

Man ersieht hieraus, dass der Einfluss der constanten Fehler ($0^{\circ}.056$) jenen der zufälligen Beobachtungsfehler ($0^{\circ}.032$) erheblich übersteigt, und es würde dies in noch höherem Grade der Fall sein, wenn nicht im vorliegenden Beispiele der Einfluss des Fehlers der Polhöhe schon nahezu unmerklich wäre, weil der Stern in der Nähe des 1^{ten} Verticals beobachtet ist. Handelt es sich daher um eine möglichst scharfe Zeitbestimmung, so wird man dafür zu sorgen haben, den Einfluss der constanten Fehler möglichst zu beseitigen. Der eine von den Fehlern in der Position des Sternes herrührende Theil: $\sqrt{0.000926} = 0^{\circ}.030$ kann selbstverständlich nicht weggeschafft werden, wohl aber der andere aus den constanten Fehlern in der Polhöhe und Zenithdistanz entspringende und in der Regel beträchtlichere: $\sqrt{0.002217} = 0^{\circ}.047$. Der Fehler in der Polhöhe wird eliminirt, wenn man den Stern bei seinem Durchgange durch den 1^{ten} Vertical nahe symmetrisch zu beiden Seiten desselben, oder wenn man zwei Sterne zu beiden Seiten des Meridians in möglichst nahe gleichem Azimuth beobachtet, und aus den aus beiden Sternen folgenden und mit dem Uhgange auf dieselbe Epoche reducirten Uhrständen das Mittel nimmt. Wurden überdies in letzterem Falle die beiden Sterne auch in nahe gleicher Zenithdistanz beobachtet (was voraussetzt, dass zwei Sterne von nahe gleicher Declination gewählt wurden), so verschwindet aus dem Mittel auch der Einfluss der constanten Fehler in der Zenithdistanz. Auf diese Weise, und mit einem guten Instrumente ausgeführt, lässt dann diese Methode der Zeitbestimmung eine beträchtliche Schärfe erreichen.

Bei der vorstehenden Fehlerberechnung wurde übrigens der von den zufälligen Beobachtungsfehlern herrührende Theil: $\epsilon_x: \sqrt{10} = 0^{\circ}.03237$ aus nach anderen Erfahrungen angenommenen Werthen mit Zuziehung der Formel (139) abgeleitet, um einen durchschnittlichen Werth in die Rechnung einzuführen; unter günstigen Umständen kann derselbe auch kleiner werden, wie dies in der That im vorliegenden Beispiele der Fall ist. Man kann ihn nämlich auch direct aus den zehn bei der ersten Reduction erhaltenen Werthen von x ableiten, indem man dieselben beziehungsweise mit den zwei für jede Kreislage daraus folgenden Mitteln vergleicht, und findet auf diesem Wege den w. F. des aus einer Zenithdistanz berechneten Uhrstandes $\epsilon_x = 0^{\circ}.0731$, folglich des Mittels: $\epsilon_x: \sqrt{10} = 0^{\circ}.0231$.

2. Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen.

163. Diese Methode besteht darin, dass man die Uhrzeiten beobachtet, zu welchen ein Gestirn dieselbe Höhe vor und nach der Culmination erreicht, und beruht darauf, dass gleichen Höhen östlich und westlich vom Meridian auch gleiche Stundenwinkel entsprechen, wenn das Gestirn in der Zwischen-

zeit seine Declination nicht ändert. Ist daher u die Uhrzeit der vor der Culmination, u' jene der nach der Culmination beobachteten gleichen Höhe, so wird $\frac{1}{2}(u + u')$ die Uhrzeit der Culmination sein, und da bekanntlich die Sternzeit der Culmination der Rectascension α des Sternes gleich ist, so hat man sofort:

$$x = \alpha - \frac{1}{2}(u + u')$$

als den Stand der Uhr gegen Sternzeit zur Uhrzeit $\frac{1}{2}(u + u')$, wo nur ein gleichförmiger, übrigens beliebiger Gang der Uhr vorausgesetzt wird.

Diese Methode ist, wie man sieht, unabhängig von der Kenntniss der Polhöhe und Declination des Gestirnes, also auch der geographischen Länge des Ortes; auch wird die Kenntniss der Höhe selbst, in welcher das Gestirn beobachtet wurde, nicht erfordert, so dass also auch mit Instrumenten, welche eine genaue Messung von Höhen oder Zenithdistanzen nicht gestatten, eine gute Zeitbestimmung erlangt werden kann.

Es kommt nur darauf an, dass beide Höhen genau gleich seien, oder dass, im Falle ein kleiner Unterschied besteht, dieser scharf bestimmt werden kann, um den Einfluss desselben berechnen und die Beobachtung davon befreien zu können. Man hat nämlich nach Gl. (146):

$$dt = - \frac{\cos h \cdot dh}{\cos \varphi \cos \delta \sin t}.$$

Ist nun die wahre Höhe vor der Culmination $= h$, nach derselben $= h'$, und $h' - h = dh$, so hat man offenbar, wenn $h' > h$, also dh positiv, u' zu klein erhalten um dt , also $\frac{1}{2}(u' + u)$ zu klein um $\frac{1}{2}dt$; die Correction des Mittels $\frac{1}{2}(u + u')$ beider Zeiten ist daher:

$$+ \frac{h' - h}{30} \frac{\cos h}{\cos \varphi \cos \delta \sin t}, \quad (156)$$

in Zeitsecunden, wenn $h' - h$ in Bogensekunden. Zur Berechnung des Coefficienten genügen genäherte Werthe von φ , δ und h ; für t ist die halbe Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u' - u)$, stets positiv, zu nehmen. Hat man übrigens, wie gewöhnlich, eine Reihe gleicher Höhen vor und nach der Culmination beobachtet, so erhält man einen, wenn $h' - h$ klein, hinreichend genäherten Werth des Coefficienten, indem man die Zwischenzeit zweier Höhen durch die Differenz derselben, beide in derselben Einheit ausgedrückt, dividirt.

Die Refraction wird, auch bei gleichen Instrumental- also scheinbaren Höhen vor und nach der Culmination, einen Unterschied der wahren Höhen zur Folge haben, wenn in der Zwischenzeit der Stand der meteorologischen Instrumente sich geändert hat, weil in diesem Falle wohl die mittlere, nicht aber die wahre Refraction zu beiden Zeiten die gleiche ist. Bezeichnet man letztere zur Zeit der Beobachtungen vor und nach der Culmination mit

r_v und r_n , die scheinbare Höhe mit H , so ist $h = H - r_v$, $h' = H - r_n$, somit in (156):

$$h' - h = r_v - r_n.$$

Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, bei genaueren Beobachtungen auch den Stand der meteorologischen Instrumente aufzuschreiben.

Aus demselben Grunde ist zu empfehlen, bei Sextantenbeobachtungen und Benützung eines Glashorizontes, letzteren vor und nach jeder Beobachtung zu nivelliren. Sind dann i_v und i_n die Mittel der Neigungen vor und nach der Culmination, positiv genommen, wenn die dem Gestirn zugekehrte Seite des Horizontes die höhere, so ist $h = H + i_v$, $h' = H + i_n$, somit:

$$h' - h = i_n - i_v.$$

Auch bei dieser Methode der Zeitbestimmung ist die Zeit des Durchganges des Gestirnes durch den 1^{ten} Vertical die günstigste, weil sich daselbst die Höhe am raschesten ändert; jedenfalls sind Beobachtungen zu nahe am Meridian zu vermeiden.

164. Gewöhnlich benützt man zur Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen die Sonne, deren Declination sich in der Zwischenzeit ändert; das arithmetische Mittel beider Uhrzeiten, $\frac{1}{2}(u + u')$, wird daher nicht die Uhrzeit der Culmination oder des wahren Mittags sein, und um letztere zu finden, bedarf dasselbe noch einer Correction, welche die Mittagsverbesserung genannt wird.

Sei δ die Declination der Sonne zur Zeit der Culmination, also im wahren Mittage, $\Delta\delta$ die Aenderung der Declination vom Mittage bis zur Zeit der beobachteten Höhen, positiv, wenn sich die Sonne gegen Nord bewegt; h die wahre Höhe der Sonne bei jeder Beobachtung; t, t' der vor- und nachmittägige Stundenwinkel, so bestehen die Gleichungen:

$$\sin h = \sin \varphi \sin(\delta - \Delta\delta) + \cos \varphi \cos(\delta - \Delta\delta) \cos t,$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin(\delta + \Delta\delta) + \cos \varphi \cos(\delta + \Delta\delta) \cos t'.$$

Für die Sonne ist nun $\Delta\delta$ immer so klein, dass man $\sin \Delta\delta = \Delta\delta$ und $\cos \Delta\delta = 1$ setzen kann; dadurch erhalten die Gleichungen, nach Auflösung der Functionen von $\delta - \Delta\delta$ und $\delta + \Delta\delta$ die Form:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta - \Delta\delta \sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t + \Delta\delta \cos \varphi \sin \delta \cos t,$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \Delta\delta \sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t' - \Delta\delta \cos \varphi \sin \delta \cos t',$$

und geben, subtrahirt und durch $\cos \varphi \cos \delta$ dividirt:

$$0 = 2 \Delta\delta \operatorname{tg} \varphi + (\cos t' - \cos t) - \Delta\delta \operatorname{tg} \delta (\cos t' + \cos t). \quad (n)$$

Bezeichnet man nun die Mittagsverbesserung mit y , so ist

$$\frac{1}{2}(u + u') + y$$

die Uhrzeit der Culmination, der sogenannte verbesserte Mittag, oder die Uhrzeit im wahren Mittag, also auch:

$$t = [\frac{1}{2}(u + u') + y] - u = \frac{1}{2}(u' - u) + y,$$

$$t' = u' - [\frac{1}{2}(u + u') + y] = \frac{1}{2}(u' - u) - y,$$

oder, wenn man die halbe Zwischenzeit: $\frac{1}{2}(u' - u) = \tau$ setzt:

$$t = \tau + y, \quad t' = \tau - y.$$

Da nun wieder y so klein ist, dass man $\sin y = y$ und $\cos y = 1$ setzen kann, so wird:

$$\cos t = \cos \tau - y \sin \tau, \quad \cos t' = \cos \tau + y \sin \tau,$$

somit:

$$\cos t' - \cos t = 2y \sin \tau, \quad \cos t' + \cos t = 2 \cos \tau,$$

welche Werthe, in Gl. (m) substituirt:

$$y = - \Delta \delta \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \tau} - \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \tau} \right)$$

geben. Die Grösse $\Delta \delta$ erhält man am einfachsten und mit genügender Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit der Bewegung der Sonne in Declination aus dem Unterschiede der Declinationen im wahren Mittag des dem Beobachtungstage vorhergehenden und des darauf folgenden Tages.

Bezeichnet man diese 48stündige Aenderung der Declination der Sonne, in Bogensekunden ausgedrückt, mit μ , so wird:

$$\Delta \delta = \frac{\mu}{48} \tau,$$

wo τ in Stunden auszudrücken ist, und hiemit, wenn man noch durch 15 dividirt, um y in Zeitsecunden zu erhalten:

$$y = - \frac{\mu}{720} \left(\frac{\tau}{\sin \tau} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\tau}{\operatorname{tg} \tau} \operatorname{tg} \delta \right). \quad (157)$$

Setzt man:

$$A = \frac{1}{720} \frac{\tau}{\sin \tau}, \quad B = \frac{1}{720} \frac{\tau}{\operatorname{tg} \tau},$$

so wird:

$$y = - A \mu \operatorname{tg} \varphi + B \mu \operatorname{tg} \delta. \quad (157^*)$$

Eine Tafel, welche die Logarithmen von A und B mit dem Argumente: $\tau =$ halbe Zwischenzeit darbietet, und zuerst von Gauss gegeben wurde, erleichtert die Berechnung dieses Ausdruckes.*)

Bezeichnet man endlich mit M die durch die Zeitgleichung gegebene mittlere Zeit im wahren Mittag, so ist

$$x = M - [\frac{1}{2}(u + u') + y]$$

der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit zur Uhrzeit $\frac{1}{2}(u + u') + y$.

*) Man findet eine solche Tafel in dem Werke: „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Von Dr. Theodor Albrecht. Leipzig, 1874.“ Seite 111 und 112.

Geht die Uhr nach Sternzeit, so ist der Werth von y aus (157) noch mit dem Verhältnisse der mittleren zur Sternzeit = 1.0027 (§. 36) zu multipliciren.

Wie schon oben bemerkt, nimmt man stets eine Reihe von Höhen nacheinander, indem man die Alhidade um eine runde Anzahl von Minuten verstellt (so dass der Nullstrich der Alhidade mit dem betreffenden Theilstriche des Kreises scharf zur Coincidenz gebracht wird) und dann die Zeit beobachtet, wann derselbe Sonnenrand diese Höhe erreicht. Benützt man, wie gewöhnlich, den Sextanten, bei welchem bekanntlich der Moment der Berührung der Ränder beider Sonnenbilder beobachtet wird, so kommt bei Beobachtung desselben Sonnenrandes Vor- und Nachmittags, einmal die Berührung im Momente der Trennung, das andere Mal im Momente der beginnenden Ueberdeckung beider Bilder zur Beobachtung. Da es immerhin möglich ist, dass der Beobachter diese etwas verschiedenen Erscheinungen nicht in derselben Weise auffasst, z. B. die Berührung bei der Trennung der Bilder constant später nimmt, als bei der Annäherung derselben, so kann man die Beobachtungen in je gleicher Anzahl auf beide Ränder vertheilen, wodurch der hieraus entstehende Fehler eliminirt wird.

Beispiel. 1869, October 1, wurden mit einem Pistor'schen Prismen-Sextanten in Wien die folgenden correspondirenden Sonnenhöhen beobachtet:

☉Rand	Sextant	Ch r o n o m e t e r		$u + u'$	Unverbessertes Mittag $\frac{1}{2}(u + u')$
		Vormittag u	Nachmittag u'		
Oberer	56° 40'	9 ^h 12 ^m 43 ^s .6	2 ^h 28 ^m 54 ^s .4	23 ^h 41 ^m 38 ^s .0	11 ^h 50 ^m 49 ^s .0
	57 0	14 7.2	27 30.8	38.0	49.0
	20	15 32.8	26 6.0	38.8	49.4
	40	16 55.6	24 41.6	37.2	48.6
	58 0	18 20.8	23 16.0	36.8	48.4
Unterer	59 20	28 53.2	12 44.0	37.2	48.6
	40	30 23.2	11 14.4	37.6	48.8
	60 0	31 54.4	9 44.0	38.4	49.2
	20	33 25.6	8 12.4	38.0	49.0
	40	34 57.2	6 41.6	38.8	49.4
				Mittel	11 50 48.94

Zur Berechnung der Mittags-Verbesserung hat man $\varphi = 48^{\circ} 12'.0$, und entnimmt dem Nautical Almanac für den wahren Mittag des obigen Datums:

$\delta = -3^{\circ} 17'.1$, $\mu = -2796''.8$,*) Zeitgleichung $= -10^m 24^s.23$.

Die Zwischenzeit ist Anfangs $= 5^h 16^m 10^s.8$, am Ende $= 4^h 31^m 44^s.4$, also im Mittel: $2\tau = 4^h 53^m 57^s.6$, somit:

$$\begin{array}{r} \tau = 2^h 26^m 58^s.8 = 36^{\circ} 44' 42'' = 2^h.4497. \\ \log \tau = 0.3891 \\ \log \sin \tau = 9.7769 \\ \log 720 = 2.8573 \\ \log A = 7.7549 \\ \log \operatorname{tg} \varphi = 0.0486 \\ \log \mu = 3.4467n \\ \hline 1.2502n \\ - 17^s.79 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.3891 \\ 9.8731 \\ 2.8573 \\ \hline 7.6587 \\ 8.7590n \\ 3.4467n \\ \hline 9.8644 \\ + 0^s.73 \end{array}$$

Man hat daher $y = +17^s.79 + 0^s.73 = +18^s.52$, somit:

$$\begin{array}{r} \text{Unverbessertes Mittag:} \\ \text{Mittagsverbesserung:} \\ \text{Uhr im wahren Mittag:} \\ \text{Mittlere Zeit im wahren Mittag:} \\ \text{Uhrstand gegen mittl. Zeit: } x = \end{array} \begin{array}{r} 11^h 50^m 48^s.94 \\ + 18.52 \\ \hline 11 51 7.46 \\ 11 49 35.77 \\ \hline - 1 31.69. \end{array}$$

Bei dieser Beobachtung waren auch die meteorologischen Instrumente beobachtet und die Neigung des Glashorizontes gemessen worden:

	Vorm. Nachm.		Vormittag				Nachmittag			
	^{mm}		a	i	a	i	a	i	a	i
Barom.	748.8	747.1								
Inn. Therm.	20°.1 C.	23.5	10.7	9.2	11.0	8.5	8.7	8.4	8.4	8.5
Äuss. Therm.	20.5	23.5	11.2	8.8	10.8	8.4	9.2	7.8	9.5	6.8

Mit der mittleren scheinbaren Höhe $h = 29^{\circ} 20'$ findet man die Refraction: Vorm. $r_v = 97''.9$, Nachm. $r_n = 96.6$. Der Werth eines Scalentheiles der Libelle war $4''.76$, und es sind die Lesungen nach Aussen mit a , nach Innen mit i bezeichnet. Die Neigungen waren also Vormittag $+4''.64$ und

*) Nach dem Nautical Almanac ist die Declination der Sonne im wahren Mittag zu Greenwich:

		μ
Sept. 29	$-2^{\circ} 31' 30''.2$	
	30	$-46' 40''.4$
Oct. 1	3 18 10 .6	+ 3''.8
	2	3 41 27 .9
	3	- 46 32 .1
	3 - 4 4 42 .7	+ 4 .5

Zieht man die Declination Sept. 30 ab von jener Octob. 2, so erhält man $\mu = -46' 36''.6 = -2796''.6$, giltig für Octob. 1, 0^h wahre Zeit in Greenwich. Da Wien um $1^h 5^m.5 = 1^h.09$ östlich von Greenwich liegt, so hat man, strenge genommen, um dieses Zeitintervall vom 1. October nach rückwärts zu interpoliren, wodurch sich die Verbesserung: $-1.09 \times \frac{3''.8}{24}$, oder genauer: $-1.09 \times \frac{3''.8 + 4''.5}{48} = -0''.2$, und hiemit als verbesserter Werth, giltig für Octob. 1, 0^h wahre Wiener-Zeit, $\mu = -2796''.8$ ergibt.

+ 5".83, Nachmittag + 2".02 und + 3".09, somit im Mittel $i_v = + 5".23$,
 $i_n = + 2".55$, womit sich

$$h' - h = (r_v - r_n) + (i_n - i_v) = + 1".30 - 2".68 = - 1".38$$

ergibt.

Der Coefficient in (145) wird = 2,191 und somit die an $\frac{1}{2}(u + u')$ anzubringende Correction = $- 0^s.10$, der verbesserte Uhrstand $x = - 1^m 31^s.59$.

Um Nachmittags rechtzeitig zur Beobachtung bereit zu sein, muss man die Zeit der ersten Beobachtung näherungsweise voraus berechnen. Nimmt man in obigem Beispiele den Stand des Chronometers näherungsweise mit $- 1^m 30^s$ an, so hat man:

Chronometer im mittleren Mittag	12 ^h 1 ^m 30 ^s
Zeitgleichung	— 10 24
Chronometer im wahren Mittag	11 51 6 = a
Uhrzeit der letzten Beobachtung Vormittag	9 34 57
Vormittägiger Stundenwinkel	2 16 9 = b
Uhrzeit der ersten Beobachtung Nachmittag	2 7 15 = a + b

Der Unterschied gegen die beobachtete Uhrzeit ($2^h 6^m 42^s$) beträgt 33^s , welcher, bis auf die weggelassenen Bruchtheile der Secunde, der doppelten Summe des Fehlers im angenommenen Uhrstande und der vernachlässigten Mittagsverbesserung gleichkommt.

165. Man kann auch die Nachmittag genommenen Sonnenhöhen mit correspondirenden Höhen verbinden, welche man am folgenden Tage Vormittag nimmt, und daraus die Zeit der Mitternacht ableiten; der Vorgang bleibt derselbe wie vorhin, es ändert sich nur der Ausdruck der von der Declinationsänderung der Sonne abhängigen Correction y , welche an der verbesserten Mitternacht $\frac{1}{2}(u + u')$ anzubringen ist, und hier die Mitternachtsverbesserung genannt wird. Lassen wir wieder u' , t' sich auf die zweite Beobachtung am folgenden Vormittag beziehen, so bleibt die Gl. (m) im vorhergehenden §. unverändert; es ist $\frac{1}{2}(u + u')$ die verbesserte,

$$\frac{1}{2}(u + u') + y$$

die verbesserte Mitternacht, d. i. die Uhrzeit der unteren Culmination der Sonne, und die Stundenwinkel, vom nördlichen Meridian aus nach beiden Seiten gezählt, sind:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}(u + u') + y \right] - u &= \frac{1}{2}(u' - u) + y = \tau + y, \\ u' - \left[\frac{1}{2}(u + u') + y \right] &= \frac{1}{2}(u' - u) - y = \tau - y, \end{aligned}$$

wo $\tau = \frac{1}{2}(u' - u)$ wieder die halbe Zwischenzeit bedeutet. Die Stundenwinkel t , t' , von Süd über West gezählt, werden nun:

$$t = 12^h - (x + y), \quad t' = 12^h + (x - y), \\ = (180^0 - x) - y, \quad = (180^0 + x) - y,$$

folglich:

$$\cos t = -\cos x + y \sin x, \quad \cos t' = -\cos x - y \sin x,$$

und

$$\cos t' - \cos t = -2y \sin x, \quad \cos t' + \cos t = -2 \cos x,$$

welche Werthe in (m) substituirt:

$$y = \Delta \delta \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin x} + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} x} \right)$$

geben. Bezeichnet daher wieder μ die 48stündige Aenderung der Declination der Sonne in Bogensekunden, so hat man für die Mitternachtsverbesserung, in Zeitsecunden:

$$y = \frac{\mu}{720} \left(\frac{x}{\sin x} \operatorname{tg} \varphi + \frac{x}{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} \delta \right), \quad (158)$$

welcher Ausdruck sich von jenem (157) nur durch das Zeichen von φ unterscheidet. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass die Grössen δ und μ , so wie die Zeitgleichung für die betreffende wahre Mitternacht den Ephemeriden zu entnehmen sind. Da die Gauss'sche Tafel für die Grössen:

$A = \frac{1}{720} \frac{x}{\sin x}$ und $B = \frac{1}{720} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$ sich meist nur bis $x = 6^h$ erstreckt

und hier x wohl immer grösser sein wird, so kann man

$$T = 12^h - x$$

setzen und die Gl. (158) in folgender Form schreiben:

$$y = \frac{\mu}{720} \frac{12^h - T}{T} \left(\frac{T}{\sin T} \operatorname{tg} \varphi - \frac{T}{\operatorname{tg} T} \operatorname{tg} \delta \right),$$

oder:

$$y = \mu fA \operatorname{tg} \varphi - \mu fB \operatorname{tg} \delta,$$

wo nun die Logarithmen der Grössen:

$$A = \frac{1}{720} \frac{T}{\sin T}, \quad B = \frac{1}{720} \frac{T}{\operatorname{tg} T}$$

aus der Gauss'schen Tafel mit dem Argumente T genommen werden können; es ist noch eine kleine Tafel beigefügt, die den Logarithmus von

$$f = \frac{12^h - T}{T}$$

gleichfalls mit dem Argumente T gibt.