scheinbare Oerter in den Ephemeriden von 10 zu 10 Tagen aufgeführt sind. Ausser diesen wird nur noch die Sonne zu diesem Zwecke benützt, jedoch minder vortheilhaft, weil die Position derselben nicht so genau bekannt ist, wie die der Fixsterne, und auch die Beobachtung an und für sich nicht die gleiche Schärfe erreichen lässt; dazu kommt, dass die starke Veränderlichkeit der Rectascension und Declination der Sonne die Berechnung der Beobachtungen erschwert. Mond und Planeten werden (ausser im Nothfalle auf der See) zur Zeitbestimmung nicht verwendet. Selbstverständlich sind zur Berechnung der Beobachtungen stets die scheinbaren Oerter der beobachteten Gestirne anzuwenden.

1. Zeitbestimmung aus beobachteten Zenithdistanzen oder aus absoluten Höhen.

156. Beobachtet man, mittelst eines Sextanten oder Universal-Instrumentes, zur Uhrzeit u die Zenithdistanz z eines Gestirnes von bekannter Rectascension und Declination (α, δ), und kennt man die Polhöhe φ des Beobachtungsortes, so findet man aus dem Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Gestirn den Stundenwinkel t mittelst der Gleichung:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}, \tag{140}$$

oder genauer aus der folgenden:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t^2 = \frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-\delta)}{\cos s \cos(s-z)}, \tag{141}$$

wo $$s = \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta + z).$$

Ist das beobachtete Gestirn ein Fixstern, so ist $\alpha + t$ die der Uhrzeit u entsprechende Sternzeit, somit:

$$x = \alpha + t - u \tag{142}$$

der Stand der Uhr gegen Sternzeit zur Uhrzeit u. Geht die Uhr nach mittlerer Zeit, so verwandle man nach §. 36 die Sternzeit $\alpha + t$ in mittlere Zeit M, und es ist dann $x = M - u$ der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit zur Uhrzeit u.

Hat man die Sonne beobachtet, so ist der berechnete Stundenwinkel t sofort die wahre Sonnenzeit; aus dieser findet man durch Anbringung der Zeitgleichung (§. 35) die mittlere Zeit, welche, mit der Uhrzeit verglichen, den Stand der Uhr gegen mittlere Zeit darbietet. Geht die Uhr nach Sternzeit, so gibt Gl. (139) den Stand derselben gegen Sternzeit. Hiebei ist zu beachten, dass die Rectascension und Declination der Sonne, sowie die Zeitgleichung für die Zeit der Beobachtung den Ephemeriden zu entnehmen ist; man erhält diese Zeit, indem man die beobachtete Uhrzeit mit einem angenommenen genäherten Werthe des Uhrstandes auf richtige Ortszeit bringt und diese durch Anbringung des Längenunterschiedes auf den Meridian der Ephemeride reducirt. Ein zu diesem Zwecke hinreichend genauer genäherter Werth des Uhrstandes wird in der Praxis aus früheren Zeitbestimmungen in der Regel zu Gebote stehen; sollte jedoch der aus der Rechnung hervorgehende Uhrstand sich von dem angenommenen zu weit entfernen, so dass der Unterschied schon einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die der Ephemeride zu entnehmenden Grössen erhält, so ist die Rechnung zu wiederholen, indem man nunmehr von dem durch die erste Rechnung erlangten Uhrstande ausgeht.

In Bezug auf die Reduction der beobachteten Zenithdistanz wegen Refraction und Parallaxe enthält §. 57 die erforderliche Anleitung.

Beispiel. 1851, August 21, wurde in Wien zur Uhrzeit $u = 21^h\ 5^m\ 24^s.0$ die Zenithdistanz des oberen Sonnenrandes $z = 51^0\ 23'\ 36''.4$ beobachtet. Der Stand der meteorologischen Instrumente war:

Barom. 333.6 Par. Lin.; Inn. Therm. $+ 18^0.5$ R.; Aeuss. Therm. $+ 19^0.6$ R.

Polhöhe des Beobachtungsortes $\varphi = 48^0\ 11'\ 43''.6$. Genäherter Stand des nach mittlerer Zeit gehenden Chronometers $= - 15^s$.

Benützen wir zur Reduction das Berliner astronomische Jahrbuch, so erhalten wir zunächst $21^h\ 5^m\ 24^s0 - 15^s = 21^h\ 5^m\ 9^s$ als genäherte Wiener mittlere Zeit der Beobachtung, welcher, da Berlin $11^m\ 56^s$ westlich von Wien liegt, die Berliner mittlere Zeit $20^h\ 53^m\ 13^s$ entspricht. Von dieser müssen wir, da das Jahrbuch die Aequatorial-Coordinaten der Sonne, so wie die Zeitgleichung für den wahren Berliner Mittag gibt, auf wahre Zeit übergehen; es ist aber die Zeitgleichung für den nächstgelegenen wahren Mittag (Aug. 22) $+ 2^m\ 48^s$, somit die entsprechende genäherte wahre Berliner Zeit $= 20^h\ 50^m\ 25^s$. Mit dieser als Argument erhalten wir nun durch Interpolation, wobei, wenn die Rechnung scharf geführt werden soll, noch die 2ten Differenzen zu berücksichtigen sind:

Zeitgleichung = M. Zt. — W. Zt. $= + 2^m\ 49^s.83$; $\delta = + 11^0\ 58'\ 29''.1$;

ferner:

Halbmesser der Sonne $= 15'\ 50''.43$; Horizontal-Parallaxe $p = 8''.48$.

Reduciren wir zunächst die beobachtete Zenithdistanz, so erhalten wir:

Beob. scheinb. Zenithdistanz		51^0	$23'$	$36''.4$
Refraction	+	1	8	.47
Halbmesser	+	15	50	.43
Höhenparallaxe	—		6	.65
Wahre Zenithdistanz . .	$z =$	51	40	28 .7

wobei zu bemerken, dass die Refraction mit der beobachteten scheinbaren Zenithdistanz $= 51^0\ 23'.6$, die Höhenparallaxe $= p \sin z$ mit der von der

Refraction befreiten Zenithdistanz des Sonnenmittelpunctes $= 51^0\ 40'.6$ zu berechnen ist.

Mit den gegebenen Daten steht nun die Rechnung nach Gl. (141) folgendermassen:

$$\begin{array}{rrrr}
\varphi = & 48^0 & 11' & 43{\cdot}6 \\
\delta = & 11 & 58 & 29.1 \\
z = & 51 & 40 & 28.7 \\
\hline
2s = & 111 & 50 & 41.4 \\
s = & 55 & 55 & 20.7 \\
\hline
s-\varphi = & 7 & 43 & 37.1 \\
s-\delta = & 43 & 56 & 51.6 \\
s-z = & 4 & 14 & 52.0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\sin(s-\varphi) = & 9.128569 \\
\log\sin(s-\delta) = & 9.841360 \\
\hline
 & 8.969929 \\
 & 9.747238 \\
\hline
 & 9.222691 \\
\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t = & 9.611345 \\
\tfrac{1}{2}t = & 22^0\ 13'\ 37''.5 \\
t = & 44\ \ 27\ \ 15\ .0 = 2^h\ 57^m\ 49^s.00 \text{ östl.} \\
 & \qquad\qquad = 21\ \ 2\ \ 11\ .00.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\cos s = & 9.748432 \\
\log\cos(s-z) = & 9.998806 \\
\hline
 & 9.747238
\end{array}$$

Es ist daher:

Wahre Wiener Zeit der Beobachtung . .	21^h	2^m	$11^s.00$	
Zeitgleichung	$+$	2	49 .83	
Mittlere Wiener Zeit	21	5	0 .83	
Uhrzeit	21	5	24 .00	
Stand der Uhr	$x = -$		23 .17	

Dieser Uhrstand ist von dem angenommenen ($-\ 15^s$) um 8^s verschieden, in welcher Zeit sich die Declination der Sonne nur um $0''.1$ ändert, daher eine Wiederholung der Rechnung unnöthig.

157. Um zu erkennen, unter welchen Umständen die Beobachtung vorzunehmen ist, damit Fehler in den gegebenen Grössen einen möglichst geringen Einfluss auf den berechneten Stundenwinkel erhalten, differenziren wir die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

nach allen darin vorkommenden Grössen, und erhalten mit Rücksicht auf die 2^{te} und 3^{te} der Glgn. (19) und die Glgn. (24):

$$dt = \frac{1}{\sin A \cos\varphi}\, dz - \frac{1}{\operatorname{tg} A \cos\varphi}\, d\varphi + \frac{\cos p}{\sin A \cos\varphi}\, d\delta, \tag{143}$$

wo A das Azimuth und p den parallaktischen Winkel bedeutet. Betrachten wir nun dz, $d\varphi$, $d\delta$ als die Fehler, mit welchen die in die Rechnung genommenen Werthe der Zenithdistanz, Polhöhe und Declination behaftet sind, so drücken die einzelnen Glieder den durch jeden dieser Fehler erzeugten Fehler im Stundenwinkel aus, und erreichen ihren kleinsten Werth für $A = \pm\ 90^0$, d. i. wenn das Gestirn im ersten Vertical beobachtet wird. In diesem Falle wird der Coefficient von $d\varphi$ gleich Null, d. i. im ersten Vertical hat ein Fehler in der Polhöhe gar keinen Einfluss auf die Bestimmung der Zeit. Ebenso wird, da für $A = \pm\ 90^0$ $\sin A$ sein grösster Werth $= 1$ erreicht, der Coefficient von dz ein Minimum, und daher der Einfluss eines Fehlers in der Zenithdistanz auf die Zeit möglichst klein. Dasselbe gilt in Bezug auf den Coefficienten von $d\delta$, in welchem überdies für $A = \pm 90^0$ auch p seinen grössten, also $\cos p$ seinen kleinsten Werth erreicht.

Da ferner die obige Gleichung auch in der Form:

$$dt = \frac{1}{\sin p \cos\delta} dz - \frac{\cos A}{\sin p \cos\delta} d\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} p \cos\delta} d\delta \tag{144}$$

geschrieben werden kann, so ersieht man, dass Sterne von mässiger Declination zu wählen sind, weil $\cos\delta$ mit zunehmendem δ abnimmt, somit die Coefficienten zunehmen. Anderseits sind Beobachtungen in zu grossen Zenithdistanzen, wegen Unsicherheit der Refraction, zu vermeiden.

Der erste der obigen Ausdrücke von dt zeigt übrigens, dass sämmtliche Glieder entgegengesetztes Zeichen erhalten, je nachdem die Beobachtung östlich oder westlich vom Meridiane stattfindet. Beobachtet man daher nacheinander zwei Sterne zu beiden Seiten des Meridianes in nahezu gleichem Azimuth, so wird das Mittel aus den, aus beiden Sternen abgeleiteten Uhrständen frei sein von einem constanten Fehler der Polhöhe und Zenithdistanz.

158. Man beschränkt sich in der Regel nicht darauf, eine einzige Zenithdistanz zu messen, sondern beobachtet deren mehrere nacheinander. Man kann dann den Uhrstand aus jeder einzelnen Zenithdistanz nach der früheren Vorschrift ableiten und aus den so erlangten Werthen das Mittel nehmen, welches Verfahren den nicht zu unterschätzenden Vortheil gewährt, dass der Grad der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe ein Urtheil über die Sicherheit des Mittels ermöglicht, anderseits aber eine mehrmalige Rechnung nach Gl. (140) oder (141) erfordert.*) Man kann daher wünschen, auf kürzerem Wege zu dem, dem vorliegenden Systeme von Beobachtungen entsprechenden wahrscheinlichsten Werthe des Uhrstandes zu gelangen.

Würde sich die Zenithdistanz der Zeit proportional, also gleichförmig ändern, so würde offenbar das Mittel der beobachteten Uhrzeiten dem Mittel der Zenithdistanzen strenge entsprechen, und man könnte sich darauf beschränken, die Rechnung nur mit diesen Mitteln durchzuführen. Dies ist jedoch nur dann zulässig, wenn die Zenithdistanzen symmetrisch zu beiden Seiten des ersten Verticals beobachtet werden, weil bei dieser Stellung des Gestirnes die Zenithdistanz in der That nahe der Zeit proportional sich ändert. In grösserer Entfernung vom 1ten Vertical muss auf die ungleichförmige Aenderung derselben Rücksicht genommen werden.

---

*) Es gewährt in diesem Falle die Anwendung der Gl. (140), da $\sin\varphi \sin\delta$ und $\cos\varphi \cos\delta$ constant bleiben, überwiegenden Vortheil, auch dann, wenn man, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen, genöthiget ist, mit siebenstelligen Logarithmen zu rechnen.

Betrachtet man die Zenithdistanz z als Function des Stundenwinkels t, setzt also $z = f(t)$, und bezeichnet die einer Zunahme $= \tau$ des Stundenwinkels entsprechende Aenderung der Zenithdistanz mit Δz, so hat man nach dem Taylor'schen Theorem:

$$z + \Delta z = f(t+\tau) = f(t) + \frac{dz}{dt}\tau + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\tau^2}{2} + \frac{d^3z}{dt^3}\frac{\tau^3}{2.3} + \ldots,$$

somit, wenn man, für den vorliegenden Zweck genügend genau, bei den zweiten Potenzen von τ stehen bleibt:

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\tau + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\tau^2}{2},$$

wobei Δz und τ in Bogenmaass für den Halbmesser $= 1$ zu verstehen sind. Da in den Anwendungen τ immer ein kleiner Bogen ist, so können wir $\tau = 2 \sin \frac{1}{2}\tau$, also $\frac{1}{2}\tau^2 = 2 \sin \frac{1}{2}\tau^2$ setzen, wodurch

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\tau + \frac{d^2z}{dt^2}.2 \sin \tfrac{1}{2}\tau^2$$

wird. Drücken wir endlich Δz in Bogensecunden, τ (im ersten Gliede des 2ten Theiles) in Zeitsecunden aus, so haben wir $\Delta z \sin 1''$ statt Δz, und $15\,\tau \sin 1''$ statt τ zu schreiben, wodurch:

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}.15\,\tau + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{2 \sin \frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''} \tag{145}$$

wird. Für die in vielen Rechnungen der sphärischen Astronomie erscheinende Grösse $\frac{2 \sin \frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}$ hat man Tafeln berechnet, welche den Werth derselben in Bogensecunden, (oder auch den Logarithmus dieses Werthes) mit dem Argumente τ in Zeit geben.*)

Differenziren wir die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

zweimal, t als unabhängig Veränderliche betrachtend, so erhalten wir:

$$\sin z\, dz = \cos\varphi \cos\delta \sin t\, dt,$$

$$\cos z\, dz^2 + \sin z\, d^2z = \cos\varphi \cos\delta \cos t\, dt^2,$$

und hieraus:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\sin z} \tag{146}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dz}{dt}\operatorname{cotg} t - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \operatorname{cotg} z. \tag{147}$$

---

*) Man findet diese Tafeln in verschiedenen Werken, am vollständigsten (bis $\tau = 1^h\ 40^m$) in: „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen von Dr. Th. Albrecht. Leipzig 1874.“

Man kann diese Ausdrücke durch Einführung des Azimuths und parallaktischen Winkels vereinfachen; man hat nämlich, da $\cos\delta \sin t = \sin z \sin A$ ist:

$$\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \sin A, \tag{148}$$

und hieraus:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \cos\varphi \cos A \frac{dA}{dt},$$

d. i. mit Rücksicht auf Gl. (50):

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\cos\varphi \sin A \cos A \cos p}{\sin t}. \tag{149}$$

Zur numerischen Rechnung sind jedoch, wenigstens bei der im folgenden §. zu behandelnden Aufgabe, die Ausdrücke (146) und (147) bequemer, weil nebst φ und δ auch t und z unmittelbar gegeben sind. Man ersieht übrigens aus dem letzten Ausdrucke, dass für $A = \pm 90^0$, d. i. im 1ten Vertical, $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ wird, also das 2te Glied in (145) verschwindet, und folglich, da bei kleinen Werthen von τ der Einfluss der vernachlässigten höheren Potenzen von τ unmerklich wird, im 1ten Vertical die Aenderung der Zenithdistanz proportional ist der Aenderung des Stundenwinkels oder der Zeit, wie schon früher bemerkt wurde.

159. Es seien nun zu den Uhrzeiten:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ldots\ u_n$$

die Zenithdistanzen:

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ldots\ldots\ z_n$$

beobachtet, und

$$U = \frac{u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n}{n}, \quad Z = \frac{z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_n}{n}$$

die Mittel der Uhrzeiten und Zenithdistanzen, so kann man entweder das Mittel der Zenithdistanzen auf jenes der Uhrzeiten reduciren, oder umgekehrt.

a) Reduction des Mittels der Zenithdistanzen auf das Mittel der Uhrzeiten. Es sei Z_U die gesuchte, dem Mittel U der Zeiten entsprechende Zenithdistanz und man setze:

$$u_1 - U = \tau_1,\quad u_2 - U = \tau_2,\quad u_3 - U = \tau_3,\ \ldots,$$
$$z_1 - Z_U = \Delta z_1,\quad z_2 - Z_U = \Delta z_2,\quad z_3 - Z_U = \Delta z_3,\ \ldots,$$

so sind $\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3 \ldots$ die den Aenderungen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ der Zeit oder des Stundenwinkels entsprechenden Aenderungen der Zenithdistanz, und es bestehen, vermöge (145), die Gleichungen:

$$\Delta z_1 = z_1 - Z_U = \frac{dz}{dt} . 15\,\tau_1 + \frac{d^2z}{dt^2} . \frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau_1^2}{\sin 1''},$$

$$\Delta z_2 = z_2 - Z_U = \frac{dz}{dt} . 15\,\tau_2 + \frac{d^2z}{dt^2} . \frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau_2^2}{\sin 1''},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta z_n = z_n - Z_U = \frac{dz}{dt} . 15\,\tau_n + \frac{d^2z}{dt^2} . \frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau_n^2}{\sin 1''};$$

addiren wir dieselben, dividiren die Summe durch n und beachten, dass $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n = 0$ ist, so kommt:

$$\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} - Z_U = \frac{d^2z}{dt^2} . \frac{1}{n} \Sigma \frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau^2}{\sin 1''},$$

woraus folgt:

$$Z_U = Z - \frac{d^2z}{dt^2} . \frac{1}{n} \Sigma \frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau^2}{\sin 1''}. \tag{150}$$

Das 2te Glied ist die gesuchte Reduction des Mittels der Zenithdistanzen auf das Mittel der Zeiten, und die Rechnung ist nun nach §. 156 mit den Grössen U und Z_U zu führen. $\frac{d^2z}{dt^2}$ findet man mittelst der Ausdrücke (146) und (147), wobei für z und t eigentlich Z_U und der dieser Zenithdistanz, oder der Zeit U entsprechende Stundenwinkel genommen werden sollten, Grössen, welche eben erst gesucht werden; man kann jedoch immer, ohne merklichen Fehler Z für Z_U, und für t jenen Werth nehmen, der sich aus der um den genäherten Uhrstand verbesserten Zeit U mit Zuziehung entweder der Zeitgleichung oder der Rectascension ergibt, je nachdem die Sonne oder ein Stern beobachtet wurde.

b) Reduction des Mittels der Zeiten auf das Mittel der Zenithdistanzen. — Sei U_Z die gesuchte dem Mittel Z der Zenithdistanzen entsprechende Uhrzeit, so ist, da Z_U der Uhrzeit U entspricht, $Z - Z_U$ die Aenderung der Zenithdistanz in der Zeit $U_Z - U$, folglich, vermöge (145): $Z - Z_U = \frac{dz}{dt} . 15\,(U_Z - U)$, da der Unterschied $U_Z - U$ immer so klein ist, dass das zweite Glied verschwindet. Substituirt man in diese Gleichung für $Z - Z_U$ den Werth aus (150), so kommt mit Rücksicht auf (146) und (147):

$$U_Z = U + \frac{1}{15} (\operatorname{cotg} t - \frac{dz}{dt} \operatorname{cotg} z) \frac{1}{n} \Sigma \frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau^2}{\sin 1''}. \tag{151}$$

Das 2te Glied ist die gesuchte Reduction des Mittels der Zeiten auf das Mittel der Zenithdistanzen, und die Rechnung ist nun nach §. 156 mit den Grössen U_Z und Z zu führen. $\frac{dz}{dt}$ ergibt sich aus (146), wo $z = Z$ und für t der bereits aus Z berechnete Werth des Stundenwinkels genommen wird.

Beispiel. 1869, Juli 23, wurden in Wien mit einem Sextanten die folgenden absoluten Höhen des unteren Sonnenrandes beobachtet:

	Sextant Unt.⊙Rd.	Chronometer	τ	$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau^2}{\sin 1''}$
	98° 20′	$21^h\ 39^m\ 52^s.4$	$5^m\ 20^s.88$	56″.15
	40	41 3.6	4 9.68	34.00
	99 0	42 14.2	2 59.08	17.49
	20	43 25.2	1 48.08	6.37
	40	44 36.2	0 37.08	0.75
	100 0	45 48.6	0 35.32	0.68
	20	46 59.6	1 46.32	6.17
	40	48 11.6	2 58.32	17.34
	101 0	49 24.4	4 11.12	34.39
	20	50 37.0	5 23.72	57.15
Mittel	99 50	21 45 13.28		23.05

Barom. . . . $758^{mm}.0$
Inn. Therm. +24°.2 C.
Äuss. „ +24.3 C.

Nivellement des Glas-Horizonts:

	Aussen	Innen
Vor d. Beob.	8.6	8.4
	7.2	9.8
Nach d. Beob.	7.6	8.9
	8 8	7.4

$\varphi = 48^\circ\ 11'\ 59''.0$

Der genäherte Uhrstand war $+ 1^m\ 45^s$; mit diesem und der Längendifferenz $= - 1^h\ 5^m\ 32^s$ wird die dem Mittel der Uhrzeiten $U = 21^h\ 45^m\ 13^s$ entsprechende mittlere Zeit zu Greenwich $= 20^h\ 41^m\ 26^s$, für welche man aus dem Nautical-Almanac erhält:

$$\delta\odot = + 19^\circ\ 51'\ 22''.8, \quad \text{Zeitgleichung} = + 6^m\ 11^s.63$$

Halbmesser der Sonne = 15′ 47″.1; Horizontal-Parallaxe = 8″.44.

Der Collimationsfehler des Sextanten war $= + 21''.2$. Der Werth eines Scalentheils der Libelle $= 4''.76$, womit aus obigen Nivellements die Neigung des Horizontes $= - 2''.86$ und $+ 0''.12$, also im Mittel $= - 1''.4$ erhalten wird.

Man hat also:

Scheinbare doppelte Höhe	99°	50′	0″.0	
Collimationsfehler . . . . +			21 .2	
	99	50	21 .2	
Scheinbare Höhe des unteren ⊙Randes	49	55	10 .6	
Refraction . . . . —			46 .3	
Halbmesser der Sonne . . . . +		15	47 .1	
Höhenparallaxe . . . . +			5 .4	
Correction des Horizontes . . . . —			1 .4	
Wahre Höhe	50	10	15 .4	
„ Zenithdistanz . . . . $Z =$	39	49	44 .6	

Wollen wir nun z. B. nach *b*) das Mittel der Zeiten auf das Mittel der Zenithdistanzen reduciren, so haben wir zunächst den zu diesem Mittel Z gehörigen Stundenwinkel zu berechnen. Es ist:

$\varphi = 48^0\ 11'\ 59''.0$	$\log\sin(s-\varphi) = 9.000276$	$\log\cos(s-Z) = 9.986689$
$\delta = 19\ \ 51\ \ 22\ .8$	$\log\sin(s-\delta) = 9.748529$	$\log\cos s\ \ = 9.769818$
$Z = 39\ \ 49\ \ 44\ .6$	8.748805	9.756507
$2s = 107\ \ 53\ \ 6\ .4$	9.756507	
$s = 53\ \ 56\ \ 33\ .2$	8.992298	
$s-\varphi = 5\ \ 44\ \ 34\ .2$	$\log \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}t = 9.496149$	
$s-\delta = 34\ \ 5\ \ 10\ .4$	$\frac{1}{2}t = 17^0\ 24'\ 10''.4$	
$s-Z = 14\ \ 6\ \ 48\ .6$	$t = 34\ \ 48\ \ 20\ .8 = 2^h\ 19^m\ 13^s.39$ östlich	

Wahre Zeit	$=21$	40	46	61
Zeitgleichung	$+$	6	11	.63
Mittlere Zeit	$=21$	46	58	.24

Die Berechnung der Reduction des Mittels der Uhrzeiten nach Gl. (151) und (146) steht folgendermassen:

$\log\cos\varphi = 9.8238$	$-\dfrac{dz}{dt}\,\mathrm{cotg}\,z = +0.6699$
$\log\cos\delta = 9.9734$	$\mathrm{cotg}\,t = -1.4385$
$\log\sin t = 9.7565\,n$	-0.7686
$9.5537\,n$	$9.8857\,n$
$\log\sin z = 9.8065$	$\log\dfrac{1}{n}\Sigma\dfrac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''} = 1.3627$
$\log\dfrac{dz}{dt} = 9.7472\,n$	Compl. $\log 15 = 8.8239$
$\log\mathrm{cotg}\,z = 0.0788$	log Red. $= 0.0723\,n$
$9.8260\,n$	Reduction $= -1^s.18$

Man hat also:

Mittel der Uhrzeiten	21^h	45^m	$13^s.28$	
Red. a. d. Mittel d. Zenithdistanzen		—	1 .18	
	21	45	12 .10	
Mittlere Zeit	21	46	58 .24	
Uhrstand	$x = +1$		46 .14	um $21^h\ 45^m.2$ Uhrzeit.

Man erhält dasselbe Resultat, wenn man nach *a*) das Mittel der Zenithdistanzen Z auf das Mittel der Uhrzeiten reducirt; in diesem Falle wird $\log\dfrac{d^2z}{dt^2} = 9.6329$, die Reduction nach (150) $= -9''.9$, also:

$$Z_U = 39^0\ 49'\ 44''.6 - 9''.9 = 39^0\ 49'\ 34''.7\text{; hiemit findet man:}$$

	$t =$	2^h	19^m	$12^s.20$
Wahre Zeit	$=$	21	40	47 .80
Zeitgleichung	$=$	$+$ 6		11 .63
Mittlere Zeit	$=$	21	46	59 .43
Uhrzeit	$=$	21	45	13 .28
Uhrstand	$x =$	$+$	1	46 .15.

160. Eine weit grössere Genauigkeit, als mit dem Sextanten durch Beobachtung von Sonnenhöhen, erreicht man durch Messung von Zenithdistanzen eines Fixsternes mit einem guten Universal-Instrumente. Der Vorgang bei der Messung von Zenithdistanzen wurde bereits in §. 123 ausführlich erörtert; es tritt hier nur noch die Beobachtung der Uhrzeit im Momente des Antrittes des Sternes am Horizontalfaden hinzu. Um die Beobachtungen zu vervielfältigen, macht man in jeder Kreislage, der Bewegung des Sternes durch entsprechendes Nachstellen des Instrumentes folgend, mehrere Beobachtungen; bei jeder ist nebst den Mikroskopen des Höhenkreises auch die Alhidadenlibelle abzulesen. Es ist räthlich, den Stand des Barometers und Thermometers vor Beginn und nach Schluss der Beobachtungen aufzuschreiben.

Behufs Berechnung der Beobachtungen hat man zunächst aus den Lesungen beider Mikroskope die Mittel zu bilden, sodann diese Mittel um die Ausweichung der Libelle zu corrigiren (§. 123), d. h. sie auf jene Lage des Mikroskopträgers zu reduciren, bei welcher die Libelle einspielt; endlich dieselben von dem Einflusse der Refraction zu befreien; hiebei ist der Betrag der Refraction zur Lesung zu addiren oder zu subtrahiren, je nachdem diese mit wachsender Zenithdistanz zu- oder abnimmt. — Geht die Uhr nach mittlerer Zeit oder ist überhaupt ihr täglicher Gang gegen Sternzeit so beträchtlich, dass derselbe für die halbe Zeitdauer der Beobachtungen nicht als verschwindend betrachtet werden kann, so sind die beobachteten Uhrzeiten mit dem täglichen Gange auf eine bestimmte Epoche — für welche dann auch der aus der Rechnung hervorgehende Uhrstand gilt — zu reduciren.

Die weitere Reduction kann nun in verschiedener Weise vorgenommen werden.

a) Das directeste Verfahren besteht darin, dass man mit Zuziehung des Zenithpunctes des Kreises die jeder Lesung entsprechende Zenithdistanz sucht. Bezeichnet man irgend eine der nach Obigem reducirten Lesungen bei Kreis Rechts mit R, bei Kreis Links mit L, mit Z die entsprechende Zenithdistanz des Sternes, mit $Z.P.$ den Zenithpunct, so ist nach §. (123):

$$\text{bei K. R.: } z = R - Z.P.; \quad \text{bei K. L.: } z = Z.P. - L,$$

vorausgesetzt, dass bei K. R. die Lesung mit wachsender Zenithdistanz zunimmt; im Gegenfalle ist: $z = Z.P. - R.$, beziehungsweise $z = L - Z.P.$

Man berechne sodann, am bequemsten nach Gl. (140), die zu diesen Zenithdistanzen gehörigen Stundenwinkel t, welche mittelst der Gleichung: $x = t + \alpha - u$, wo u die zugehörige beobachtete Uhrzeit und α die Rectascension des Sternes bedeuten, eben so viele Werthe des Uhrstandes x ergeben, aus welchen das Mittel genommen wird. Dieses Verfahren gewährt den Vortheil, dass der Grad der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe von x sofort die Sicherheit des Mittels, insoferne diese nur von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängt, erkennen lässt.

Der Zenithpunct kann immer leicht, entweder durch Beobachtung eines irdischen Objectes (§. 123) oder aus den Beobachtungen selbst gefunden werden; übrigens genügt ein genäherter Werth, da ein kleiner Fehler in demselben die aus den Beobachtungen in beiden Kreislagen hervorgehenden Werthe des Uhrstandes in entgegengesetzter Weise beeinflusst, und daher im Mittel aus je zwei, entgegengesetzten Kreislagen angehörigen Bestimmungen sich aufhebt.

b) Man kann auch sämmtliche Lesungen auf eine bestimmte Epoche, z. B. das Mittel U aller Uhrzeiten reduciren, indem man nach Gl. (145) zu jeder der Uhrzeit u entsprechenden Lesung die Grösse:

$$\varDelta z = -\left[\frac{dz}{dt}\,15\,(u-U) + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(u-U)^2}{\sin 1''}\right]$$

hinzulegt; die Werthe der Differentialquotienten sind nach den Glgn. (146) und (147) für die Zeit U zu berechnen, und die Grösse $\varDelta z$ mit ihrem Zeichen oder mit entgegengesetztem Zeichen zur Lesung hinzu zu legen, je nachdem diese mit wachsender Zenithdistanz zu- oder abnimmt. Bezeichnet man nun die Mittel der Lesungen bei K. R. und K. L. mit M_r und M_l, so ist:

$$Z = \tfrac{1}{2}(M_r - M_l)$$

die zur Uhrzeit U gehörige Zenithdistanz, und, wenn T den hiemit berechneten Stundenwinkel bedeutet, $z = T + \alpha - U$ der Uhrstand zur Zeit U. Bei dieser Reductionsmethode bietet der Grad der Uebereinstimmung der für jede Kreislage erhaltenen auf die Zeit U reducirten Lesungen eine Controle für die Güte der Beobachtungen; im Vergleich zur vorhergehenden gewährt sie übrigens keine beträchtliche Ersparniss an Rechnung.

c) Man kann endlich sofort je zwei, verschiedenen Kreislagen angehörige Beobachtungen, und zwar die letzte, vorletzte, u. s. w. der 1ten Kreislage, beziehungsweise mit der 1ten, 2ten u. s. w. der 2ten Kreislage verbinden. Bezeichnet man nämlich mit R, L zwei solche gegen die Mitte symmetrisch liegende Lesungen, mit u, u' die zugehörigen Uhrzeiten, mit $Z.P.$ den Zenithpunct des Höhenkreises, so ist:

bei K. R. die Zenithdistanz zur Zeit u: $z = R - Z.P.$

„ K. L. „ „ „ „ u': $z' = Z.P. - L$.

Sei ferner Z_n die dem Mittel $U_n = \frac{1}{2}(u + u')$ der Zeiten entsprechende Zenithdistanz, so hat man vermöge der Gl. (145) für:

$$\text{K. R.:}\quad z = R - Z.P. = Z_n + \frac{dz}{dt}\,15\,(u - U_n) + \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(u - U_n)^2}{\sin 1''},$$

$$\text{K. L.:}\quad z' = Z.P. - L = Z_n + \frac{dz}{dt}\,15\,(u' - U_n) + \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(u' - U_n)^2}{\sin 1''},$$

oder, wenn man die halbe Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u' - u) = \varDelta u$ setzt, wodurch $u - U_n = -\varDelta u$, $u' - U_n = +\varDelta u$ wird:

$$\text{für K. R.:}\quad z = R - Z.P. = Z_n - \frac{dz}{dt}\,15\,\varDelta u + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''},$$

$$\text{„ K. L.:}\quad z' = Z.P. - L = Z_n + \frac{dz}{dt}\,15\,\varDelta u + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''},$$

aus welchen Gleichungen*) durch Addition und Division mit 2 die der Uhrzeit U_n entsprechende Zenithdistanz:

$$Z_n = \tfrac{1}{2}(R - L) - \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''} \tag{152}$$

folgt, wo der Zahlenwerth des Differenzialquotienten für das Mittel U_n der Zeiten zu berechnen, und der Werth von $\dfrac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''}$ mit dem Argumente $\varDelta u$ = halbe Zwischenzeit aus der Tafel zu nehmen ist.

Auf diese Art erhält man die den Uhrzeiten U_1, U_2, U_3, . . . entsprechenden Zenithdistanzen Z_1, Z_2, Z_3, ..., und kann nun entweder für jede dieser Zenithdistanzen den Stundenwinkel rechnen, deren Verbindung mit den zugehörigen Zeiten U_1, U_2, . . . eben so viele Werthe des Uhrstandes liefert; oder — wenn man auf die durch die Uebereinstimmung dieser Werthe gebotene Controle verzichten will — die Rechnung nur einmal mit den Mitteln U und Z obiger Zeiten und Zenithdistanzen ausführen. Strenge genommen sollten im letzteren Falle die Mittel U, Z nach §. 159 auf einander reducirt werden; folgen jedoch, wie dies wohl meistens der Fall ist, die Beobachtungen in nahe gleichen Zeitintervallen aufeinander, so werden die Zeiten U_1, U_2, . . . so wenig von einander verschieden sein, dass ohne merklichen Fehler das Mittel derselben als zu dem Mittel der Zenithdistanzen gehörig betrachtet werden kann. Aus demselben Grunde wird es auch meistens gestattet sein, den Werth des Differenzialquotienten $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ in (152) nicht für jeden der Werthe U_n, sondern blos für das Mittel U der Zeiten zu berechnen.

---

*) Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man den Zenithpunct:

$$Z.\,P. = \tfrac{1}{2}(R + L) + \frac{dz}{dt}\,15\varDelta u,$$

wobei jedoch zu bemerken, dass das Zeichen des zweiten Gliedes verschieden ausfällt, je nach dem Sinne, in welchem die Bezifferung an der Theilung lauft, und je nachdem die 1te Beobachtung bei K. R. oder K. L. gemacht wird.

Man kann, wie man sich leicht überzeugt, den Ausdruck allgemein in folgender Form schreiben:

$$Z.\,P. = \tfrac{1}{2}(R + L) \pm 15\,\frac{dz}{dt}\cdot\frac{u_l - u_r}{2},$$

wo u_r, u_l die Uhrzeiten der Beobachtungen, beziehungsweise bei K. R. und K. L. bedeuten, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem bei K. R. mit wachsender Zenithdistanz die Lesung zu- oder abnimmt. Zur Erlangung eines genäherten Werthes des Zenithpunctes genügt es, den Werth des Differenzialquotienten aus zwei Beobachtungen in derselben Kreislage abzuleiten. (Vergl. d. folg. Beispiel).

161. An den scheinbaren, aus den Ephemeriden genommenen Ort des Sternes ist, wenn die grösste Genauigkeit erreicht werden soll, noch die tägliche Aberration (S. 174):

$$d\alpha = 0''.311 \cos\varphi \cos t \sec\delta$$

$$d\delta = 0\ .311 \cos\varphi \sin t \sin\delta$$

anzubringen, wo für t der Stundenwinkel zur Zeit der Mitte der Beobachtungen genommen wird. Einfacher ist es jedoch, die betreffende Correction an der berechneten Zenithdistanz, dem Stundenwinkel, oder zuletzt am Uhrstande anzubringen. Aus der Gl. (144), §. 157, folgt nämlich, wenn man $d\varphi = 0$ setzt und berücksichtiget, dass vermöge der Gl. (1) $dt = - d\alpha$ ist:

$$dz = - \cos p\, d\delta - \cos\delta \sin p\, d\alpha,$$

wo p der parallaktische Winkel. Substituirt man in diese Gleichung obige Werthe von $d\alpha$ und $d\delta$, so kommt als Correction der Zenithdistanz:

$$dz = - 0''.311 \cos\varphi\, (\cos p \sin t \sin\delta + \sin p \cos t),$$

d. i.:

$$dz = - 0''.311 \cos\varphi \cos z \sin A, \tag{153}$$

wo A das Azimuth bedeutet. Da ferner $dt = \frac{dt}{dz}\, dz$, und $\frac{dt}{dz} = \frac{1}{\cos\varphi \sin A}$ so wird die Correction des Stundenwinkels oder des Uhrstandes x in Zeitsecunden:

$$dt = dx = - 0^s.021 \cos z. \tag{154}$$

Endlich ist noch der Einfluss einer Biegung des Fernrohres, wenn diese merklich, zu berücksichtigen. Ist a die Constante der Biegung im Horizonte in Bogensecunden, so erfordert nach §. 125 die Zenithdistanz die Correction:

$$dz = + a \sin z,$$

folglich der Stundenwinkel oder der Uhrstand die Correction:

$$dt = dx = \tfrac{1}{15}\, a \frac{\sin z}{\cos\varphi \sin A} = \tfrac{1}{15}\, a \frac{\sin z^2}{\cos\delta \cos\varphi \sin t}. \tag{155}$$

162. Beispiel. 1869, Juli 4, wurden zu Wien mit einem Universalinstrumente von Starke und Kammerer mit 10zölligem Verticalkreise die folgenden Zenithdistanzen des Sternes α Coronae bor. auf der Ostseite beobachtet:

Kreislage	Uhr	Mikroskop I	Mikroskop II	Libelle a	Libelle i	Barom.	Aeuss. Therm.
						Millim.	Cels.
K. R.	$11^h\ 53^m\ 53^s.9$	$256^0\ 0'\ 7''.2$	$0'\ 18''.7$	13.5	16.1	$11^h 40^m$: 753.0	$23^0.5$
	55 57 .9	255 39 37 .0	39 47 .7	13.1	16.6		$24^0.2$ C.
	58 11 .5	255 17 34 .6	17 45 .8	13.2	16.4		
	12 0 20 .0	254 56 23 .0	56 34 .8	13.0	16.8		
	2 38 .4	254 33 39 .7	33 50 .6	12.9	16.9		
K. L.	12 6 59 .2	166 9 27 .5	9 24 .9	18.2	11.7		
	9 10 .0	166 30 56 .0	30 53 .1	18.0	11.8		
	11 27 .7	166 53 28 .1	53 25 .8	17.5	12.4		
	13 25 .5	167 12 40 .7	12 37 .7	17.5	12.5	$12^h 25^m$: 753.0	23 .1
	15 48 .2	167 35 57 .8	35 55 .5	17.1	12.8		24.0

Polhöhe $\varphi = 48^0\ 11'\ 59''.0$. Der scheinbare Ort des Sternes war nach dem Nautical Almanac:

$$\alpha = 15^h\ 29^m\ 9^s.94, \quad \delta = +\ 27^0\ 9'\ 36''.5.$$

Die Uhr ging nach Sternzeit; der tägliche Gang war $+\ 0^s.74$, somit für die halbe Zeitdauer der Beobachtungen (11^m) verschwindend. Der Werth eines Niveautheiles $\mu = 2''.257$; die Lesung bei K. R., wie obige Beobachtungen zeigen, mit wachsender Zenithdistanz zunehmend. Der Zenithpunct genähert $= 210^0\ 0'\ 15''$.

Das folgende Tableau enthält zunächst die Reduction der Lesungen, wobei die genäherten scheinbaren Zenithdistanzen, wie sie aus den rohen Lesungen mit Zuziehung des Zenithpunctes*) folgen, behufs Berechnung der Refraction angesetzt sind.

---

*) Aus den 2 letzten Beobachtungen in der 1ten Kreislage findet man:

$$\text{Differenz der Lesungen} = 22'\ 43''.5 = 1363''.5$$
$$\text{,,}\quad\text{,,}\quad \text{Zeiten} = 2^m\ 18^s.4 = 2076'',$$

somit $\log \frac{dz}{dt} = \log \frac{1363.5}{2076.0} = 9.8174\,n$ (negativ, weil die Beobachtung auf der Ostseite). Aus der letzten Beobachtung bei K. R. und der 1ten bei K. L. folgt nun:

$$u_l - u_r = +\ 4^m\ 20^s.8 = +\ 260^s.8$$
$$\tfrac{15}{2}(u_l - u_r) = +\ 1956'' \ldots \log 3.2914$$
$$9.8174\,n$$
$$3.1088\,n$$
$$15\frac{dz}{dt}\,\frac{u_l - u_r}{2} = -\ 1285'' = -\ 21'\ 25''.$$

$$\begin{aligned} R &= 254^0\ 33'\ 49''.6 \\ L &= 166\quad 9\quad 33\ .5 \\ R + L &= 420\quad 43\quad 23\ .1 \\ \tfrac{1}{2}(R + L) &= 210\quad 21\quad 41 \\ &-\quad 21\quad 25 \\ \text{Z. P.} &= 210\quad 0\quad 16 \end{aligned}$$

Bei obigen Reductionen ist Z. P. $= 210^0\ 0'\ 15''$ angenommen.

Kreis-lage	Mittel der Mikroskope	Corr. der Libelle	Scheinb. Zenith-Distanz	Refraction	Reducirte Lesung
K. R.	256° 0′ 12″.95	+ 2″.39	46° 0′	+ 56″.79	256° 1′ 12″.67
	255 39 42 .35	+ 3 .95	45 39	+ 56 .13	255 40 42 .43
	255 17 40 .20	+ 3 .61	45 17	+ 55 .42	255 18 39 .23
	254 56 28 .90	+ 4 .29	44 56	+ 54 .74	254 57 27 .93
	254 33 45 .15	+ 4 .51	44 33	+ 54 .03	254 34 43 .69
K. L.	166 9 26 .20	+ 7 .33	43 51	— 52 .71	166 8 40 .82
	166 30 54 .55	+ 6 .99	43 29	— 52 .06	166 30 9 .48
	166 53 26 .95	+ 5 .75	43 7	— 51 .38	166 52 41 .32
	167 12 39 .20	+ 5 .64	42 48	— 50 .82	167 11 54 .02
	167 35 56 .65	+ 4 .85	42 24	— 50 .13	167 35 11 .37

Die weitere Berechnung nach dem oben unter a) angegebenen Verfahren steht, mit Benützung der Formel (140) und der Wittstein'schen Tafel der Additions- und Subtractionslogarithmen, wie folgt:

$$\log \sin\varphi \sin\delta = 9.5318526, \quad \log \cos\varphi \cos\delta = 9.7730840.$$

Kreis-lage	Wahre Zenith-Distanz z	log cos z	log cos z — log sin φ sin δ = B	A	A + log sin φ sin δ
K. R.	46° 0′ 57″.67	9.8416455	0.3097929	0.0173525	9.5492051
	45 40 27 .43	8443134	3124608	0225684	5544210
	45 18 24 .23	8471475	3152949	0280762	5599288
	44 57 12 .93	8498365	3179839	0332708	5651234
	44 34 28 .69	8526854	3208328	0387419	5705945
K. L.	43 51 34 .18	8579601	3261075	0487856	5806382
	43 30 5 .52	8605512	3286986	0536795	5855321
	43 7 33 .68	8632348	3313822	0587210	5905736
	42 48 20 .98	8654953	3336427	0629466	5947992
	42 25 3 .63	8682018	3363492	0679809	5998335

Kreis-lage	log cos t	Östl. Stunden-winkel — t	— t	Sternzeit $\alpha + t$	$\alpha + t - u$ = x
K. R.	9.7761211	53° 19′ 48″.90	3^h 33^m 19^s.26	11^h 55^m 50^s.68	+ 1^m 56.78
	7813370	52 48 47 .04	3 31 15 .14	11 57 54 .80	56.90
	7868448	52 15 22 .35	3 29 1 .49	12 0 8 .45	56.95
	7920394	51 43 14 .05	3 26 52 .94	12 2 17 .00	57.00
	7975105	51 8 42 .21	3 24 34 .81	12 4 35 .13	56.73
K. L.	8075542	50 3 24 .37	3 20 13 .62	12 8 56 .32	57.12
	8124481	49 30 39 .07	3 18 2 .60	12 11 7 .34	57.34
	8174896	48 56 14 .05	3 15 44 .94	12 13 25 .00	57.30
	8217152	48 26 50 .46	3 13 47 .36	12 15 22 .58	57.08
	8267495	47 51 8 .97	3 11 24 .60	12 17 45 .34	57.14

Es folgt also im Mittel bei K. R.: $x = +1^m\ 56^s.872$

„ K. L.: $x = +1\ \ 57\ .196$

Mittel $x = +1\ \ 57\ .03$ um $12^h\ 5^m$ Uhrzeit.

Will man sich der unter *b*) angeführten Reductionsmethode bedienen, so sind zuvörderst die Differenzialquotienten $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ für das Mittel $U = 12^h\ 4^m\ 47^s.23$ der Uhrzeiten zu berechnen. Mit dem genäherten Uhrstande $+1^m\ 55^s$ findet man den dieser Zeit entsprechenden Stundenwinkel $t = -3^h\ 22^m\ 27^s.7 = -50^0\ 36'\ 18''$ und die zugehörige Zenithdistanz $z = 44^0\ 13'\ 10''$, mit welchen Werthen man nach den Gleichungen (146) und (147):

$$\log 15\,\frac{dz}{dt} = 0.993749,\quad \log \frac{d^2z}{dt^2} = 8.98192$$

erhält. Hiemit steht die Rechnung folgendermassen:

Kreislage	τ	$\log \tau$	$\log \frac{dz}{dt}\cdot 15\tau$	$\frac{dz}{dt}\cdot 15\tau$	$\log \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}$	$\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}$ log	num.	Reduction auf das Mittel der Uhrzeiten $\varDelta z$	Lesungen reducirt auf das Mittel der Uhrzeiten
	m s			° ′ ″			″	° ′ ″	° ′ ″
K. R.	−10 53.33	2.815133	3.808882	+1 47 19.95	2.36692	1.34884	+22.33	−1 47 42.28	254 13 30.39
	− 8 49.33	2.723727	3.717476	+1 26 57.6	2.18413	1.16605	+14.66	−1 27 12.32	13 30.11
	− 6 35.73	2.597399	3.591148	+1 5 0.75	1.93150	0.91342	+ 8.19	−1 5 8.94	13 30.29
	− 4 27.23	2.426885	3.420634	+0 43 54.11	1.59049	0.57241	+ 3.74	−0 43 57.85	13 30.08
	− 2 8.83	2.110017	3.103766	+0 21 9.89	0.95676	9.93868	+ 0.87	−0 21 10.76	13 32.93
K. L.	+ 2 11.97	2.120475	3.114224	−0 21 40.84	0.97768	9.95960	+ 0.91	+0 21 39.93	165 47 0.89
	+ 4 22.77	2.419576	3.413325	−0 43 10.15	1.57596	0.55788	+ 3.61	+0 43 6.54	47 2.94
	+ 6 40.47	2.602570	3.596319	−1 5 47.47	1.94184	0.92376	+ 8.39	+1 5 39.08	47 2.24
	+ 8 38.27	2.714556	3.708305	−1 25 8.64	2 16579	1.14771	+14.05	+1 24 54.59	46 59.43
	+11 0.97	2.820182	3.813931	−1 48 35.25	2.37701	1.35893	+22.85	+1 48 12.40	46 58.97

Hieraus folgt: Mittel der Lesungen bei K. R.: $M_r = 254^0\ 13'\ 30''.76$

„ „ „ „ K. L.: $M_l = 165\ \ 47\ \ 0\ .90$

$M_r - M_l = \ \ 88\ \ 26\ \ 29\ .86$

$Z = \ \ 44\ \ 13\ \ 14\ .93$

Berechnet man mit dieser dem Mittel $U = 12^h\ 4^m\ 47^s.23$ entsprechenden Zenithdistanz den zugehörigen Stundenwinkel T, so findet man:

$$\begin{array}{rl} T = & -\ 3^h\ 22^m\ 25^s.68 \\ \alpha = & 15\ \ 29\ \ \ 9\ .94 \\ \hline \text{Sternzeit} = & 12\ \ \ 6\ \ 44\ .26 \\ \text{Uhrzeit} = & 12\ \ \ 4\ \ 47\ .23 \\ \hline x = & +\ \ 1\ \ 57\ .03 \text{ wie oben.} \end{array}$$

Die Reduction endlich nach dem unter *c*) angegebenen Verfahren ist folgende:

$u + u'$	$u' - u$	$\frac{1}{2}(u+u')$	$\frac{1}{2}(u'-u) = \Delta u$	log $\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta u^2}{\sin 1''}$	$\frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta u^2}{\sin 1''}$ log	num.	$R - L$	$\frac{1}{2}(R - L)$	z
h m s	m s	h m s	m s			"	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
24 9 37.6	4 20.8	12 4 48.80	2 10.40	0.96728	9.94920	+ 0.89	88 26 2.87	44 13 1.43	44 13 0.54
9 30.0	8 50.0	45.00	4 25.00	1.58321	0.56513	+ 3.67	27 18.45	13 39.23	13 35.56
9 39.2	13 16.2	49.60	6 38.10	1.93668	0.91860	+ 8.29	25 57.91	12 58.95	12 50.66
9 23.4	17 27.6	41.70	8 43.80	2.17501	1.15693	+14.35	28 48.41	14 24.21	14 9.86
9 42.1	21 54.3	51.05	10 57.15	2.37198	1.35390	+22.59	26 1.30	13 0.65	12 38.06
Mittel $U =$ 12 4 47.23								Mittel $Z =$ 44 13 14.94	

Diese Werthe von Z und U sind dieselben, wie bei der vorhergehenden Reduction, und geben daher denselben Uhrstand.

Bei dem angewendeten Instrumente war die Biegung des Fernrohrs im Horizonte $a = 0''.98$. Hiernach wird nach den Formeln (155) und (154):

$$
\begin{array}{lr}
\text{Correction des Uhrstandes wegen Biegung} = & -\,0^s.069 \\
\text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,, tägl. Aberr.} = & -\,0\,.015 \\
\hline
 & -\,0\,.08
\end{array}
$$

folglich der Uhrstand $x = +\,1^m\ 56^s.95$ um $12^h\ 4^m.8$ Uhrzeit.

Bestimmen wir noch den wahrscheinlichen Fehler einer nach diesem Verfahren ausgeführten Zeitbestimmung. Bezeichnet man mit ε_1 den wahrscheinlichen Fehler einer Ablesung eines Mikroskopes, mit ε_2 jenen der Ablesung eines Blasenendes der Libelle in Scalentheilen, so wird, nach den in §. 19 d. Einl. entwickelten Sätzen, der w. F. des Mittels der Lesungen beider Mikroskope $= \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \varepsilon_1$; der w. F. der Niveau-Correction $\frac{1}{2}k(i - a)$ wird $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,k\,\varepsilon_2$, folglich, wenn ε_z den w. F. einer abgelesenen Zenithdistanz, ε_t den w. F. des daraus berechneten Stundenwinkels bedeutet:

$$\varepsilon_z^2 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\,k^2\,\varepsilon_2^2, \quad \varepsilon_t^2 = \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \varepsilon_z^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 (\varepsilon_1^2 + k^2\varepsilon_2^2).$$

Bezeichnet man ferner mit ε_x den w. F. eines aus dem Stundenwinkel t mittelst der Gleichung $x = \alpha + t - u$ abgeleiteten Uhrstandes, mit ε_u den w. F. der beobachteten Uhrzeit u des Fadenantrittes des Sternes, so wird, wenn wir vorläufig α als fehlerfrei betrachten, $\varepsilon_x^2 = \varepsilon_t^2 + \varepsilon_u^2$, wo für ε_u der Ausdruck (139) zu nehmen ist. Man hat daher:

$$\varepsilon_x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 (\varepsilon_1^2 + k^2\,\varepsilon_2^2) + a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \sec\delta^2 \operatorname{cosec} p^2,$$

und dieser Ausdruck gibt den zufälligen wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, mit welchem der aus e i n e r beobachteten Zenithdistanz abgeleitete Uhrstand behaftet ist. Hat man nun in jeder Kreislage $\frac{1}{2}n$, also im Ganzen n Zenithdistanzen beobachtet, so wird

$$\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{n}}$$

die wahrscheinliche, aus den zufälligen Beobachtungsfehlern hervorgehende Unsicherheit des im Mittel aus n Beobachtungen folgenden Uhrstandes sein.

Hiezu kommt nun noch der Einfluss der constanten Fehler in z, φ, δ, welcher durch Gl. (143) gegeben ist, und in der Rectascension α. Der durch diese Fehlerquellen im Uhrstande erzeugte wahrscheinliche Fehler ε_c ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\varepsilon_c^2 = C_z^2\, dz^2 + C_\varphi^2\, d\varphi^2 + C_\delta^2\, d\delta^2 + d\alpha^2,$$

wo C_z, C_φ, C_δ die Coefficienten von dz, $d\varphi$, $d\delta$, in Gl. (143), durch 15 dividirt, bedeuten.

Hiernach wird der Gesammtbetrag des wahrscheinlichen Fehlers, mit welchem der aus der Zeitbestimmung resultirende Uhrstand behaftet ist:

$$E = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_x^2}{n} + \varepsilon_c^2}.$$

Wenden wir nun diese Formeln auf obiges Beispiel an. Bei dem benützten Instrumente war $v = 72$, und es kann nach der Erfahrung $\varepsilon_1 = 0''.4$, $\varepsilon_2 = 0.1$ angenommen werden. Setzt man noch $a = 0^s.07$, $b = 3^s.18$, so findet man, da $\frac{1}{15}\frac{dt}{dz} = 0.1014$ und $p = 47^0\ 36'$ ist:

$$\varepsilon_z = 0''.3247, \quad \varepsilon_t = 0^s.03292, \quad \varepsilon_u = 0^s.09705, \quad \varepsilon_x = 0^s.1023,$$

somit den aus den zufälligen Beobachtungsfehlern entspringenden w. F. des Mittels:

$$\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{10}} = 0^s.03237.$$

Von den constanten Fehlern setzt sich jener der Zenithdistanz, dz, aus drei Theilen zusammen, nämlich dem constanten Fehler in der Refraction, in der Biegung des Fernrohrs, und dem periodischen Theilungsfehler; setzt man jeden dieser Fehler $= 0''.25$, so wird $dz^2 = 3\,(0.25)^2 = 0.1875$. Nimmt man ferner an: $d\varphi = 1''$, $d\delta = 0''.3$, $d\alpha = 0''.3 \sec\delta = 0^s.02 \sec\delta = 0^s.02248$, und berechnet mit dem der Mitte der Beobachtungen entsprechenden Azimuthe $A = -\ 80^0\ 22'$ die Coefficienten: $C_z = -\ 0.1014$, $C_\varphi = -\ 0.0170$, $C_\delta = -\ 0.0684$, so kommt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_c^2 &= (0.001928 + 0.000289) + (0.000421 + 0.000505)\\ &= 0.002217 + 0.000926\end{aligned}$$

somit:

$$\varepsilon_c^2 = 0.003143, \quad \varepsilon_c = 0^s.05604;$$

endlich:

$$E = \pm \sqrt{0.001048 + 0.003143} = \pm\, 0^s.065.$$

Man ersieht hieraus, dass der Einfluss der constanten Fehler ($0^s.056$) jenen der zufälligen Beobachtungsfehler ($0^s.032$) erheblich übersteigt, und es würde dies in noch höherem Grade der Fall sein, wenn nicht im vorliegenden Beispiele der Einfluss des Fehlers der Polhöhe schon nahezu unmerklich wäre, weil der Stern in der Nähe des 1ten Verticals beobachtet ist. Handelt es sich daher um eine möglichst scharfe Zeitbestimmung, so wird man dafür zu sorgen haben, den Einfluss der constanten Fehler möglichst zu beseitigen. Der eine von den Fehlern in der Position des Sternes herrührende Theil: $\sqrt{0.000926} = 0^s.030$ kann selbstverständlich nicht weggeschafft werden, wohl aber der andere aus den constanten Fehlern in der Polhöhe und Zenithdistanz entspringende und in der Regel beträchtlichere: $\sqrt{0.002217} = 0^s.047$. Der Fehler in der Polhöhe wird eliminirt, wenn man den Stern bei seinem Durchgange durch den 1ten Vertical nahe symmetrisch zu beiden Seiten desselben, oder wenn man zwei Sterne zu beiden Seiten des Meridians in möglichst nahe gleichem Azimuth beobachtet, und aus den aus beiden Sternen folgenden und mit dem Uhrgange auf dieselbe Epoche reducirten Uhrständen das Mittel nimmt. Wurden überdies in letzterem Falle die beiden Sterne auch in nahe gleicher Zenithdistanz beobachtet (was voraussetzt, dass zwei Sterne von nahe gleicher Declination gewählt wurden), so verschwindet aus dem Mittel auch der Einfluss der constanten Fehler in der Zenithdistanz. Auf diese Weise, und mit einem guten Instrumente ausgeführt, lässt dann diese Methode der Zeitbestimmung eine beträchtliche Schärfe erreichen.

Bei der vorstehenden Fehlerberechnung wurde übrigens der von den zufälligen Beobachtungsfehlern herrührende Theil: $\varepsilon_x : \sqrt{10} = 0^s.03237$ aus nach anderen Erfahrungen angenommenen Werthen mit Zuziehung der Formel (139) abgeleitet, um einen durchschnittlichen Werth in die Rechnung einzuführen; unter günstigen Umständen kann derselbe auch kleiner werden, wie dies in der That im vorliegenden Beispiele der Fall ist. Man kann ihn nämlich auch direct aus den zehn bei der ersten Reduction erhaltenen Werthen von x ableiten, indem man dieselben beziehungsweise mit den zwei für jede Kreislage daraus folgenden Mitteln vergleicht, und findet auf diesem Wege den w. F. des aus einer Zenithdistanz berechneten Uhrstandes $\varepsilon_x = 0^s.0731$, folglich des Mittels: $\varepsilon_x : \sqrt{10} = 0^s.0231$.

2. Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen.

163. Diese Methode besteht darin, dass man die Uhrzeiten beobachtet, zu welchen ein Gestirn dieselbe Höhe vor und nach der Culmination erreicht, und beruht darauf, dass gleichen Höhen östlich und westlich vom Meridian auch gleiche Stundenwinkel entsprechen, wenn das Gestirn in der Zwischen-