i \sin z' \cos AZS', \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} \angle AZS &= AZs + sZS = 90^\circ - k + 360^\circ - A = 90^\circ + [360^\circ - A - k], \\ \angle AZS' &= S'Zs - AZs = A' - (90^\circ - k) = 90^\circ + [A' + k - 180^\circ], \end{aligned}$$

wo die in den eckigen Klammern stehenden Winkel stets so klein sind, dass die Sinus mit den Bögen vertauscht werden können. Dasselbe gilt von den Grössen f, c, i , und die obigen Gleichungen können daher in der Form:

$$\begin{aligned} -c &= i \cos z - [360^\circ - A - k] \sin z, \\ -c - f &= i \cos z' - [A' + k - 180^\circ] \sin z', \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 360^\circ - A - k &= c \operatorname{cosec} z + i \operatorname{cotg} z, \\ A' + k - 180^\circ &= f \operatorname{cosec} z' + c \operatorname{cosec} z' + i \operatorname{cotg} z' \end{aligned} \quad (r)$$

geschrieben werden, woraus durch Addition folgt:

$$\begin{aligned} 180^\circ - (A - A') &= \Delta A = \\ f \operatorname{cosec} z' + c (\operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec} z') + i (\operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg} z'). \end{aligned}$$

Setzen wir nun:

$$\sin \eta' = \frac{\sin f}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')}, \quad (c')$$

und bezeichnen der Kürze wegen den Factor von c in der vorhergehenden Gleichung, welcher mit $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')$ identisch ist und im Maximo die Einheit nicht erheblich überschreiten wird, mit Z , so wird $\sin \eta = \sin \eta' + cZ$, somit auch:

$$\eta = \eta' + cZ,$$

da cZ sehr klein und η' ein kleiner den Werth $2f$ nicht leicht erreichender Winkel ist.

Aus den zwei letzten der Glgn. (d) folgt ferner:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\xi + \eta) \sin \delta - \operatorname{tg} c \sec(\xi + \eta) \cos \delta,$$

wo im 2^{ten} Gliede statt η auch η' gesetzt werden kann.

Man hat aber nach dem Taylor'schen Satze:

$$\operatorname{tg}(\xi + \eta) = \operatorname{tg}(\xi + \eta' + cZ) = \operatorname{tg}(\xi + \eta') + cZ \sec(\xi + \eta'),$$

somit:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\xi + \eta') \sin \delta + c \sec(\xi + \eta')(Z \sin \delta - \cos \delta).$$

Setzen wir:

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg}(\xi + \eta') \sin \delta, \quad (d')$$

so wird:

$$\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y' = \frac{\sin(y - y')}{\cos y \cos y'} = c \sec(\xi + \eta')(Z \sin \delta - \cos \delta),$$

somit, da $y - y'$ sehr klein:

$$y = y' + c \sec(\xi + \eta') \cos y \cos y' (Z \sin \delta - \cos \delta),$$

oder, mit Weglassung des der Einheit stets nahe kommenden Factors $\sec(\xi + \eta') \cos y \cos y'$ im zweiten sehr kleinen Gliede:

$$y = y' + c(Z \sin \delta - \cos \delta), \quad (p)$$

woraus noch, mit Rücksicht auf den sehr kleinen Werth des 2^{ten} Gliedes:

$$\cos y = \cos y' - c(Z \sin \delta - \cos \delta) \sin y'$$

folgt.

Durch Division der 1^{ten} und 2^{ten} der Glgn. (d) erhält man:

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{tg}(\xi + \eta) \cos \delta \cos y + \operatorname{tg} c \sin \delta \sec(\xi + \eta) \cos y.$$

Hier kann wieder im 2^{ten} Gliede der Factor $\sec(\xi + \eta) \cos y$, weil nahe $= 1$, weggelassen werden; führt man dann im 1^{ten} Gliede für $\operatorname{tg}(\xi + \eta)$ und $\cos y$ die obigen Werthe ein, so erhält man mit Vernachlässigung der zweiten Potenz von c , und wenn man beachtet, dass auch das mit dem sehr kleinen Factor $c \operatorname{tg}(\xi + \eta') \sin y'$ behaftete Glied als unmerklich weggeworfen werden kann:

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{tg}(\xi + \eta') \cos \delta \cos y' + c(Z \cos \delta + \sin \delta).$$

Aus (e) hat man endlich, da i sehr klein, und $\sec n$ nahe $= 1$:

$$\sin m = \operatorname{tg} n \operatorname{tg} \varphi + i \sec \varphi,$$

oder nach Einführung des Werthes von $\operatorname{tg} n$:

$$\sin m = \operatorname{tg}(\xi + \eta') \cos \delta \cos y' \operatorname{tg} \varphi + i \sec \varphi + c(Z \cos \delta + \sin \delta) \operatorname{tg} \varphi.$$

Setzen wir:

$$\sin m' = \operatorname{tg}(\xi + \eta') \cos \delta \cos y' \operatorname{tg} \varphi, \quad (e')$$

so wird:

$$\sin m - \sin m' = i \sec \varphi + c(Z \cos \delta + \sin \delta) \operatorname{tg} \varphi,$$

woraus mit hinreichender Annäherung:

$$m = m' + i \sec \varphi + c \operatorname{tg} \varphi (Z \cos \delta + \sin \delta)$$

folgt. Durch Verbindung dieser Gleichung mit der obigen (p) erhält man nun:

$$y - m = y' - m' - i \sec \varphi - c[\operatorname{tg} \varphi (Z \cos \delta + \sin \delta) - Z \sin \delta + \cos \delta].$$

Der Coefficient von c kann auch in der Form:

$$\begin{aligned} & Z(\operatorname{tg} \varphi \cos \delta - \sin \delta) + (\operatorname{tg} \varphi \sin \delta + \cos \delta) = \\ & = \sec \varphi [Z \sin(\varphi - \delta) + \cos(\varphi - \delta)] \end{aligned}$$

geschrieben werden; es ist aber $\varphi - \delta$ die Meridianzenithdistanz des Zeitsternes, für welche, da die Beobachtung nahe am Meridiane stattfindet, die Zenithdistanz z zur Zeit der Beobachtung gesetzt werden kann; hierdurch wird dieser Coefficient, mit Einführung des Werthes von Z :

$$\begin{aligned} \sec \varphi \left\{ \frac{1 - \cos(z + z')}{\sin(z + z')} \sin z + \cos z \right\} &= \sec \varphi \frac{\sin z + \sin z'}{\sin(z + z')} \\ &= \sec \varphi \frac{\cos \frac{1}{2}(z' - z)}{\cos \frac{1}{2}(z' + z)}, \end{aligned}$$

somit:

$$y - m = (y' - m') - i \sec \varphi - c \sec \varphi \frac{\cos \frac{1}{2}(z' - z)}{\cos \frac{1}{2}(z' + z)},$$

welcher Werth, in Gl. (f) substituiert, x gibt.

Mit Weglassung der nunmehr unnöthigen Accente sind daher die zur Rechnung erforderlichen Formeln folgende:

$$\begin{aligned} \tau &= (\alpha - u) - (\alpha' - u'), \\ \operatorname{tg} \xi &= \frac{\sec \delta \operatorname{cotg} \delta' \sin \tau}{1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \delta' \cos \tau}, \\ \sin \eta &= \frac{\sin f}{\sin(z + z')}, \end{aligned} \quad (192)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} y &= \operatorname{tg}(\xi + \eta) \sin \delta, \\ \sin m &= \operatorname{tg}(\xi + \eta) \cos \delta \cos y \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned}$$

$$x = \alpha - u + \frac{1}{15}(y - m) - i \sec \varphi - c \sec \varphi \frac{\cos \frac{1}{2}(z' - z)}{\cos \frac{1}{2}(z' + z)}.$$

Bezeichnet man, wie gewöhnlich, mit $90^\circ + c$ den Winkel, welchen das Kreisende der Axe mit der Richtung der Absehenlinie gegen das Objectiv hin einschliesst, so gilt der Ausdruck von x unmittelbar für Kreis West; bei Kreis Ost erhält das mit c behaftete Glied entgegengesetztes Zeichen.

Es genügt, die Werthe von z und z' aus der zur Aufsuchung der Sterne berechneten Ephemeride zu nehmen, und die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen zu führen. Im Falle der Zeitsterne nördlich vom Zenith culminiren würde, ist z negativ zu nehmen. Ist der Polstern am Mittelfaden beobachtet, so ist $f = 0$ und $\eta = 0$.

180. Wie schon früher bemerkt, werden die Zeitsterne an allen Fäden beobachtet und wir benöthigen daher einer Formel zur Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden. Im Dreiecke APS (Fig. 90) ist $AS = 90^\circ + c$, oder $= 90^\circ + c + f$, je nachdem der Stern an dem Mittelfaden oder einem in dem Abstände f östlich von diesem befindlichen Seitenfaden beobachtet ist; bezeichnen wir daher die Stundenwinkel des Sternes am Mittel- und Seitenfaden mit t , t' , und zählen diese Stundenwinkel von Süd über West von 0° bis 360° , so wird der Winkel $APS = APZ + ZPS = 90^\circ - m + 360^\circ - t = 360^\circ + 90^\circ - (t + m)$, beziehungsweise $= 360^\circ + 90^\circ - (t' + m)$; das Dreieck liefert daher die Gleichungen:

$$\sin c = \sin n \sin \delta - \cos n \cos \delta \sin(t + m),$$

$$\sin(f + c) = \sin n \sin \delta - \cos n \cos \delta \sin(t' + m),$$

und wir erhalten durch Subtraction derselben, die Differenzen der Sinus in Producte umsetzend:

$$2 \sin \frac{1}{2} f \cos(\frac{1}{2} f + c) = 2 \cos n \cos \delta \sin \frac{1}{2} (t - t') \cos [\frac{1}{2} (t + t') + m].$$

Im 1^{ten} Theile kann, da $\frac{1}{2} f$ nie $10'$ erreichen und c immer nur wenige Bogensekunden betragen wird, $\cos \frac{1}{2} f$ statt $\cos(\frac{1}{2} f + c)$ gesetzt werden, wodurch dieser Theil $= \sin f$ wird.

Im 2^{ten} Theile ist $t - t' = l$ die gesuchte Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden; wir erhalten daher, die Gleichung für $\sin \frac{1}{2} (t - t')$ auflösend, da $\frac{1}{2} (t + t') = t - \frac{1}{2} (t - t') = t - \frac{1}{2} l$ ist:

$$2 \sin \frac{1}{2} l = \frac{\sin f \sec \delta}{\cos n \cos (t - \frac{1}{2} l + m)}.$$

Bezeichnet man den Nenner des Bruches mit N , so wird durch Auflösung des Cosinus:

$$N = \cos n \cos m \cos (t - \frac{1}{2} l) - \cos n \sin m \sin (t - \frac{1}{2} l).$$

Aus dem Dreiecke APZ , in welchem $\angle AZP = 90^\circ + k$ ist, folgt aber, wenn man die Neigung $i = 0$ annimmt, also $AZ = 90^\circ$ setzt:

$$\cos n \cos m = \cos k, \quad \cos n \sin m = \sin \varphi \sin k.$$

Substituirt man diese Werthe und löst den Cosinus und Sinus von $(t - \frac{1}{2}l)$ auf, so kommt:

$$N = (\cos t \cos k - \sin t \sin \varphi \sin k) \cos \frac{1}{2}l + (\sin t \cos k + \cos t \sin \varphi \sin k) \sin \frac{1}{2}l.$$

Der Winkel k steht nun mit dem Azimuthe A des Sternes am Mittelfaden in der durch die Glgn. (r) [s. Anmerk. zu dem vorherg. §.] gegebenen Beziehung, wobei A von Süd über West von 0° bis 360° gezählt, und in der 2^{ten} Gleichung $f = 0$ zu setzen ist. Setzt man daher, was bei der vorliegenden Aufgabe zulässig ist, die sehr kleinen Grössen i und c gleich Null, so ist, wenn der bisherigen Annahme zufolge, der Vertical des Instrumentes von Süd gegen Ost ausweicht:

$$k = 360^\circ - A, \quad \text{oder} \quad k = 180^\circ - A,$$

je nachdem der Stern östlich oder westlich vom Meridiane steht.

Weicht jedoch der Vertical des Instrumentes von Süd gegen West aus, in welchem Falle k negativ wird, so ist:

$$k = -A, \quad \text{oder} \quad k = 180^\circ - A,$$

je nachdem der Stern westlich oder östlich vom Meridiane beobachtet wurde. Durch Substitution dieser Werthe von k in den obigen Ausdruck von N erhält man nun:

$$N = \pm (\cos t \cos A + \sin t \sin \varphi \sin A) \cos \frac{1}{2}l \\ \pm (\sin t \cos A - \cos t \sin \varphi \sin A) \sin \frac{1}{2}l,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem der südliche Theil des Verticals des Instrumentes und der Stern auf derselben Seite, oder auf der entgegengesetzten Seite des Meridianes liegen.

Man hat aber, wenn q den parallaktischen Winkel des Sternes zur Zeit seines Antrittes am Mittelfaden bedeutet, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos q &= \cos t \cos A + \sin t \sin \varphi \sin A, \\ -\sin \delta \sin q &= \sin t \cos A - \cos t \sin \varphi \sin A, \end{aligned} \quad (s)$$

welche sich durch Anwendung der Glgn. (13) [S. 90] auf das Dreieck zwischen Zenith, Pol und Stern ergeben, womit:

$$N = \pm (\cos q \cos \frac{1}{2}l - \sin \delta \sin q \sin \frac{1}{2}l)$$

wird. Substituirt man endlich diesen Werth in die obige Gleichung für $2 \sin \frac{1}{2}l$, multiplicirt Zähler und Nenner des Bruches mit $\sec q$, und überdies die ganze Gleichung mit $\cos \frac{1}{2}l$, so erhält man:

$$\sin l = \pm \frac{\sin f \sec \delta \sec q}{1 - \sin \delta \operatorname{tg} q \operatorname{tg} \frac{1}{2}l}. \quad (193)$$

Bei dem Gebrauche dieser, so wie der folgenden Formeln (194) und (195) ist auf die Zeichen wohl zu achten, und zwar ist: 1) f positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Seitenfaden östlich oder westlich vom Mittelfaden; 2) das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem der

südliche Theil des Verticals des Instrumentes und der beobachtete Stern auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Meridians liegen; endlich 3) der Winkel q in jenem Quadranten zu nehmen, in welchem ihn die Gln. (24) [Seite 93], übereinstimmend mit den obigen Gln. (s), ergeben, wobei der Stundenwinkel t , beziehungsweise das Azimuth von Süd über West von 0 bis 360° zu zählen ist. Berechnet man den Winkel q mittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tg} q = \frac{\sin t}{\operatorname{tg} \varphi \cos \delta - \sin \delta \cos t},$$

welche man durch Division der Gln. (24) erhält, so bestimmt sich der Quadrant, in welchem q zu nehmen, durch die Bemerkung, dass, je nach dem Zeichen von $\operatorname{tg} q$, q im 1^{ten} oder 2^{ten} Quadranten zu nehmen ist, wenn der Stern westlich vom Meridiane, im 3^{ten} oder 4^{ten} aber, wenn er östlich von demselben beobachtet wurde. Der Stundenwinkel t ergibt sich aus der beobachteten Antrittszeit des Sternes am Mittelfaden, mit Zuziehung eines genäherten Uhrstandes. Die Berechnung von l erfolgt durch successive Näherung, indem man zuerst das 1^{te} Glied im Nenner vernachlässigt, wodurch man einen genäherten Werth von l erlangt, diesen mit Beachtung seines Vorzeichens im 2^{ten} Theile substituirt und auf diese Art fortfährt, bis man zu einem stehenden Werthe gelangt.

Die Gl. (193) ist, bis auf die Vernachlässigung des Einflusses von Neigung und Collimation, noch strenge, daher auch auf Polsterne anwendbar, und kann, sobald die Vertauschung von $\sin l$ mit dem Bogen zulässig ist, auch auf die zur Rechnung bequemeren Formen:

$$l^s = \pm \frac{f^s \cdot \sec \delta \sec q}{1 - \frac{15}{2} \sin 1'' \sin \delta \operatorname{tg} q \cdot l^s}, \quad (194)$$

oder:

$$l^s = \pm f^s \cdot \sec \delta \sec q + \frac{15}{2} \sin 1'' \sin \delta \operatorname{tg} q \cdot l^{s^2} \quad (195)$$

gebracht werden, wobei in letzterer Formel im 2^{ten} Gliede für l der Werth des ersten Gliedes als genäherter Werth angenommen werden kann.

Für Sterne von grösserer Poldistanz, also namentlich für die Zeitsterne bei der hier behandelten Aufgabe, wird das 2^{te} Glied in (195) unmerklich, so dass die einfache Formel:

$$l^s = f^s \cdot \sec \delta \sec q \quad (196)$$

ausreicht, wobei der parallaktische Winkel einfacher aus der Gleichung:

$$\sin q = \frac{\cos \varphi \sin t}{\sin z}$$

gefunden wird.*)

*) Man kann sich dieser Gleichung auch bei Anwendung der vorhergehenden Formeln auf Polsterne (oder allgemeiner auf nördlich vom Zenith culminirende Sterne) bedienen; über den Quadranten, in welchem q zu nehmen ist, entscheidet dann das

Der Polstern wird meist nur an einem Faden beobachtet, weil die Beobachtung an mehreren Fäden wegen der langsamen Bewegung des Sternes eine zu lange Zeit in Anspruch nimmt. Ist aber das Ocular mit einem Fadensmikrometer versehen, so kann auch die Vervielfältigung der Beobachtungen des Polsternes leicht und sicher geschehen, indem man den Stern an dem beweglichen Faden bei mehreren Stellungen desselben beobachtet und jedesmal das Mikrometer abliest; durch Vergleichung dieser Lesungen mit jener Lesung, welche man bei Einstellung des beweglichen Fadens auf den Mittelfaden erhält, ergeben sich die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Abstände f des beweglichen Fadens, beziehungsweise des Sternes, vom Mittelfaden.

181. Beispiel. 1843, August 17, wurden zu Kronstadt unter der Polhöhe $\varphi = 59^\circ 59'.5$ folgende Beobachtungen gemacht:

Kreis West.					
	Faden I	II	III	IV	V
α Ursae min.	—	—	$17^h 23^m 10^s.0$	—	—
β Draconis	$38^s.0$	$3^s.9$	$17 28 35.0$	$1^s.4$	$29^s.3$
Neigung der Axe vor der Beobachtung				+ $0^s.66$	
" " " nach " "				+ 0.63	
				Mittel $i = + 0.645$	

Kreis Ost.					
	V	IV	III	II	I
α Ursae min.	—	—	$17^h 52^m 45^s.5$	—	—
γ Draconis	$8^s.1$	$35^s.8$	$17 55 1.4$	$31^s.6$	$57^s.1$
Neigung der Axe vor der Beobachtung				+ $0^s.10$	
" " " nach " "				+ 0.16	
				Mittel $i = + 0.13$	

Die scheinbaren Oerter der Sterne waren für das gegebene Datum:

	α	δ
α Ursae min.	$1^h 3^m 45^s.70$	+ $88^\circ 28' 24''.2$
β Draconis	$17 26 55.73$	+ $52 25 25.5$
γ Draconis	$17 53 0.35$	+ $51 30 51.0$

Zeichen von $\sin q$ in Verbindung mit der Bemerkung, dass q im 2ten, beziehungsweise 3ten Quadranten zu nehmen, wenn der Stern in dem oberen von den beiden Digressionspunkten begrenzten Theile seines Parallels beobachtet wurde, im 1ten oder 4ten jedoch, wenn im unteren Theile.

Der Stand der Uhr gegen Sternzeit war näherungsweise $+ 40^s$; der tägliche Gang $+ 1^s.72$. Die Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden III waren:

$$I = 34^s.50, \quad II = 18^s.74, \quad IV = 16^s.14, \quad V = 33^s.33.$$

Aus den um den angenommenen Uhrstand verbesserten Durchgangszeiten am Mittelfaden in Verbindung mit den Rectascensionen findet man die Stundenwinkel und mit diesen die Zenithdistanzen der Sterne, so wie die parallaktischen Winkel der beiden Zeitsterne zur Zeit der Beobachtung:

für α Urs. min. K. W.	$t = 245^o \quad 1'.1,$	$z = 30^o \quad 41'$		
„ β Draconis	0 34.8	7 34	$q = 2^o \quad 12'.1$	
„ α Urs. min. K. O.	252 25.0	30 30		
„ γ Draconis	0 40.3	8 29	2 16.5	

und hiemit nach Formel (194), die Reductionen auf den Mittelfaden:

$$\begin{aligned} \text{für } \beta \text{ Drac. . I} &= + 56^s.62, \quad \text{II} = + 30^s.75, \quad \text{IV} = - 26^s.49, \quad \text{V} = - 54^s.70 \\ \text{„ } \gamma \text{ Drac. . V} &= + 53.60, \quad \text{IV} = + 25.96, \quad \text{II} = - 30.14, \quad \text{I} = - 55.48. \end{aligned}$$

Die auf den Mittelfaden reducirten Antrittszeiten sind daher:

β Draconis	γ Draconis
$17^h \ 28^m \ 34^s.62$	$17^h \ 55^m \ 1^s.70$
34.65	1.76
35.00	1.40
34.91	1.46
34.60	1.62
<hr/>	<hr/>
Mittel: 17 28 34.76	17 55 1.59

Reduciren wir die beobachteten Uhrzeiten mit dem stündlichen Gange $+ \frac{1.72}{24} = + 0^s.0717$ auf die Epoche 18^h , so erhalten dieselben, der Zeitfolge nach, folgende Correctionen: $- 0^s.04, - 0^s.04, - 0^s.01, - 0^s.01$.

Endlich ist an den Rectascensionen noch die tägliche Aberration anzubringen, welche, nach der Formel $+ 0^s.0207 \cos \varphi \sec \delta \cos t$ (§. 71) berechnet, für β und γ Draconis $+ 0^s.02$, für die 1^{te} und 2^{te} Beobachtung des Polaris beziehungsweise $- 0^s.16$ und $- 0^s.12$ beträgt.

Mit den so verbesserten Grössen steht nun die Rechnung nach den Formeln (192) folgendermassen, wobei zu beachten kommt, dass für beide Kreislagen $f = 0$, also auch $\eta = 0$ ist, weil der Polarstern am Mittelfaden beobachtet wurde.

Kreis West.

$$\begin{aligned} \alpha \text{ Ursae min. } u' &= 17^h \ 23^m \ 9^s.96, \quad \alpha' = 1^h \ 3^m \ 45^s.54, \quad \delta' = 88^o \ 28' \ 24''.2 \\ \beta \text{ Draconis } u &= 17 \ 28 \ 34.72, \quad \alpha = 17 \ 26 \ 55.75, \quad \delta = 52 \ 25 \ 25.5 \\ u' - \alpha' &= 16^h \ 19^m \ 24^s.42, \quad u - \alpha = 0^h \ 1^m \ 38^s.97, \quad \tau = 16^h \ 17^m \ 45^s.45 \\ &= 244^o \ 26' \ 21''.7 \end{aligned}$$

log sec δ = 0.21480	log tg δ = 0.11382	log i = 9.8096
log cotg δ' = 8.42571	log cotg δ' = 8.42571	log sec φ = 0.3009
log sin τ = 9.95527 n	log cos τ = 9.63495 n	0.1105
<u>8.59578 n</u>	<u>8.17448 n</u>	i sec φ = + 1 ^s .29
	- 0.01494	z = 7° 34'
<u>0.00644</u>	<u>1.01494</u>	z' = 30 41
log tg ξ = 8.58934 n		$z' + z$ = 38 15
log sin δ = 9.89902		$z' - z$ = 23 7
log tg y = 8.48836 n	y = - 1° 45' 48".2	log cos $\frac{1}{2}(z' - z)$ = 9.9911
		log cos $\frac{1}{2}(z' + z)$ = 9.9753
log cos δ = 9.78520		0.0158
log cos y = 9.99979		log sec φ = 0.3009
log tg φ = 0.23841		0.3167
log sin m = 8.61274 n . . . m = - 2° 20' 58".4		Coeff. von c = 2.073
	$y - m$ = + 0 35 10 .2	
	$\alpha - u$ = - 1 ^m 38 ^s .97	
	$\frac{1}{15}(y - m)$ = + 2 20.68	
	- i sec φ = - 1.29	
	<u>x = + 40 42 - 2.073 c.</u>	

Kreis Ost.

α Ursae min. . . u' = 17^h 52^m 45^s.49, α' = 1^h 3^m 45^s.58, δ' = 88° 28' 24".2
 γ Draconis . . . u = 17 55 1.58, α = 17 53 0.37, δ = 51 30 51 .0
 $u' - \alpha' = 16^h 48^m 59^s.91$, $u - \alpha = 0^h 2^m 1^s.21$, $\tau = 16^h 46^m 58^s.70$
 = 251° 44' 40".5.

log sec δ = 0.20599	log tg δ = 0.09962	log i = 9.1139
log cotg δ' = 8.42571	log cotg δ' = 8.42571	log sec φ = 0.3009
log sin τ = 9.97757 n	log cos τ = 9.49590 n	9.4148
<u>8.60927 n</u>	<u>8.02123 n</u>	i sec φ = + 0 ^s .26
	- 0.01050	
<u>0.00454</u>	<u>1.01050</u>	z = 8° 29'
log tg ξ = 8.60473 n		z' = 30 30
log sin δ = 9.89363		$z' - z$ = 22 1
log tg y = 8.49836 n	y = - 1° 48' 15".9	$z' + z$ = 38 59
		log cos $\frac{1}{2}(z' - z)$ = 9.9919
log cos y = 9.99978		log cos $\frac{1}{2}(z' + z)$ = 9.9744
log cos δ = 9.79401		0.0175
log tg φ = 0.23841		log sec φ = 0.3009
log sin m = 8.63693 n	m = - 2° 29' 3".2	0.3184
	$y - m$ = + 0 40 47 .3	Coeff. von c = 2.082
	$\alpha - u$ = - 2 ^m 1 ^s .21	
	$\frac{1}{15}(y - m)$ = + 2 43.15	
	- i sec φ = - 0.26	
	<u>x = + 41 68 + 2.082 c.</u>	

Wir erhalten somit aus den Beobachtungen

$$\text{bei K. W.: } x = + 40^{\circ}.42 - 2^{\circ}.073 c,$$

$$\text{„ K. O.: } x = + 41^{\circ}.68 + 2^{\circ}.082 c,$$

und durch Subtraction beider Gleichungen: $0 = 1^{\circ}.26 + 4.155 c$, woraus $c = - 0^{\circ}.303$ folgt, welcher Werth, in obige Gleichungen substituirt, den Uhrstand:

$$x = + 41^{\circ}.05 \text{ um } 18^{\text{h}}.0 \text{ Uhrzeit}$$

ergibt.

Sind die Declinationen, also auch die Zenithdistanzen beider Zeitsterne nahe gleich, wie im vorliegenden Beispiele, so erhalten auch die Coefficienten von c nahe denselben Werth, und es ist dann, wenn c klein, das einfache Mittel aus den für beide Kreislagen gefundenen Uhrständen der vom Collimationsfehler befreite Werth des Uhrstandes.

6. Zeitbestimmung mit dem Universal-Instrumente aus beobachteten Azimuthal-Differenzen zweier Sterne.

182. Beobachtet man die Uhrzeit, zu welcher sich ein Stern in einem bekannten Azimuthe befindet, so kann aus dem Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Stern mit der Polhöhe, der Declination und dem Azimuthe des Sternes der Stundenwinkel desselben berechnet werden, welcher sodann mit Zuziehung der Rectascension des Sternes und der beobachteten Uhrzeit auf bekannte Weise den Uhrstand gibt.

Zur Berechnung des Stundenwinkels kann man sich der Gleichung (22):

$$\sin \varphi \cos t - \cotg A \sin t = \text{tg } \delta \cos \varphi$$

bedienen, welche sich durch Einführung der mittelst der Gleichungen:

$$g \sin G = \sin \varphi, \quad g \cos G = \cotg A$$

bestimmten Hilfsgrößen g und G in folgende:

$$\sin (G - t) = \frac{\cos \varphi \text{ tg } \delta}{g}$$

verwandelt. Auch kann man statt diesen Gleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned} \text{tg } G &= \sin \varphi \text{ tg } A, \\ \sin (G - t) &= \cos \varphi \text{ tg } \delta \text{ tg } A \cos G = \cotg \varphi \text{ tg } \delta \sin G \end{aligned} \quad (197)$$

anwenden. Der Uhrstand x ergibt sich dann mittelst der Gleichung:

$$x = \alpha + t - u,$$

wo α die Rectascension des Sternes, u die beobachtete Uhrzeit bedeutet.

Durch Differentiation der Gl. (22) erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$dt = \frac{dA}{\sin \varphi + \cos \varphi \text{ tg } h \cos A} + \frac{\sin h \text{ tg } q}{\cos \varphi} d\varphi - \frac{\text{tg } q}{\cos \delta} d\delta,$$