Für die Constanten a und b ergeben sich aus zahlreichen von verschiedenen Beobachtern an Meridian-Instrumenten angestellten Beobachtungen die folgenden Mittelwerthe:

bei der Aug- und Ohrmethode: $a = 0^s.07$, $b = 3^s.18$,

bei der Registrirmethode: $a = 0\;.05$, $b = 3\;.18$.

Die Registrirmethode gewährt daher, in Folge des kleineren Werthes von a, eine grössere Genauigkeit als die Aug- und Ohrmethode, so lange das zweite Glied nicht einen das erste erheblich überwiegenden Werth erreicht. Zur Anwendung dieser Ausdrücke wird sich im Folgenden mehrfache Gelegenheit bieten.

SIEBENTES CAPITEL.

DIE ZEITBESTIMMUNG.

155. Unter Zeitbestimmung versteht man die Aufgabe, die einer bestimmten Uhrzeit entsprechende Ortszeit (Sternzeit, mittlere oder wahre Zeit), oder, was dasselbe bedeutet, die Differenz beider, d. i. den irgend einer Uhrzeit entsprechenden Stand der Uhr gegen Ortszeit zu bestimmen. (Vergl. §. 142).

Jede Methode der Zeitbestimmung kommt darauf hinaus, den der Uhrzeit u entsprechenden Stundenwinkel t eines Gestirnes, dessen Position bekannt ist, durch Beobachtung zu finden. Ist nämlich x der Stand der Uhr gegen Sternzeit, so ist $u + x$ die der Uhrzeit u entsprechende Sternzeit, somit, wenn α die Rectascension des beobachteten Gestirnes, vermöge der Gl. (1): $u + x = \alpha + t$, woraus x erhalten wird, wenn nebst α der zur Uhrzeit u gehörige Stundenwinkel t bekannt ist.

Eine directe Messung des Stundenwinkels ist jedoch mit der hier erforderlichen Genauigkeit nicht ausführbar; man beobachtet daher andere, einer scharfen Messung zugängliche Grössen, aus welchen der Stundenwinkel durch Rechnung gefunden werden kann. Da sich zu diesem Zwecke mehrfache Wege darbieten, so ergeben sich verschiedene Methoden der Zeitbestimmung, von welchen im Folgenden die vorzüglichsten dargestellt werden sollen.

Wie aus Obigem erhellt, hängt der Uhrstand direct von der Rectascension des beobachteten Gestirnes ab, überdies wird bei manchen Methoden der Zeitbestimmung auch ein genauer Werth der Declination zur Berechnung des Stundenwinkels erfordert; es sind daher zur Zeitbestimmung Gestirne zu beobachten, deren Position möglichst genau bekannt ist, also gut bestimmte Fixsterne, namentlich die sogenannten Haupt- oder Fundamentalsterne, deren scheinbare Oerter in den Ephemeriden von 10 zu 10 Tagen aufgeführt sind. Ausser diesen wird nur noch die Sonne zu diesem Zwecke benützt, jedoch minder vortheilhaft, weil die Position derselben nicht so genau bekannt ist, wie die der Fixsterne, und auch die Beobachtung an und für sich nicht die gleiche Schärfe erreichen lässt; dazu kommt, dass die starke Veränderlichkeit der Rectascension und Declination der Sonne die Berechnung der Beobachtungen erschwert. Mond und Planeten werden (ausser im Nothfalle auf der See) zur Zeitbestimmung nicht verwendet. Selbstverständlich sind zur Berechnung der Beobachtungen stets die scheinbaren Oerter der beobachteten Gestirne anzuwenden.

1. Zeitbestimmung aus beobachteten Zenithdistanzen oder aus absoluten Höhen.

156. Beobachtet man, mittelst eines Sextanten oder Universal-Instrumentes, zur Uhrzeit u die Zenithdistanz z eines Gestirnes von bekannter Rectascension und Declination (α, δ), und kennt man die Polhöhe φ des Beobachtungsortes, so findet man aus dem Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Gestirn den Stundenwinkel t mittelst der Gleichung:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}, \tag{140}$$

oder genauer aus der folgenden:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t^2 = \frac{\sin(s - \varphi) \sin(s - \delta)}{\cos s \cos(s - z)}, \tag{141}$$

wo
$$s = \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta + z).$$

Ist das beobachtete Gestirn ein Fixstern, so ist $\alpha + t$ die der Uhrzeit u entsprechende Sternzeit, somit:

$$x = \alpha + t - u \tag{142}$$

der Stand der Uhr gegen Sternzeit zur Uhrzeit u. Geht die Uhr nach mittlerer Zeit, so verwandle man nach §. 36 die Sternzeit $\alpha + t$ in mittlere Zeit M, und es ist dann $x = M - u$ der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit zur Uhrzeit u.

Hat man die Sonne beobachtet, so ist der berechnete Stundenwinkel t sofort die wahre Sonnenzeit; aus dieser findet man durch Anbringung der Zeitgleichung (§. 35) die mittlere Zeit, welche, mit der Uhrzeit verglichen, den Stand der Uhr gegen mittlere Zeit darbietet. Geht die Uhr nach Sternzeit, so gibt Gl. (139) den Stand derselben gegen Sternzeit. Hiebei ist zu beachten, dass die Rectascension und Declination der Sonne, sowie die Zeitgleichung für die Zeit der Beobachtung den Ephemeriden zu entnehmen ist; man erhält diese Zeit, indem man die beobachtete Uhrzeit mit einem angenommenen genäherten Werthe des Uhrstandes auf richtige Ortszeit bringt und diese durch Anbringung des Längenunterschiedes auf den Meridian der Ephemeride reducirt. Ein zu diesem Zwecke hinreichend genauer genäherter Werth des Uhrstandes wird in der Praxis aus früheren Zeitbestimmungen in der Regel zu Gebote stehen; sollte jedoch der aus der Rechnung hervorgehende Uhrstand sich von dem angenommenen zu weit entfernen, so dass der Unterschied schon einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die der Ephemeride zu entnehmenden Grössen erhält, so ist die Rechnung zu wiederholen, indem man nunmehr von dem durch die erste Rechnung erlangten Uhrstande ausgeht.

In Bezug auf die Reduction der beobachteten Zenithdistanz wegen Refraction und Parallaxe enthält §. 57 die erforderliche Anleitung.

Beispiel. 1851, August 21, wurde in Wien zur Uhrzeit $u = 21^h\ 5^m\ 24^s.0$ die Zenithdistanz des oberen Sonnenrandes $z = 51^0\ 23'\ 36''.4$ beobachtet. Der Stand der meteorologischen Instrumente war:

Barom. 333.6 Par. Lin.; Inn. Therm. $+ 18^0.5$ R.; Aeuss. Therm. $+ 19^0.6$ R.

Polhöhe des Beobachtungsortes $\varphi = 48^0\ 11'\ 43''.6$. Genäherter Stand des nach mittlerer Zeit gehenden Chronometers $= - 15^s$.

Benützen wir zur Reduction das Berliner astronomische Jahrbuch, so erhalten wir zunächst $21^h\ 5^m\ 24^s0 - 15^s = 21^h\ 5^m\ 9^s$ als genäherte Wiener mittlere Zeit der Beobachtung, welcher, da Berlin $11^m\ 56^s$ westlich von Wien liegt, die Berliner mittlere Zeit $20^h\ 53^m\ 13^s$ entspricht. Von dieser müssen wir, da das Jahrbuch die Aequatorial-Coordinaten der Sonne, so wie die Zeitgleichung für den wahren Berliner Mittag gibt, auf wahre Zeit übergehen; es ist aber die Zeitgleichung für den nächstgelegenen wahren Mittag (Aug. 22) $+ 2^m\ 48^s$, somit die entsprechende genäherte wahre Berliner Zeit $= 20^h\ 50^m\ 25^s$. Mit dieser als Argument erhalten wir nun durch Interpolation, wobei, wenn die Rechnung scharf geführt werden soll, noch die 2ten Differenzen zu berücksichtigen sind:

Zeitgleichung = M. Zt. — W. Zt. $= + 2^m\ 49^s.83$; $\delta = + 11^0\ 58'\ 29''.1$;

ferner:

Halbmesser der Sonne $= 15'\ 50''.43$; Horizontal-Parallaxe $p = 8''.48$.

Reduciren wir zunächst die beobachtete Zenithdistanz, so erhalten wir:

Beob. scheinb. Zenithdistanz		51°	23′	36″.4
Refraction	+	1	8	.47
Halbmesser	+	15	50	.43
Höhenparallaxe	—		6	.65
Wahre Zenithdistanz . .	$z =$	51	40	28 .7

wobei zu bemerken, dass die Refraction mit der beobachteten scheinbaren Zenithdistanz $= 51^0\ 23'.6$, die Höhenparallaxe $= p \sin z$ mit der von der

Refraction befreiten Zenithdistanz des Sonnenmittelpunctes $= 51^0\ 40'.6$ zu berechnen ist.

Mit den gegebenen Daten steht nun die Rechnung nach Gl. (141) folgendermassen:

$$\begin{array}{rrrr}
\varphi = & 48^0 & 11' & 43.6 \\
\delta = & 11 & 58 & 29.1 \\
z = & 51 & 40 & 28.7 \\
\hline
2s = & 111 & 50 & 41.4 \\
s = & 55 & 55 & 20.7 \\
\hline
s-\varphi = & 7 & 43 & 37.1 \\
s-\delta = & 43 & 56 & 51.6 \\
s-z = & 4 & 14 & 52.0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\sin(s-\varphi) = & 9.128569 \\
\log\sin(s-\delta) = & 9.841360 \\
\hline
& 8.969929 \\
& 9.747238 \\
\hline
& 9.222691 \\
\log \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}t = & 9.611345 \\
\tfrac{1}{2}t = & 22^0\ 13'\ 37''.5 \\
t = & 44\ \ 27\ \ 15\ .0 = 2^h\ 57^m\ 49^s.00 \text{ östl.} \\
& \qquad\qquad\quad = 21\ \ 2\ \ 11\ .00.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\cos s = & 9.748432 \\
\log\cos(s-z) = & 9.998806 \\
\hline
& 9.747238
\end{array}$$

Es ist daher:

Wahre Wiener Zeit der Beobachtung . .		21^h	2^m	$11^s.00$
Zeitgleichung	$+$		2	49 .83
Mittlere Wiener Zeit		21	5	0 .83
Uhrzeit		21	5	24 .00
Stand der Uhr	$x = -$			23 .17

Dieser Uhrstand ist von dem angenommenen ($-\ 15^s$) um 8^s verschieden, in welcher Zeit sich die Declination der Sonne nur um $0''.1$ ändert, daher eine Wiederholung der Rechnung unnöthig.

157. Um zu erkennen, unter welchen Umständen die Beobachtung vorzunehmen ist, damit Fehler in den gegebenen Grössen einen möglichst geringen Einfluss auf den berechneten Stundenwinkel erhalten, differenziren wir die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

nach allen darin vorkommenden Grössen, und erhalten mit Rücksicht auf die 2^{te} und 3^{te} der Glgn. (19) und die Glgn. (24):

$$dt = \frac{1}{\sin A \cos\varphi}\,dz - \frac{1}{\mathrm{tg} A \cos\varphi}\,d\varphi + \frac{\cos p}{\sin A \cos\varphi}\,d\delta, \tag{143}$$

wo A das Azimuth und p den parallaktischen Winkel bedeutet. Betrachten wir nun dz, $d\varphi$, $d\delta$ als die Fehler, mit welchen die in die Rechnung genommenen Werthe der Zenithdistanz, Polhöhe und Declination behaftet sind, so drücken die einzelnen Glieder den durch jeden dieser Fehler erzeugten Fehler im Stundenwinkel aus, und erreichen ihren kleinsten Werth für $A = \pm\ 90^0$, d. i. wenn das Gestirn im ersten Vertical beobachtet wird. In diesem Falle wird der Coefficient von $d\varphi$ gleich Null, d. i. im ersten Vertical hat ein Fehler in der Polhöhe gar keinen Einfluss auf die Bestimmung der Zeit. Ebenso wird, da für $A = \pm\ 90^0$ $\sin A$ sein grösster Werth $= 1$ erreicht, der Coefficient von dz ein Minimum, und daher der Einfluss eines Fehlers in der Zenithdistanz auf die Zeit möglichst klein. Dasselbe gilt in Bezug auf den Coefficienten von $d\delta$, in welchem überdies für $A = \pm 90^0$ auch p seinen grössten, also $\cos p$ seinen kleinsten Werth erreicht.

Da ferner die obige Gleichung auch in der Form:

$$dt = \frac{1}{\sin p \cos\delta} dz - \frac{\cos A}{\sin p \cos\delta} d\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} p \cos\delta} d\delta \qquad (144)$$

geschrieben werden kann, so ersieht man, dass Sterne von mässiger Declination zu wählen sind, weil $\cos\delta$ mit zunehmendem δ abnimmt, somit die Coefficienten zunehmen. Anderseits sind Beobachtungen in zu grossen Zenithdistanzen, wegen Unsicherheit der Refraction, zu vermeiden.

Der erste der obigen Ausdrücke von dt zeigt übrigens, dass sämmtliche Glieder entgegengesetztes Zeichen erhalten, je nachdem die Beobachtung östlich oder westlich vom Meridiane stattfindet. Beobachtet man daher nacheinander zwei Sterne zu beiden Seiten des Meridianes in nahezu gleichem Azimuth, so wird das Mittel aus den, aus beiden Sternen abgeleiteten Uhrständen frei sein von einem constanten Fehler der Polhöhe und Zenithdistanz.

158. Man beschränkt sich in der Regel nicht darauf, eine einzige Zenithdistanz zu messen, sondern beobachtet deren mehrere nacheinander. Man kann dann den Uhrstand aus jeder einzelnen Zenithdistanz nach der früheren Vorschrift ableiten und aus den so erlangten Werthen das Mittel nehmen, welches Verfahren den nicht zu unterschätzenden Vortheil gewährt, dass der Grad der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe ein Urtheil über die Sicherheit des Mittels ermöglicht, anderseits aber eine mehrmalige Rechnung nach Gl. (140) oder (141) erfordert.*) Man kann daher wünschen, auf kürzerem Wege zu dem, dem vorliegenden Systeme von Beobachtungen entsprechenden wahrscheinlichsten Werthe des Uhrstandes zu gelangen.

Würde sich die Zenithdistanz der Zeit proportional, also gleichförmig ändern, so würde offenbar das Mittel der beobachteten Uhrzeiten dem Mittel der Zenithdistanzen strenge entsprechen, und man könnte sich darauf beschränken, die Rechnung nur mit diesen Mitteln durchzuführen. Dies ist jedoch nur dann zulässig, wenn die Zenithdistanzen symmetrisch zu beiden Seiten des ersten Verticals beobachtet werden, weil bei dieser Stellung des Gestirnes die Zenithdistanz in der That nahe der Zeit proportional sich ändert. In grösserer Entfernung vom 1ten Vertical muss auf die ungleichförmige Aenderung derselben Rücksicht genommen werden.

---

*) Es gewährt in diesem Falle die Anwendung der Gl. (140), da $\sin\varphi \sin\delta$ und $\cos\varphi \cos\delta$ constant bleiben, überwiegenden Vortheil, auch dann, wenn man, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen, genöthiget ist, mit siebenstelligen Logarithmen zu rechnen.

Betrachtet man die Zenithdistanz z als Function des Stundenwinkels t, setzt also $z = f(t)$, und bezeichnet die einer Zunahme $= \tau$ des Stundenwinkels entsprechende Aenderung der Zenithdistanz mit $\varDelta z$, so hat man nach dem Taylor'schen Theorem:

$$z + \varDelta z = f(t+\tau) = f(t) + \frac{dz}{dt}\tau + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\tau^2}{2} + \frac{d^3z}{dt^3}\frac{\tau^3}{2\,.\,3} + \cdots,$$

somit, wenn man, für den vorliegenden Zweck genügend genau, bei den zweiten Potenzen von τ stehen bleibt:

$$\varDelta z = \frac{dz}{dt}\tau + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\tau^2}{2},$$

wobei $\varDelta z$ und τ in Bogenmaass für den Halbmesser $= 1$ zu verstehen sind. Da in den Anwendungen τ immer ein kleiner Bogen ist, so können wir $\tau = 2 \sin\frac{1}{2}\tau$, also $\frac{1}{2}\tau^2 = 2 \sin\frac{1}{2}\tau^2$ setzen, wodurch

$$\varDelta z = \frac{dz}{dt}\tau + \frac{d^2z}{dt^2}\,.\,2 \sin\tfrac{1}{2}\tau^2$$

wird. Drücken wir endlich $\varDelta z$ in Bogensecunden, τ (im ersten Gliede des 2^{ten} Theiles) in Zeitsecunden aus, so haben wir $\varDelta z \sin 1''$ statt $\varDelta z$, und $15\,\tau \sin 1''$ statt τ zu schreiben, wodurch:

$$\varDelta z = \frac{dz}{dt}\,.\,15\,\tau + \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{2 \sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''} \tag{145}$$

wird. Für die in vielen Rechnungen der sphärischen Astronomie erscheinende Grösse $\dfrac{2 \sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}$ hat man Tafeln berechnet, welche den Werth derselben in Bogensecunden, (oder auch den Logarithmus dieses Werthes) mit dem Argumente τ in Zeit geben.*)

Differenziren wir die Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

zweimal, t als unabhängig Veränderliche betrachtend, so erhalten wir:

$$\sin z\; dz = \cos\varphi \cos\delta \sin t\; dt,$$

$$\cos z\; dz^2 + \sin z\; d^2z = \cos\varphi \cos\delta \cos t\; dt^2,$$

und hieraus:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\sin z} \tag{146}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dz}{dt}\operatorname{cotg} t - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \operatorname{cotg} z. \tag{147}$$

---

*) Man findet diese Tafeln in verschiedenen Werken, am vollständigsten (bis $\tau = 1^h\ 40^m$) in: „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen von Dr. Th. Albrecht. Leipzig 1874."

Man kann diese Ausdrücke durch Einführung des Azimuths und parallaktischen Winkels vereinfachen; man hat nämlich, da $\cos\delta \sin t = \sin z \sin A$ ist:

$$\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \sin A, \tag{148}$$

und hieraus:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \cos\varphi \cos A \frac{dA}{dt},$$

d. i. mit Rücksicht auf Gl. (50):

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\cos\varphi \sin A \cos A \cos p}{\sin t}. \tag{149}$$

Zur numerischen Rechnung sind jedoch, wenigstens bei der im folgenden §. zu behandelnden Aufgabe, die Ausdrücke (146) und (147) bequemer, weil nebst φ und δ auch t und z unmittelbar gegeben sind. Man ersieht übrigens aus dem letzten Ausdrucke, dass für $A = \pm 90^0$, d. i. im 1ten Vertical, $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ wird, also das 2te Glied in (145) verschwindet, und folglich, da bei kleinen Werthen von τ der Einfluss der vernachlässigten höheren Potenzen von τ unmerklich wird, im 1ten Vertical die Aenderung der Zenithdistanz proportional ist der Aenderung des Stundenwinkels oder der Zeit, wie schon früher bemerkt wurde.

159. Es seien nun zu den Uhrzeiten:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ldots\ u_n$$

die Zenithdistanzen:

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ldots\ldots\ z_n$$

beobachtet, und

$$U = \frac{u_1 + u_2 + \ldots . + u_n}{n}, \quad Z = \frac{z_1 + z_2 + \ldots . + z_n}{n}$$

die Mittel der Uhrzeiten und Zenithdistanzen, so kann man entweder das Mittel der Zenithdistanzen auf jenes der Uhrzeiten reduciren, oder umgekehrt.

a) Reduction des Mittels der Zenithdistanzen auf das Mittel der Uhrzeiten. Es sei Z_U die gesuchte, dem Mittel U der Zeiten entsprechende Zenithdistanz und man setze:

$$\begin{array}{lll} u_1 - U = \tau_1, & u_2 - U = \tau_2, & u_3 - U = \tau_3, \ldots, \\ z_1 - Z_U = \Delta z_1, & z_2 - Z_U = \Delta z_2, & z_3 - Z_U = \Delta z_3, \ldots, \end{array}$$

so sind $\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3 \ldots$ die den Aenderungen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ der Zeit oder des Stundenwinkels entsprechenden Aenderungen der Zenithdistanz, und es bestehen, vermöge (145), die Gleichungen:

$$\Delta z_1 = z_1 - Z_U = \frac{dz}{dt} \,.\, 15\,\tau_1 + \frac{d^2z}{dt^2} \,.\, \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau_1^2}{\sin 1''},$$

$$\Delta z_2 = z_2 - Z_U = \frac{dz}{dt} \,.\, 15\,\tau_2 + \frac{d^2z}{dt^2} \,.\, \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau_2^2}{\sin 1''},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta z_n = z_n - Z_U = \frac{dz}{dt} \,.\, 15\,\tau_n + \frac{d^2z}{dt^2} \,.\, \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau_n^2}{\sin 1''};$$

addiren wir dieselben, dividiren die Summe durch n und beachten, dass $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots\ldots + \tau_n = 0$ ist, so kommt:

$$\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} - Z_U = \frac{d^2z}{dt^2} \,.\, \frac{1}{n} \Sigma \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''},$$

woraus folgt:

$$Z_U = Z - \frac{d^2z}{dt^2} \,.\, \frac{1}{n} \Sigma \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}. \tag{150}$$

Das 2te Glied ist die gesuchte Reduction des Mittels der Zenithdistanzen auf das Mittel der Zeiten, und die Rechnung ist nun nach §. 156 mit den Grössen U und Z_U zu führen. $\frac{d^2z}{dt^2}$ findet man mittelst der Ausdrücke (146) und (147), wobei für z und t eigentlich Z_U und der dieser Zenithdistanz, oder der Zeit U entsprechende Stundenwinkel genommen werden sollten, Grössen, welche eben erst gesucht werden; man kann jedoch immer, ohne merklichen Fehler Z für Z_U, und für t jenen Werth nehmen, der sich aus der um den genäherten Uhrstand verbesserten Zeit U mit Zuziehung entweder der Zeitgleichung oder der Rectascension ergibt, je nachdem die Sonne oder ein Stern beobachtet wurde.

b) Reduction des Mittels der Zeiten auf das Mittel der Zenithdistanzen. — Sei U_Z die gesuchte dem Mittel Z der Zenithdistanzen entsprechende Uhrzeit, so ist, da Z_U der Uhrzeit U entspricht, $Z - Z_U$ die Aenderung der Zenithdistanz in der Zeit $U_Z - U$, folglich, vermöge (145): $Z - Z_U = \frac{dz}{dt} \,.\, 15\,(U_Z - U)$, da der Unterschied $U_Z - U$ immer so klein ist, dass das zweite Glied verschwindet. Substituirt man in diese Gleichung für $Z - Z_U$ den Werth aus (150), so kommt mit Rücksicht auf (146) und (147):

$$U_Z = U + \frac{1}{15}\left(\cotg t - \frac{dz}{dt} \cotg z\right) \frac{1}{n} \Sigma \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}. \tag{151}$$

Das 2te Glied ist die gesuchte Reduction des Mittels der Zeiten auf das Mittel der Zenithdistanzen, und die Rechnung ist nun nach §. 156 mit den Grössen U_Z und Z zu führen. $\frac{dz}{dt}$ ergibt sich aus (146), wo $z = Z$ und für t der bereits aus Z berechnete Werth des Stundenwinkels genommen wird.

Beispiel. 1869, Juli 23, wurden in Wien mit einem Sextanten die folgenden absoluten Höhen des unteren Sonnenrandes beobachtet:

	Sextant Unt.⊙Rd.	Chronometer	τ	$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \tau^2}{\sin 1''}$	
	98° 20′	$21^h\ 39^m\ 52^s.4$	$5^m\ 20^s.88$	56″.15	Barom. . . . $758^{mm}.0$
	40	41 3 .6	4 9 .68	34 .00	Inn. Therm. +24°.2 C.
	99 0	42 14 .2	2 59 .08	17 .49	Äuss. „ +24 .3 C.
	20	43 25 .2	1 48 .08	6 .37	Nivellement des Glas-Horizonts:
	40	44 36 .2	0 37 .08	0 .75	
	100 0	45 48 .6	0 35 .32	0 .68	Aussen Innen
	20	46 59 .6	1 46 .32	6 .17	Vor d. Beob. 8.6 8.4
	40	48 11 .6	2 58 .32	17 .34	7.2 9.8
	101 0	49 24 .4	4 11 .12	34 .39	Nach d. Beob. 7.6 8.9
	20	50 37 .0	5 23 .72	57 .15	8 8 7.4
Mittel	99 50	21 45 13.28		23 .05	$\varphi = 48^\circ\ 11'\ 59''.0$

Der genäherte Uhrstand war $+ 1^m\ 45^s$; mit diesem und der Längendifferenz $= - 1^h\ 5^m\ 32^s$ wird die dem Mittel der Uhrzeiten $U = 21^h\ 45^m\ 13^s$ entsprechende mittlere Zeit zu Greenwich $= 20^h\ 41^m\ 26^s$, für welche man aus dem Nautical-Almanac erhält:

$$\delta\odot = + 19^\circ\ 51'\ 22''.8, \quad \text{Zeitgleichung} = + 6^m\ 11^s.63$$

Halbmesser der Sonne = 15′ 47″.1; Horizontal-Parallaxe = 8″.44.

Der Collimationsfehler des Sextanten war $= + 21''.2$. Der Werth eines Scalentheils der Libelle $= 4''.76$, womit aus obigen Nivellements die Neigung des Horizontes $= - 2''.86$ und $+ 0''.12$, also im Mittel $= - 1''.4$ erhalten wird.

Man hat also:

Scheinbare doppelte Höhe		99°	50′	0″.0
Collimationsfehler	+			21 .2
		99	50	21 .2
Scheinbare Höhe des unteren ⊙Randes		49	55	10 .6
Refraction	—			46 .3
Halbmesser der Sonne	+		15	47 .1
Höhenparallaxe	+			5 .4
Correction des Horizontes	—			1 .4
Wahre Höhe		50	10	15 .4
„ Zenithdistanz	$Z =$	39	49	44 .6

Wollen wir nun z. B. nach *b*) das Mittel der Zeiten auf das Mittel der Zenithdistanzen reduciren, so haben wir zunächst den zu diesem Mittel Z gehörigen Stundenwinkel zu berechnen. Es ist:

$\varphi = 48^0\ 11'\ 59''.0$	$\log\sin(s-\varphi) = 9.000276$	$\log\cos(s-Z) = 9.986689$
$\delta = 19\ 51\ 22\ .8$	$\log\sin(s-\delta) = 9.748529$	$\log\cos s = 9.769818$
$Z = 39\ 49\ 44\ .6$	8.748805	9.756507
$2s = 107\ 53\ 6\ .4$	9.756507	
$s = 53\ 56\ 33\ .2$	8.992298	
$s-\varphi = 5\ 44\ 34\ .2$	$\log \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}t = 9.496149$	
$s-\delta = 34\ 5\ 10\ .4$	$\frac{1}{2}t = 17^0\ 24'\ 10''.4$	
$s-Z = 14\ 6\ 48\ .6$	$t = 34\ 48\ 20\ .8 = 2^h\ 19^m\ 13^s.39$ östlich	

Wahre Zeit	$=21$	40	46	61
Zeitgleichung	$+$	6	11	.63
Mittlere Zeit	$=21$	46	58	.24

Die Berechnung der Reduction des Mittels der Uhrzeiten nach Gl. (151) und (146) steht folgendermassen:

$$\begin{aligned} \log\cos\varphi &= 9.8238 \\ \log\cos\delta &= 9.9734 \\ \log\sin t &= 9.7565\,n \\ &\quad\ 9.5537\,n \\ \log\sin z &= 9.8065 \\ \log\frac{dz}{dt} &= 9.7472\,n \\ \log\mathrm{cotg}\,z &= 0.0788 \\ &\quad\ 9.8260\,n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\frac{dz}{dt}\,\mathrm{cotg}\,z &= +\,0.6699 \\ \mathrm{cotg}\,t &= -\,1.4385 \\ &\quad -\,0.7686 \\ &\quad\ 9.8857\,n \\ \log\frac{1}{n}\Sigma\frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''} &= 1.3627 \\ \text{Compl. }\log 15 &= 8.8239 \\ \log\text{ Red.} &= 0.0723\,n \\ \text{Reduction} &= -\,1^s.18 \end{aligned}$$

Man hat also:

Mittel der Uhrzeiten		21^h	45^m	$13^s.28$
Red. a. d. Mittel d. Zenithdistanzen			—	1 .18
		21	45	12 .10
Mittlere Zeit		21	46	58 .24
Uhrstand	$x =$	$+\,1$		46 .14 um $21^h\ 45^m.2$ Uhrzeit.

Man erhält dasselbe Resultat, wenn man nach a) das Mittel der Zenithdistanzen Z auf das Mittel der Uhrzeiten reducirt; in diesem Falle wird $\log\dfrac{d^2z}{dt^2} = 9.6329$, die Reduction nach (150) $= -\ 9''.9$, also:

$$Z_U = 39^0\ 49'\ 44''.6 - 9''.9 = 39^0\ 49'\ 34''.7\,;$$ hiemit findet man:

	$t =$	2^h	19^m	$12^s.20$
Wahre Zeit	$=$	21	40	47 .80
Zeitgleichung	$=$	$+$	6	11 .63
Mittlere Zeit	$=$	21	46	59 .43
Uhrzeit	$=$	21	45	13 .28
Uhrstand	$x =$	$+$	1	46 .15.

160. Eine weit grössere Genauigkeit, als mit dem Sextanten durch Beobachtung von Sonnenhöhen, erreicht man durch Messung von Zenithdistanzen eines Fixsternes mit einem guten Universal-Instrumente. Der Vorgang bei der Messung von Zenithdistanzen wurde bereits in §. 123 ausführlich erörtert; es tritt hier nur noch die Beobachtung der Uhrzeit im Momente des Antrittes des Sternes am Horizontalfaden hinzu. Um die Beobachtungen zu vervielfältigen, macht man in jeder Kreislage, der Bewegung des Sternes durch entsprechendes Nachstellen des Instrumentes folgend, mehrere Beobachtungen; bei jeder ist nebst den Mikroskopen des Höhenkreises auch die Alhidadenlibelle abzulesen. Es ist räthlich, den Stand des Barometers und Thermometers vor Beginn und nach Schluss der Beobachtungen aufzuschreiben.

Behufs Berechnung der Beobachtungen hat man zunächst aus den Lesungen beider Mikroskope die Mittel zu bilden, sodann diese Mittel um die Ausweichung der Libelle zu corrigiren (§. 123), d. h. sie auf jene Lage des Mikroskopträgers zu reduciren, bei welcher die Libelle einspielt; endlich dieselben von dem Einflusse der Refraction zu befreien; hiebei ist der Betrag der Refraction zur Lesung zu addiren oder zu subtrahiren, je nachdem diese mit wachsender Zenithdistanz zu- oder abnimmt. — Geht die Uhr nach mittlerer Zeit oder ist überhaupt ihr täglicher Gang gegen Sternzeit so beträchtlich, dass derselbe für die halbe Zeitdauer der Beobachtungen nicht als verschwindend betrachtet werden kann, so sind die beobachteten Uhrzeiten mit dem täglichen Gange auf eine bestimmte Epoche — für welche dann auch der aus der Rechnung hervorgehende Uhrstand gilt — zu reduciren.

Die weitere Reduction kann nun in verschiedener Weise vorgenommen werden.

a) Das directeste Verfahren besteht darin, dass man mit Zuziehung des Zenithpunctes des Kreises die jeder Lesung entsprechende Zenithdistanz sucht. Bezeichnet man irgend eine der nach Obigem reducirten Lesungen bei Kreis Rechts mit R, bei Kreis Links mit L, mit Z die entsprechende Zenithdistanz des Sternes, mit $Z.P.$ den Zenithpunct, so ist nach §. (123):

$$\text{bei K. R.: } z = R - Z.P.; \quad \text{bei K. L.: } z = Z.P. - L,$$

vorausgesetzt, dass bei K. R. die Lesung mit wachsender Zenithdistanz zunimmt; im Gegenfalle ist: $z = Z.P. - R.$, beziehungsweise $z = L - Z.P.$

Man berechne sodann, am bequemsten nach Gl. (140), die zu diesen Zenithdistanzen gehörigen Stundenwinkel t, welche mittelst der Gleichung: $x = t + \alpha - u$, wo u die zugehörige beobachtete Uhrzeit und α die Rectascension des Sternes bedeuten, eben so viele Werthe des Uhrstandes x ergeben, aus welchen das Mittel genommen wird. Dieses Verfahren gewährt den Vortheil, dass der Grad der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe von x sofort die Sicherheit des Mittels, insoferne diese nur von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängt, erkennen lässt.

Der Zenithpunct kann immer leicht, entweder durch Beobachtung eines irdischen Objectes (§. 123) oder aus den Beobachtungen selbst gefunden werden; übrigens genügt ein genäherter Werth, da ein kleiner Fehler in demselben die aus den Beobachtungen in beiden Kreislagen hervorgehenden Werthe des Uhrstandes in entgegengesetzter Weise beeinflusst, und daher im Mittel aus je zwei, entgegengesetzten Kreislagen angehörigen Bestimmungen sich aufhebt.

b) Man kann auch sämmtliche Lesungen auf eine bestimmte Epoche, z. B. das Mittel U aller Uhrzeiten reduciren, indem man nach Gl. (145) zu jeder der Uhrzeit u entsprechenden Lesung die Grösse:

$$\varDelta z = -\left[\frac{dz}{dt}\,15\,(u - U) + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(u - U)^2}{\sin 1''}\right]$$

hinzulegt; die Werthe der Differentialquotienten sind nach den Glgn. (146) und (147) für die Zeit U zu berechnen, und die Grösse $\varDelta z$ mit ihrem Zeichen oder mit entgegengesetztem Zeichen zur Lesung hinzu zu legen, je nachdem diese mit wachsender Zenithdistanz zu- oder abnimmt. Bezeichnet man nun die Mittel der Lesungen bei K. R. und K. L. mit M_r und M_l, so ist:

$$Z = \tfrac{1}{2}(M_r - M_l)$$

die zur Uhrzeit U gehörige Zenithdistanz, und, wenn T den hiemit berechneten Stundenwinkel bedeutet, $z = T + \alpha - U$ der Uhrstand zur Zeit U. Bei dieser Reductionsmethode bietet der Grad der Uebereinstimmung der für jede Kreislage erhaltenen auf die Zeit U reducirten Lesungen eine Controle für die Güte der Beobachtungen; im Vergleich zur vorhergehenden gewährt sie übrigens keine beträchtliche Ersparniss an Rechnung.

c) Man kann endlich sofort je zwei, verschiedenen Kreislagen angehörige Beobachtungen, und zwar die letzte, vorletzte, u. s. w. der 1^{ten} Kreislage, beziehungsweise mit der 1^{ten}, 2^{ten} u. s. w. der 2^{ten} Kreislage verbinden. Bezeichnet man nämlich mit R, L zwei solche gegen die Mitte symmetrisch liegende Lesungen, mit u, u' die zugehörigen Uhrzeiten, mit $Z.P.$ den Zenithpunct des Höhenkreises, so ist:

bei K. R. die Zenithdistanz zur Zeit u: $z = R - Z.P.$

" K. L. " " " " u': $z' = Z.P. - L.$

Sei ferner Z_n die dem Mittel $U_n = \frac{1}{2}(u + u')$ der Zeiten entsprechende Zenithdistanz, so hat man vermöge der Gl. (145) für:

$$\text{K. R.}: \; z = R - Z.P. = Z_n + \frac{dz}{dt}\,15\,(u - U_n) + \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(u - U_n)^2}{\sin 1''},$$

$$\text{K. L.}: \; z' = Z.P. - L = Z_n + \frac{dz}{dt}\,15\,(u' - U_n) + \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}(u' - U_n)^2}{\sin 1''},$$

oder, wenn man die halbe Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u' - u) = \varDelta u$ setzt, wodurch $u - U_n = -\varDelta u$, $u' - U_n = +\varDelta u$ wird:

$$\text{für K. R.}: \; z = R - Z.P. = Z_n - \frac{dz}{dt}\,15\,\varDelta u + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''},$$

$$\text{,, K. L.}: \; z' = Z.P. - L = Z_n + \frac{dz}{dt}\,15\,\varDelta u + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''},$$

aus welchen Gleichungen*) durch Addition und Division mit 2 die der Uhrzeit U_n entsprechende Zenithdistanz:

$$Z_n = \tfrac{1}{2}(R - L) - \frac{d^2z}{dt^2} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta u^2}{\sin 1''} \tag{152}$$

folgt, wo der Zahlenwerth des Differenzialquotienten für das Mittel U_n der Zeiten zu berechnen, und der Werth von $\frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta u^2}{\sin 1''}$ mit dem Argumente Δu = halbe Zwischenzeit aus der Tafel zu nehmen ist.

Auf diese Art erhält man die den Uhrzeiten U_1, U_2, U_3, . . . entsprechenden Zenithdistanzen Z_1, Z_2, Z_3, ..., und kann nun entweder für jede dieser Zenithdistanzen den Stundenwinkel rechnen, deren Verbindung mit den zugehörigen Zeiten U_1, U_2, . . . eben so viele Werthe des Uhrstandes liefert; oder — wenn man auf die durch die Uebereinstimmung dieser Werthe gebotene Controle verzichten will — die Rechnung nur einmal mit den Mitteln U und Z obiger Zeiten und Zenithdistanzen ausführen. Strenge genommen sollten im letzteren Falle die Mittel U, Z nach §. 159 auf einander reducirt werden; folgen jedoch, wie dies wohl meistens der Fall ist, die Beobachtungen in nahe gleichen Zeitintervallen aufeinander, so werden die Zeiten U_1, U_2, . . . so wenig von einander verschieden sein, dass ohne merklichen Fehler das Mittel derselben als zu dem Mittel der Zenithdistanzen gehörig betrachtet werden kann. Aus demselben Grunde wird es auch meistens gestattet sein, den Werth des Differenzialquotienten $\frac{d^2z}{dt^2}$ in (152) nicht für jeden der Werthe U_n, sondern blos für das Mittel U der Zeiten zu berechnen.

---

*) Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man den Zenithpunct:

$$Z.\,P. = \tfrac{1}{2}(R + L) + \frac{dz}{dt}\, 15 \Delta u,$$

wobei jedoch zu bemerken, dass das Zeichen des zweiten Gliedes verschieden ausfällt, je nach dem Sinne, in welchem die Bezifferung an der Theilung lauft, und je nachdem die 1te Beobachtung bei K. R. oder K. L. gemacht wird.

Man kann, wie man sich leicht überzeugt, den Ausdruck allgemein in folgender Form schreiben:

$$Z.\,P. = \tfrac{1}{2}(R + L) \pm 15 \frac{dz}{dt} \cdot \frac{u_l - u_r}{2},$$

wo u_r, u_l die Uhrzeiten der Beobachtungen, beziehungsweise bei K. R. und K. L. bedeuten, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem bei K. R. mit wachsender Zenithdistanz die Lesung zu- oder abnimmt. Zur Erlangung eines genäherten Werthes des Zenithpunctes genügt es, den Werth des Differenzialquotienten aus zwei Beobachtungen in derselben Kreislage abzuleiten. (Vergl. d. folg. Beispiel).

161. An den scheinbaren, aus den Ephemeriden genommenen Ort des Sternes ist, wenn die grösste Genauigkeit erreicht werden soll, noch die tägliche Aberration (S. 174):

$$d\alpha = 0''.311 \cos\varphi \cos t \sec\delta$$

$$d\delta = 0\ .311 \cos\varphi \sin t \sin\delta$$

anzubringen, wo für t der Stundenwinkel zur Zeit der Mitte der Beobachtungen genommen wird. Einfacher ist es jedoch, die betreffende Correction an der berechneten Zenithdistanz, dem Stundenwinkel, oder zuletzt am Uhrstande anzubringen. Aus der Gl. (144), §. 157, folgt nämlich, wenn man $d\varphi = 0$ setzt und berücksichtiget, dass vermöge der Gl. (1) $dt = -d\alpha$ ist:

$$dz = -\cos p\, d\delta - \cos\delta \sin p\, d\alpha,$$

wo p der parallaktische Winkel. Substituirt man in diese Gleichung obige Werthe von $d\alpha$ und $d\delta$, so kommt als Correction der Zenithdistanz:

$$dz = -0''.311 \cos\varphi (\cos p \sin t \sin\delta + \sin p \cos t),$$

d. i.:

$$dz = -0''.311 \cos\varphi \cos z \sin A, \tag{153}$$

wo A das Azimuth bedeutet. Da ferner $dt = \frac{dt}{dz} dz$, und $\frac{dt}{dz} = \frac{1}{\cos\varphi \sin A}$ so wird die Correction des Stundenwinkels oder des Uhrstandes x in Zeitsecunden:

$$dt = dx = -0^s.021 \cos z. \tag{154}$$

Endlich ist noch der Einfluss einer Biegung des Fernrohres, wenn diese merklich, zu berücksichtigen. Ist a die Constante der Biegung im Horizonte in Bogensecunden, so erfordert nach §. 125 die Zenithdistanz die Correction:

$$dz = +a \sin z,$$

folglich der Stundenwinkel oder der Uhrstand die Correction:

$$dt = dx = \tfrac{1}{15} a \frac{\sin z}{\cos\varphi \sin A} = \tfrac{1}{15} a \frac{\sin z^2}{\cos\delta \cos\varphi \sin t}. \tag{155}$$

162. Beispiel. 1869, Juli 4, wurden zu Wien mit einem Universalinstrumente von Starke und Kammerer mit 10zölligem Verticalkreise die folgenden Zenithdistanzen des Sternes α Coronae bor. auf der Ostseite beobachtet:

Kreis-lage	Uhr	Mikroskop I	Mikroskop II	Libelle a	Libelle i	Barom.	Aeuss. Therm.
						Millim.	*Cels.*
K. R.	$11^h\ 53^m\ 53^s.9$	$256^0\ 0'\ 7''.2$	$0'\ 18''.7$	13.5	16.1	$11^h 40^m$: 753.0	$23^0.5$
	55 57 .9	255 39 37 .0	39 47 .7	13.1	16.6		$24^0.2$ C.
	58 11 .5	255 17 34 .6	17 45 .8	13.2	16.4		
	12 0 20 .0	254 56 23 .0	56 34 .8	13.0	16.8		
	2 38 .4	254 33 39 .7	33 50 .6	12.9	16.9		
K. L.	12 6 59 .2	166 9 27 .5	9 24 .9	18.2	11.7		
	9 10 .0	166 30 56 .0	30 53 .1	18.0	11.8		
	11 27 .7	166 53 28 .1	53 25 .8	17.5	12.4		
	13 25 .5	167 12 40 .7	12 37 .7	17.5	12.5	$12^h 25^m$: 753.0	23 .1
	15 48 .2	167 35 57 .8	35 55 .5	17.1	12.8		24.0

Polhöhe $\varphi = 48^0\ 11'\ 59''.0$. Der scheinbare Ort des Sternes war nach dem Nautical Almanac:

$$\alpha = 15^h\ 29^m\ 9^s.94, \quad \delta = +\ 27^0\ 9'\ 36''.5.$$

Die Uhr ging nach Sternzeit; der tägliche Gang war $+\ 0^s.74$, somit für die halbe Zeitdauer der Beobachtungen (11^m) verschwindend. Der Werth eines Niveautheiles $\mu = 2''.257$; die Lesung bei K. R., wie obige Beobachtungen zeigen, mit wachsender Zenithdistanz zunehmend. Der Zenithpunct genähert $= 210^0\ 0'\ 15''$.

Das folgende Tableau enthält zunächst die Reduction der Lesungen, wobei die genäherten scheinbaren Zenithdistanzen, wie sie aus den rohen Lesungen mit Zuziehung des Zenithpunctes*) folgen, behufs Berechnung der Refraction angesetzt sind.

---

*) Aus den 2 letzten Beobachtungen in der 1ten Kreislage findet man:

$$\text{Differenz der Lesungen} = 22'\ 43''.5 = 1363''.5$$
$$\text{„ „ Zeiten} = 2^m\ 18^s.4 = 2076'',$$

somit $\log \frac{dz}{dt} = \log \frac{1363.5}{2076.0} = 9.8174\,n$ (negativ, weil die Beobachtung auf der Ostseite). Aus der letzten Beobachtung bei K. R. und der 1ten bei K. L. folgt nun:

$$u_l - u_r = +\ 4^m\ 20^s.8 = +\ 260^s.8$$
$$\tfrac{15}{2}(u_l - u_r) = +\ 1956'' \ldots . \log 3.2914$$
$$9.8174\,n$$
$$3.1088\,n$$
$$15 \frac{dz}{dt} \frac{u_l - u_r}{2} = -\ 1285'' = -\ 21'\ 25''.$$

$$\begin{aligned} R &= 254^0\ 33'\ 49''.6 \\ L &= 166\quad 9\quad 33\ .5 \\ R + L &= 420\quad 43\quad 23\ .1 \\ \tfrac{1}{2}(R+L) &= 210\quad 21\quad 41 \\ &-\quad 21\quad 25 \\ Z.\,P. &= 210\quad 0\quad 16 \end{aligned}$$

Bei obigen Reductionen ist Z. P. $= 210^0\ 0'\ 15''$ angenommen.

Kreis-lage	Mittel der Mikroskope	Corr. der Libelle	Scheinb. Zenith-Distanz	Refraction	Reducirte Lesung
K. R.	256° 0′ 12″.95	+ 2″.39	46° 0′	+ 56″.79	256° 1′ 12″.67
	255 39 42 .35	+ 3 .95	45 39	+ 56 .13	255 40 42 .43
	255 17 40 .20	+ 3 .61	45 17	+ 55 .42	255 18 39 .23
	254 56 28 .90	+ 4 .29	44 56	+ 54 .74	254 57 27 .93
	254 33 45 .15	+ 4 .51	44 33	+ 54 .03	254 34 43 .69
K. L.	166 9 26 .20	+ 7 .33	43 51	— 52 .71	166 8 40 .82
	166 30 54 .55	+ 6 .99	43 29	— 52 .06	166 30 9 .48
	166 53 26 .95	+ 5 .75	43 7	— 51 .38	166 52 41 .32
	167 12 39 .20	+ 5 .64	42 48	— 50 .82	167 11 54 .02
	167 35 56 .65	+ 4 .85	42 24	— 50 .13	167 35 11 .37

Die weitere Berechnung nach dem oben unter a) angegebenen Verfahren steht, mit Benützung der Formel (140) und der Wittstein'schen Tafel der Additions- und Subtractionslogarithmen, wie folgt:

$$\log \sin\varphi \sin\delta = 9.5318526, \quad \log \cos\varphi \cos\delta = 9.7730840.$$

Kreis-lage	Wahre Zenith-Distanz z	$\log \cos z$	$\log \cos z$ — $\log \sin\varphi \sin\delta$ $= B$	A	$A +$ $\log \sin\varphi \sin\delta$
K. R.	46° 0′ 57″.67	9.8416455	0.3097929	0.0173525	9.5492051
	45 40 27 .43	8443134	3124608	0225684	5544210
	45 18 24 .23	8471475	3152949	0280762	5599288
	44 57 12 .93	8498365	3179839	0332708	5651234
	44 34 28 .69	8526854	3208328	0387419	5705945
K. L.	43 51 34 .18	8579601	3261075	0487856	5806382
	43 30 5 .52	8605512	3286986	0536795	5855321
	43 7 33 .68	8632348	3313822	0587210	5905736
	42 48 20 .98	8654953	3336427	0629466	5947992
	42 25 3 .63	8682018	3363492	0679809	5998335

Kreis-lage	$\log \cos t$	Östl. Stunden-winkel $-t$	$-t$	Sternzeit $\alpha + t$	$\alpha + t - u$ $= x$
K. R.	9.7761211	53° 19′ 48″.90	3^h 33^m 19^s.26	11^h 55^m 50^s.68	$+ 1^m$ 56.78
	7813370	52 48 47 .04	3 31 15 .14	11 57 54 .80	56.90
	7868448	52 15 22 .35	3 29 1 .49	12 0 8 .45	56.95
	7920394	51 43 14 .05	3 26 52 .94	12 2 17 .00	57.00
	7975105	51 8 42 .21	3 24 34 .81	12 4 35 .13	56.73
K. L.	8075542	50 3 24 .37	3 20 13 .62	12 8 56 .32	57.12
	8124481	49 30 39 .07	3 18 2 .60	12 11 7 .34	57.34
	8174896	48 56 14 .05	3 15 44 .94	12 13 25 .00	57.30
	8217152	48 26 50 .46	3 13 47 .36	12 15 22 .58	57.08
	8267495	47 51 8 .97	3 11 24 .60	12 17 45 .34	57.14

Es folgt also im Mittel bei K. R.: $x = +1^m\ 56^s.872$

„ K. L.: $x = +1\ \ 57\ .196$

Mittel $x = +1\ \ 57\ .03$ um $12^h\ 5^m$ Uhrzeit.

Will man sich der unter *b*) angeführten Reductionsmethode bedienen, so sind zuvörderst die Differenzialquotienten $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ für das Mittel $U = 12^h\ 4^m\ 47^s.23$ der Uhrzeiten zu berechnen. Mit dem genäherten Uhrstande $+ 1^m\ 55^s$ findet man den dieser Zeit entsprechenden Stundenwinkel $t = -3^h\ 22^m\ 27^s.7 = -50^0\ 36'\ 18''$ und die zugehörige Zenithdistanz $z = 44^0\ 13'\ 10''$, mit welchen Werthen man nach den Gleichungen (146) und (147):

$$\log 15\,\frac{dz}{dt} = 0.993749,\quad \log \frac{d^2z}{dt^2} = 8.98192$$

erhält. Hiemit steht die Rechnung folgendermassen:

Kreislage	τ	$\log\tau$	$\log \frac{dz}{dt}\cdot 15\tau$	$\frac{dz}{dt}\cdot 15\tau$	$\log \frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}$	$\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{\sin 1''}$ log	num.	Reduction auf das Mittel der Uhrzeiten Δz	Lesungen reducirt auf das Mittel der Uhrzeiten
	m s			° ′ ″			″	° ′ ″	° ′ ″
K. R.	−10 53.33	2.815133	3.808882	+1 47 19.95	2.36692	1.34884	+22.33	−1 47 42.28	254 13 30.39
	− 8 49.33	2.723727	3.717476	+1 26 57.6	2.18413	1.16605	+14.66	−1 27 12.32	13 30.11
	− 6 35.73	2.597399	3.591148	+1 5 0.75	1.93150	0.91342	+ 8.19	−1 5 8.94	13 30.29
	− 4 27.23	2.426885	3.420634	+0 43 54.11	1.59049	0.57241	+ 3.74	−0 43 57.85	13 30.08
	− 2 8.83	2.110017	3.103766	+0 21 9.89	0.95676	9.93868	+ 0.87	−0 21 10.76	13 32.93
K. L.	+ 2 11.97	2.120475	3.114224	−0 21 40.84	0.97768	9.95960	+ 0.91	+0 21 39.93	165 47 0.89
	+ 4 22.77	2.419576	3.413325	−0 43 10.15	1.57596	0.55788	+ 3.61	+0 43 6.54	47 2.94
	+ 6 40.47	2.602570	3.596319	−1 5 47.47	1.94184	0.92376	+ 8.39	+1 5 39.08	47 2.24
	+ 8 38.27	2.714556	3.708305	−1 25 8.64	2 16579	1.14771	+14.05	+1 24 54.59	46 59.43
	+11 0.97	2.820182	3.813931	−1 48 35.25	2.37701	1.35893	+22.85	+1 48 12.40	46 58.97

Hieraus folgt: Mittel der Lesungen bei K. R.: $M_r = 254^0\ 13'\ 30''.76$

„ „ „ „ K. L.: $M_l = 165\ \ 47\ \ 0\ .90$

$M_r - M_l = \ 88\ \ 26\ \ 29\ .86$

$Z = \ 44\ \ 13\ \ 14\ .93$

Berechnet man mit dieser dem Mittel $U = 12^h\ 4^m\ 47^s.23$ entsprechenden Zenithdistanz den zugehörigen Stundenwinkel T, so findet man:

$$\begin{array}{rl} T = & -\ 3^h\ 22^m\ 25^s.68 \\ \alpha = & 15\ \ 29\ \ \ 9\ .94 \\ \hline \text{Sternzeit} = & 12\ \ \ 6\ \ 44\ .26 \\ \text{Uhrzeit} = & 12\ \ \ 4\ \ 47\ .23 \\ \hline x = & +\ \ 1\ \ 57\ .03 \text{ wie oben.} \end{array}$$

Die Reduction endlich nach dem unter *c*) angegebenen Verfahren ist folgende:

$u + u'$	$u' - u$	$\frac{1}{2}(u+u')$	$\frac{1}{2}(u'-u) = \varDelta u$	log $\frac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''}$	$\frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\varDelta u^2}{\sin 1''}$ log	num.	$R - L$	$\frac{1}{2}(R - L)$	z
h m s	m s	h m s	m s			$''$	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
24 9 37.6	4 20.8	12 4 48.80	2 10.40	0.96728	9.94920	+ 0.89	88 26 2.87	44 13 1.43	44 13 0.54
9 30.0	8 50.0	45.00	4 25.00	1.58321	0.56513	+ 3.67	27 18.45	13 39.23	13 35.56
9 39.2	13 16.2	49.60	6 38.10	1.93668	0.91860	+ 8.29	25 57.91	12 58.95	12 50.66
9 23.4	17 27.6	41.70	8 43.80	2.17501	1.15693	+14.35	28 48.41	14 24.21	14 9.86
9 42.1	21 54.3	51.05	10 57.15	2.37198	1.35390	+22.59	26 1.30	13 0.65	12 38.06
	Mittel $U = 12\ 4\ 47.23$							Mittel $Z = 44\ 13\ 14.94$	

Diese Werthe von Z und U sind dieselben, wie bei der vorhergehenden Reduction, und geben daher denselben Uhrstand.

Bei dem angewendeten Instrumente war die Biegung des Fernrohrs im Horizonte $a = 0''.98$. Hiernach wird nach den Formeln (155) und (154):

Correction des Uhrstandes wegen Biegung $= -0^s.069$
„ „ „ „ tägl. Aberr. $= -0.015$
-0.08

folglich der Uhrstand $x = +1^m\ 56^s.95$ um $12^h\ 4^m.8$ Uhrzeit.

Bestimmen wir noch den wahrscheinlichen Fehler einer nach diesem Verfahren ausgeführten Zeitbestimmung. Bezeichnet man mit ε_1 den wahrscheinlichen Fehler einer Ablesung eines Mikroskopes, mit ε_2 jenen der Ablesung eines Blasenendes der Libelle in Scalentheilen, so wird, nach den in §. 19 d. Einl. entwickelten Sätzen, der w. F. des Mittels der Lesungen beider Mikroskope $= \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\varepsilon_1$; der w. F. der Niveau-Correction $\frac{1}{2}k(i - a)$ wird $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,k\,\varepsilon_2$, folglich, wenn ε_z den w. F. einer abgelesenen Zenithdistanz, ε_t den w. F. des daraus berechneten Stundenwinkels bedeutet:

$$\varepsilon_z^2 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\,k^2\,\varepsilon_2^2, \quad \varepsilon_t^2 = \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \varepsilon_z^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 (\varepsilon_1^2 + k^2\varepsilon_2^2).$$

Bezeichnet man ferner mit ε_x den w. F. eines aus dem Stundenwinkel t mittelst der Gleichung $x = \alpha + t - u$ abgeleiteten Uhrstandes, mit ε_u den w. F. der beobachteten Uhrzeit u des Fadenantrittes des Sternes, so wird, wenn wir vorläufig α als fehlerfrei betrachten, $\varepsilon_x^2 = \varepsilon_t^2 + \varepsilon_u^2$, wo für ε_u der Ausdruck (139) zu nehmen ist. Man hat daher:

$$\varepsilon_x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 (\varepsilon_1^2 + k^2\,\varepsilon_2^2) + a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \sec\delta^2 \operatorname{cosec} p^2,$$

und dieser Ausdruck gibt den zufälligen wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, mit welchem der aus einer beobachteten Zenithdistanz abgeleitete Uhrstand behaftet ist. Hat man nun in jeder Kreislage $\frac{1}{2}n$, also im Ganzen n Zenithdistanzen beobachtet, so wird

$$\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{n}}$$

die wahrscheinliche, aus den zufälligen Beobachtungsfehlern hervorgehende Unsicherheit des im Mittel aus n Beobachtungen folgenden Uhrstandes sein.

Hiezu kommt nun noch der Einfluss der constanten Fehler in z, φ, δ, welcher durch Gl. (143) gegeben ist, und in der Rectascension α. Der durch diese Fehlerquellen im Uhrstande erzeugte wahrscheinliche Fehler ε_c ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\varepsilon_c^2 = C_z^2\, dz^2 + C_\varphi^2\, d\varphi^2 + C_\delta^2\, d\delta^2 + d\alpha^2,$$

wo C_z, C_φ, C_δ die Coefficienten von dz, $d\varphi$, $d\delta$, in Gl. (143), durch 15 dividirt, bedeuten.

Hiernach wird der Gesammtbetrag des wahrscheinlichen Fehlers, mit welchem der aus der Zeitbestimmung resultirende Uhrstand behaftet ist:

$$E = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_x^2}{n} + \varepsilon_c^2}.$$

Wenden wir nun diese Formeln auf obiges Beispiel an. Bei dem benützten Instrumente war $v = 72$, und es kann nach der Erfahrung $\varepsilon_1 = 0''.4$, $\varepsilon_2 = 0.1$ angenommen werden. Setzt man noch $a = 0^s.07$, $b = 3^s.18$, so findet man, da $\frac{1}{15}\frac{dt}{dz} = 0.1014$ und $p = 47^0\ 36'$ ist:

$$\varepsilon_z = 0''.3247, \quad \varepsilon_t = 0^s.03292, \quad \varepsilon_u = 0^s.09705, \quad \varepsilon_x = 0^s.1023,$$

somit den aus den zufälligen Beobachtungsfehlern entspringenden w. F. des Mittels:

$$\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{10}} = 0^s.03237.$$

Von den constanten Fehlern setzt sich jener der Zenithdistanz, dz, aus drei Theilen zusammen, nämlich dem constanten Fehler in der Refraction, in der Biegung des Fernrohrs, und dem periodischen Theilungsfehler; setzt man jeden dieser Fehler $= 0''.25$, so wird $dz^2 = 3\ (0.25)^2 = 0.1875$. Nimmt man ferner an: $d\varphi = 1''$, $d\delta = 0''.3$, $d\alpha = 0''.3 \sec\delta = 0^s.02 \sec\delta = 0^s.02248$, und berechnet mit dem der Mitte der Beobachtungen entsprechenden Azimuthe $A = -\ 80^0\ 22'$ die Coefficienten: $C_z = -\ 0.1014$, $C_\varphi = -\ 0.0170$, $C_\delta = -\ 0.0684$, so kommt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_c^2 &= (0.001928 + 0.000289) + (0.000421 + 0.000505)\\ &= 0.002217 + 0.000926\end{aligned}$$

somit:

$$\varepsilon_c^2 = 0.003143, \quad \varepsilon_c = 0^s.05604;$$

endlich:

$$E = \pm \sqrt{0.001048 + 0.003143} = \pm\, 0^s.065.$$

Man ersieht hieraus, dass der Einfluss der constanten Fehler ($0^s.056$) jenen der zufälligen Beobachtungsfehler ($0^s.032$) erheblich übersteigt, und es würde dies in noch höherem Grade der Fall sein, wenn nicht im vorliegenden Beispiele der Einfluss des Fehlers der Polhöhe schon nahezu unmerklich wäre, weil der Stern in der Nähe des 1ten Verticals beobachtet ist. Handelt es sich daher um eine möglichst scharfe Zeitbestimmung, so wird man dafür zu sorgen haben, den Einfluss der constanten Fehler möglichst zu beseitigen. Der eine von den Fehlern in der Position des Sternes herrührende Theil: $\sqrt{0.000926} = 0^s.030$ kann selbstverständlich nicht weggeschafft werden, wohl aber der andere aus den constanten Fehlern in der Polhöhe und Zenithdistanz entspringende und in der Regel beträchtlichere: $\sqrt{0.002217} = 0^s.047$. Der Fehler in der Polhöhe wird eliminirt, wenn man den Stern bei seinem Durchgange durch den 1ten Vertical nahe symmetrisch zu beiden Seiten desselben, oder wenn man zwei Sterne zu beiden Seiten des Meridians in möglichst nahe gleichem Azimuth beobachtet, und aus den aus beiden Sternen folgenden und mit dem Uhrgange auf dieselbe Epoche reducirten Uhrständen das Mittel nimmt. Wurden überdies in letzterem Falle die beiden Sterne auch in nahe gleicher Zenithdistanz beobachtet (was voraussetzt, dass zwei Sterne von nahe gleicher Declination gewählt wurden), so verschwindet aus dem Mittel auch der Einfluss der constanten Fehler in der Zenithdistanz. Auf diese Weise, und mit einem guten Instrumente ausgeführt, lässt dann diese Methode der Zeitbestimmung eine beträchtliche Schärfe erreichen.

Bei der vorstehenden Fehlerberechnung wurde übrigens der von den zufälligen Beobachtungsfehlern herrührende Theil: $\varepsilon_x : \sqrt{10} = 0^s.03237$ aus nach anderen Erfahrungen angenommenen Werthen mit Zuziehung der Formel (139) abgeleitet, um einen durchschnittlichen Werth in die Rechnung einzuführen; unter günstigen Umständen kann derselbe auch kleiner werden, wie dies in der That im vorliegenden Beispiele der Fall ist. Man kann ihn nämlich auch direct aus den zehn bei der ersten Reduction erhaltenen Werthen von x ableiten, indem man dieselben beziehungsweise mit den zwei für jede Kreislage daraus folgenden Mitteln vergleicht, und findet auf diesem Wege den w. F. des aus e i n e r Zenithdistanz berechneten Uhrstandes $\varepsilon_x = 0^s.0731$, folglich des Mittels: $\varepsilon_x : \sqrt{10} = 0^s.0231$.

2. Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen.

163. Diese Methode besteht darin, dass man die Uhrzeiten beobachtet, zu welchen ein Gestirn dieselbe Höhe vor und nach der Culmination erreicht, und beruht darauf, dass gleichen Höhen östlich und westlich vom Meridian auch gleiche Stundenwinkel entsprechen, wenn das Gestirn in der Zwischenzeit seine Declination nicht ändert. Ist daher u die Uhrzeit der vor der Culmination, u' jene der nach der Culmination beobachteten gleichen Höhe, so wird $\frac{1}{2}(u + u')$ die Uhrzeit der Culmination sein, und da bekanntlich die Sternzeit der Culmination der Rectascension α des Sternes gleich ist, so hat man sofort:

$$x = \alpha - \tfrac{1}{2}(u + u')$$

als den Stand der Uhr gegen Sternzeit zur Uhrzeit $\frac{1}{2}(u + u')$, wo nur ein g l e i c h f ö r m i g e r, übrigens beliebiger Gang der Uhr vorausgesetzt wird.

Diese Methode ist, wie man sieht, unabhängig von der Kenntniss der Polhöhe und Declination des Gestirnes, also auch der geographischen Länge des Ortes; auch wird die Kenntniss der Höhe selbst, in welcher das Gestirn beobachtet wurde, nicht erfordert, so dass also auch mit Instrumenten, welche eine genaue Messung von Höhen oder Zenithdistanzen nicht gestatten, eine gute Zeitbestimmung erlangt werden kann.

Es kommt nur darauf an, dass beide Höhen genau gleich seien, oder dass, im Falle ein kleiner Unterschied besteht, dieser scharf bestimmt werden kann, um den Einfluss desselben berechnen und die Beobachtung davon befreien zu können. Man hat nämlich nach Gl. (146):

$$dt = -\frac{\cos h \,.\, dh}{\cos\varphi \cos\delta \sin t}.$$

Ist nun die wahre Höhe vor der Culmination $= h$, nach derselben $= h'$, und $h' - h = dh$, so hat man offenbar, wenn $h' > h$, also dh positiv, u' zu klein erhalten um dt, also $\frac{1}{2}(u' + u)$ zu klein um $\frac{1}{2}dt$; die Correction des Mittels $\frac{1}{2}(u + u')$ beider Zeiten ist daher:

$$+\frac{h' - h}{30}\,\frac{\cos h}{\cos\varphi \cos\delta \sin t}, \tag{156}$$

in Zeitsecunden, wenn $h' - h$ in Bogensecunden. Zur Berechnung des Coefficienten genügen genäherte Werthe von φ, δ und h; für t ist die halbe Zwischenzeit $\frac{1}{2}(u' - u)$, stets positiv, zu nehmen. Hat man übrigens, wie gewöhnlich, eine Reihe gleicher Höhen vor und nach der Culmination beobachtet, so erhält man einen, wenn $h' - h$ klein, hinreichend genäherten Werth des Coefficienten, indem man die Zwischenzeit zweier Höhen durch die Differenz derselben, beide in derselben Einheit ausgedrückt, dividirt.

Die Refraction wird, auch bei gleichen Instrumental- also scheinbaren Höhen vor und nach der Culmination, einen Unterschied der wahren Höhen zur Folge haben, wenn in der Zwischenzeit der Stand der meteorologischen Instrumente sich geändert hat, weil in diesem Falle wohl die mittlere, nicht aber die wahre Refraction zu beiden Zeiten die gleiche ist. Bezeichnet man letztere zur Zeit der Beobachtungen vor und nach der Culmination mit

r_v und r_n, die scheinbare Höhe mit H, so ist $h = H - r_v$, $h' = H - r_n$, somit in (156):

$$h' - h = r_v - r_n.$$

Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, bei genaueren Beobachtungen auch den Stand der meteorologischen Instrumente aufzuschreiben.

Aus demselben Grunde ist zu empfehlen, bei Sextantenbeobachtungen und Benützung eines Glashorizontes, letzteren vor und nach jeder Beobachtung zu nivelliren. Sind dann i_v und i_n die Mittel der Neigungen vor und nach der Culmination, positiv genommen, wenn die dem Gestirn zugekehrte Seite des Horizontes die höhere, so ist $h = H + i_v$, $h' = H + i_n$, somit:

$$h' - h = i_n - i_v.$$

Auch bei dieser Methode der Zeitbestimmung ist die Zeit des Durchganges des Gestirnes durch den 1^ten^ Vertical die günstigste, weil sich daselbst die Höhe am raschesten ändert; jedenfalls sind Beobachtungen zu nahe am Meridian zu vermeiden.

164. Gewöhnlich benützt man zur Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen die Sonne, deren Declination sich in der Zwischenzeit ändert; das arithmetische Mittel beider Uhrzeiten, $\frac{1}{2}(u + u')$, wird daher nicht die Uhrzeit der Culmination oder des wahren Mittags sein, und um letztere zu finden, bedarf dasselbe noch einer Correction, welche die Mittagsverbesserung genannt wird.

Sei δ die Declination der Sonne zur Zeit der Culmination, also im wahren Mittage, $\varDelta\delta$ die Aenderung der Declination vom Mittage bis zur Zeit der beobachteten Höhen, positiv, wenn sich die Sonne gegen Nord bewegt; h die wahre Höhe der Sonne bei jeder Beobachtung; t, t' der vor- und nachmittägige Stundenwinkel, so bestehen die Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta - \varDelta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta - \varDelta\delta) \cos t,$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta + \varDelta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta + \varDelta\delta) \cos t'.$$

Für die Sonne ist nun $\varDelta\delta$ immer so klein, dass man $\sin\varDelta\delta = \varDelta\delta$ und $\cos\varDelta\delta = 1$ setzen kann; dadurch erhalten die Gleichungen, nach Auflösung der Functionen von $\delta - \varDelta\delta$ und $\delta + \varDelta\delta$ die Form:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta - \varDelta\delta \sin\varphi \cos\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t + \varDelta\delta \cos\varphi \sin\delta \cos t,$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \varDelta\delta \sin\varphi \cos\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t' - \varDelta\delta \cos\varphi \sin\delta \cos t',$$

und geben, subtrahirt und durch $\cos\varphi \cos\delta$ dividirt:

$$0 = 2\varDelta\delta \operatorname{tg}\varphi + (\cos t' - \cos t) - \varDelta\delta \operatorname{tg}\delta (\cos t' + \cos t). \qquad (m)$$

Bezeichnet man nun die Mittagsverbesserung mit y, so ist

$$\tfrac{1}{2}(u + u') + y$$

die Uhrzeit der Culmination, der sogenannte verbesserte Mittag, oder die Uhrzeit im wahren Mittag, also auch:

$$t = [\tfrac{1}{2}(u + u') + y] - u = \tfrac{1}{2}(u' - u) + y,$$
$$t' = u' - [\tfrac{1}{2}(u + u') + y] = \tfrac{1}{2}(u' - u) - y,$$

oder, wenn man die halbe Zwischenzeit: $\frac{1}{2}(u' - u) = \tau$ setzt:

$$t = \tau + y, \quad t' = \tau - y.$$

Da nun wieder y so klein ist, dass man $\sin y = y$ und $\cos y = 1$ setzen kann, so wird:

$$\cos t = \cos\tau - y \sin\tau, \quad \cos t' = \cos\tau + y \sin\tau,$$

somit:

$$\cos t' - \cos t = 2 y \sin\tau, \quad \cos t' + \cos t = 2 \cos\tau,$$

welche Werthe, in Gl. (m) substituirt:

$$y = -\Delta\delta \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\tau} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\tau}\right)$$

geben. Die Grösse $\Delta\delta$ erhält man am einfachsten und mit genügender Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit der Bewegung der Sonne in Declination aus dem Unterschiede der Declinationen im wahren Mittag des dem Beobachtungstage vorhergehenden und des darauf folgenden Tages.

Bezeichnet man diese 48stündige Aenderung der Declination der Sonne, in Bogensecunden ausgedrückt, mit μ, so wird:

$$\Delta\delta = \frac{\mu}{48}\tau,$$

wo τ in Stunden auszudrücken ist, und hiemit, wenn man noch durch 15 dividirt, um y in Zeitsecunden zu erhalten:

$$y = -\frac{\mu}{720}\left(\frac{\tau}{\sin\tau}\operatorname{tg}\varphi - \frac{\tau}{\operatorname{tg}\tau}\operatorname{tg}\delta\right). \tag{157}$$

Setzt man:

$$A = \frac{1}{720}\,\frac{\tau}{\sin\tau}, \quad B = \frac{1}{720}\,\frac{\tau}{\operatorname{tg}\tau},$$

so wird:

$$y = -A\mu \operatorname{tg}\varphi + B\mu \operatorname{tg}\delta. \tag{157*}$$

Eine Tafel, welche die Logarithmen von A und B mit dem Argumente: τ = halbe Zwischenzeit darbietet, und zuerst von Gauss gegeben wurde, erleichtert die Berechnung dieses Ausdruckes. *)

Bezeichnet man endlich mit M die durch die Zeitgleichung gegebene mittlere Zeit im wahren Mittag, so ist

$$x = M - [\tfrac{1}{2}(u + u') + y]$$

der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit zur Uhrzeit $\frac{1}{2}(u + u') + y$.

---

*) Man findet eine solche Tafel in dem Werke: „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Von Dr. Theodor Albrecht. Leipzig, 1874." Seite 111 und 112.

Geht die Uhr nach Sternzeit, so ist der Werth von y aus (157) noch mit dem Verhältnisse der mittleren zur Sternzeit $= 1.0027$ (§. 36) zu multipliciren.

Wie schon oben bemerkt, nimmt man stets eine Reihe von Höhen nacheinander, indem man die Alhidade um eine runde Anzahl von Minuten verstellt (so dass der Nullstrich der Alhidade mit dem betreffenden Theilstriche des Kreises scharf zur Coincidenz gebracht wird) und dann die Zeit beobachtet, wann derselbe Sonnenrand diese Höhe erreicht. Benüzt man, wie gewöhnlich, den Sextanten, bei welchem bekanntlich der Moment der Berührung der Ränder beider Sonnenbilder beobachtet wird, so kommt bei Beobachtung desselben Sonnenrandes Vor- und Nachmittags, einmal die Berührung im Momente der Trennung, das andere Mal im Momente der beginnenden Ueberdeckung beider Bilder zur Beobachtung. Da es immerhin möglich ist, dass der Beobachter diese etwas verschiedenen Erscheinungen nicht in derselben Weise auffasst, z. B. die Berührung bei der Trennung der Bilder constant später nimmt, als bei der Annäherung derselben, so kann man die Beobachtungen in je gleicher Anzahl auf beide Ränder vertheilen, wodurch der hieraus entstehende Fehler eliminirt wird.

Beispiel. 1869, October 1, wurden mit einem Pistor'schen Prismen-Sextanten in Wien die folgenden correspondirenden Sonnenhöhen beobachtet:

⨀Rand	Sextant	Chronometer		$u + u'$	Unverbesserter Mittag $\frac{1}{2}(u + u')$
		Vormittag u	Nachmittag u'		
Oberer	56° 40′	$9^h\ 12^m\ 43^s.6$	$2^h\ 28^m\ 54^s.4$	$23^h\ 41^m\ 38^s.0$	$11^h\ 50^m\ 49^s.0$
	57 0	14 7.2	27 30.8	38.0	49.0
	20	15 32.8	26 6.0	38.8	49.4
	40	16 55.6	24 41.6	37.2	48.6
	58 0	18 20.8	23 16.0	36.8	48.4
Unterer	59 20	28 53.2	12 44.0	37.2	48.6
	40	30 23.2	11 14.4	37.6	48.8
	60 0	31 54.4	9 44.0	38.4	49.2
	20	33 25.6	8 12.4	38.0	49.0
	40	34 57.2	6 41.6	38.8	49.4
				Mittel	11 50 48.94

Zur Berechnung der Mittags-Verbesserung hat man $\varphi = 48^0\ 12'.0$, und entnimmt dem Nautical Almanac für den wahren Mittag des obigen Datums:

$\delta = -3^0\ 17'.1,\quad \mu = -2796''.8,$*) Zeitgleichung $= -10^m\ 24^s.23$.

Die Zwischenzeit ist Anfangs $= 5^h\ 16^m\ 10^s.8$, am Ende $= 4^h\ 31^m\ 44^s.4$, also im Mittel: $2\tau = 4^h\ 53^m\ 57^s.6$, somit:

$$\tau = 2^h\ 26^m\ 58^s.8 = 36^0\ 44'\ 42'' = 2^h.4497.$$

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl}
\log\tau = & 0.3891 & & 0.3891 \\
\log\sin\tau = & 9.7769 & \log\operatorname{tg}\tau = & 9.8731 \\
\log 720 = & 2.8573 & & 2.8573 \\
\hline
\log A = & 7.7549 & \log B = & 7.6587 \\
\log\operatorname{tg}\varphi = & 0.0486 & \log\operatorname{tg}\delta = & 8.7590\,n \\
\log\mu = & 3.4467\,n & & 3.4467\,n \\
\hline
 & 1.2502\,n & & 9.8644 \\
 & -17^s.79 & & +0^s.73
\end{array}$$

Man hat daher $y = +17^s.79 + 0^s.73 = +18^s.52$, somit:

Unverbesserter Mittag:	$11^h\ 50^m\ 48^s.94$
Mittagsverbesserung:	$+\ 18.52$
Uhr im wahren Mittag:	11 51 7.46
Mittlere Zeit im wahren Mittag:	11 49 35.77
Uhrstand gegen mittl. Zeit: $x =$	$-$ 1 31.69.

Bei dieser Beobachtung waren auch die meteorologischen Instrumente beobachtet und die Neigung des Glashorizontes gemessen worden:

	Vorm.	Nachm.	Vormittag				Nachmittag			
	mm		a	i	a	i	a	i	a	i
Barom.	748.8	747.1								
Inn. Therm.	20°.1 C.	23.5	10.7	9.2	11.0	8.5	8.7	8.4	8.4	8.5
Äuss. Therm.	20 .5	23.5	11.2	8.8	10.8	8.4	9.2	7.8	9.5	6.8

Mit der mittleren scheinbaren Höhe $h = 29^0\ 20'$ findet man die Refraction: Vorm. $r_v = 97''.9$, Nachm. $r_n = 96.6$. Der Werth eines Scalentheiles der Libelle war $4''.76$, und es sind die Lesungen nach Aussen mit a, nach Innen mit i bezeichnet. Die Neigungen waren also Vormittag $+ 4''.64$ und

---

*) Nach dem Nautical Almanac ist die Declination der Sonne im wahren Mittag zu Greenwich:

			μ	
Sept.	29	$-$ 2° 31′ 30″.2		
	30	2 54 51 .3	$-$ 46′ 40″.4	$+$ 3″.8
Oct.	1	3 18 10 .6	$-$ 46 36 .6	$+$ 4 .5
	2	3 41 27 .9	$-$ 46 32 .1	
	3	$-$ 4 4 42 .7		

Zieht man die Declination Sept. 30 ab von jener Octob. 2, so erhält man $\mu = -46'\ 36''.6 = -2796''.6$, giltig für Octob. 1, 0^h wahre Zeit in Greenwich. Da Wien um $1^h\ 5^m.5 = 1^h.09$ östlich von Greenwich liegt, so hat man, strenge genommen, um dieses Zeitintervall vom 1. October nach rückwärts zu interpoliren, wodurch sich die Verbesserung: $-1.09 \times \frac{3''.8}{24}$, oder genauer: $-1.09 \times \frac{3''.8 + 4''.5}{48} = -0''.2$, und hiemit als verbesserter Werth, giltig für Octob. 1, 0^h wahre Wiener-Zeit, $\mu = -2796''.8$ ergibt.

$+5''.83$, Nachmittag $+2''.02$ und $+3''.09$, somit im Mittel $i_v = +5''.23$, $i_n = +2''.55$, womit sich

$$h' - h = (r_v - r_n) + (i_n - i_v) = +1''.30 - 2''.68 = -1''.38$$

ergibt.

Der Coefficient in (145) wird $= 2,191$ und somit die an $\frac{1}{2}(u + u')$ anzubringende Correction $= -0^s.10$, der verbesserte Uhrstand $x = -1^m\ 31^s.59$.

Um Nachmittags rechtzeitig zur Beobachtung bereit zu sein, muss man die Zeit der ersten Beobachtung näherungsweise voraus berechnen. Nimmt man in obigem Beispiele den Stand des Chronometers näherungsweise mit $-1^m\ 30^s$ an, so hat man:

Chronometer im mittleren Mittag	12^h	1^m	30^s	
Zeitgleichung	$-$	10	24	
Chronometer im wahren Mittag	11	51	6	$= a$
Uhrzeit der letzten Beobachtung Vormittag	9	34	57	
Vormittägiger Stundenwinkel	2	16	9	$= b$
Uhrzeit der ersten Beobachtung Nachmittag	2	7	15	$= a + b$

Der Unterschied gegen die beobachtete Uhrzeit $(2^h\ 6^m\ 42^s)$ beträgt 33^s, welcher, bis auf die weggelassenen Bruchtheile der Secunde, der doppelten Summe des Fehlers im angenommenen Uhrstande und der vernachlässigten Mittagsverbesserung gleichkommt.

165. Man kann auch die Nachmittag genommenen Sonnenhöhen mit correspondirenden Höhen verbinden, welche man am folgenden Tage Vormittag nimmt, und daraus die Zeit der Mitternacht ableiten; der Vorgang bleibt derselbe wie vorhin, es ändert sich nur der Ausdruck der von der Declinationsänderung der Sonne abhängigen Correction y, welche an der unverbesserten Mitternacht $\frac{1}{2}(u + u')$ anzubringen ist, und hier die Mitternachtsverbesserung genannt wird. Lassen wir wieder u', t' sich auf die zweite Beobachtung am folgenden Vormittag beziehen, so bleibt die Gl. (m) im vorhergehenden §. unverändert; es ist $\frac{1}{2}(u + u')$ die unverbesserte,

$$\tfrac{1}{2}(u + u') + y$$

die verbesserte Mitternacht, d. i. die Uhrzeit der unteren Culmination der Sonne, und die Stundenwinkel, vom nördlichen Meridian aus nach beiden Seiten gezählt, sind:

$$\left[\tfrac{1}{2}(u + u') + y\right] - u = \tfrac{1}{2}(u' - u) + y = \tau + y,$$
$$u' - \left[\tfrac{1}{2}(u + u') + y\right] = \tfrac{1}{2}(u' - u) - y = \tau - y,$$

wo $\tau = \frac{1}{2}(u' - u)$ wieder die halbe Zwischenzeit bedeutet. Die Stundenwinkel t, t', von Süd über West gezählt, werden nun:

$$t = 12^h - (\tau + y), \qquad t' = 12^h + (\tau - y),$$
$$= (180^0 - \tau) - y, \qquad = (180^0 + \tau) - y,$$

folglich:

$$\cos t = -\cos\tau + y\sin\tau, \quad \cos t' = -\cos\tau - y\sin\tau,$$

und

$$\cos t' - \cos t = -2y\sin\tau, \quad \cos t' + \cos t = -2\cos\tau,$$

welche Werthe in (m) substituirt:

$$y = \varDelta\delta\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\tau} + \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\tau}\right)$$

geben. Bezeichnet daher wieder μ die 48stündige Aenderung der Declination der Sonne in Bogensecunden, so hat man für die Mitternachtsverbesserung, in Zeitsecunden:

$$y = \frac{\mu}{720}\left(\frac{\tau}{\sin\tau}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\tau}{\operatorname{tg}\tau}\operatorname{tg}\delta\right), \tag{158}$$

welcher Ausdruck sich von jenem (157) nur durch das Zeichen von φ unterscheidet. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass die Grössen δ und μ, so wie die Zeitgleichung für die betreffende wahre Mitternacht den Ephemeriden zu entnehmen sind. Da die Gauss'sche Tafel für die Grössen: $A = \frac{1}{720}\frac{\tau}{\sin\tau}$ und $B = \frac{1}{720}\frac{\tau}{\operatorname{tg}\tau}$ sich meist nur bis $\tau = 6^h$ erstreckt und hier τ wohl immer grösser sein wird, so kann man

$$T = 12^h - \tau$$

setzen und die Gl. (158) in folgender Form schreiben:

$$y = \frac{\mu}{720}\,\frac{12^h - T}{T}\left(\frac{T}{\sin T}\operatorname{tg}\varphi - \frac{T}{\operatorname{tg}T}\operatorname{tg}\delta\right),$$

oder:

$$y = \mu fA\operatorname{tg}\varphi - \mu fB\operatorname{tg}\delta,$$

wo nun die Logarithmen der Grössen:

$$A = \frac{1}{720}\frac{T}{\sin T}, \quad B = \frac{1}{720}\frac{T}{\operatorname{tg}T}$$

aus der Gauss'schen Tafel mit dem Argumente T genommen werden können; es ist noch eine kleine Tafel beigefügt, die den Logarithmus von

$$f = \frac{12^h - T}{T}$$

gleichfalls mit dem Argumente T gibt.

3. Zeitbestimmung aus beobachteten gleichen Höhen zweier Sterne östlich und westlich vom Meridiane.

166. Bei der im Vorausgehenden behandelten Methode der Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen eines Sternes liegen die beiden Beobachtungen um mehrere Stunden auseinander, was, abgesehen davon, dass der Beobachter zweimal in Anspruch genommen wird, den Nachtheil hat, dass die zweite Beobachtung häufig in Folge bedeckten Himmels vereitelt wird, und dies um so leichter, als sie an eine bestimmte Zeit gebunden ist. Man kann diesen Uebelstand vermeiden, indem man die Methode in der Art abändert, dass man zwei Sterne östlich und westlich vom Meridian in derselben Höhe beobachtet, wo dann die Anordnung immer so getroffen werden kann, dass die beiden Beobachtungen unmittelbar aufeinanderfolgen.

Bezeichnet man mit h die wahre Höhe beider Sterne, mit δ, δ' die Declinationen derselben, mit t, t' ihre Stundenwinkel zur Zeit der Beobachtung, so hat man die Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t',$$

aus welchen durch Subtraction:

$$0 = \sin\varphi(\sin\delta - \sin\delta') + \cos\varphi(\cos\delta\cos t - \cos\delta'\cos t'),$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi(\sin\delta - \sin\delta') = \cos\delta'\cos t' - \cos\delta\cos t$$

folgt. Diese Gleichung lässt sich, wenn man im zweiten Theile einmal $\cos t'\cos\delta$, dann $\cos t\cos\delta'$ addirt und subtrahirt, unter folgenden zwei Formen schreiben:

$$\operatorname{tg}\varphi(\sin\delta - \sin\delta') = \cos t'(\cos\delta + \cos\delta') - \cos\delta(\cos t + \cos t'),$$
$$\operatorname{tg}\varphi(\sin\delta - \sin\delta') = -\cos t(\cos\delta + \cos\delta') + \cos\delta'(\cos t + \cos t'),$$

aus welchen durch Addition die Gleichung:

$$2\operatorname{tg}\varphi(\sin\delta - \sin\delta') = (\cos\delta + \cos\delta')(\cos t' - \cos t)$$
$$+ (\cos\delta' - \cos\delta)(\cos t + \cos t')$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi \sin\frac{\delta-\delta'}{2}\cos\frac{\delta+\delta'}{2} = \cos\frac{\delta+\delta'}{2}\cos\frac{\delta-\delta'}{2}\sin\frac{t+t'}{2}\sin\frac{t-t'}{2}$$
$$+ \sin\frac{\delta+\delta'}{2}\sin\frac{\delta-\delta'}{2}\cos\frac{t+t'}{2}\cos\frac{t-t'}{2}$$

entsteht.

Es seien nun u, u' die beobachteten Uhrzeiten der gleichen Höhe beider Sterne; α, α' ihre Rectascensionen; x der Stand der Uhr gegen

Sternzeit, wobei zu beachten, dass, wenn die Uhr nicht nach Sternzeit geht, x für eine bestimmte Uhrzeit U geltend zu betrachten ist, auf welche die beobachteten Uhrzeiten u, u' mit dem bekannten Gange der Uhr gegen Sternzeit reducirt werden müssen;*) für U kann man u, u' oder das Mittel aus beiden, oder eine sonst beliebige Zeit wählen.

Dann sind $u + x$, $u' + x$ die Sternzeiten der Beobachtung, somit die von Süd über West gezählten Stundenwinkel:

$$t = u + x - \alpha; \quad t' = u' + x - \alpha';$$
$$t + t' = (u + u') - (\alpha + \alpha') + 2x,$$
$$t - t' = (u - u') - (\alpha - \alpha').$$

Setzt man nun:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu &= (u + u') - (\alpha + \alpha'), \\ 2\lambda &= (u - u') - (\alpha - \alpha'), \end{aligned}\right\} \quad (159)$$

wo also μ und λ bekannte Grössen sind, so wird:

$$\tfrac{1}{2}(t + t') = \mu + x, \quad \tfrac{1}{2}(t - t') = \lambda,$$

und die obige Gleichung geht durch Division mit $\cos\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos\frac{1}{2}(\delta - \delta')\sin\lambda$ über in:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')}{\sin\lambda} = \sin(\mu + x) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\operatorname{cotg}\lambda\cos(\mu + x).$$

Bestimmen wir nun den Hilfswinkel ζ mittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\operatorname{cotg}\lambda, \quad (160)$$

so wird:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')}{\sin\lambda} = \sin(\mu + x) + \operatorname{tg}\zeta\cos(\mu + x),$$

woraus

$$\sin(\mu + \zeta + x) = \frac{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')\cos\zeta}{\sin\lambda} \quad (161)$$

folgt. Die Gleichungen (159), (160), (161), enthalten die Auflösung der Aufgabe. In der 1ten der Glgn. (159) kann man die Summe $(u + u')$, wenn sie kleiner als $(\alpha + \alpha')$, um 48^h vermehren, wodurch μ stets positiv wird; der Gl. (161) genügen zwei Werthe von $\mu + \zeta + x$, von welchen jener dem Werthe von μ entsprechende zu nehmen ist.

Um über die zweckmässigste Wahl der Sterne Aufschluss zu erhalten, differenziren wir die Glgn. (m) und erhalten, auf dem in §. 156 betretenen Wege:

---

*) Ist eine beobachtete Uhrzeit u mit dem Uhrgange dx auf die Epoche U zu reduciren, so hat man zu u die Grösse $+ dx(u - U)$ hinzuzulegen, wobei dx positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Uhr retardirt oder voreilt.

$$dh = -\cos A\, d\varphi + \cos p\, d\delta - \cos\varphi \sin A\, dt$$
$$dh = -\cos A'\, d\varphi + \cos p'\, d\delta' - \cos\varphi \sin A'\, dt',$$

wo A, A' die Azimuthe beider Sterne zur Zeit der Beobachtung, p und p' die parallaktischen Winkel bedeuten. Subtrahiren wir beide Gleichungen und beachten, dass $dt = du + dx$, $dt' = du' + dx$ ist, wenn wir die Rectascensionen als fehlerfrei betrachten, oder ihre Fehler mit den Fehlern du, du' der beobachteten Uhrzeiten vereinigt annehmen, so kommt:

$$dx = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + A')}{\cos\varphi} d\varphi + \frac{\sin A}{\sin A' - \sin A} du - \frac{\sin A'}{\sin A' - \sin A} du'$$
$$- \frac{\cos p}{\cos\varphi(\sin A' - \sin A)} d\delta + \frac{\cos p'}{\cos\varphi(\sin A' - \sin A)} d\delta'. \quad (a)$$

Hieraus folgt, dass es am vortheilhaftesten ist, zwei Sterne zu wählen, welche zu beiden Seiten des Meridians in nahe gleichem Azimuth dieselbe Höhe erreichen, also Sterne von geringer Declinationsdifferenz, weil dann $\frac{1}{2}(A + A')$ klein wird, also ein Fehler in der Polhöhe einen geringen Einfluss auf den Uhrstand erhält, und auch die Nenner der anderen Coefficienten möglichst gross werden. Absolut genommen dürfen die Azimuthe, wie bei jeder Zeitbestimmung aus beobachteten Höhen, nicht zu klein sein, weil sonst die Beobachtungen selbst, wegen zu geringer Bewegung der Sterne in Höhe, an Genauigkeit verlieren, d. i. die Fehler du, du' zunehmen; es muss zu diesem Zwecke die Rectascensionsdifferenz der Sterne eine entsprechende Grösse haben. Beobachtungen in der Nähe des ersten Verticals sind daher auch hier am vortheilhaftesten: indessen sind die Bedingungen einer guten Zeitbestimmung nach genügend erfüllt, so lange die Declinationsdifferenz nicht erheblich über 10^0 steigt, und die Azimuthe nicht kleiner als etwa 30^0 werden. Die Sterne 1ter und 2ter Grösse allein bieten zu diesem Zwecke zahlreiche Combinationen.

167. Die Vorbereitung der Beobachtung erfordert zunächst die Kenntniss der Sternzeit T, zu welcher die beiden gewählten Sterne gleiche Höhe haben. Man findet sie aus den Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha),$$
$$\sin(\mu + \zeta) = \frac{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta - \delta')\cos\zeta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}, \qquad (162)$$
$$T = \mu + \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha'),$$

welche aus jenen (159), (160), (161) hervorgehen, wenn man $x = 0$ und $u = u' = T$ setzt*)

*) In der 2ten dieser Gleichungen kann $\sin(\mu + \zeta) > 1$, also μ unmöglich werden, was anzeigt, dass beide Sterne für den Beobachtungsort nicht in gleiche Höhe kommen können, ein Fall der übrigens bei zu vorliegendem Zwecke geeigneten Sternpaaren nicht eintreten kann. In allen anderen Fällen geben obige Gleichungen zwei Werthe von $\mu + \zeta$, also auch von T, weil zwei Sterne, wenn überhaupt, nothwendig zweimal in 24^h in eine Stellung kommen, wo sie gleiche Höhe haben.

Die zur Sternzeit T stattfindende Höhe H beider Sterne, so wie deren Azimuthe ergeben sich aus:

$$\sin H = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$= \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t',$$
$$\sin A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos H}, \quad \sin A' = \frac{\cos\delta' \sin t'}{\cos H},$$

wo $t = T - \alpha$, $t' = T' - \alpha'$ ist.

Die Beobachtungen können natürlich nicht bei der Höhe H, welche beide Sterne gleichzeitig erreichen, gemacht werden, sondern in einer etwas grösseren oder kleineren, damit beide Beobachtungen um ein genügendes Zeitintervall auseinander fallen. Die zu diesem Zwecke an obigen Werthen von H und A, A' anzubringenden Aenderungen ergeben sich hinreichend genau mittelst der Formeln:

$$dH = -\cos\varphi \sin A\, dt, \quad dA = \frac{\cos\delta \cos p}{\cos H} dt = -\frac{\operatorname{cotg} p}{\cos H} dH,$$

wo

$$\sin p = \frac{\cos\varphi \sin t}{\cos H}.$$

Beispiel. Für die Polhöhe $\varphi = 48^0\ 12'$ und die beiden Sterne:

α *Cassiopeae*: $\alpha = 0^h\ 32^m\ 58^s$, $\delta = +55^0\ 48'.0$,
γ *Ursae maj.*: $\alpha' = 11\ 46\ 42$, $\delta' = +54\ 26.5$.

Findet man, nach den Formeln (162) mit 4stelligen Logarithmen rechnend: $\zeta = 0^0\ 5'\ 55''$, $\sin(\mu + \zeta) = 8.1247$, also $\mu + \zeta = 0^0\ 45'.8$ oder $= 179^0\ 14'.2$, daher $\mu = 0^0\ 39'.9 = 2^m\ 40^s$, oder $= 179^0\ 8'.3 = 11^h\ 56^m\ 33^s$, folglich, da $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = 6^h\ 9^m\ 50^s$ ist, die zwei Sternzeiten gleicher Höhe: $T_1 = 6^h\ 12^m\ 30^s$ und $T_2 = 18^h\ 6^m\ 23^s$.

Führen wir nun beispielsweise die weitere Rechnung für die Beobachtung zur Sternzeit T_2 aus, so erhalten wir nach obigen Formeln, mit fünfstelligen Logarithmen rechnend, für die gemeinschaftliche Höhe H, und die von Nord (westlich positiv) gezählten Azimuthe die Werthe:

$H = 34^0\ 58'.4$; α *Cass.* $A = -42^0\ 56'.9$; γ *Urs. maj.* $A' = 44^0\ 59'.8$.

Sollen ferner die beiden Beobachtungen um etwa 10^m auseinander liegen, so setze man in der Formel $dH = -\cos\varphi \sin A\, dt$, $dt = 5^m = 75'$, wodurch für α *Cass.* $dH = 34'$ wird, und man kann nun zur Beobachtung die Höhe $h = H \pm dH$ nehmen. Wählt man die grössere Höhe und setzt in runder Zahl:

$$h = 35^0\ 30'$$

so hat man $dH = +31'.6$ und findet hiemit:

	für γ *Urs.* (West)	für α *Cass.* (Ost)
$dt =$	$-4^m\ 28^s$	$+\ 4^m\ 38^s$
$dA =$	$+\ 27'.9$	$-28'.1$
hiemit Sternzeit der Beobachtung:	$18^h\ 1^m\ 55^s$	$18^h\ 11^m\ 1^s$
Azimuth von Nord:	$+\ 45^0\ 27'.7$	$-\ 43^0\ 25'.0$,

womit die zur Einstellung des Instrumentes auf die Sterne erforderlichen Daten gegeben sind.

168. Die Beobachtung selbst wird mit einem Universale oder ähnlich gebauten Instrumente ausgeführt. Da die Genauigkeit der Zeitbestimmung wesentlich auf der Gleichheit beider Höhen beruht, und nicht angenommen werden kann, dass, nachdem man den ersten Stern beobachtet und das Instrument in das Azimuth des zweiten gedreht hat, die Höhe unverändert geblieben ist, so muss der Unterschied der Höhe gemessen und in Rechnung gebracht werden, und zu diesem Zwecke das Instrument mit einer senkrecht auf die verticale Umdrehungsaxe und parallel zum Höhenkreise angebrachten Libelle versehen sein, wie dies bei Universal-Instrumenten ohnehin immer der Fall ist (Versicherungs- oder Alhidadenlibelle; vergl. §. 118 und 123). Es ist dann am einfachsten, jede der beiden Uhrzeiten auf jene Höhe zu reduciren, welche der Absehenlinie des Horizontalfadens bei einspielender Libelle zukommt.

Sind a, i die Lesungen der Libelle, und zwar a jene des gegen den Stern oder nach aussen liegenden Blasenendes, so ist $15 \,.\, \frac{1}{2} k(a-i)$ die Ausweichung der Blase von der Mitte in Bogensecunden, wenn k den Winkelwerth eines Scalentheils in Zeitsecunden bedeutet; man hat daher den Stern bei einer Höhe beobachtet, welche, im Vergleiche zu jener bei einspielender Libelle, um $15 \,.\, \frac{1}{2} k(a-i)$ zu gross ist, und in Folge dessen die beobachtete Uhrzeit, wenn der Stern in Westen, um $\frac{dt}{dh} \,.\, \frac{1}{2} k(a-i)$ Zeitsecunden zu klein erhalten. Setzt man daher:

$$m = \frac{1}{\cos\varphi \sin A},$$

so ist die Correction der beobachteten Uhrzeit in Zeitsecunden:

$$+\ m \,.\, \tfrac{1}{2} k(a-i),$$

wo m positiv oder negativ, je nachdem der Stern im Westen oder Osten.

Um die Beobachtungen zu vervielfältigen, kann man jeden Stern mehrmals am Horizontalfaden beobachten, indem man successive die Höhe des Fernrohrs ändert, wobei der Index auf bestimmte Theilstriche des Höhenkreises, selbstverständlich dieselben bei beiden Sternen, scharf eingestellt wird.

Bequemer jedoch und weit genauer ist es, wenn man im Fernrohre zu beiden Seiten des mittleren Horizontalfadens zwei oder drei mit demselben parallele Seitenfäden anbringt und die Antritte des Sternes an diesen Fäden beobachtet, wobei dann das Fernrohr in Höhe nicht verstellt wird.

In beiden Fällen kann man dann aus je zwei correspondirenden, d. i. bei derselben Einstellung oder an demselben Faden gemachten Beobachtungen den Uhrstand ableiten und dann aus sämmtlichen Werthen das Mittel nehmen, dessen Sicherheit zugleich aus der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe sich zu erkennen gibt. Oder man kann auch die Rechnung nur einmal mit den Mitteln der Uhrzeiten ausführen, bei deren Bildung selbstverständlich jede Beobachtung eines Sternes wegzulassen ist, für welche die correspondirende des anderen Sternes mangelt. Letzteres Verfahren ist bei Beobachtungen an Seitenfäden stets ohne merklichen Fehler zulässig, weil sie in diesem Falle in Folge des geringen Abstandes der Fäden sehr rasch aufeinander folgen; bei der anderen Beobachtungsmethode, wo die Einstellung geändert wird, jedoch nur dann, wenn die Declinationen beider Sterne sehr nahe gleich sind, widrigenfalls an den Mitteln der beobachteten Uhrzeiten eine ähnliche Correction, wie bei der Zeitbestimmung aus absoluten Höhen (§. 159) angebracht werden müsste.

Endlich kann man, im Falle die Beobachtungen an Seitenfäden gemacht sind, diese auf den Mittelfaden reduciren, wenn die Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden (§. 96) bekannt sind. Um diese Reduction zu finden, sei t der Stundenwinkel des Sternes zur Zeit des Antrittes am Mittelfaden, t' der Stundenwinkel an einem Seitenfaden, dessen Abstand vom Mittelfaden $= F$; h die wahre Höhe des Sternes am Mittelfaden, somit $h + F$ die wahre Höhe am Seitenfaden, wo F positiv genommen wird, wenn die Höhe des Seitenfadens grösser als jene des Mittelfadens. Setzt man nun $t = f(h)$, $t' = f(h + F)$, so hat man nach dem T a y l o r'schen Lehrsatze:

$$t' = f(h + F) = t + \frac{dt}{dh} F + \frac{d^2t}{dh^2} \frac{F^2}{2}.$$

Die Differenz der Stundenwinkel, $t - t' = l$, in Zeit ausgedrückt, ist aber offenbar die Zeit, welche der Stern braucht, um vom Seitenfaden zum Mittelfaden, oder umgekehrt, zu kommen, also die gesuchte Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden; man hat daher:

$$l = - \frac{dt}{dh} F - \frac{d^2t}{dh^2} \frac{F^2}{2},$$

oder, wenn F und l in Zeitsecunden ausgedrückt werden:

$$l = - \frac{dt}{dh} F - \frac{15 \sin 1''}{2} \frac{d^2t}{dh^2} \cdot F^2.$$

Aus der Gleichung:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

erhält man durch zweimalige Differenziation, dh als unabhängig Veränderliche betrachtend:

$$\frac{dt}{dh} = -\frac{\cos h}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} = -\frac{1}{\cos\varphi \sin A},$$

$$\frac{d^2t}{dh^2} = \frac{\sin h}{\cos\varphi \cos\delta \sin t} - \operatorname{cotg} t \left(\frac{dt}{dh}\right)^2 = -\frac{dt}{dh}\left(\operatorname{tg} h + \frac{dt}{dh} \operatorname{cotg} t\right).$$

Setzt man daher:

$$m = \frac{1}{\cos\varphi \sin A}, \quad n = \frac{15 \sin 1''}{2} (\operatorname{tg} h - m \operatorname{cotg} t),$$

so wird:

$$l = mF - mnF^2,$$

wo m positiv auf der Westseite, negativ auf der Ostseite zu nehmen, und der Stundenwinkel t von Süd über West von 0 bis 360^0, oder auch von Süd aus nach beiden Seiten, östlich negativ, zu zählen ist.

Hiebei ist nun noch zu beachten, dass in Folge der mit der Bewegung des Sternes von einem Seiten- zum Mittelfaden (oder umgekehrt) verbundenen Höhenänderung auch die Refraction sich ändert, und eine leichte Ueberlegung lehrt, dass, da die Refraction mit zunehmender Höhe abnimmt, der Stern, von irgend einem Faden aus, einen folgenden später erreichen wird, als dies ohne Refractionsänderung der Fall wäre, und zwar unter allen Umständen, die Höhe mag im Zu- oder Abnehmen begriffen sein, und der Stern von einem Seiten- zum Mittelfaden, oder umgekehrt gehen. Man hat daher in dem obigen Ausdrucke für F nicht den wahren, sondern den um die Refractionsdifferenz vergrösserten Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden zu nehmen, oder es ist, wenn man mit ϱ die Refraction für die Höhe des Mittelfadens, mit $\varrho \pm d\varrho$ jene für die Höhe des Seitenfadens, mit f endlich den wahren Abstand beider Fäden in Zeitsecunden bezeichnet, $F = f + \frac{1}{15} d\varrho$ zu setzen.

In Folge dieses Einflusses der Refraction erhalten die Fadenintervalle bei verschiedenen Höhen verschiedene Werthe. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, kann man die Wirkung der Refraction mit der für ein bestimmtes Sternpaar constanten Grösse m vereinigen. Bezeichnet man mit $\Delta\varrho$ die Aenderung der Refraction für 1^0 Höhenänderung in der Höhe des Mittelfadens, ausgedrückt in Bogensecunden, so wird $\frac{1}{15} d\varrho = f \frac{\Delta\varrho}{3600}$, somit:

$$F = f + f\frac{\Delta\varrho}{3600} = f\left(1 + \frac{\Delta\varrho}{3600}\right),$$

$$\log F = \log f + \log\left(1 + \frac{\Delta\varrho}{3600}\right) = \log f + \frac{M}{3600}\Delta\varrho,$$

wo $M = 0.4343$ der Modulus, also:

$$\log F = \log f + 0.0001206\, \Delta\varrho.$$

Setzt man also:

$$\log m' = \log m + 0.0001206\, \varDelta\varrho$$

und beachtet, dass in dem immer sehr kleinen zweiten Gliede ohne Fehler f^2 statt F^2 gesetzt werden kann, so wird

$$l = m'f - mnf^2,$$

wo nun f den wahren Werth des Fadenintervalles in Zeitsecunden bedeutet.

Hat man an einer nach mittlerer Zeit gehenden Uhr beobachtet, so sind die Fadenintervalle f durch Multiplication mit 0,99727 (log = 9.99881) in mittlerer Zeit auszudrücken.

B e i s p i e l. Das im vorigen §. angeführte Sternpaar wurde mit einem zwölfzölligen Theodoliten beobachtet, dessen gebrochenes Fernrohr mit 7 Horizontalfäden versehen war; die Abstände der sechs Seitenfäden vom Mittelfaden IV waren:

	I	II	III	V	VI	VII
$f =$	$+\,38^s.423$	$+\,25^s.613$	$+\,12\,476$	$-\,12.844$	$-\,26.475$	$-\,40.305.$

Für die Höhe $h = 35^0\ 30'$ ergab sich im vorigen §.:

für γ *Ursae maj.*: $A = +\,45^0\ 27.7,\quad t = \ 6^h\ 15^m\ 13^s = \ 93^0\ 48'.3$
„ α *Cassiopeae*: $A = -\,43\ \ 25.0,\quad t = 17\ \ 38\ \ \ 3 = 264\ \ 30.7$

Hiemit findet man:

für γ *Ursae maj.*: $\log m = 0.32322,\quad \log n = 5.4917,\quad \log mn = 5.815$
„ α *Cassiopeae*: $\log m = 0.33903\,n,\quad \log n = 5.5258,\quad \log mn = 5.865\,n,$

Aus der Tafel der mittleren Refraction (Seite 142) hat man für $h = 35^0\ 30'$: $\varDelta\varrho = 3''$, somit $0{,}0001206\ \varDelta\varrho = 0.00036$, folglich:

für γ *Ursae*: $\log m' = 0.32358$, für α *Cassiop.*: $\log m' = 0.33939\,n$

und die Rechnung steht nun, wie folgt:

	I	II	III	V	VI	VII
$\log f$	1.58459	1.40846	1.09608	1.10870 n	1.42284 n	1.60536 n
$\log f^2$	3.169	2.817	2.192	2.217	2.846	3.211
			Für γ *Ursae maj.*:			
$\log m'f$	1.90817	1.73204	1.41966	1.43228 n	1.74642 n	1.92894 n
$\log mnf^2$	8.984	8.632	8.007	8.032	8.661	9.026
$m'f$	$+80^s.941$	$+53^s.956$	$+26^s.282$	$-27^s.057$	$-55^s.772$	$-84^s.906$
$-\,mnf^2$	$-\,0\,.096$	$-\,0\,.042$	$-\,0\,.010$	$-\,0\,.011$	$-\,0\,.047$	$-\,0\,.106$
l	$+80\,.84$	$+53\,.91$	$+26\,.27$	$-27\,.07$	$-55\,.82$	$-85\,.01$
			Für α *Cassiopeae*:			
$\log m'f$	1.92398 n	1.74785 n	1.43547 n	1.44809	1.76223	1.94475
$\log mnf^2$	9.034 n	8.682 n	8.057 n	8.082 n	8.711 n	9.076 n
$m'f$	$-83^s.942$	$-55^s.956$	-27.256	$+28.060$	$+57^s.840$	$+88.054$
$-\,mnf^2$	$+\,0\,.108$	$+\,0\,.048$	$+\,0.011$	$+\,0.012$	$+\,0\,.051$	$+\,0.119$
l	$-83\,.83$	$-55\,.91$	-27.25	$+28.07$	$+57\,.89$	$+88.17$

169. Als Beispiel einer vollständigen Zeitbestimmung mag das folgende dienen.

1865, Sept. 20, wurde zu Wien das Sternpaar γ *Ursae maj.* und α *Cassiopeae* in der Höhe $35^0\ 30'$ an den 7 Fäden des oberwähnten Instrumentes beobachtet, wie folgt:

	γ *Ursae maj.* (West)			α *Cassiopeae* (Ost)		
Faden	Uhr	Libelle		Uhr	Libelle	
	u'	a	i	u	a	i
I	$17^h\ 59^m\ 38^s.0$	16.7	18.1	$18^h\ 11^m\ 15^s.7$	20.8	14.0
II	18 0 5 .0			10 47 .7		
III	0 32 .7			10 19 .1		
IV	0 58 .9			9 51 .8		
V	1 25 .9			9 23 .7		
VI	1 54 .7			8 54 .0		
VII	18 2 24 .0	16.9	18.0	8 23 .7	20.8	14.1

Polhöhe $\varphi = 48^0\ 11'\ 59''.0$. Die scheinbaren Oerter der Sterne waren:

$$\alpha \textit{ Cassiopeae: } \alpha = 0^h\ 32^m\ 57^s.73, \quad \delta = +55^0\ 48'\ 4''.9$$
$$\gamma \textit{ Urs. maj.: } \alpha' = 11\ 46\ 42.80, \quad \delta' = +54\ 26\ 29.6.$$

Die Uhr ging nach Sternzeit mit einem täglichen Gange $+ 0^s.543$; wollte man sämmtliche Uhrzeiten wegen dieses Ganges z. B. auf die Uhrzeit $U = 18^h$ reduciren, so betrüge die Reduction für die von dieser Epoche entfernteste Zeit $(18^h\ 11^m\ 15^s.7)$ $+\dfrac{0^s.543}{24.60} \times 11^m.26 = + 0^s.0042$ und ist daher verschwindend.

Der Winkelwerth eines Scalentheils der Libelle war $k = 0^s.36$, und im vorigen §. fanden wir für γ *Ursae*: $m = + 2.105$, für α *Cassiop.*: $m = - 2.183$. Aus den obigen Ablesungen der Libelle folgt daher für:

$$\gamma \textit{ Ursae: } \tfrac{1}{2}k(a-i) = -0^s.225; \quad \text{Corr. d. Uhrzeiten} = -0^s.474$$
$$\alpha \textit{ Cass.: } \quad „ \quad = +1.215; \quad „ \quad = -2.652.$$

Rechnen wir zunächst mit den Mitteln der Uhrzeiten, so haben wir:

	γ *Ursae*	α *Cassiop.*
Mittel der Uhrzeiten	$18^h\ 0^m\ 59^s.886$	$18^h\ 9^m\ 50^s.814$
Correction der Libelle	$-\ 0.474$	$-\ 2.652$
	$u' = 18\ 0\ 59.412$	$u = 18\ 9\ 48.162$,

und die Rechnung steht nach den Formeln (159), (160), (161) wie folgt:

$u+u' = 36^h\ 10^m\ 47.574$	$\delta+\delta' = 110^0\ 14'\ 34''.5$	$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.048608$
$\alpha+\alpha' = 12\ 19\ 40.53$	$\delta-\delta' = 1\ 21\ 35.3$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta-\delta') = 8.074345$
$2\mu = 23\ 51\ 7.044$	$\frac{1}{2}(\delta+\delta') = 55\ 7\ 17.25$	$\log \cos \zeta = 0.000000$
$\mu = 11\ 55\ 33.522$	$\frac{1}{2}(\delta-\delta') = 0\ 40\ 47.65$	8.122953
$u-u' = +0\ 8\ 48.750$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta+\delta') = 0.156735$	$\log \sin \lambda = 9.998550$
$\alpha-\alpha' = -11\ 13\ 45.07$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta-\delta') = 8.074345$	$\log \sin(\mu+\zeta+x) = 8.124403$
$2\lambda = +11\ 22\ 33.820$	$\log \operatorname{cotg} \lambda = 8.913048$	$\mu+\zeta+x = 179^0\ 14'\ 13''.11$
$\lambda = +5\ 41\ 16.91$	$\log \operatorname{tg} \zeta = 7.144128$	$= 11^h\ 56^m\ 56^s.874$
$= +85^0\ 19'\ 13''.6$	$\zeta = 0^0\ 4'\ 47''.44$	$\mu+\zeta = 11\ 55\ 52.685$
	$= 0^h\ 0^m\ 19^s.163$	$x = +\ 1^m\ 4^s.189$

Führt man aber die Rechnung in derselben Weise für jeden einzelnen Faden aus, so erhält man:

μ	λ	ζ	$\mu+\zeta+x$	$\mu+\zeta$	x
$11^h\,55^m\,35^s.025$	$85^0\,40'\,1''.5$	$17^s.738$	$11^h\,56^m\,56^s.961$	$11^h\,55^m\,52^s.763$	$+\,1^m\,4^s.198$
34 .525	33 12 .0	18 .205	56 .933	52 .730	4 .203
34 .075	26 9 .7	18 .687	56 .904	52 .762	4 .142
33 .525	19 28 .5	19 .146	56 .875	52 .671	4 .204
32 .975	12 35 .2	19 .618	56 .845	52 .593	4 .252
32 .525	85 5 16 .5	20 .120	56 .812	52 .645	4 .167
32 .025	84 57 49 .5	20 .631	56 .777	52 .656	4 .121
				Mittel $x =$	$+\,1\,\,4\,.184$

Macht man endlich die Rechnung mit Anwendung der im vorhergehenden §. berechneten Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden, so kommt:

	γ Ursae	*α Cassiop.*
	$18^h\,0^m\,58^s.84$	$18^h\,9^m\,51^s.87$
	91	79
	97	85
	90	80
	83	77
	88	89
	99	87
Mittel	18 0 58 .903	18 9 51 .834
Corr. d Libelle	— 0 .474	— 2 .652
	$u' =$ 18 0 58 .429	$u =$ 18 9 49 .182

Mit diesen Werthen findet man:

$$\mu=11^h\,55^m\,33^s.541,\ \lambda=85^0\,19'\,28''.6,\ \zeta=19^s.146,\ \mu+\zeta+x=11^h\,56^m\,56^s.875,$$
$$\mu+\zeta=11^h\,55^m\,52^s.687,\ x=+\,1^m\,4^s.188.$$

Berechnen wir noch, um den Einfluss der verschiedenen Fehler auf den Uhrstand kennen zu lernen, die Gl. (a) [§. 166], so erhalten wir:

$$dx=0.0018\,d\varphi-0.4909\,du-0.5091\,du'-0.0414\,d\delta+0.0412\,d\delta',$$

wo dx, du, du' in Zeit-, $d\varphi$, $d\delta$, $d\delta'$ in Bogensecunden zu verstehen sind und die accentuirten Grössen sich auf *γ Urs. maj.* beziehen.

Die Fehler du, du' setzen sich aus drei Theilen zusammen: dem Fehler ε_u in der beobachteten Durchgangszeit, dem Fehler ε_1 der Libellencorrection und dem Fehler $d\alpha$ der Rectascension; es ist daher

$$du^2=\varepsilon_u^2+\varepsilon_1^2+d\alpha^2$$

zu setzen. Hiemit wird der Ausdruck für das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers E der Zeitbestimmung, wenn wir die gleichartigen Fehlerquellen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}E^2 &= 0.0018^2\,d\varphi^2\\ &+(0.4909^2\,\varepsilon_u^2+0.5091^2\,\varepsilon_u'^2)\\ &+(0.4909^2\,\varepsilon_1^2+0.5091^2\,\varepsilon_1'^2)\\ &+(0.4909^2\,d\alpha^2+0.5091^2\,d\alpha'^2+0.0414^2\,d\delta^2+0.0412^2\,d\delta'^2,\end{aligned}$$

wo der Reihe nach die 2te, 3te und 4te Zeile jene Theile des Gesammtfehlers enthalten, welche beziehungsweise von den Fehlern in den beobachteten Durchgangszeiten, der Libellencorrection, und der Position der Sterne herrühren.

Es ist nun nach Gl. (139), mit Rücksicht darauf, dass jeder Stern an 7 Fäden beobachtet wurde:

$$\varepsilon_u^2 = \frac{1}{7}\left[a^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2 \sec\delta^2 \operatorname{cosec} p^2\right],$$

und, wenn wir den wahrscheinlichen Fehler der Ablesung eines Blasenendes der Libelle, in Scalentheilen ausgedrückt, mit ε bezeichnen:

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\,mk\,\varepsilon.$$

Bei dem benützten Instrumente war $v = 48$, $k = 0^s.36$. Setzen wir also:

$$a = 0^s.07,\ \ b = 3^s.18,\ \ \varepsilon = 0.1,\ \ d\varphi = 1'';$$

$$d\alpha = 0^s.02 \sec\delta = 0^s.03528,\ \ d\alpha' = 0^s.02 \sec\delta' = 0^s.03438,\ \ d\delta = d\delta' = 0''.3,$$

so erhalten wir:

$$\varepsilon_u = 0^s.06033,\ \ \varepsilon_u^1 = 0^s.05898,\ \ \varepsilon_1 = 0^s.05556,\ \ \varepsilon_1^1 = 0^s.05358,$$

und hiemit:

$$E^2 = 0.000003 + 0.001779 + 0.001488 + 0.000913,$$

d. i.:

$$E^2 = 0.004183,\ \ \ E = \pm\ 0^s.065.$$

Dieser w. F. in x ist schon ziemlich klein, ungeachtet das Beispiel, absichtlich, ungünstig für eine genaue Zeitbestimmung gewählt ist, da die Declinationen der Sterne schon gross, die Azimuthe klein sind, und dadurch die beobachteten Durchgangszeiten an Genauigkeit verlieren, und überdies die benützte Libelle zu wenig empfindlich war, wodurch der von der Libellencorrection herrührende Theil des Gesammtfehlers auf den namhaften Betrag $\sqrt{0.001488} = 0^s.0386$ steigt.

Diese Methode der Zeitbestimmung ist daher einer grossen Schärfe fähig, da sie von Instrumentalfehlern und Refraction gänzlich unabhängig ist; es wird nur gefordert, dass die Libelle hinreichend empfindlich sei und die Neigung derselben gegen die Absehenlinie des Fernrohrs unverändert bleibe, was für die kurze Zwischenzeit der Beobachtungen wohl immer angenommen werden kann. Sie wird daher namentlich dann mit Nutzen angewendet werden können, wenn ein gutes Passage- oder Universal-Instrument nicht zur Verfügung steht.

4. Zeitbestimmung aus beobachteten Meridian-Durchgängen der Sterne.

Bekanntlich ist die Sternzeit im Augenblicke der oberen Culmination irgend eines Sternes gleich der Rectascension desselben (§. 11). Beobachtet man daher den Durchgang eines Sternes durch den Meridian zur Uhrzeit u, so ist, wenn x den Stand der Uhr gegen Sternzeit bezeichnet, $u + x$ die Sternzeit der Culmination, gleich der Rectascension α des Sternes, somit:

$$x = \alpha - u.$$

Geht die Uhr nach mittlerer Zeit, so verwandle man die Sternzeit α in mittlere Zeit M, und es wird $x = M - u$ der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit sein.

Hiebei wird also der Durchgang des Sternes durch einen bestimmten Vertical, hier der Meridian, beobachtet, und zur Anstellung solcher Beobachtungen dient vorzugsweise das in §. 127 näher beschriebene Durchgangs- oder Passage-Instrument. Ist dasselbe so berichtiget und aufgestellt, dass, bei der Drehung des Fernrohrs um seine Axe, die verlängerte Absehenlinie des Mittelfadens an der scheinbaren Himmelskugel den Meridian beschreibt, so wird offenbar die Uhrzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden die Uhrzeit der Culmination oder des Durchganges durch den Meridian sein. Hiezu wird nun erfordert, dass:

1. die Absehenlinie des Mittelfadens senkrecht stehe auf der Drehungsaxe des Fernrohrs;
2. diese Drehungsaxe horizontal sei, und
3. in der Richtung Ost-West liege.

Ist nämlich die erste Bedingung erfüllt, so wird die Absehenlinie eine auf die Drehungsaxe senkrechte Ebene beschreiben, welche die Himmelskugel in einem grössten Kreise schneidet; dieser Kreis wird ein Verticalkreis sein, wenn die Drehungsaxe des Fernrohrs horizontal ist, und endlich mit dem Meridiane zusammenfallen, wenn auch der 3ten Bedingung genügt ist.

Diese Bedingungen werden jedoch in der Regel nicht strenge erfüllt sein; es wird vielmehr im Allgemeinen die Absehenlinie einen kleinen Winkel c (der sogenannte Collimationsfehler) mit einer auf die Drehungsaxe des Fernrohres senkrechten Ebene einschliessen und in Folge dessen einen kleinen Kreis beschreiben, welcher zu dem sogenannten grössten Kreise des Instrumentes, in welchem die Himmelskugel von der eben genannten Ebene geschnitten wird, parallel ist; die Drehungsaxe des Fernrohrs wird gegen den Horizont eine kleine Neigung b haben, und endlich von der Richtung Ost-West um einen Winkel k, das sogenannte Azimuth des Instrumentes, abweichen. Die Wirkung dieser drei Instrumentalfehler ist offenbar, dass der

Mittelfaden nicht den Meridian beschreibt, und daher die Beobachtung des Sternes ausserhalb des Meridianes in einem kleinen Stundenwinkel τ erfolgt, um welchen die beobachtete Uhrzeit zu verbessern ist. Es wird im folgenden gezeigt werden, wie dieser Stundenwinkel τ, die sogenannte Reduction auf den Meridian, berechnet werden kann, wenn die Instrumentalfehler bekannt sind und wie letztere bestimmt werden können; es genügt, wenn durch Berichtigung des Instrumentes diese Fehler auf einen geringen Betrag gebracht sind, was keiner Schwierigkeit unterliegt.

Wie schon in §. 128 bemerkt, wird die Horizontalstellung der Drehungsaxe mit Hilfe der Libelle bewerkstelliget und die Berichtigung der Absehenlinie oder des Collimationsfehlers wie bei dem Universal-Instrumente nach §. 119 vorgenommen; es erübrigt nur noch, das Instrument nahe in den Meridian zu bringen, wozu die Beobachtung von Sternen zu Hilfe genommen werden muss.

Zu diesem Zwecke stelle man das Instrument so auf, dass es dem Augenmasse nach in die Richtung des Meridianes zu stehen kommt (zu welcher vorläufigen Orientirung man auch eine Boussole, mit Berücksichtigung eines genäherten Werthes der magnetischen Declination benützen kann), stelle mittelst der Libelle die Axe horizontal, und schaffe den Collimationsfehler nahezu weg. Man berechne nun die Uhrzeit der Culmination eines dem Pole nahe stehenden Sternes, am besten des Polarsternes, mit Berücksichtigung des Standes der Uhr, soweit derselbe bekannt ist, richte das Fernrohr um diese Zeit auf den Stern, bringe denselben durch Drehung des Instrumentes in Azimuth (mittelst der Schrauben $\delta\delta$, Fig. 66) an den Mittelfaden und erhalte ihn durch fortgesetzte Drehung an demselben bis zu dem Momente der berechneten Uhrzeit, in welcher Lage sodann das Instrument mittelst der Schrauben $\delta\delta$ festgestellt wird. Da der Polarstern zur Zeit der Culmination in unseren Breiten sein Azimuth nur um etwa $33''$ in einer Zeitminute ändert, so wird das Instrument selbst bei einem grösseren Fehler in dem angenommenen Uhrstande so nahe orientirt sein, dass das noch übrig bleibende kleine Azimuth auf dem in §. 175 angegebenen Wege bestimmt werden kann. Sollte es auch an einer nur ungefähren Kenntniss der Zeit fehlen, so kann man vorerst einen nahe im Zenith durch den Meridian gehenden Stern am Mittelfaden beobachten; da, wie eine leichte Ueberlegung lehrt, eine Abweichung des Instrumentes im Azimuthe auf die Durchgangszeit solcher Sterne nur geringen Einfluss hat, so wird die Differenz zwischen der Rectascension des Sternes und der beobachteten Uhrzeit ein genäherter Werth des Standes der Uhr gegen Sternzeit sein, womit dann die weitere Orientirung mittelst eines Polsternes ausgeführt werden kann.

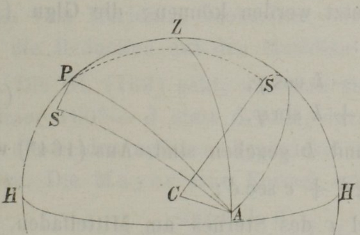
Man kann sich zu letzterem Zwecke auch der Sonne bedienen, indem man mit dem Mittelfaden einem der beiden Sonnenränder folgt; bezeichnet δ die Declination der Sonne, r den Halbmesser derselben in Bogensecunden, so ist, für diesen Zweck genügend genau, $\frac{1}{15} r \sec\delta$ die Zeit, in Sternzeitsecunden, welche der Halbmesser der Sonne braucht, um durch den Meridian zu gehen, welche Zeit, zu der berechneten Uhrzeit des Meridiandurchganges des Sonnenmittelpunctes hinzugelegt, oder davon abgezogen, die Zeit des Meridiandurchganges des östlichen, beziehungsweise westlichen Sonnenrandes gibt.

Ist der Beobachter, wie dies in der Praxis meist der Fall, mit anderen Hilfsmitteln versehen, um die Zeit und durch Messung eines Azimuths (wie im folgenden Abschnitte gezeigt werden wird) die Richtung des Meridianes zu bestimmen, so hat die Orientirung des Passage-Instrumentes keine Schwierigkeit, und bedarf keiner weiteren Erörterung.

Zur Berichtigung des Aufsuch-Kreises (§. 128) benützt man einen Stern von bekannter Declination, indem man während des Durchganges das Fernrohr so stellt, dass der Stern in der Mitte zwischen beiden Horizontalfäden erscheint; die scheinbare Zenithdistanz des Sternes ergibt sich nach den Formeln des §. 28, wobei noch die Refraction in Abzug zu bringen ist. Die eben erwähnten Fäden endlich werden horizontal gestellt, indem man einen Stern in der Nähe des Aequators beim Eintritte in das Gesichtsfeld in die Mitte zwischen beide Fäden stellt, und eine während des Durchganges sich zeigende Ausweichung aus der Mitte durch Drehung des Ocularrohres mittelst der Schräubchen *tt* (Fig. 66) wegschafft.

171. Es sei C (Fig. 87) der Mittelpunct des Instrumentes, CA die Drehungsaxe des Fernrohrs, welche, gegen West verlängert, die scheinbare Himmelskugel in einem Puncte A (dem Pole des grössten Kreises des Instrumentes) treffen möge. Die Höhe dieses Punctes über dem Horizonte (gleich der Neigung der Drehungsaxe) sei $= i$, sein Azimuth $= 90^0 - k$; die Declination $= n$, der Stundenwinkel $= 90^0 - m$, wobei letzterer, so wie das Azimuth wie gewöhnlich von Süd über West von 0^0 bis 360^0 gezählt werden. Von diesen vier Grössen bestimmen offenbar je zwei, Höhe und Azimuth, oder Declination und Stundenwinkel des Punctes A die Aufstellung des Instrumentes. In dem vom Puncte A mit dem Zenith und Nordpol gebildeten Dreiecke APZ ist nun, wenn φ die Polhöhe bedeutet:

Fig. 87.



$$PZ = 90^0 - \varphi,\quad AZ = 90^0 - i,\quad AP = 90^0 - n,\quad \angle PZA = 90^0 + k,$$
$$\angle ZPA = 90^0 - m,$$

und man hat daher durch Anwendung der Formeln (6) auf dieses Dreieck die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin n &= \sin i \sin \varphi - \cos i \cos \varphi \sin k, \\ \cos n \sin m &= \sin i \cos \varphi + \cos i \sin \varphi \sin k, \\ \cos n \cos m &= \cos i \cos k. \end{aligned} \tag{163}$$

Die Absehenlinie CS des Mittelfadens schliesse, in der Richtung nach dem Objective hin, mit dem gegen West gerichteten Axenende CA den Winkel $SCA = 90^0 + c$ ein, wobei also, wenn c positiv, der Mittelfaden östlich vom grössten Kreise des Instrumentes liegen wird, und sei auf einen Stern S gerichtet, dessen Rectascension $= \alpha$, Declination $= \delta$ und östlicher Stundenwinkel $ZPS = \tau$ ist, so hat man in dem Dreiecke APS:

$$AP = 90^0 - n, \quad PS = 90^0 - \delta, \quad AS = 90^0 + c,$$
$$\angle APC = 90^0 - m + \tau = 90^0 + (\tau - m),$$

somit:

$$\sin c = - \sin \delta \sin n + \cos \delta \cos n \sin (\tau - m), \tag{164}$$

oder:

$$\sin (\tau - m) = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} n + \sec \delta \sec n \sin c. \tag{164*}$$

Mittelst dieser Gleichungen (163) und (164) kann, wenn die Grössen i, k, c gegeben sind, der Stundenwinkel τ des Sternes am Mittelfaden berechnet werden, und zwar ganz allgemein bei jeder Aufstellung des Instrumentes in einem beliebigen Vertical.

Ist nun das Instrument im Meridian aufgestellt, und nach dem im vorigen §. angegebenen Verfahren nahe berichtiget, so sind die Grössen i, k, c, folglich auch m, n und τ immer so klein, dass ihre Sinusse mit den Bögen vertauscht und die Cosinus $= 1$ gesetzt werden können; die Glgn. (163) verwandeln sich dann in die folgenden:

$$\begin{aligned} n &= i \sin \varphi - k \cos \varphi, \\ m &= i \cos \varphi + k \sin \varphi, \end{aligned} \tag{165}$$

welche m und n bestimmen, sobald i und k gegeben sind. Aus (164*) wird:

$$\tau = m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta; \tag{166}$$

diese Gleichung gibt den Stundenwinkel τ des Sternes am Mittelfaden, also die Zeit, welche der Stern braucht, um vom Mittelfaden in den Meridian, oder umgekehrt, zu kommen, also die Reduction auf den Meridian.

Der Ausdruck (166) für diese Reduction rührt von Bessel her, und kann noch in anderen Formen dargestellt werden. Aus den Glgn. (165) findet man leicht:

$$\begin{aligned} i &= m \cos \varphi + n \sin \varphi, \\ k &= m \sin \varphi - n \cos \varphi, \end{aligned}$$

und aus der 1ten dieser Gleichungen:

$$m = i \sec \varphi - n \operatorname{tg} \varphi,$$

welcher Werth, in (166) substituirt, die von Hansen gegebene Form:

$$\tau = i \sec\varphi + n(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi) + c \sec\delta \tag{167}$$

darbietet. Substituirt man endlich in (166) die Werthe von m und n aus (165), so erhält man nach leichter Reduction die von T. Mayer angewendete Form:

$$\tau = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} k + \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} i + c \sec\delta. \tag{168}$$

Von diesen drei Ausdrücken für τ benützt man mit Vortheil einen der beiden ersteren, wenn eine grössere Anzahl von Sternen zu reduciren ist; bei Zeitbestimmungen, wo man es meist mit wenigen Sternen zu thun hat, wird in der Regel die Anwendung der Formel (168) bequemer sein.

Die obigen Ausdrücke von τ gelten für die obere Culmination. Findet die Beobachtung in der unteren Culmination statt, und nehmen wir an, dass hiebei der Stern in S' (Fig. 87) westlich vom Meridian beobachtet wurde, so ist der von Nord gegen West gezählte Stundenwinkel $H'PS' = \tau$ die Reduction auf den Meridian. Die Glgn. (163) oder (165) bleiben ungeändert; im Dreiecke APS' wird aber nun der Winkel $APS' = 180^0 - (90^0 - m) - \tau = 90^0 - (\tau - m)$, wodurch die Glgn. (164) und (166) beziehungsweise die Form:

$$\sin c = -\sin\delta \sin n - \cos\delta \cos n \sin(\tau - m),$$

und

$$\tau = m - n \operatorname{tg}\delta - c \sec\delta \tag{169}$$

annehmen. Dasselbe Resultat ergibt sich bei der Annahme, dass der Stern östlich vom Meridiane beobachtet worden wäre, weil mit dem Stundenwinkel auch die Reduction auf den Meridian ihr Zeichen ändert.

Die Gl. (169) geht, wie man sieht, aus jener (166) hervor, wenn man in dieser $180^0 - \delta$ statt δ setzt, durch welche Substitution selbstverständlich auch die beiden anderen Ausdrücke von τ für untere Culmination umgeformt werden. Die Mayer'sche Formel erhält dadurch folgende Gestalt:

$$\tau = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos\delta} k + \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos\delta} i - c \sec\delta.$$

Bezeichnet man daher in dieser Formel, wie dies im Folgenden der Kürze wegen geschehen soll, die Coefficienten von k, i, c mit K, I, C, so hat man allgemein:

$$\tau = Kk + Ii + Cc, \tag{170}$$

wo:

$$K = \frac{\sin(\varphi \mp \delta)}{\cos\delta}, \quad I = \frac{\cos(\varphi \mp \delta)}{\cos\delta}, \quad C = \pm \sec\delta \tag{171}$$

ist, und die oberen Zeichen für obere, die unteren Zeichen für untere Culmination gelten. Da für obere Culminationen südlich vom Zenith die

Zenithdistanz $z = \varphi - \delta$, nördlich vom Zenith $z = \delta - \varphi$, für die untere Culmination aber $z = 180^0 - (\varphi + \delta)$ ist, so hat man auch:

$$K = \pm \frac{\sin z}{\cos \delta}, \quad I = \pm \frac{\cos z}{\cos \delta}, \tag{171*}$$

wo die oberen Zeichen für obere, die unteren Zeichen für untere Culmination gelten, und die Zenithdistanz z positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith culminirt.

Bei Ableitung der Gl. (164) wurde vorausgesetzt, dass die Absehenlinie, in der Richtung gegen das Objectiv hin, mit dem gegen West gerichteten Axenende den Winkel $90^0 + c$ einschliesse.

Das Fernrohr sammt Axe kann aber in zwei verschiedenen Lagen in die Lager gelegt werden, wobei das Kreisende der Axe entweder gegen West (K. W.), oder gegen Ost (K. O.) gerichtet ist. Lassen wir daher $90^0 + c$, wo c positiv oder negativ sein kann, nunmehr den Winkel bedeuten, welchen die Absehenlinie mit dem Kreisende der Axe einschliesst, so gelten die obigen Formeln unmittelbar für die Kreislage K. W.

Wird das Instrument in seinen Lagern umgelegt, und die Beobachtung in der Kreislage: Kreis Ost gemacht, so schliesst die Absehenlinie mit dem westlichen Axenende den Winkel $90^0 - c$ ein. Es wird daher auch in dem Dreiecke ASP die Seite $AS = 90^0 - c$, wodurch in Gl. (164) und den daraus abgeleiteten das von c abhängige Glied das Zeichen ändert. Für die Kreislage: K. O. erhält daher in obigen Formeln c das entgegengesetzte Zeichen.

Es sei nun u die beobachtete Uhrzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden, x der Stand der Uhr gegen Sternzeit, so ist $u + x + \tau$ die Sternzeit der oberen Culmination, somit, wenn α die Rectascension des Sternes:

$u \quad \Delta u \quad \tau - t$

$$\alpha = u + x + \tau, \tag{172}$$

oder mit Rücksicht auf (170):

$$\alpha = u + x + Kk + Ii + Cc, \tag{173}$$

woraus folgt:

$$x = \alpha - (u + Kk + Ii + Cc). \tag{174}$$

Die erstere Gleichung gibt die Rectascension des Sternes, wenn der Uhrstand; die letztere den Uhrstand, wenn die Rectascension, und in beiden Fällen die Instrumentalfehler k, i, c bekannt sind. Wurde der Stern in der unteren Culmination beobachtet, so ist $\alpha + 12^h$ für α zu setzen.

Hierbei ist zu bemerken, dass unter α die scheinbare, mit der täglichen Aberration behaftete Rectascension zu verstehen ist. Lässt man daher α die scheinbare den Ephemeriden entnommene Rectascension bedeuten, und berücksichtiget, dass die tägliche Aberration in Rectascension im Meridiane, nach Gl. (112), $\pm\, 0^s.0207 \cos\varphi \sec\delta$ ist, wo das obere Zeichen für obere, das untere für untere Culmination gilt, so hat man in obigen Formeln $\alpha \pm 0.021 \cos\varphi \sec\delta$ für α zu setzen, und kann nun z. B. die letzte Gleichung, da der erwähnte Zeichenunterschied auch für den Coefficienten $C = \sec\delta$ gilt, in folgender Form schreiben:

$$x = \alpha - (u + Kk + Ii + Cc_1), \tag{175}$$

wo

$$c_1 = c - 0^s.0207 \cos\varphi$$

ist. Man berücksichtiget daher die tägliche Aberration vollständig, wenn man in obigen Formeln für c die Grösse c_1 einführt. Diese erhält übrigens für beide Kreislagen einen verschiedenen Zahlenwerth. Z. B. für $\varphi = 48^0\ 12'$ wird $0^s.0207 \cos\varphi = 0^s.014$; ist daher bei einem Instrumente $c = -0^s.274$, so hat man, um der täglichen Aberration Rechnung zu tragen, bei K. W.: $c_1 = -0^s.274 - 0^s.014 = -0^s.288$, bei K. O.: $c_1 = +0^s.274 - 0.014 = +0^s.260$ zu nehmen.

172. Um die Genauigkeit zu erhöhen, beobachtet man den Stern nicht blos am Mittelfaden, sondern auch an mehreren zu beiden Seiten desselben befindlichen Seitenfäden und reducirt sodann die an letzteren beobachteten Durchgangszeiten auf den Mittelfaden.

Für die Beobachtung am Mittelfaden ergab sich aus dem Dreiecke APS (Fig. 87) die Gl. (164*):

$$\sin(\tau - m) = \operatorname{tg} n \operatorname{tg}\delta + \sec n \sec\delta \sin c.$$

Beobachten wir aber den Stern an einem Seitenfaden, dessen östlicher Abstand vom Mittelfaden $= f$ ist, so wird in dem genannten Dreiecke die Seite $AS = 90^0 + c + f$, und, wenn wir den Stundenwinkel am Seitenfaden mit $l + \tau$ bezeichnen, der Winkel $APS = 90^0 - m + l + \tau = 90^0 + (l + \tau - m)$, wo l, in Zeit ausgedrückt, offenbar die Zeit ist, welche der Stern braucht, um vom Seitenfaden zum Mittelfaden zu kommen. Setzen wir daher in der obigen Gleichung $c + f$ statt c und $l + \tau - m$ statt $\tau - m$, so erhalten wir die auf den Seitenfaden sich beziehende Gleichung:

$$\sin(l + \tau - m) = \operatorname{tg} n \operatorname{tg}\delta + \sec n \sec\delta \sin(f + c).$$

Durch Subtraction beider Gleichungen ergibt sich nun:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} l \cos(\tfrac{1}{2} l + \tau - m) = 2 \sin \tfrac{1}{2} f \cos(\tfrac{1}{2} f + c) \sec\delta \sec n,$$

wofür, da c, n und $\tau - m$ immer sehr kleine Grössen sind, ohne merklichen Fehler:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} l \cos \tfrac{1}{2} l = 2 \sin \tfrac{1}{2} f \cos \tfrac{1}{2} f \sec\delta,$$

oder

$$\sin l = \sin f \sec\delta \tag{176}$$

geschrieben werden kann. Diese Gleichung gibt nun die Zeit l, welche der Stern braucht, um von einem Seitenfaden, dessen Abstand vom Mittelfaden $= f$ ist, zum Mittelfaden zu kommen oder umgekehrt, d. i. die gesuchte Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden.

Man kann, f in Zeitsecunden ausdrückend, obige Gleichung auch in der Form:

$$\sin l = 15 \sin 1'' f^s \sec \delta \tag{177}$$

schreiben, da f immer so klein ist, dass der Sinus mit dem Bogen vertauscht werden kann.

Ist der Stern nicht zu nahe am Pole, also $\sec\delta$ nicht sehr gross, so kann auch $\sin l = 15 \sin 1'' l^s$ gesetzt werden, wodurch obige Gleichung in die einfachere:

$$l^s = f^s \sec \delta \tag{178}$$

übergeht, deren man sich stets bedienen kann, so lange δ nicht grösser als 80^0 ist.

Für Sterne innerhalb 10^0 Poldistanz müssen jedoch die obigen strengen Formeln angewendet werden. Die etwas unbequeme Rechnung mit dem kleinen Winkel l kann man durch Anwendung einer Hilfstafel vermeiden. Multiplicirt man die Gl. (177) beiderseits mit $\frac{l^s}{\sin l}$, so kommt:

$$l^s = f^s \sec \delta \,.\, \frac{15 \sin 1'' l^s}{\sin l},$$

somit, wenn man

$$d = \log \frac{15 \sin 1'' l^s}{\sin l} = \log \frac{l}{\sin l}, \tag{m}$$

setzt:

$$\log l^s = \log (f^s \sec \delta) + d. \tag{179}$$

Da nun d vermöge der Gl. (m) von l, und dieses wieder, zufolge (177), von $f^s \sec\delta$ abhängt, so kann man eine Tafel rechnen, welche mit dem Argumente $\log(f^s \sec\delta)$ die Grösse d gibt; addirt man diese zu $\log(f^s \sec\delta)$, so erhält man sofort $\log l^s$.

Die folgende Tafel*) gibt d in Einheiten der 6ten Decimalstelle.

---

*) Eine nach kleineren Intervallen fortschreitende Tafel findet man in der Sammlung von „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, von Dr. Th. Albrecht, Leipzig, 1874“, welcher die obige auszugsweise entnommen ist.

log $f^s \sec\delta$	d	l	log $f^s \sec\delta$	d	l	log $f^s \sec\delta$	d	l	log $f^s \sec\delta$	d	l
1.00	0	$0^m 10^s$	2.70	96	$8^m 21^s$	2.90	242	$13^m 15^s$	3.10	609	$21^m\ 1^s$
20	0	0 16	71	101	8 33	91	253	13 33	11	637	21 30
40	0	0 25	72	105	8 45	92	265	13 52	12	667	22 0
60	1	0 40	73	110	8 57	93	278	14 12	13	699	22 31
80	2	1 3	74	116	9 10	94	291	14 32	14	732	23 3
2.00	4	1 40	2.75	121	9 22	2.95	305	14 52	3.15	767	23 35
05	5	1 52	76	127	9 36	96	319	15 13	16	803	24 8
10	6	2 6	77	133	9 49	97	334	15 34	17	841	24 42
15	8	2 21	78	139	10 3	98	350	15 56	18	881	25 17
20	10	2 38	79	146	10 17	99	366	16 18	19	923	25 52
2.25	12	2 58	2.80	153	10 31	3.00	384	16 41	3.20	966	26 28
30	15	3 20	81	160	10 46	01	402	17 4	21	1012	27 6
35	19	3 44	82	167	11 1	02	421	17 28	22	1060	27 44
40	24	4 11	83	175	11 16	03	440	17 53	23	1110	28 23
45	30	4 42	84	183	11 32	04	461	18 18	24	1163	29 2
2.50	38	5 16	2.85	192	11 48	3.05	483	18 43	3.25	1218	29 43
55	48	5 55	86	201	12 5	06	506	19 9	26	1276	30 25
60	61	6 38	87	211	12 22	07	530	19 36	27	1336	31 8
65	76	7 27	88	221	12 39	08	555	20 4	28	1400	31 52
70	96	8 21	89	231	12 57	09	581	20 32	29	1466	32 36
			2.90	242	13 15	3.10	609	21 1	3.30	1536	33 22

Beispiel. 1874, September 4, wurden am Passage-Instrumente des Observatoriums der k. k. technischen Hochschule zu Wien folgende Fadenantritte des Sternes δ *Ursae minoris*, dessen Declination an diesem Tage $\delta = +86^0\ 36'\ 36''$ war, beobachtet:

Faden	II	III	IV	V
	$3^m\ 41^s.0$	$6^m\ 22^s.0$	$9^m\ 1^s.0$	$18^h\ 11^m\ 40^s.0.$

Die Distanzen f der Seitenfäden vom Mittelfaden V waren:

$$\mathrm{II} = 28^s.3283, \qquad \mathrm{III} = 18^s.8582, \qquad \mathrm{IV} = 9^s.4022$$

Hiemit findet man nach Gl. (179):

$$\begin{array}{rccc}
 & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\
\log f = & 1.452221 & 1.275500 & 0.973230 \\
\log\sec\delta = & 1.228176 & 1.228176 & 1.228176 \\
\hline
\log f\sec\delta = & 2.680397 & 2.503676 & 2.201406 \\
\text{Aus d. Taf. m. d. Arg: } \log f\sec\delta:\ d = & +\ 88 & +\ 38 & +\ 10 \\
\hline
\log l^s = & 2.680485 & 2.503714 & 2.201416 \\
l = & 7^m\,59^s.16 & 5^m\,18^s.94 & 2^m\,39^s.01
\end{array}$$

Die auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten sind demnach:

Faden II	18^h	11^m	40.16
III			40.94
IV			40.01
V			40.00
Mittel	18	11	40.28

Die obigen Formeln, nach f aufgelöst, dienen nun auch dazu, um aus den beobachteten Zeitintervallen l die Fadenabstände f zu berechnen. Man hat zu diesem Zwecke aus (176) und (179):

$$\begin{aligned} \sin f &= \sin l \cos \delta, \\ \log f^s &= \log (l^s \cos \delta) - d, \end{aligned} \tag{180}$$

welche Formeln für Sterne in der Nähe des Poles anzuwenden sind; bei Benützung der zweiten wird die Grösse d der obigen Tafel mit dem Argumente l entnommen, zu welchem Behufe die correspondirenden Werthe dieser Grösse, auf ganze Zeitsecunden abgerundet, beigefügt sind.

Für Sterne, deren Declination kleiner als 80^0, kann man sich wieder der einfacheren Formel

$$f^s = l^s \cos \delta \tag{181}$$

bedienen.

Beispiel. Wären die in obigem Beispiele berechneten Werthe von l durch Beobachtung gegeben, und daraus die Fadenabstände f zu rechnen, so hätte man nach Gl. (180):

$l =$	$7^m\,59^s.16$	$5^m\,18^s.94$	$2^m\,39^s.01$
$\log l^s =$	2.680485	2.503714	2.201416
$\log \cos \delta =$	8.771824	8.771824	8.771824
	1.452309	1.275538	0.973240
Aus d. Taf. m. d. Arg. l: $d =$	— 88	— 38	— 10
$\log f =$	1.450221	1.275500	0.973230

Zur Bestimmung der Fadendistanzen benützt man mit Vortheil, namentlich bei grösseren Instrumenten, Sterne von grosser Declination, weil für solche $\cos \delta$ klein, und hierdurch der Einfluss eines Fehlers in l auf den berechneten Werth von f verringert wird. Differenzirt man die erste der Glgn. (180), so kommt: $df = \cos l \cos \delta \, dl$. Ist nun ε der wahrscheinliche Fehler eines beobachteten Fadenantrittes, so wird $dl = \varepsilon \sqrt{2}$, somit, wenn wir für ε den Werth aus Gl. (138) setzen, und beachten, dass im Meridian $p = 0$ ist:

$$df = \cos l \sqrt{2} \sqrt{a^2 \cos \delta^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass mit zunehmender Declination der Fehler df der berechneten Fadendistanz abnimmt, übrigens nur so lange in erheblicherem Masse, als das Glied $a^2 \cos \delta^2$ gegen das andere $(b : v)^2$ nicht verschwindend klein wird, was bei Instrumenten mit geringer Vergrösserung schon bei mässigen Declinationen eintritt, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich ist, welche die Werthe von df für mehrere Declinationen und für zwei Vergrösserungen: $v = 36$ und $v = 120$ berechnet enthält, wobei $f = 40^s$, $a = 0^s.07$, $b = 3^s.18$ angenommen ist:

	$\delta = 88^0\,40'$	80^0	70^0	60^0	40^0	20^0	0^0
$v = 36$:	$df = 0^s.124$	$0^s.126$	$0^s.129$	$0^s.134$	$0^s.146$	$0^s.156$	$0^s.159$
$v = 120$:	$df = 0.037$	0.041	0.050	0.062	0.084	0.100	0.106

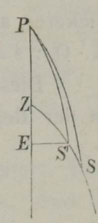
Hieraus folgt, dass für $v = 36$ der Durchgang eines Polsternes nur eine $1^2/_3$mal grössere Genauigkeit gewährt, als der Durchgang eines dem Aequator nahe stehenden Sternes, während für $v = 120$ dieses Verhältniss $= 8 : 1$ ist.

Man kann die Fadenintervalle f auch nach dem in §. 96 beschriebenen, zuerst von Gauss angegebenen Verfahren durch directe Winkelmessung bestimmen, wodurch man rasch zur Kenntniss derselben gelangt. Die definitiven Werthe wird man dann aber sicherer aus einer grossen Anzahl beobachteter Sterndurchgänge ableiten.*)

---

*) Anmerkung. Es mag hier noch des Einflusses erwähnt werden, welchen die Refraction bei der hier behandelten Aufgabe hat. Nehmen wir an, dass — was hier offenbar zulässig ist — der Mittelfaden den Meridian PZ (Fig. 88) beschreibe, und dass ein Stern S' an einem Seitenfaden beobachtet werde, dessen Abstand vom Mittelfaden $S'E = f$ sei. Da die Refraction im Verticalkreise wirkt, so wird der wahre Ort des Sternes zur Zeit der Beobachtung in einem Puncte S des durch S' gelegten Verticalkreises ZS' liegen und daher der Stundenwinkel $ZPS = l$ die Zeit sein, welche der Stern braucht, um zum Mittelfaden zu kommen, also die gesuchte Reduction. Setzen wir nun:

Fig. 88.



$$\angle ZPS' = l', \; PS = 90^0 - \delta, \; PS' = 90^0 - \delta', \; SZ = z, \; S'Z = z',$$

so folgt aus dem Dreiecke EPS':

$$\sin l' = \sin f \sec \delta',$$

und aus den Dreiecken ZPS und ZPS':

$$\sin PZS = \sin PZS' = \frac{\sin l \cos \delta}{\sin z} = \frac{\sin l' \cos \delta'}{\sin z'};$$

diese Gleichung gibt:

$$\sin l = \sin l' \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} \frac{\sin z}{\sin z'},$$

d. i. mit Rücksicht auf obigen Werth von $\sin l'$:

$$\sin l = \sin f \sec \delta \frac{\sin z}{\sin z'}.$$

Man kann hier genügend genau die Refraction $= k \operatorname{tg} z'$ (§. 54), also $z = z' + k \operatorname{tg} z'$ setzen, wo $k = 57''.5$ ist, woraus $\sin z' = \sin z' + k \sin 1'' \sin z'$, also $\frac{\sin z}{\sin z'} = 1 + k \sin 1'' = 1.00028$ folgt. Hiemit wird:

Es bedarf kaum der Erinnerung, dass, da der Werth des Fadenintervalls von der Entfernung der Fäden vom Objective abhängt, diese zuvor scharf in die Ebene des Bildes gestellt werden müssen, und dann das Ocularrohr nicht mehr verstellt werden darf.

173. Schreiten wir nun zur Bestimmung der Instrumentalfehler b, c, k, deren Kenntniss zur Berechnung der Reduction auf den Meridian erforderlich ist.

Bestimmung der Neigung i. Diese ergibt sich durch Nivellirung der Axe mittelst der Libelle nach §. 102. Sind w, o die Ablesungen des westlichen und östlichen Blasenendes in der ersten; w', o' die Ablesungen in der zweiten Lage der Libelle, und bedeutet μ den Winkelwerth eines Scalentheiles in Zeitsecunden, so ist, wenn, wie gewöhnlich, der Nullpunct in der Mitte der Scala liegt, also die Ablesung nach beiden Seiten erfolgt, die unmittelbar beobachtete Neigung:

$$b = \tfrac{1}{4}\mu[(w + w') - (o + o')], \tag{182}$$

welcher Ausdruck b positiv gibt, wenn das westliche Axenende das höhere, in Uebereinstimmung mit der in §. 171 gemachten Annahme.*)

Die so gefundene Neigung bedarf noch einer Correction, wenn die Zapfendurchmesser ungleich sind. Bezeichnet man diese durch die Glgn. (129) oder (129*) gegebene Correction mit y, positiv, wenn der Kreiszapfen der dickere, so ist die wahre Neigung der Axe bei K. W.: $i = b - y$, bei K. O.: $i = b + y$.

Diese Methode, die Neigung mittelst der Libelle zu bestimmen, wird in der Regel angewendet. Gestattet die Aufstellung des Instrumentes die Be-

---

$$\sin l = \mu \sin f \sec \delta, \quad \text{wo} \quad \mu = 1.00028. \tag{n}$$

Hieraus folgt:

1) berechnet man die Reductionen l mit den wahren Declinationen der Sterne und den wahren Werthen von f, wie letztere z. B. durch directe Messung nach der Gauss'schen Methode erhalten werden, so sind die berechneten Werthe von l noch mit μ zu multipliciren, oder, was auf dasselbe hinauskommt, man hat nicht die wahren Werthe von f, sondern die Werthe μf anzuwenden.

2) Bestimmt man aber die Werthe von f aus beobachteten Sterndurchgängen nach der gewöhnlichen Formel: $\sin f = \sin l \cos \delta$ oder den daraus abgeleiteten [(180), (181)], so erhält man dadurch, wie die Vergleichung mit Gl. (n) zeigt, nicht die wahren Werthe von f, sondern μf, also eben jene Werthe, welche zur Berechnung von l anzuwenden sind.

*) Liegt der Nullpunct an einem Ende der Scala, so ist es wohl am bequemsten den Ausdruck in folgender Form zu schreiben:

$$b = \tfrac{1}{4}\mu(w + w' + o + o'),$$

wobei in jener Lage der Libelle, bei welcher der Nullpunct in West liegt, beide Ablesungen negativ zu nehmen sind.

nützung eines Quecksilber-Horizontes, so kann die Neigung auch ohne Hilfe der Libelle nach einer der beiden folgenden Methoden bestimmt werden.

Man stelle den Horizont so auf, dass das reflectirte Bild eines dem Pole nahe stehenden Sternes in demselben beobachtet werden kann. Beobachtet man nun die Antritte des Sternes an einigen Seitenfäden direct, an einigen anderen die Antritte des reflectirten Bildes, und bezeichnet beziehungsweise mit u_d, u_r die auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten bei beiden Beobachtungen, so hat man nach Gl. (173), wenn man für K und I die Werthe (171*) einführt, für die directe Beobachtung:

$$\alpha = u_d + x \mp \frac{\sin z}{\cos \delta} k \pm \frac{\cos z}{\cos \delta} i \pm c \sec \delta,$$

und für die Beobachtung des Spiegelbildes, da für dieses z in $180^0 - z$ übergeht:

$$\alpha = u_r + x \mp \frac{\sin z}{\cos \delta} k \mp \frac{\cos z}{\cos \delta} i \pm c \sec \delta;$$

aus beiden Gleichungen folgt durch Subtraction:

$$i = \pm \tfrac{1}{2} (u_r - u_d) \frac{\cos \delta}{\cos z}, \quad \text{oder} \quad i = \tfrac{1}{2} (u_r - u_d) \frac{\cos \delta}{\cos (\varphi \mp \delta)}, \tag{183}$$

wo die oberen Zeichen für obere, die unteren für untere Culmination gelten. Die Beobachtung eines Polsternes in der oberen Culmination ist günstiger, weil für diese der Nenner $\cos z$ einen grösseren Werth erhält. Dieses Verfahren gibt die wahre Neigung der Umdrehungsaxe für jene Kreislage, in welcher die Beobachtung gemacht wurde, frei von dem Einflusse einer Ungleichheit der Zapfendurchmesser.

Eine andere Methode wurde bereits in §. 122 unter 4) erläutert. Diese erfordert nicht die Beobachtung eines Sternes, setzt aber voraus, dass das Ocular mit einem Schraubenmikrometer versehen, die Gleichung der Zapfendurchmesser bekannt ist, und die Construction und Aufstellung des Instrumentes die Anbringung des Quecksilber-Horizontes im Nadir gestattet.

Beide Methoden kommen übrigens nur bei grösseren Instrumenten mit Vortheil zur Anwendung und gewähren bei kleinen nicht die durch eine gute Libelle leicht erreichbare Genauigkeit.

174. Bestimmung des Collimationsfehlers c. Richtet man das Fernrohr auf einen dem Pole nahe stehenden Stern, so wird die Bewegung desselben hinreichend langsam sein, um während des Durchganges des Sternes durch das Fadennetz das Instrument umlegen, und in jeder der beiden Kreislagen den Antritt des Sternes an mehreren Seitenfäden beobachten zu können. Sind nun u_w und u_0 die Mittel der auf den Mittelfaden reducirten Antrittszeiten der einzelnen Seitenfäden beziehungsweise bei Kreis West und Kreis Ost, so hat man zufolge der Gl. (173) für Kreis West:

$$\alpha = u_w + x + Kk + Ii + c \sec \delta,$$

und für Kreis Ost:

$$\alpha = u_o + x + Kk + Ii' - c \sec \delta,$$

oder, wenn man die wegen der Neigung der Axe verbesserten Uhrzeiten:

$$u_w + Ii = t_w, \quad u_o + Ii' = t_o$$

setzt:

$$\alpha = t_w + x + Kk + c \sec \delta = t_o + x + Kk - c \sec \delta,$$

woraus

$$c = \tfrac{1}{2}(t_o - t_w) \cos \delta \qquad (184)$$

folgt. Wurde der Stern in der unteren Culmination beobachtet, so ist $180^0 - \delta$ für δ, oder $\cos \delta$ negativ zu nehmen. Vor der Beobachtung in der ersten, und nach jener in der zweiten Kreislage, oder auch während der beiden Durchgänge, wenn diese hinreichend langsam stattfinden, ist die Axe zu nivelliren, und an den beobachteten Neigungen die Correction wegen Ungleichheit der Zapfendurchmesser anzubringen.

Je näher der Stern dem Pole steht, um so kleiner wird $\cos \delta$, also auch der Einfluss eines Fehlers von bestimmter Grösse in den beobachteten Zeiten t_w und t_o auf die Bestimmung von c; da jedoch die Unsicherheit in den beobachteten Antrittszeiten mit abnehmender Poldistanz zunimmt, so geht der aus der Verkleinerung des Factors $\cos \delta$ entspringende Gewinn grösstentheils wieder verloren, und zwar um so mehr, je geringer die Vergrösserung des Fernrohrs ist. Bezeichnet man die wahrscheinlichen Fehler in t_w und t_o mit ε_w, ε_o, so wird der wahrscheinliche Fehler in c: $\varDelta c^2 = \frac{1}{4} \cos \delta^2 (\varepsilon_o^2 + \varepsilon_w^2)$. Nimmt man nun an, dass der Stern in jeder Kreislage an n Fäden beobachtet worden, und bezeichnet mit ε den wahrscheinlichen Fehler eines Fadenantrittes, so wird $\varepsilon_o^2 = \varepsilon_w^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{n}$, $\varDelta c^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{2n} \cos \delta^2$, somit, wenn man für ε den Ausdruck (138) einsetzt, und beachtet, dass, weil die Beobachtung im Meridiane stattfindet, $p = 0$ ist:

$$\varDelta c = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sqrt{a^2 \cos \delta^2 + \left(\frac{b}{v}\right)^2}.$$

Setzt man z. B. $n = 4$, so findet man hieraus mit den Werthen: $a = 0^s.07$, $b = 3^s.18$, und für die beiden Vergrösserungen $v = 36$ und 120:

	$\delta =$ $88^0\,40'$	85^0	80^0	75^0
$v = 36$:	$\varDelta c = 0^s.0312$	$0^s.0313$	$0^s.0315$	$0^s.0318$
$v = 120$:	$\varDelta c = 0\,.0094$	$0\,.0096$	$0\,.0103$	$0\,.0114$

Man ersieht hieraus, dass mit Polsternen von verschiedener Declination nahezu dieselbe Genauigkeit in der Bestimmung von c erzielt wird.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass zur sicheren Bestimmung der Collimation nach dieser Methode die genaue Kenntniss der Fädendistanzen erfordert wird. Macht man eine grössere Reihe von Bestimmungen von c, in der Art, dass die Beobachtung eines Durchganges abwechselnd bei K. O. und K. W. begonnen wird, so werden in beiden Fällen andere Fäden in Anspruch genommen, und es wird als Controle der Richtigkeit der angewendeten Fadendistanzen betrachtet werden dürfen, wenn die in beiden Fällen erlangten Werthe von c keinen systematischen Unterschied erkennen lassen.

Ist das Ocular des Passage-Instrumentes mit einem Schraubenmicrometer versehen, so kann der Collimationsfehler auch nach den in §. 122, unter 2), 3) und 4) dargestellten Methoden bestimmt werden. (Vergl. auch §. 177).

175. Bestimmung des Azimuthes k. Diese erfordert die Beobachtung zweier Sterne, welche nach (175) die zwei Gleichungen:

$$\alpha = u + x + Kk + Ii + Cc_1,$$
$$\alpha' = u' + x' + K'k + I'i' + C'c_1,$$

darbieten, wobei vorausgesetzt wird, dass das Azimuth k sich während der Zwischenzeit der Beobachtungen nicht geändert hat. Bezeichnet man nun mit u_0 eine angenommene den beobachteten Uhrzeiten u, u' nahe liegende Zeit, mit x_0 den Stand der Uhr zur Uhrzeit u_0, mit Δx den wenigstens näherungsweise bekannten stündlichen Gang der Uhr gegen Sternzeit, so ist:

$$x = x_0 + (u - u_0)\Delta x, \quad x' = x_0 + (u' - u_0)\,\Delta x.$$

Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, so enthalten dieselben, da die Neigung der Axe, sowie die Collimation als bekannt anzunehmen sind, noch die zwei Unbekannten x_0 und k. Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} T &= u + (u - u_0)\,\Delta x + Ii + Cc_1 \\ T' &= u' + (u' - u_0)\,\Delta x + I'i' + C'c_1, \end{aligned} \tag{185}$$

wo demnach T und T' die wegen Neigung der Axe, Collimation und Uhrgang verbesserten Durchgangszeiten beider Sterne bedeuten und bekannte Grössen sind, so verwandeln sich obige Gleichungen in folgende:

$$\alpha - T = x_0 + Kk \text{ und } \alpha' - T' = x_0 + K'k, \tag{186}$$

aus welchen folgt:

$$k = \frac{(\alpha' - T') - (\alpha - T)}{K' - K}. \tag{187}$$

Um den Einfluss eines Fehlers in dem angenommenen Uhrgange unmerklich zu machen, insbesondere aber mit Rücksicht auf die oben gemachte

Voraussetzung der Beständigkeit des Azimuthes ist es räthlich, die Sterne so zu wählen, dass die Beobachtungen bald nach einander folgen.

Das Azimuth ergibt sich auch durch Beobachtung eines Circumpolarsternes in der unteren und oberen Culmination; in diesem Falle wird, da $\delta = \delta'$ gesetzt werden kann, $K' = K = 2 \cos\varphi \operatorname{tg}\delta$, somit:

$$K = \frac{(\alpha' + 12^h - T') - (\alpha - T)}{2 \cos\varphi \operatorname{tg}\delta}.$$

Bei diesem Verfahren bleibt ein Fehler in der Rectascension des Sternes ohne Einfluss, weil die Differenz $\alpha' - \alpha$ nur die Aenderung derselben durch Präcession, Aberration und Nutation darstellt und genau bekannt ist; es kann jedoch nur dann angewendet werden, wenn der zwölfstündige Uhrgang hinreichend genau bekannt und die Unveränderlichkeit des Azimuthes durch die Stabilität der Aufstellung des Instrumentes gesichert ist, oder eine allfällige Aenderung desselben durch Beobachtung einer Mire in Rechnung gebracht werden kann.

Der Einfluss einer Unsicherheit in den Grössen T, T', α, α' auf den nach Gl. (187) berechneten Werth des Azimuthes wird im Allgemeinen um so geringer sein, je grösser der Nenner $K' - K$ wird. Letzterer erhält durch Substitution der entsprechenden Werthe (171) für K und K' die Form:

$$K' - K = \frac{\cos\varphi \sin(\delta \mp \delta')}{\cos\delta \cos\delta'} = \cos\varphi (\operatorname{tg}\delta \mp \operatorname{tg}\delta'),$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn beide Sterne in der oberen Culmination beobachtet sind, die unteren, wenn der eine Stern in der oberen, der andere, auf welchen sich die accentuirten Buchstaben beziehen, in der unteren Culmination beobachtet wird. Aus dieser Form erkennt man, dass im ersteren Falle der Nenner $K' - K$ um so grösser wird, je näher der eine Stern dem Pole, und je weiter der andere von ihm entfernt ist. Im zweiten Falle wird $K' - K$ um so grösser, je näher beide Sterne dem Pole stehen.

Indess bewirkt der Umstand, dass mit abnehmender Poldistanz die Unsicherheit der beobachteten Durchgangszeit u erheblich zunimmt, hier in ähnlicher Weise wie bei der Bestimmung des Collimationsfehlers, dass die Genauigkeit der Bestimmung des Azimuthes keineswegs in dem Masse sich erhöht, als der Nenner $K' - K$ in dem Ausdrucke (187) grösser wird, wie folgende Betrachtung zeigt.*) Bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler einer Grösse durch Vorsetzung der Charakteristik Δ, so folgt aus Gl. (187) der wahrscheinliche Fehler in k:

---

*) In ähnlicher Art zuerst in der Abhandlung: „Ueber die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hilfe des electrischen Telegraphen. Von Dr. Th. Albrecht. Leipzig 1869" veröffentlicht.

$$\varDelta k^2 = \frac{\varDelta\alpha^2 + \varDelta\alpha'^2 + \varDelta T^2 + \varDelta T'^2}{(K'-K)^2},$$

und aus den Glgn. (185), wenn man den Uhrgang als fehlerfrei betrachtet:

$$\varDelta T^2 = \varDelta u^2 + I^2 \varDelta i^2 + C^2 \varDelta c^2,$$
$$\varDelta T'^2 = \varDelta u'^2 + I'^2 \varDelta i'^2 + C'^2 \varDelta c^2.$$

Hat man, wie dies meistens der Fall sein wird, bei der Beobachtung des Polsternes das Instrument, behufs Bestimmung des Collimationsfehlers, umgelegt, so ist das Mittel T' aus den in beiden Kreislagen beobachteten Durchgangszeiten frei von dem Einflusse eines Fehlers $\varDelta c$ in dem berechneten Collimationsfehler, und es kann daher das Glied $C'^2 \varDelta c^2$ in dem Ausdrucke von $\varDelta T'$ weggelassen und überdies $\varDelta i = \varDelta i'$ gesetzt werden. Hiedurch wird:

$$\varDelta k^2 = \frac{\varDelta\alpha^2 + \varDelta\alpha'^2 + \varDelta u^2 + \varDelta u'^2}{(K'-K)^2} + \frac{I^2 + I'^2}{(K'-K)^2}\varDelta i^2 + \frac{C^2}{(K'-K)^2}\varDelta c^2.$$

Bezeichnet man noch den wahrscheinlichen Fehler der Rectascension eines Sternes im Aequator mit ε, so ist $\varDelta\alpha = \varepsilon \sec\delta$, $\varDelta\alpha' = \varepsilon \sec\delta'$ zu setzen; ferner, wenn man annimmt, dass jeder Stern an n Fäden beobachtet worden sei, nach Gl. (138):

$$\varDelta u^2 = \frac{1}{n}\left(a^2 + \frac{b^2}{v^2}\sec\delta^2\right), \quad \varDelta u'^2 = \frac{1}{n}\left(a^2 + \frac{b^2}{v^2}\sec\delta'^2\right).$$

Hiemit wird nun:

$$\varDelta k^2 = \frac{2a^2}{n(K'-K)^2} + \left(\frac{1}{n}\frac{b^2}{v^2} + \varepsilon^2\right)\frac{\sec\delta^2 + \sec\delta'^2}{(K'-K)^2} + \frac{I^2 + I'^2}{(K'-K)^2}\varDelta i^2 + \frac{C^2}{(K'-K)^2}\varDelta c^2,$$

nach welcher Formel für jeden speciellen Fall die in der Bestimmung des Azimuthes zu erwartende Unsicherheit berechnet werden kann. Auf diese Art ergeben sich für einige Combinationen von Sternen die folgenden Werthe von $\varDelta k$, wobei $a = 0^s.07$, $b = 3^s.18$; die Vergrösserung des Fernrohrs $v = 120$, die Anzahl der Fäden $n = 10$ gesetzt, und $\varepsilon = \varDelta i = \varDelta c = 0^s.02$, endlich $\varphi = 48^0$ angenommen ist.

Beide Sterne in oberer Culmination:

δ'	$\delta =$ -30^0	0^0	$+30^0$	$+60^0$
75^0	$0^s.041$	$0^s.047$	$0^s.057$	$0_s.100$
80	0 .040	0 .043	0 .049	0 .067
85	0 .039	0 .041	0 .042	0 .049
88 40′	0 .039	0 .040	0 .040	0 .042

Der eine Stern in oberer, der andere in unterer Culmination.

U. C. δ	O. C. δ = −30°	0°	+30°	+60°	+75°	+80°	+85°	+88° 40′
75°	0ˢ.050	0ˢ.042	0ˢ.037	0ˢ.036	0ˢ.033	0ˢ.035	0ˢ.039	0ˢ.046
80	0 .044	0 .040	0 .036	0 .033	0 .032	0 .032	0 .036	0 .044
85	0 .041	0 .039	0 .037	0 .034	0 .032	0 .031	0 .032	0 .040
88° 40′	0 .040	0 .039	0 .039	0 .038	0 .036	0 .035	0 .033	0 .032

Die Werthe in den letzten vier Spalten entsprechen der Combination zweier Circumpolarsterne und können dadurch, dass man auch bei der Beobachtung des zweiten Sternes umlegt und dadurch die Unsicherheit der Collimationsbestimmung eliminirt, auf folgende Grössen herabgebracht werden:

U. C. δ′	O. C. δ = + 75	+ 80	+ 85	+ 88° 40′
75°	0ˢ.029	0ˢ.030	0ˢ.032	0ˢ.037
80	0 .029	0 .029	0 .030	0 .035
85	0 .031	0 .029	0 .028	0 .032
88° 40′	0 .036	0 .035	0 .032	0 .028

Aus dieser Uebersicht geht hervor, dass man die schärfste Bestimmung des Azimuthes aus der Combination zweier Circumpolarsterne von nahe gleicher Declination und in verschiedenen Culminationen erhält, dass es jedoch keinen wesentlichen Vortheil gewährt, wenn die Sterne so nahe als möglich am Pole stehen, da zwei Sterne von 75° Declination das Azimuth noch nahezu mit derselben Genauigkeit geben, als zwei Sterne in der Poldistanz des Polarsternes.*) Zugleich zeigen aber die obigen Zahlenwerthe, dass sich das Azimuth

*) Die Combination zweier dem Pole nahe stehenden Sterne in oberer und unterer Culmination kann jedoch nur dann angewendet werden, wenn es sich einzig und allein um die Bestimmung des Azimuthes (z. B. einer Mire, §. 177) handelt; soll aus der Beobachtung beider Sterne auch der Uhrstand mit grösserer Schärfe erlangt werden, so muss einer derselben in grösserem Abstande vom Pole sich befinden, weil der wahrscheinliche Fehler der beobachteten Durchgangszeit u, welcher, wie die Glgn. (186) und (185) zeigen, mit seinem vollen Betrage auf den Uhrstand x_0 übergeht, mit abnehmender Poldistanz erheblich zunimmt.

aus der Combination eines Polsternes und eines vom Pole entfernteren Sternes fast ebenso genau ergibt, als aus der Combination zweier Circumpolarsterne.

Ist die Beobachtung eines Polsternes unmöglich und man auf Culminationen südlich vom Zenith beschränkt, so muss man einen möglichst nahe am Zenith culminirenden Stern mit einem anderen von kleiner Meridianhöhe verbinden.

176. Aus dem bisher Gesagten ergibt sich von selbst die vortheilhafteste Art der Anordnung der Beobachtungen zum Zwecke der Zeitbestimmung. Mit der Beobachtung eines Polsternes, bei welcher das Instrument behufs Bestimmung der Collimation umgelegt wird, verbindet man die Beobachtung von zwei oder mehreren vom Pole entfernten Sternen (Zeitsternen) in der Art, dass von letzteren eine gleiche Anzahl in beiden Kreislagen beobachtet wird, wodurch das Mittel der aus sämmtlichen Zeitsternen folgenden Uhrstände nahezu frei wird von dem Einflusse einer Unsicherheit der Collimationsbestimmung, und zwar um so mehr, je näher sich die Zeitsterne in Declination stehen. Der Coefficient $K = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}$ und somit auch der Einfluss einer Unsicherheit im Azimuthe auf die Reduction auf den Meridian wird um so kleiner, je näher am Zenith der Stern culminirt und wird $= 0$ für $\delta = \varphi$. Man wird daher namentlich dann, wenn man des Azimuthes nicht sehr sicher ist, mit Vortheil nahe am Zenith culminirende Zeitsterne wählen. Sterne in der Nähe des Horizontes sind auch deshalb minder vortheilhaft, weil für solche in Folge der Unruhe der Bilder die Unsicherheit in der beobachteten Durchgangszeit u grösser wird, als dies mit Rücksicht auf ihre Declination zu erwarten ist.

Die Nivellirung der Axe ist mit Sorgfalt mindestens vor und nach der Beobachtung des Polsternes, und im Falle einer längeren Dauer der Beobachtungen auch mehrmals vorzunehmen, um eine allfällige Aenderung der Neigung in Rechnung bringen zu können, zu welchem Zwecke die Zeit jedes Nivellements zu notiren ist.

Beispiel. 1874, September 4, wurde am Passage-Instrumente des Observatoriums der k. k. technischen Hochschule zu Wien folgende Zeitbestimmung gemacht. Die Fadenantritte der Zeitsterne sind am Chronographen registrirt.

Stern	Kreislage	Faden I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
		s	s	s	s	h m s	s	s	s	s
μ Herculis	K. O.	10.77	59.86	49.26	38.47	17 40 27.92	17.06	6.48	55.73	44.92
γ Dracon.	K. W.	—	—	6.32	21.53	17 52 36.50	51.77	7.07	22.07	37.56
			m s	m s	m s					
δ Ursae m.	K. W.	—	3 41.0	6 22.0	9 1.0	18 11 40.0	—	—	—	—
		m s								
δ Ursae m.	K. O.	22 16.5	19 34.5	16 54.0	14 14.5	—	—	—	—	—
α Lyrae	K. O	25.03	12.74	0.62	48.63	18 31 36.52	24.30	12.07	59.99	—
ω Aquilae	K. W.	—	22.69	32.22	41.95	19 10 51.64	1.18	10.77	20.64	30.26

Nivellements:

$17^h\ 35^m$, K. O.		$17^h\ 58^m$, K. W.		$18^h\ 26^m$, K. O.		$19^h\ 6^m$, K. W.	
W.	O.	W.	O.	W.	O.	W.	O.
16.6	11.4	16.6	11.8	16.8	12.1	16.4	13.1
15.2	12.8	15.0	13.3	15.4	13.5	15.4	14.1

Polhöhe $\varphi = 48^0\ 11'\ 59''$; Werth eines Niveautheiles $\mu = 0^s.0835$; Gleichung der Zapfen: $b_w - b_o = -\ 0^s.024$; täglicher Gang der Uhr $= +\ 0^s.65$. Mit I ist jener Seitenfaden bezeichnet, welcher bei K. W. von einem Sterne in der oberen Culmination zuerst angetreten wird.

Die scheinbaren Oerter der Sterne, dem Nautical Almanac entnommen, waren folgende, mit Beifügung der nach den Formeln (171) berechneten Werthe der Coefficienten K, I und $\sec\delta$:

Stern	α	δ	K	I	$\sec\delta$
μ Herculis	$17^h\ 41^m\ 33^s.29$	$+\ 27^0\ 47'\ 50''$	0.394	1.060	1.130
γ Draconis	17 53 42 .20	+ 51 30 25	— 0.093	1.604	1.607
δ Ursae min.	18 12 56 .53	+ 86 36 36	— 10.507	13.251	16.911
α Lyrae	18 32 42 .10	+ 38 40 12	0.212	1,263	1.281
ω Aquilae	19 11 56 .31	+ 11 22 17	0.611	0.816	1.020

Die Logarithmen der Fadendistanzen f (in Zeitsecunden), so wie die nach den Formeln in §. 172 für die einzelnen Sterne berechneten Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden sind:

Faden	$\log f$	Reduction auf den Mittelfaden				
		α Herc.	*γ Drac.*	*α Lyrae*	*ω Aquil.*	*δ Ursae min.*
I	1.579001	$42^s.88$	$60^s.94$	$48^s.58$	$38^s.69$	$10^m\ 41^s.70$
II	1.452221	32 .02	45 .51	36 .28	28 .90	7 59 .16
III	1.275500	21 .32	30 .30	24 .15	19 .24	5 18 .94
IV	0.973230	10 .63	15 .11	12 .04	9 .59	2 39 .01
VI	0.975709	10 .69	15 .19	12 .11	9 .65	2 39 .92
VII	1.277681	21 .43	30 .45	24 .28	19 .33	5 20 .55
VIII	1.453425	32 .11	45 .64	36 .38	28 .98	8 0 .50
IX	1.579754	42 .95	61 .05	48 .67	38 .76	10 42 .82

Aus den obigen Nivellements findet man nun die beobachteten Neigungen der Umdrehungsaxe, und durch Anbringung der Correction wegen Ungleichheit der Zapfendurchmesser die wahren Neigungen, wie folgt:

	$17^h\ 35^m$, K. O.	$17^h\ 58^m$, K. W.	$18^h\ 26^m$, K. O.	$19^h\ 6^m$, K. W.
Beob. Neigung b:	$+\ 0^s.159$	$+\ 0^s.136$	$+\ 0^s.138$	$+\ 0^s.096$
Zapfencorrection	$-\ 0\ 006$	$+\ 0\ .006$	$-\ 0\ .006$	$+\ 0\ .006$
Wahre Neigung i:	$+\ 0\ .153$	$+\ 0\ .142$	$+\ 0\ .132$	$+\ 0\ .102$

Die Neigung hat demnach während der Beobachtungen eine Aenderung erfahren; man kann die für jeden einzelnen Stern anzuwendende Neigung durch Interpolation suchen, wobei selbstverständlich stets nur zwischen zwei bei derselben Kreislage beobachtete Neigungen zu interpoliren ist. Strenger ist, wenn die grösste Schärfe erreicht werden soll, das folgende Verfahren. Reducirt man die zwei bei K. O. beobachteten Neigungen mittelst der Zapfengleichung: $b_w = b_o - 0^s.024$ auf K. W., so erhält man die folgenden, für K. W. und die beigesetzten Zeiten geltenden beobachteten Neigungen:

$$\begin{array}{lll} 17^h\ 35^m: & b_w = & +\ 0^s.135 \\ 17\ \ 58 & & +\ 0\ .136 \\ 18\ \ 26 & & +\ 0\ .114 \\ 19\ \ \ 6 & & +\ 0\ .096 \end{array}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Aenderung der Neigung der Zeit proportional stattgefunden habe, kann man die Neigung zur Zeit t: $b_w = x + y(t - 18^h)$ setzen, wenn mit x die Neigung um $18^h.0$, mit y die Aenderung derselben in einer Zeitminute bezeichnet, und $t - 18^h$ in Minuten ausgedrückt wird. Die vier Nivellements geben dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0.135 &= x - 25\,y \\ 0.136 &= x - \ \ 2\,y \\ 0.114 &= x + 26\,y \\ 0.096 &= x + 66\,y \end{aligned}$$

welche nach der Methode der kleinsten Quadrate die Normal-Gleichungen:

$$0.481 = 4x + 65y$$
$$5.653 = 65x + 5660y$$

darbieten, aus welchen $x = + 0^s.128$, $y = - 0^s.00047$ folgt. Die Neigung bei K. W. zur Zeit t ist daher durch folgende Gleichung gegeben:

$$b_w = + 0^s.128 - 0^s.00047 (t - 18^h),$$

welche die zu Grunde gelegten Beobachtungen mit den übrigbleibenden Fehlern $+ 5$, $- 7$, $+ 2$, $+ 1$ in Einheiten der 3^ten Decimalstelle, also sehr genau, darstellt. Die wahre zur Zeit t stattfindende Neigung ist dann:

bei K. W.: $i_w = b_w - \frac{1}{4}(b_w - b_o) = b_w + 0^s.006$
bei K. O.: $i_o = b_o + \frac{1}{4}(b_w - b_o) = b_w - (b_w - b_o) + \frac{1}{4}(b_w - b_o) =$
$b_w - \frac{3}{4}(b_w - b_o) = b_w + 0^s.018.$

Hiernach berechnen sich die für die einzelnen Sterndurchgänge anzuwendenden Neigungen, wie folgt:

		$t - 18^h$	b_w	Zapf.-Corr.	i	Ii
μ Herc.	K. O.	$- 20^m$	$+ 0^s.137$	$+ 0^s.018$	$+ 0^s.155$	$+ 0^s.16$
γ Drac.	K. W.	$- 7$	$+ 0.131$	$+ 0.006$	$+ 0.137$	$+ 0.22$
δ Ursae m.	K. W.	$+ 8$	$+ 0.124$	$+ 0.006$	$+ 0.130$	$+ 1.72$
"	K. O.	$+ 18$	$+ 0.120$	$+ 0.018$	$+ 0.138$	$+ 1.83$
α Lyrae	K. O.	$+ 32$	$+ 0.113$	$+ 0.018$	$+ 0.131$	$+ 0.16$
ω Aquil.	K. W.	$+ 71$	$+ 0.095$	$+ 0.006$	$+ 0.101$	$+ 0.08$

wo in der letzten Spalte auch sofort die Producte Ii, d. i. die Correctionen der Durchgangszeiten wegen der Neigung der Axe beigefügt sind.

Zur Bestimmung des Collimationsfehlers c aus der Beobachtung von *δ Ursae minoris* erhalten wir, an die beobachteten Antrittszeiten an den Seitenfäden die Reduction auf den Mittelfaden anbringend:

	K. W.	K. O.
Faden I	—	$18^h\ 11^m\ 34^s.80$
II	$18^h\ 11^m\ 40^s.16$	35 .34
III	40 .94	35 .06
IV	40 .01	35 .49
V	40 .00	—
Mittel =	18 11 40 .28	18 11 35 .17
Ii =	+ 1 .72	+ 1 .83
t_w =	18 11 42 .00	t_o = 18 11 37 .00

Hiemit erhält man nach Gl. (184):

$t_o - t_w = - 5^s.00$, $\frac{1}{2}(t_o - t_w) = - 2^s.50$ log 0.3979 n
log cos δ = 8.7718
log c = 9.1697 n $c = - 0^s.148.$

Es ist somit die anzuwendende Collimation, mit Rücksicht auf die tägliche Aberration:

bei K. W.: $c_1 = \quad c - 0^s.0207 \cos\varphi = - 0^s.148 - 0^s.014 = - 0^s.162$,
bei K. O.: $c_1 = - c - 0.0207 \cos\varphi = + 0.148 - 0.014 = + 0.134$.

Reduciren wir endlich die beobachteten Durchgangszeiten u wegen des täglichen Ganges der Uhr $(+ 0^s.65)$ auf die Uhrzeit $u_0 = 18^h.0$, so erfordert jede derselben die Correction: $+ \frac{0.65}{24.60}(u - 18^h)$, wenn die Zwischenzeit $u - 18^h$ in Minuten ausgedrückt wird.

Hiernach ergibt sich für die einzelnen Sterne durch Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden, und Anbringung der Correctionen wegen Uhrgang, Neigung und Collimation:

	μ Herc. K. O.	*γ Drac.* K. W.	*α Lyrae* K. O.	*ω Aquil.* K. W.	*δ Ursae min.* K W.	K. O.
	17^h	17^h	18^h	19^h	18^h	18^h
	$40^m 27^s.89$	—	$31^m 36^s.45$	—		
	84	—	46	$10^m 51^s.59$		
	94	$52^m 36^s.62$	47	46		
	84	64	59	54		
	92	50	52	64		
	75	58	41	53		
	91	62	35	44		
	84	41	37	66		
	87	51	—	50		
Mittel u =	40 27 .87	52 36 .55	31 36 .45	10 51 .55	11 40 .28	11 35.17
Uhrgang =	— 0 .01	0 .00	+ 0 .01	+ 0 .03	+ 0 .01	+ 0.01
Ii =	+ 0 .16	+ 0 .22	+ 0 .16	+ 0 .08	+ 1 .72	+ 1.83
$c \sec\delta$ =	+ 0 .15	— 0 .26	+ 0 .17	— 0 .17	— 2 .74	+ 2.27
T =	40 28 .17	52 36 .51	31 36 .79	10 51 .49	11 39 .27	11 39.28*)
α =	41 33 .29	53 42 .20	32 42 .10	11 56 .31	12 56 .53	
$\alpha - T$ =	+ 65 .12	+ 65 .69	+ 65 .31	+ 64 .82	+ 77 .26	

*) Für die reducirte Zeit T muss aus den Beobachtungen des Polsternes in beiden Kreislagen derselbe Werth folgen, weil der Collimationsfehler c dieser Bedingung gemäss bestimmt wird.

Man findet daher T einfacher, wenn man aus den, beiden Kreislagen entsprechenden, wegen Neigung verbesserten Durchgangszeiten das Mittel nimmt, und an diesem die Correction wegen Uhrgang und täglicher Aberration ($- 0^s.0207 \cos\varphi \sec\delta$, wo bei unterer Culmination $\sec\delta$ negativ zu nehmen) anbringt. Es waren oben die für Neigung verbesserten Durchgangszeiten:

bei K. W.	18^h	11^m	$42^s.00$
bei K. O.	18	11	37 .00
Mittel =	18	11	39 .50
Uhrgang =		+	0 .01
tägl. Aberr. =		—	0 .23
T =	18	11	39 .28, wie oben.

Man hat nunmehr die Glgn. (186):

$$\begin{aligned} +65.12 &= x + 0.394\,k \\ +65.69 &= x - 0.093\,k \\ +65.31 &= x + 0.212\,k \qquad (m) \\ +64.82 &= x + 0.611\,k \\ +77.26 &= x - 10.507\,k, \end{aligned}$$

aus welchen man durch Verbindung der letzten auf den Polstern sich beziehenden mit jeder der vorhergehenden die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von k erhält:

$$\begin{aligned} -12.14 &= 10.901\,k, \quad \text{hieraus:}\ k = -1^s.114 \\ -11.57 &= 10.414\,k \qquad\qquad -1.111 \\ -11.95 &= 10.719\,k \qquad\qquad -1.115 \\ -12.44 &= 11.118\,k \qquad\qquad -1.119 \\ & \text{Mittel } k = -1.115. \end{aligned}$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Glgn. (m) ergibt sich endlich der Uhrstand x:

aus *μ Herc.*	$x = +$	$65^s.56$
„ *γ Drac.*		65 .59
„ *α Lyrae*		65 .55
„ *ω Aquil.*		65 .50
Mittel:	$x = +$	65 .55 um $18^h.0$ Uhrzeit.

177. Die Genauigkeit der Zeitbestimmung hängt, abgesehen von der Sicherheit der Rectascensionen der benützten Sterne und der beobachteten Durchgangszeiten, wesentlich von der genauen Kenntniss der Instrumentalfehler ab. Von diesen wird der Collimationsfehler und die Neigung stets ohne besondere Schwierigkeit mit genügender Schärfe bestimmt werden können; auch ist der erstere bei guter Construction und sachkundiger Behandlung des Instrumentes erfahrungsmässig sehr constant, und eine während der Beobachtungsreihe stattfindende allmälige Aenderung der Neigung kann durch wiederholte Nivellirungen unschädlich gemacht werden. Schwieriger ist an und für sich die genaue Bestimmung des Azimuthes und eine allmälige Aenderung desselben wird bei einer in der Art des vorigen Beispieles ausgeführten Zeitbestimmung nur eine minder gute Uebereinstimmung der aus den einzelnen Zeitsternen folgenden Uhrstände zur Folge haben, ohne dass aber die Beobachtungen das Mittel bieten würden, die Aenderung selbst genauer zu bestimmen. Man kann zwar in solchem Falle das der Uhrzeit u entsprechende Azimuth k, in der Voraussetzung, dass die Aenderung Δk desselben der Zeit proportional sei, in der Form: $k = k_0 + (u - u_0)\,\Delta k$ in die Gleichungen (m) [§. 176] einführen, wo k_0 das zu einer beliebig angenommenen Uhrzeit u_0 stattfindende Azimuth bedeutet; diese Gleichungen, welche alsdann drei Unbekannte, x, k_0 und Δk enthalten, werden jedoch Δk nur dann hinreichend sicher bestimmen, wenn sich unter den beobachteten Sternen zwei Polsterne, durch eine grössere Zwischenzeit getrennt, befinden.

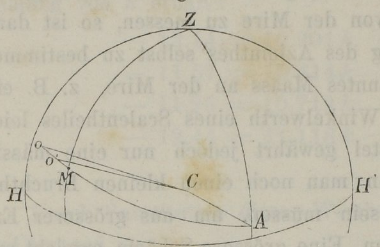
Es ist daher wichtig, für das Azimuth noch eine andere von den Sternbeobachtungen unabhängige Controle zu haben; eine solche gewährt ein Meridianzeichen oder eine Mire, d. i. eine feste Marke in der Nähe des Horizontes, auf welche das Fernrohr von Zeit zu Zeit gerichtet werden kann. So lange der Mittelfaden (oder ein anderer fester Faden) seinen Abstand von der Mire nicht ändert, wird — die Collimation als constant vorausgesetzt — auch das Azimuth sich nicht geändert haben; gestattet die Einrichtung, eine Aenderung des Abstandes des Fadens von der Mire zu messen, so ist damit auch das Mittel gegeben, die Aenderung des Azimuthes selbst zu bestimmen. Man kann zu diesem Zwecke ein bekanntes Maass an der Mire, z. B. eine horizontale Scala benützen, indem der Winkelwerth eines Scalentheiles leicht ausgemittelt werden kann; dieses Mittel gewährt jedoch nur eine mässige Genauigkeit, weil die Scalentheile, wenn man noch einen kleinen Bruchtheil der Secunde schätzen will, zu klein sein müssen, um aus grösserer Entfernung noch deutlich gesehen zu werden. Eine grössere Schärfe erreicht man durch ein am Oculare angebrachtes Schraubenmicrometar mit beweglichem verticalem Faden, mittelst dessen der Abstand des Mittelfadens von der Mire zu jeder Zeit scharf gemessen werden kann.

Die Mire muss möglichst fest angebracht sein, damit sie nicht selbst Aenderungen ihrer Lage in azimuthalem Sinne erleide, und sich in hinreichend grosser Entfernung vom Instrumente befinden, damit ihr Bild nahe genug in die Ebene der Fäden falle.

In Folge der hiezu, selbst für kleinere Fernrohre, erforderlichen bedeutenden Entfernung wird jedoch das Bild der Mire selten so ruhig erscheinen, um noch eine genaue Beobachtung zu gestatten. Dieser Uebelstand kann dadurch beseitiget werden, dass man die Mire in einer geringen Entfernung, z. B. von 100 bis 200 Meter anbringt, und in unmittelbarer Nähe des Fernrohrs eine Collimatorlinse, deren Brennweite ihrer Entfernung von der Mire gleich ist, fest aufstellt, so dass die von der Mire kommenden Strahlen nach ihrem Durchgange durch die Linse parallel in das Fernrohr treten, und ein deutliches Bild in der Ebene der Fäden erzeugen. Die Richtung, in welcher die Mire, durch das Fernrohr gesehen, erscheint, ist durch die gerade Linie gegeben, welche die Mire mit dem optischen Mittelpuncte der Linse verbindet, und bleibt so lange unverändert, als beide ihre relative Lage im Raume nicht ändern, zu welchem Zwecke eine möglichst feste Aufstellung der Mire und der Collimatorlinse erforderlich wird, und zwar um so mehr, je kleiner ihre Entfernung von einander ist. Bei 100 Meter Distanz würde z. B. durch eine relative Verrückung von Mire und Linse in horizontalem Sinne um 1 Millimeter das Azimuth der Mire schon um nahe $0^s.15$ geändert. Eine in dieser Art eingerichtete Mire gewährt überdies den Vortheil, dass sie auch Nachts benützt werden kann; ein kleines kreisrundes Loch in einer Metallplatte, welches bei Tage durch das Licht des Himmelsgrundes, nöthigenfalls durch Vermittlung eines hinter der Platte befindlichen Spiegels, Nachts durch eine Lampe erleuchtet wird, gewährt einen vorzüglichen Zielpunct.

Mittelst einer Mire kann nun auch, wenn das Azimuth derselben einmal genau bekannt ist, das Azimuth k des Instrumentes ohne die Beobachtung von Sternen und, wie bereits bekannt, auch der Collimationsfehler immer leicht bestimmt werden. Es sei (Fig. 89) CA das nach West verlängerte Ende der Drehungsaxe, i deren wahre Neigung, $90^0 - k = AZH'$ das westliche Azimuth des Instrumentpoles; M die Mire, die wir auf der Nordseite westlich vom Meridiane annehmen wollen; $MZ = z$ die Zenithdistanz der Mire, $\angle HZM$ deren Azimuth, von Nord gegen West positiv gezählt. Der grösste Kreisbogen AM werde, wenn das Fernrohr auf die Mire gerichtet wird, von der Absehenlinie bei Kreis West in o, bei Kreis Ost in o' getroffen, so ist arc $Ao = 90^0 + c$, arc $Ao' = 90^0 - c$. Nun sind $oM = m_w$, $o'M = m_o$ die Abstände des Mittelfadens von der Mire, welche mit dem Mikrometer gemessen werden können; nimmt man dieselben positiv, wenn, wie in der Figur, die Absehenlinie östlich von der Mire liegt (d. i. also, wenn im geraden Fernrohr der Mittelfaden westlich, im gebrochenen östlich von der Mire erscheint), so ist bei K. W.: $AM = Ao - oM = 90^0 - (m_w - c)$, bei K. O.: $AM = Ao' - o'M = 90^0 - (m_o + c)$. Das Dreieck AMZ, in welchem $MZ = z$, $AZ = 90^0 - i$, $\angle AZM = 90^0 + (k - A)$ ist, liefert daher folgende Gleichungen:

Fig. 89.



$$\text{bei K. W.:}\quad \sin(m_w - c) = \sin i_w \cos z - \cos i_w \sin z \sin(k - A),$$
$$\text{bei K. O.:}\quad \sin(m_o + c) = \sin i_o \cos z - \cos i_o \sin z \sin(k - A),$$

oder, wegen der Kleinheit der Bögen $m \mp c$, i und $k - A$:

$$m_w - c = i_w \cos z - (k - A) \sin z,$$
$$m_o + c = i_o \cos z - (k - A) \sin z,$$

aus welchen man durch Subtraction und Addition:

$$m_w - m_o = (i_w - i_o) \cos z + 2c,$$
$$m_w + m_o = (i_w + i_o) \cos z - 2(k - A) \sin z$$

erhält. Hieraus folgt, wenn m_w und m_o in Schraubengängen ausgedrückt werden und R den Werth eines Schraubenganges in Zeitsecunden bedeutet, ferner i, c, k und A gleichfalls in Zeitsecunden verstanden werden:

$$\left.\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{2} R (m_w - m_o) - \tfrac{1}{2} \cos z (i_w - i_o), \\ k &= A - \tfrac{1}{2} R \operatorname{cosec} z (m_w + m_o) + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} z (i_w + i_o) \end{aligned}\right\} \quad (188)$$

In der Voraussetzung, dass zwischen den Beobachtungen der Mire in beiden Kreislagen die absolute Neigung oder die relative Höhe der beiden Lager sich nicht geändert hat, ist $\frac{1}{2}(i_w - i_o)$ eine constante Grösse, nur abhängig von der Ungleichheit der Zapfenhalbmesser; und zwar ist, wenn Libellen- und Lagerwinkel gleich sind, $\frac{1}{2}(i_w - i_o) = \frac{1}{4}(b_w - b_o)$, wo b_w und b_o die durch die Libelle erhaltenen Neigungen sind, also gleich der Zapfencorrection. Da diese Grösse, so wie auch $\cos z$ immer sehr klein sind, so wird das 2te Glied in dem Ausdrucke von c immer verschwinden; hingegen kann das von den Neigungen abhängige Glied in dem Ausdrucke von k merklich werden.

Bei der im vorhergehenden §. als Beispiel benützten Zeitbestimmung wurde auch die Mire mit dem Fadenmikrometer des Passageinstrumentes beobachtet, wie folgt:

Uhrzeit	Mire K. W.	Mire K. O.	Mittelfaden
$17^h\ 47^m$	4.363	5.713	4.990
18 55	4.329	5.748	4.990

Die Zenithdistanz der Mire ist $z = 94^0\ 22'$, ihr Azimuth $A = +\ 0^s.9395$, der Werth eines Schraubenganges des Mikrometers $R = 2^s.9260$; die Gleichungen (188) für diese Mire sind daher:

$$c = 1^s.4630\ (m_w - m_o),$$

$$k = 0^s.9395 - 1^s.4673\ (m_w + m_o) - 0.0382\ (i_w + i_o).$$

Hiemit findet man:

Uhrzeit	m_w	m_o	$m_w - m_o$	$m_w + m_o$	i	c	$k =$
$17^h\ 47^m$	0.627	0.723	−0.096	1.350	$+0^s.146$	$-0^s.140$	$A - 1^s.9920 = -1^s.0525$
18 55	0.661	0.758	−0.097	1.419	+0 .114	−0 .142	$A - 2\ .0927 = -1\ .1532$

Der Werth von c stimmt sehr nahe mit dem aus der Beobachtung von *δ Ursae min.* erhaltenen; die Mire zeigt ferner eine Aenderung des Azimuthes um $-\ 0^s.1007$ in 68^m, oder $-\ 0^s.00148$ in 1^m an, und sie gibt mit der Constante $A = +\ 0^s.9395$, für die Beobachtungszeiten der vier Zeitsterne folgende Werthe des Azimuthes, durch deren Substitution in die entsprechenden Gleichungen (m) [§. 176] man die nebenstehenden Uhrstände erhält:

μ Herc.	$k = -\ 1^s.042$	$x = +\ 65^s.53$
γ Drac.	− 1 .061	65 .59
α Lyrae	− 1 .119	65 .55
ω Aquil.	− 1 .177	65 .54

Mittel $x = +\ 65\ .55$ um $18^h.0$.

Will man der Mire blos die Aenderung des Azimuthes entnehmen, dieses selbst aber, ohne Zuziehung der Constante A, mit Hilfe des Polsternes bestimmen, so sei k_0 das Azimuth zur Zeit $18^h.0$; für das Azimuth k zur Zeit u hat man dann zu setzen:

$$k = k_0 - 0^s.00148\ (u - 18^h), \qquad (n)$$

wo $u - 18^h$ in Zeitminuten auszudrücken ist. Substituirt man diesen Werth von k, in welchem für u die den einzelnen Sternen entsprechenden Durchgangszeiten zu setzen sind, in die Glgn. (m) [§. 176], so werden diese:

$$\begin{aligned} 65.11 &= x + \ \ 0.394\ k_0 \\ 65.69 &= x - \ \ 0.093\ k_0 \\ 65.32 &= x + \ \ 0.212\ k_0 \\ 64.88 &= x + \ \ 0.611\ k_0 \\ 77.08 &= x - 10.507\ k_0, \end{aligned}$$

aus welchen man, auf demselben Wege wie in §. 176, findet:

$-11.97 = 10.901\ k_0,$	$k_0 = -1^s.098,$	$x = +65^s.54$
$-11.39 = 11.414\ k_0$	$1\ .094$	$65\ .59$
$-11.76 = 10.719\ k_0$	$1\ .097$	$65\ .55$
$-12.20 = 11.118\ k_0$	$1\ .097$	$65\ .55$
Mittel	$k_0 = -1\ .096$	$x = +65\ .56$ um $18^h.0$.

Das auf diese Art mit Hilfe des Polsternes gefundene Azimuth kann nun auch umgekehrt zur Bestimmung des Azimuthes A der Mire benützt werden. Die Beobachtung derselben zur Uhrzeit $u = 17^h\ 47^m$ ergab $k = A - 1^s.9920$; substituirt man diese Werthe u und k, nebst jenem $k_0 = -1^s.096$ in obige Gl. (n), so folgt $A = +0^s.915$.

Wenn es sich übrigens um die Bestimmung von A handelt, so ist es am vortheilhaftesten, zwei Polsterne von nahe gleicher Declination je in oberer und unterer Culmination zu beobachten; das Instrument wird bei jedem Sterne umgelegt, und vor der Beobachtung des ersten und nach jener des zweiten Sternes, so wie auch in der Zwischenzeit die Mire in beiden Kreislagen beobachtet. Sind dann u_1, u_2, u_3 die Uhrzeiten der drei Beobachtungen der Mire, k_0 das Azimuth des Instrumentes zur Uhrzeit u_0, $\varDelta k$ die Aenderung desselben in 1 Zeitminute, so hat man aus den Beobachtungen der Mire die Gleichungen:

$$\begin{aligned} k_0 + (u_1 - u_0)\ \varDelta k &= A - s_1 \\ k_0 + (u_2 - u_0)\ \varDelta k &= A - s_2 \\ k_0 + (u_3 - u_0)\ \varDelta k &= A - s_3, \end{aligned}$$

wo s_1, s_2, s_3 bekannte Grössen, die Summe der zwei letzten Glieder in der 2ten der Glgn. (188), bedeuten, und aus welchen $\varDelta k$ gefunden wird.

Die beiden Polsterne geben nun, wenn x_0 den Uhrstand zur Zeit u_0, $\varDelta x$ den Uhrgang, u und u' die Durchgangszeiten bedeuten, die Gleichungen:

$$\alpha = u + x_0 + (u - u_0)\varDelta x + K\,[k_0 + \varDelta k(u - u_0)] + Ii + Cc_1,$$
$$\alpha' = u' + x_0 + (u' - u_0)\varDelta x + K'[k_0 + \varDelta k(u' - u_0)] + I'i' + C'c_1,$$

oder, mit Einführung der bekannten Grössen:

$$T = u + (u - u_0)\varDelta x + K(u - u_0)\varDelta k + Ii + Cc_1,$$
$$T' = u' + (u' - u_0)\varDelta x + K(u' - u_0)\varDelta k + I'i' + C'c_1:$$
$$\alpha = T + x_0 + Kk_0, \quad \alpha' = T' + x_0 + K'k_0,$$

aus welchen

$$k_0 = \frac{(\alpha' - T') - (\alpha - T)}{K' - K}$$

folgt. Mit diesem Werthe k_0 erhält man dann aus obigen Gleichungen der Mire A.

178. Die in den §§. 171 und 172 entwickelte Methode zur Reduction der Durchgangszeit von einem Seitenfaden auf den Mittelfaden und von diesem auf den Meridian setzt voraus, dass das Gestirn keine in kurzer Zeit merkliche eigene Bewegung habe, wie dies bei Fixsternen, welche allein zur genauen Zeitbestimmung angewendet werden, der Fall ist. Sie erleiden eine Modification, wenn das Gestirn, wie Sonne, Mond und die Planeten eine eigene Bewegung und, wie immer in diesem Falle, auch einen messbaren Durchmesser und eine Parallaxe hat. Wir wollen daher noch die allgemeine Aufgabe lösen, aus der beobachteten Antrittszeit des Randes eines solchen Gestirnes an einem Seitenfaden die Zeit des Durchganges des Mittelpunctes desselben durch den Meridian abzuleiten.

Bedeutet, wie bisher, f den Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden, positiv, wenn ersterer östlich von letzterem sich befindet, R' den scheinbaren Halbmesser des Gestirnes, so ist, wenn in Fig. 87 S den Mittelpunct des Gestirnes bezeichnet, $AS = 90^0 + c + f \pm R'$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der westliche (erste) oder östliche (zweite) Rand des Gestirnes beobachtet ist. Hiemit wird die Gl. (164):

$$\sin(c + f \pm R') = -\sin\delta'\sin n + \cos\delta'\cos n\sin(\tau - m),$$

wo τ den, gegen Ost positiv gezählten, scheinbaren Stundenwinkel des Gesirnes, δ' dessen scheinbare, d. i. mit der Parallaxe behaftete Declination bedeutet. Bezeichnet man mit α' die scheinbare Rectascension, mit θ die Sternzeit des Antrittes des Randes an dem Seitenfaden, so ist $\tau = \alpha' - \theta$, und man erhält aus obiger Gleichung mit Rücksicht auf die Kleinheit der Grössen τ, m, n, c, f und R':

$$(\alpha' - \theta)\cos\delta' = f \pm R' + m\cos\delta' + n\sin\delta' + c. \qquad (p)$$

Die scheinbaren Grössen α', δ', R' können nun durch die wahren oder geocentrischen Grössen α, δ, R ausgedrückt werden, wozu die Glgn. (82) dienen, in welchen $\varDelta$, $\varDelta'$ die Entfernungen des Gestirnes beziehungsweise vom Mittelpuncte der Erde und vom Beobachtungsorte, ϱ die Entfernung des letzteren vom Mittelpuncte der Erde bezeichnen. Dividirt man diese Gleichungen durch Δ und beachtet, dass $\frac{\varrho}{\Delta} = \varrho \sin p$ [Gl. (68)] ist, wenn p die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Gestirnes bedeutet und ϱ in Theilen des Halbmessers des Erdäquators ausgedrückt wird, so erhält man, $\Delta = 1$ annehmend:

$$\begin{aligned}
\Delta' \cos\delta' \cos\alpha' &= \cos\delta \cos\alpha - \varrho \sin p \cos\varphi' \cos\theta, \\
\Delta' \cos\delta' \sin\alpha' &= \cos\delta \sin\alpha - \varrho \sin p \cos\varphi' \sin\theta, \\
\Delta' \sin\delta' &= \sin\delta \quad\;\; - \varrho \sin p \sin\varphi'.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die 1^te^ dieser Gleichungen mit $\sin\theta$, die 2^te^ mit $\cos\theta$ und subtrahirt, so erhält man:

$$\Delta' \cos\delta' \sin(\alpha' - \theta) = \cos\delta \sin(\alpha - \theta);$$

multiplicirt man aber die 1^te^ Gleichung mit $\cos\theta$, die 2^te^ mit $\sin\theta$ und addirt, so kommt:

$$\Delta' \cos\delta' \cos(\alpha' - \theta) = \cos\delta \cos(\alpha - \theta) - \varrho \sin p \cos\varphi'.$$

Da nun $\alpha - \theta$ und $\alpha' - \theta$ kleine Bögen sind, so hat man:

$$\begin{aligned}
(\alpha' - \theta)\, \Delta' \cos\delta' &= (\alpha - \theta) \cos\delta, \\
\Delta' \cos\delta' &= \cos\delta - \varrho \sin p \cos\varphi', \\
\Delta' \sin\delta' &= \sin\delta - \varrho \sin p \sin\varphi'.
\end{aligned}$$

Aus den zwei letzten dieser Gleichungen folgt noch, wenn man sie quadrirt und addirt, und das Quadrat von p vernachlässiget, für die vorliegende Aufgabe hinreichend genau:

$$\Delta' = 1 - \varrho \sin p \cos(\varphi' - \delta).$$

Multipliciren wir nun die Gl. (p) mit Δ' und schreiben dieselbe in der Form:

$$(\alpha' - \theta)\, \Delta' \cos\delta' = \Delta' f \pm \Delta' R' + \Delta' \cos\delta' (m + n \operatorname{tg}\delta' + c \sec\delta').$$

Es ist aber $R' : R = \Delta : \Delta'$, d. i. $\Delta' R' = \Delta R = R$, weil $\Delta = 1$ angenommen wurde; setzt man noch für $(\alpha' - \theta)\, \Delta' \cos\delta'$, $\Delta' \cos\delta'$ und Δ' die obigen Werthe und dividirt durch $\cos\delta$, so kommt:

$$\alpha - \theta =$$
$$\frac{1 - \varrho \sin p \cos(\varphi' - \delta)}{\cos\delta} f \pm \frac{R}{\cos\delta} + \left(1 - \frac{\varrho \sin p \cos\varphi'}{\cos\delta}\right)(m + n \operatorname{tg}\delta' + c \sec\delta').$$

Hier ist nun $\alpha - \theta$ der wahre Stundenwinkel des Mittelpunctes des Gestirnes im Momente des Antrittes des Randes an den Seitenfaden, und somit auch die Zeit, welche der Mittelpunct braucht, um diesen Stundenwinkel zu durchlaufen oder in den Meridian zu gelangen, vorausgesetzt, dass das Gestirn keine eigene Bewegung hat. Ist letzteres der Fall und λ die Zunahme der Rectascension in 1^s Sternzeit, in Zeitsecunden ausgedrückt, so ist die

Geschwindigkeit des Gestirnes in der Richtung von Ost nach West $= 1 - \lambda$, somit die Zeit, in welcher der Mittelpunct den Stundenwinkel $\alpha - \theta$ durchlauft, $= \frac{\alpha - \theta}{1 - \lambda}$, folglich die Sternzeit der Culmination, d. i. die wahre Rectascension des Mittelpunctes des Gestirnes im Augenblicke des Meridiandurchganges $= \theta + \frac{\alpha - \theta}{1 - \lambda}$.

Lässt man daher nunmehr α diese letztere Rectascension bedeuten und substituirt für $\alpha - \theta$ den obigen Werth, so hat man, wenn der Kürze wegen:

$$F = \frac{1 - \varrho \sin p \cos(\varphi' - \delta)}{(1 - \lambda)\cos\delta},$$

$$P = \frac{1 - \varrho \sin p \cos\varphi' \sec\delta}{1 - \lambda}$$

gesetzt wird:

$$\alpha = \theta + Ff \pm \frac{R \sec\delta}{1 - \lambda} + P(m + n \operatorname{tg}\delta' + c \sec\delta'). \tag{189}$$

In diesem Ausdrucke bedeutet das Glied:

$$l = Ff \tag{190}$$

die Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden. Reducirt man daher mit Hilfe dieses Ausdruckes die einzelnen Seitenfäden auf den Mittelfaden und bezeichnet mit U das Mittel aller Fäden, mit $\varDelta u$ den Stand der Uhr gegen Sternzeit zur Uhrzeit U, so wird:

$$\alpha = U + \varDelta u \pm \frac{R \sec\delta}{1 - \lambda} + P(m + n \operatorname{tg}\delta' + c \sec\delta'). \tag{191}$$

Das Glied $R \sec\delta : (1 - \lambda)$ drückt die Zeit aus, welche der Halbmesser des Gestirnes braucht, um durch den Meridian zu gehen. Man findet sie, für Sonne und Mond, in den Ephemeriden angegeben.

Das letzte Glied bedeutet die Reduction vom Mittelfaden auf den Meridian.

Sind, statt der Grössen m und n, das Azimuth k des Instrumentes und die Neigung i der Drehungsaxe gegeben, so ist auch:

$$m + n \operatorname{tg}\delta' + c \sec\delta' = \frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos\delta'} k + \frac{\cos(\varphi - \delta')}{\cos\delta'} i + c \sec\delta';$$

der Faktor P kann, wenn die Instrumentalfehler sehr klein sind, auch $= 1$ gesetzt werden.

Die scheinbare mit der Parallaxe behaftete Declination δ' erhält man für diesen Zweck genügend genau aus der Ablesung am Einstellkreise des Instrumentes oder mittelst der Formel:

$$\delta' = \delta - p \sin(\varphi' - \delta).$$

Die vorstehenden Formeln finden namentlich auf den Mond Anwendung. Für die Sonne und die Planeten, deren Parallaxen sehr klein sind, kann stets

$$P = 1 \quad \text{und} \quad F = \frac{\sec\delta}{1 - \lambda}$$

gesetzt werden.

Die Ephemeriden geben die Positionen dieser Gestirne mit dem Argumente: mittlere Zeit; man findet daher leicht durch Interpolation für die auf den Meridian der Ephemeride reducirte Beobachtungszeit die stündliche Aenderung $\varDelta\alpha$ der Rectascension des Gestirnes in 1^h mittlerer Zeit; es ist dann, da 1^h Sternzeit $= 0^h.99727$ mittlerer Zeit:

$$\lambda = \frac{0.99727}{3600}\varDelta\alpha.$$

Beispiel. 1853, November 11, wurde zu Graz der Durchgang des Mondes an den fünf Fäden eines kleinen Passage-Instrumentes beobachtet, wie folgt:

	Faden I	II	III	IV	V
☽ westl. Rand	$25^m\ 32^s.2$	$25^m\ 59^s.8$	$0^h\ 26^m\ 28^s.0$	$26^m\ 55^s.7$	$27^m\ 23^s.5$

Es war für diesen Tag:

Uhrstand um $22^h\ 47^m$: $+ 17^s.04$; täglicher Gang $= + 2^s.880$.

Das Azimuth des Instrumentes: $k = - 2^s.825$; Neigung $i = + 1^s.84$; $c = 0$.

$\log f$ für Faden I $= 1.7379$, II $= 1.4431$, IV $= 1.4294$, V $= 1.7338$.

Ferner für den Beobachtungsort:

$\varphi = 47^0\ \ 4'.2$; genäherte Länge $= 1^h\ 2_m$ östl. v. Greenwich.
$\varphi' = 46\ \ 52.5$; $\log\varrho = 9.99922$.

Es ist nun die genäherte Sternzeit des Antrittes des Randes am Mittelfaden $= 0^h\ 26^m\ 28^s + 17^s = 0^h\ 26^m\ 45^s$, welcher die mittlere Grazer Zeit $9^h\ 3^m\ 16^s$, somit die mittlere Greenwicher Zeit $8^h\ 1^m\ 16^s$ entspricht. Für diese Zeit findet man aus dem Nautical Almanac:

$$\delta = - 2^0\ 11'.1, \quad p = 55'\ 39''.1, \quad R = 15'\ 11''.7 = 60^s.78.$$

		$\varDelta\alpha$
Ferner für 7^h mittl. Greenw. Zt.: α☽ $=$	$0^h\ 25^m\ 49^s.94$	
		$+ 113^s.18$
„ 8 „ „ „	$0\ \ 27\ \ 43.12$	
		$+ 113.07$
„ 9 „ „ „	$0\ \ 29\ \ 36.19$	

Hieraus folgt die Aenderung der Rectascension des Mondes in 1^h mittlerer Zeit um $8^h\ 2^m.3$: $\varDelta\alpha = 113^s.12$, womit man findet:

$$\lambda = 0^s.03134, \quad 1 - \lambda = 0.96866.$$

Endlich wird:

$$\varphi' - \delta = 49^0\ 3'.6; \quad \delta' = - 2^0\ 54'.$$

Mit diesen Werthen berechnet man nun:

$$\log F = 0.00953, \quad P = 1.021;$$

$$\frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos \delta'} = K = +0.767, \quad \frac{\cos(\varphi - \delta')}{\cos \delta'} = I = +0.644,$$

und erhält nach Gl. (190) die Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden:

$$\mathrm{I} = +55^s.90, \quad \mathrm{II} = +28^s.35, \quad \mathrm{IV} = -27^s.47, \quad \mathrm{V} = -55.37,$$

ferner:

$$m + n \operatorname{tg} \delta' + c \sec \delta' = Kk + Ii + c \sec \delta' = -2^s.17 + 1^s.19 = -0^s.98,$$

somit die Reduction auf den Meridian $= -0^s.98\, P = -1^s.00$.

Endlich wird:

$$\frac{R}{(1 - \lambda) \cos \delta} = 62^s.79.$$

Man hat nun:

☽ I. Rand am Mittelfaden	0^h	26^m	$28^s.10$	
			28 .15	
			28 .00	
			28 .23	
			28 .13	
Mittel . . . . $U =$	0	26	28 .12	
Uhrcorrection . . . $\Delta u =$	+		17 .24	
Durchgszt. d. ☽ Rad.	+	1	2 .79	
Red. a. d. Meridian . .	—		1 .00	
☽ Centrum im Merid. um	0	27	47 .15	Stzt. $= \alpha$.

Es war daher die beobachtete wahre oder geocentrische Rectascension des Mittelpunctes des Mondes im Augenblicke des Durchganges durch den Meridian des Beobachtungsortes: $\alpha = 0^h\ 27^m\ 47^s.15$.

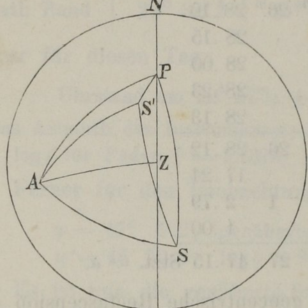
5. Zeitbestimmung mit dem Passage- oder Universal-Instrumente aus beobachteten Sterndurchgängen ausserhalb des Meridians, im Vertical des Polarsternes.

179. Da die Zahl der dem Pole nahe stehenden Fundamentalsterne, deren scheinbare Oerter in den astronomischen Ephemeriden gegeben sind, nur klein ist, so wird der Beobachter in Feldobservatorien, wo häufig die Zeit, von anderen Beobachtungen in Anspruch genommen, drängt, nicht immer in der Lage sein, den Meridiandurchgang eines solchen Polsternes abzuwarten; man kann in diesem Falle das Instrument zu beliebiger Zeit auf den Polstern richten, wobei dann das Fernrohr einen dem Meridiane nahen Verticalkreis beschreibt, und in diesem Vertical den Polstern und einen vom Pole entfernten Fundamentalstern (Zeitstern) beobachten. Als Polstern wird am zweckmässigsten der auch in kleineren Instrumenten zu jeder Tageszeit sichtbare Polarstern (*α Ursae minoris*) gewählt und die Beobachtung desselben wegen seiner langsamen Bewegung meist auf einen Faden beschränkt, der Durchgang des Zeitsternes aber an sämmtlichen Fäden beobachtet. Vor und nach der Beobachtung wird die Neigung der Axe mittelst der Libelle bestimmt und aus beiden Werthen das Mittel genommen.

Behufs Elimination des Collimationsfehlers ist in gleicher Weise eine Beobachtung des Polsternes in Verbindung mit einem zweiten Zeitsterne in der anderen Kreislage auszuführen. Hiebei wird das Azimuth des Instrumentes in der Regel ein anderes sein als bei der Beobachtung in der ersten Kreislage, und es sind daher die Beobachtungen für jede Kreislage besonders zu reduciren.

Es sei nun in Fig. 90, welche eine orthogonale Projection der scheinbaren Himmelskugel auf die Ebene des Horizontes darstellt, Z das Zenith, P der Pol, Ns der Meridian; die horizontale Umdrehungsaxe des Instrumentes treffe, gegen West verlängert, die Himmelskugel in einem Punkte A, dessen Höhe über dem Horizonte $= i$, dessen Azimuth, von Süd gegen West gezählt, $= 90^0 - k$ ist, und dessen Stundenwinkel und Poldistanz beziehungsweise mit $90^0 - m$ und $90^0 + n$ bezeichnet werden mögen. Es ist daher:

Fig. 90.



$$AZ = 90^0 - i, \quad \angle AZs = 90^0 - k,$$
$$AP = 90^0 + n, \quad \angle APZ = 90^0 - m.$$

Die Absehenlinie des Fernrohrs schliesse mit dem Westende der Axe den Winkel $90^0 + c$ ein, so ist, wenn S den am Mittelfaden beobachteten Zeitstern, S' den an irgend einem Seitenfaden, dessen östlicher Abstand vom Mittelfaden $= f$ ist, beobachteten Polstern bezeichnet:

$$AS = 90^0 + c, \quad AS' = 90^0 + c + f.$$

Setzen wir:

$$SS' = d, \quad \angle PSS' = \xi, \quad \angle ASS' = 90^0 + \eta, \quad \angle APS = 90^0 - y,$$

und bezeichnen mit α, α' die Rectascensionen, mit δ, δ' die Declinationen, mit u, u' die mit dem täglichen Gange der Uhr auf eine beliebig gewählte Epoche u_0 reducirten beobachteten Uhrzeiten des Zeit- beziehungsweise Polsternes, mit x den Stand der Uhr gegen Sternzeit zur Uhrzeit u_0, so sind die Stundenwinkel, von Süd über West gezählt:

$$t = u + x - \alpha,$$
$$t' = u' + x - \alpha',$$

deren Differenz $\tau = (t' - t)$, d. i.:

$$\tau = (\alpha - u) - (\alpha' - u') \tag{a}$$

eine bekannte Grösse darstellt.

In dem Dreiecke SPS' ist nun $\angle SPS' = SPZ + ZPS' = 360^0 - t + t' = 360^0 + (t' - t) = 360^0 + \tau$ und man hat daher:

$$\begin{aligned} \cos d &= \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos\tau \\ \sin d \sin\xi &= \cos\delta' \sin\tau \\ \sin d \cos\xi &= \cos\delta \sin\delta' - \sin\delta \cos\delta' \cos\tau, \end{aligned} \tag{b}$$

aus welchen Gleichungen sich die Grössen d und ξ bestimmen.

Aus dem Dreiecke ASS' folgt:

$$\sin(c + f) = \sin c \cos d + \cos c \sin d \sin\eta,$$

somit:

$$\sin\eta = \frac{\sin(c + f) - \sin c \cos d}{\cos c \sin d}. \tag{c}$$

Ferner ist in dem Dreiecke APS der Winkel $ASP = ASS' + PSS' = 90^0 + \eta + \xi$, folglich:

$$\begin{aligned} \sin n &= \sin c \sin\delta + \cos c \cos\delta \sin(\xi + \eta) \\ \cos n \cos y &= \cos c \cos(\xi + \eta) \\ \cos n \sin y &= -\sin c \cos\delta + \cos c \sin\delta \sin(\xi + \eta), \end{aligned} \tag{d}$$

woraus n und y sich ergeben.

Endlich folgt aus dem Dreiecke APZ:

$$\sin i = -\sin n \sin\varphi + \cos n \cos\varphi \sin m,$$

und hieraus:

$$\sin m = \operatorname{tg} n \operatorname{tg}\varphi + \sin i \sec n \sec\varphi. \tag{e}$$

Nun ist $\angle SPZ = 360^0 - t = \angle APS - \angle APZ = (90^0 - y) - (90^0 - m) = -(y - m)$, d. i. $t = 360^0 + (y - m)$, und aus der Verbindung dieser Gleichung mit der obigen: $t = u + x - \alpha$ ergibt sich der Uhrstand:

$$x = \alpha - u + \tfrac{1}{15}(y - m). \tag{f}$$

Die Gleichungen (a) bis (f) enthalten die strenge Auflösung der Aufgabe. Der Umstand jedoch, dass m, n, ξ, η, y stets kleine Winkel sind, gestattet die Entwickelung von Näherungsformeln, welche eine völlig genügende Schärfe der Rechnung gewähren.

Die zwei letzten der Formeln (b) geben zunächst:

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\sec\delta \sec\delta' \sin\tau}{1 - \operatorname{tg}\delta \operatorname{cotg}\delta' \cos\tau}. \tag{b'}$$

Aus (c) folgt ferner durch Auflösung von $\sin(c + f)$:

$$\sin\eta = \frac{\sin f}{\sin d} + \operatorname{tg} c \frac{\cos f - \cos d}{\sin d}.$$

Bezeichnet man nun die Zenithdistanzen der Sterne S, S' mit z, z', ihre von Süd über West von 0 bis 360° gezählten Azimuthe mit A, A', und setzt:

$$A - A' = 180^0 - \varDelta A,$$

so wird $\angle SZS' = 360^0 - A + A' = 180^0 + \varDelta A$ und man hat aus dem Dreiecke SZS':

$$\begin{aligned}\cos d &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \cos \varDelta A \\ &= \cos(z+z') + 2 \sin z \sin z' \sin \tfrac{1}{2} \varDelta A^2,\end{aligned}$$

und hieraus:

$$\sin \tfrac{1}{2}[d-(z+z')] = -\frac{\sin z \sin z'}{\sin \frac{1}{2}[d+(z+z')]} \sin \tfrac{1}{2} \varDelta A^2.$$

Nun ist, wie man sich leicht überzeugt,*) $\varDelta A$ eine kleine Grösse von der Ordnung f oder, wenn $f = 0$, d. i. der Polstern am Mittelfaden beobachtet ist, von der Ordnung der Grössen c und i, daher der Unterschied $d - (z + z')$ sehr klein von der Ordnung der Quadrate dieser Grössen; man kann daher in dem obigen Ausdrucke von $\sin\eta$ ohne merklichen Fehler $z + z'$ statt d schreiben und überdies im zweiten Gliede $\cos f = 1$ setzen, indem der hieraus entspringende Fehler, in beiden Gliedern auf die dritte Ordnung ansteigend, selbst auf die 7te Decimalstelle von $\sin\eta$ ohne Einfluss bleibt. Man hat daher:

$$\sin\eta = \frac{\sin f}{\sin(z+z')} + c\,\frac{1-\cos(z+z')}{\sin(z+z')}.$$

---

*) Man hat nämlich aus den Dreiecken AZS und AZS':

$$\begin{aligned}-\sin c &= \sin i \cos z + \cos i \sin z \cos AZS, \\ -\sin(c+f) &= \sin i \cos z' + \cos i \sin z' \cos AZS',\end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}\angle AZS &= AZs + sZS = 90^0 - k + 360^0 - A = 90^0 + [360^0 - A - k], \\ \angle AZS' &= S'Zs - AZs = A' - (90^0 - k) = 90^0 + [A' + k - 180^0],\end{aligned}$$

wo die in den eckigen Klammern stehenden Winkel stets so klein sind, dass die Sinus mit den Bögen vertauscht werden können. Dasselbe gilt von den Grössen f, c, i, und die obigen Gleichungen können daher in der Form:

$$\begin{aligned}-c &= i \cos z - [360^0 - A - k] \sin z, \\ -c - f &= i \cos z' - [A' + k - 180^0] \sin z',\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}360^0 - A - k &= c \operatorname{cosec} z + i \operatorname{cotg} z, \\ A' + k - 180^0 &= f \operatorname{cosec} z' + c \operatorname{cosec} z' + i \operatorname{cotg} z'\end{aligned} \qquad (r)$$

geschrieben werden, woraus durch Addition folgt:

$$180^0 - (A - A') = \varDelta A =$$
$$f \operatorname{cosec} z' + c(\operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec} z') + i(\operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg} z').$$

Setzen wir nun:

$$\sin\eta' = \frac{\sin f}{\sin(z + z')}, \tag{c'}$$

und bezeichnen der Kürze wegen den Factor von c in der vorhergehenden Gleichung, welcher mit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z + z')$ identisch ist und im Maximo die Einheit nicht erheblich überschreiten wird, mit Z, so wird $\sin\eta = \sin\eta' + cZ$, somit auch:

$$\eta = \eta' + cZ,$$

da cZ sehr klein und η' ein kleiner den Werth $2f$ nicht leicht erreichender Winkel ist.

Aus den zwei letzten der Glgn. (d) folgt ferner:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\xi + \eta)\sin\delta - \operatorname{tg} c \sec(\xi + \eta)\cos\delta,$$

wo im 2ten Gliede statt η auch η' gesetzt werden kann.

Man hat aber nach dem Taylor'schen Satze:

$$\operatorname{tg}(\xi + \eta) = \operatorname{tg}(\xi + \eta' + cZ) = \operatorname{tg}(\xi + \eta') + cZ\sec(\xi + \eta'),$$

somit:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\xi + \eta')\sin\delta + c\sec(\xi + \eta')(Z\sin\delta - \cos\delta).$$

Setzen wir:

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg}(\xi + \eta')\sin\delta, \tag{d'}$$

so wird:

$$\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y' = \frac{\sin(y - y')}{\cos y \cos y'} = c\sec(\xi + \eta')(Z\sin\delta - \cos\delta),$$

somit, da $y - y'$ sehr klein:

$$y = y' + c\sec(\xi + \eta')\cos y\cos y'(Z\sin\delta - \cos\delta),$$

oder, mit Weglassung des der Einheit stets nahe kommenden Factors $\sec(\xi + \eta')\cos y\cos y'$ im zweiten sehr kleinen Gliede:

$$y = y' + c(Z\sin\delta - \cos\delta), \tag{p}$$

woraus noch, mit Rücksicht auf den sehr kleinen Werth des 2ten Gliedes:

$$\cos y = \cos y' - c(Z\sin\delta - \cos\delta)\sin y'$$

folgt.

Durch Division der 1ten und 2ten der Glgn. (d) erhält man:

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{tg}(\xi + \eta)\cos\delta\cos y + \operatorname{tg} c\sin\delta\sec(\xi + \eta)\cos y.$$

Hier kann wieder im 2ten Gliede der Factor $\sec(\xi + \eta)\cos y$, weil nahe $=1$, weggelassen werden; führt man dann im 1ten Gliede für $\operatorname{tg}(\xi + \eta)$ und $\cos y$ die obigen Werthe ein, so erhält man mit Vernachlässigung der zweiten Potenz von c, und wenn man beachtet, dass auch das mit dem sehr kleinen Factor $c\operatorname{tg}(\xi + \eta')\sin y'$ behaftete Glied als unmerklich weggeworfen werden kann:

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{tg}(\xi + \eta')\cos\delta\cos y' + c(Z\cos\delta + \sin\delta).$$

Aus (e) hat man endlich, da i sehr klein, und $\sec n$ nahe $= 1$:

$$\sin m = \operatorname{tg} n \operatorname{tg} \varphi + i \sec \varphi,$$

oder nach Einführung des Werthes von $\operatorname{tg} n$:

$$\sin m = \operatorname{tg}(\xi + \eta') \cos\delta \cos y' \operatorname{tg}\varphi + i \sec\varphi + c(Z\cos\delta + \sin\delta)\operatorname{tg}\varphi.$$

Setzen wir:

$$\sin m' = \operatorname{tg}(\xi + \eta') \cos\delta \cos y' \operatorname{tg}\varphi, \qquad (e')$$

so wird:

$$\sin m - \sin m' = i \sec\varphi + c(Z\cos\delta + \sin\delta)\operatorname{tg}\varphi,$$

woraus mit hinreichender Annäherung:

$$m = m' + i\sec\varphi + c\operatorname{tg}\varphi(Z\cos\delta + \sin\delta)$$

folgt. Durch Verbindung dieser Gleichung mit der obigen (p) erhält man nun:

$$y - m = y' - m' - i\sec\varphi - c[\operatorname{tg}\varphi(Z\cos\delta + \sin\delta) - Z\sin\delta + \cos\delta].$$

Der Coefficient von c kann auch in der Form:

$$Z(\operatorname{tg}\varphi\cos\delta - \sin\delta) + (\operatorname{tg}\varphi\sin\delta + \cos\delta) =$$
$$= \sec\varphi\,[Z\sin(\varphi - \delta) + \cos(\varphi - \delta)]$$

geschrieben werden; es ist aber $\varphi - \delta$ die Meridianzenithdistanz des Zeitsternes, für welche, da die Beobachtung nahe am Meridiane stattfindet, die Zenithdistanz z zur Zeit der Beobachtung gesetzt werden kann; hierdurch wird dieser Coefficient, mit Einführung des Werthes von Z:

$$\sec\varphi\left\{\frac{1 - \cos(z + z')}{\sin(z + z')}\sin z + \cos z\right\} = \sec\varphi\,\frac{\sin z + \sin z'}{\sin(z + z')}$$
$$= \sec\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(z' - z)}{\cos\frac{1}{2}(z' + z)},$$

somit:

$$y - m = (y' - m') - i\sec\varphi - c\sec\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(z' - z)}{\cos\frac{1}{2}(z' + z)},$$

welcher Werth, in Gl. (f) substituirt, x gibt.

Mit Weglassung der nunmehr unnöthigen Accente sind daher die zur Rechnung erforderlichen Formeln folgende:

$$\begin{aligned}
\tau &= (\alpha - u) - (\alpha' - u'),\\
\operatorname{tg}\xi &= \frac{\sec\delta\operatorname{cotg}\delta'\sin\tau}{1 - \operatorname{tg}\delta\operatorname{cotg}\delta'\cos\tau},\\
\sin\eta &= \frac{\sin f}{\sin(z + z')},\\
\operatorname{tg} y &= \operatorname{tg}(\xi + \eta)\sin\delta,\\
\sin m &= \operatorname{tg}(\xi + \eta)\cos\delta\cos y\operatorname{tg}\varphi,\\
x &= \alpha - u + \tfrac{1}{15}(y - m) - i\sec\varphi - c\sec\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(z' - z)}{\cos\frac{1}{2}(z' + z)}.
\end{aligned} \qquad (192)$$

Bezeichnet man, wie gewöhnlich, mit $90^0 + c$ den Winkel, welchen das Kreisende der Axe mit der Richtung der Absehenlinie gegen das Objectiv hin einschliesst, so gilt der Ausdruck von x unmittelbar für Kreis West; bei Kreis Ost erhält das mit c behaftete Glied entgegengesetztes Zeichen.

Es genügt, die Werthe von z und z' aus der zur Aufsuchung der Sterne berechneten Ephemeride zu nehmen, und die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen zu führen. Im Falle der Zeitstern nördlich vom Zenith culminiren würde, ist z negativ zu nehmen. Ist der Polstern am Mittelfaden beobachtet, so ist $f = 0$ und $\eta = 0$.

180. Wie schon früher bemerkt, werden die Zeitsterne an allen Fäden beobachtet und wir benöthigen daher einer Formel zur Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden. Im Dreiecke APS (Fig. 90) ist $AS = 90^0 + c$, oder $= 90^0 + c + f$, je nachdem der Stern an dem Mittelfaden oder einem in dem Abstande f östlich von diesem befindlichen Seitenfaden beobachtet ist; bezeichnen wir daher die Stundenwinkel des Sternes am Mittel- und Seitenfaden mit t, t', und zählen diese Stundenwinkel von Süd über West von 0^0 bis 360^0, so wird der Winkel $APS = APZ + ZPS = 90^0 - m + 360^0 - t = 360^0 + 90^0 - (t + m)$, beziehungsweise $= 360^0 + 90^0 - (t' + m)$; das Dreieck liefert daher die Gleichungen:

$$\sin c = \sin n \sin \delta - \cos n \cos \delta \sin(t + m),$$
$$\sin(f + c) = \sin n \sin \delta - \cos n \cos \delta \sin(t' + m),$$

und wir erhalten durch Subtraction derselben, die Differenzen der Sinus in Producte umsetzend:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} f \cos(\tfrac{1}{2} f + c) = 2 \cos n \cos \delta \sin \tfrac{1}{2}(t - t') \cos[\tfrac{1}{2}(t + t') + m].$$

Im 1ten Theile kann, da $\frac{1}{2} f$ nie $10'$ erreichen und c immer nur wenige Bogensecunden betragen wird, $\cos \frac{1}{2} f$ statt $\cos(\frac{1}{2} f + c)$ gesetzt werden, wodurch dieser Theil $= \sin f$ wird.

Im 2ten Theile ist $t - t' = l$ die gesuchte Reduction vom Seitenfaden auf den Mittelfaden; wir erhalten daher, die Gleichung für $\sin \frac{1}{2}(t - t')$ auflösend, da $\frac{1}{2}(t + t') = t - \frac{1}{2}(t - t') = t - \frac{1}{2} l$ ist:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} l = \frac{\sin f \sec \delta}{\cos n \cos(t - \frac{1}{2} l + m)}.$$

Bezeichnet man den Nenner des Bruches mit N, so wird durch Auflösung des Cosinus:

$$N = \cos n \cos m \cos(t - \tfrac{1}{2} l) - \cos n \sin m \sin(t - \tfrac{1}{2} l).$$

Aus dem Dreiecke APZ, in welchem $\angle AZP = 90^0 + k$ ist, folgt aber, wenn man die Neigung $i = 0$ annimmt, also $AZ = 90^0$ setzt:

$$\cos n \cos m = \cos k, \quad \cos n \sin m = \sin \varphi \sin k.$$

Substituirt man diese Werthe und löst den Cosinus und Sinus von $(t - \frac{1}{2} l)$ auf, so kommt:

$$N = (\cos t \cos k - \sin t \sin \varphi \sin k) \cos \tfrac{1}{2} l + (\sin t \cos k + \cos t \sin \varphi \sin k) \sin \tfrac{1}{2} l.$$

Der Winkel k steht nun mit dem Azimuthe A des Sternes am Mittelfaden in der durch die Glgn. (r) [s. Anmerk. zu dem vorherg. §.] gegebenen Beziehung, wobei A von Süd über West von 0^0 bis 360^0 gezählt, und in der 2ten Gleichung $f = 0$ zu setzen ist. Setzt man daher, was bei der vorliegenden Aufgabe zulässig ist, die sehr kleinen Grössen i und c gleich Null, so ist, wenn der bisherigen Annahme zufolge, der Vertical des Instrumentes von Süd gegen Ost ausweicht:

$$k = 360^0 - A, \quad \text{oder} \quad k = 180^0 - A,$$

je nachdem der Stern östlich oder westlich vom Meridiane steht.

Weicht jedoch der Vertical des Instrumentes von Süd gegen West aus, in welchem Falle k negativ wird, so ist:

$$k = - A, \quad \text{oder} \quad k = 180^0 - A,$$

je nachdem der Stern westlich oder östlich vom Meridiane beobachtet wurde. Durch Substitution dieser Werthe von k in den obigen Ausdruck von N erhält man nun:

$$N = \pm (\cos t \cos A + \sin t \sin \varphi \sin A) \cos \tfrac{1}{2} l$$
$$\pm (\sin t \cos A - \cos t \sin \varphi \sin A) \sin \tfrac{1}{2} l,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem der südliche Theil des Verticals des Instrumentes und der Stern auf derselben Seite, oder auf der entgegengesetzten Seite des Meridianes liegen.

Man hat aber, wenn q den parallaktischen Winkel des Sternes zur Zeit seines Antrittes am Mittelfaden bedeutet, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos q &= \cos t \cos A + \sin t \sin \varphi \sin A, \\ -\sin \delta \sin q &= \sin t \cos A - \cos t \sin \varphi \sin A, \end{aligned}\right\} \quad (s)$$

welche sich durch Anwendung der Glgn. (13) [S. 90] auf das Dreieck zwischen Zenith, Pol und Stern ergeben, womit:

$$N = \pm (\cos q \cos \tfrac{1}{2} l - \sin \delta \sin q \sin \tfrac{1}{2} l)$$

wird. Substituirt man endlich diesen Werth in die obige Gleichung für $2 \sin \frac{1}{2} l$, multiplicirt Zähler und Nenner des Bruches mit $\sec q$, und überdies die ganze Gleichung mit $\cos \frac{1}{2} l$, so erhält man:

$$\sin l = \pm \frac{\sin f \sec \delta \sec q}{1 - \sin \delta \operatorname{tg} q \operatorname{tg} \frac{1}{2} l}. \qquad (193)$$

Bei dem Gebrauche dieser, so wie der folgenden Formeln (194) und (195) ist auf die Zeichen wohl zu achten, und zwar ist: 1) f positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Seitenfaden östlich oder westlich vom Mittelfaden; 2) das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem der südliche Theil des Verticals des Instrumentes und der beobachtete Stern auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Meridians liegen; endlich 3) der Winkel q in jenem Quadranten zu nehmen, in welchem ihn die Glgn. (24) [Seite 93], übereinstimmend mit den obigen Glgn. (s), ergeben, wobei der Stundenwinkel t, beziehungsweise das Azimuth von Süd über West von 0 bis 360^0 zu zählen ist. Berechnet man den Winkel q mittelst der Gleichung:

$$\operatorname{tg} q = \frac{\sin t}{\operatorname{tg}\varphi \cos\delta - \sin\delta \cos t},$$

welche man durch Division der Glgn. (24) erhält, so bestimmt sich der Quadrant, in welchem q zu nehmen, durch die Bemerkung, dass, je nach dem Zeichen von tg q, q im 1^{ten} oder 2^{ten} Quadranten zu nehmen ist, wenn der Stern westlich vom Meridiane, im 3^{ten} oder 4^{ten} aber, wenn er östlich von demselben beobachtet wurde. Der Stundenwinkel t ergibt sich aus der beobachteten Antrittszeit des Sternes am Mittelfaden, mit Zuziehung eines genäherten Uhrstandes. Die Berechnung von l erfolgt durch successive Näherung, indem man zuerst das 1^{te} Glied im Nenner vernachlässigt, wodurch man einen genäherten Werth von l erlangt, diesen mit Beachtung seines Vorzeichens im 2^{ten} Theile substituirt und auf diese Art fortfährt, bis man zu einem stehenden Werthe gelangt.

Die Gl. (193) ist, bis auf die Vernachlässigung des Einflusses von Neigung und Collimation, noch strenge, daher auch auf Polsterne anwendbar, und kann, sobald die Vertauschung von sin l mit dem Bogen zulässig ist, auch auf die zur Rechnung bequemeren Formen:

$$l^s = \pm \frac{f^s . \sec\delta \sec q}{1 - \frac{15}{2} \sin 1'' \sin\delta \operatorname{tg} q \,.\, l^s}, \tag{194}$$

oder:

$$l^s = \pm f^s . \sec\delta \sec q + \tfrac{15}{2} \sin 1'' \sin\delta \operatorname{tg} q \,.\, l^{s2} \tag{195}$$

gebracht werden, wobei in letzterer Formel im 2^{ten} Gliede für l der Werth des ersten Gliedes als genäherter Werth angenommen werden kann.

Für Sterne von grösserer Poldistanz, also namentlich für die Zeitsterne bei der hier behandelten Aufgabe, wird das 2^{te} Glied in (195) unmerklich, so dass die einfache Formel:

$$l^s = f^s . \sec\delta \sec q \tag{196}$$

ausreicht, wobei der parallaktische Winkel einfacher aus der Gleichung:

$$\sin q = \frac{\cos\varphi \sin t}{\sin z}$$

gefunden wird.*)

---

*) Man kann sich dieser Gleichung auch bei Anwendung der vorhergehenden Formeln auf Polsterne (oder allgemeiner auf nördlich vom Zenith culminirende Sterne) bedienen; über den Quadranten, in welchem q zu nehmen ist, entscheidet dann das

Der Polstern wird meist nur an einem Faden beobachtet, weil die Beobachtung an mehreren Fäden wegen der langsamen Bewegung des Sternes eine zu lange Zeit in Anspruch nimmt. Ist aber das Ocular mit einem Fadenmikrometer versehen, so kann auch die Vervielfältigung der Beobachtungen des Polsternes leicht und sicher geschehen, indem man den Stern an dem beweglichen Faden bei mehreren Stellungen desselben beobachtet und jedesmal das Mikrometer abliest; durch Vergleichung dieser Lesungen mit jener Lesung, welche man bei Einstellung des beweglichen Fadens auf den Mittelfaden erhält, ergeben sich die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Abstände f des beweglichen Fadens, beziehungsweise des Sternes, vom Mittelfaden.

181. Beispiel. 1843, August 17, wurden zu Kronstadt unter der Polhöhe $\varphi = 59^0\ 59'.5$ folgende Beobachtungen gemacht:

Kreis West.

	Faden I	II	III	IV	V
α *Ursae min.*	—	—	$17^h\ 23^m\ 10^s.0$	—	—
β *Draconis*	$38^s.0$	$3^s.9$	17 28 35 .0	$1^s.4$	$29^s.3$

Neigung der Axe vor der Beobachtung $+\ 0^s.66$
" " " nach " " $+\ 0\ .63$

Mittel $i = +\ 0\ .645$

Kreis Ost.

	V	IV	III	II	I
α *Ursae min.*	—	—	$17^h\ 52^m\ 45^s.5$	—	—
γ *Draconis*	$8^s.1$	$35^s.8$	17 55 1 .4	$31^s.6$	$57^s.1$

Neigung der Axe vor der Beobachtung $+\ 0^s.10$
" " " nach " " $+\ 0\ .16$

Mittel $i = +\ 0\ .13$

Die scheinbaren Oerter der Sterne waren für das gegebene Datum:

	α	δ
α *Ursae min.*	$1^h\ 3^m\ 45^s.70$	$+\ 88^0\ 28'\ 24''.2$
β *Draconis*	17 26 55 .73	$+$ 52 25 25 .5
γ *Draconis*	17 53 0 .35	$+$ 51 30 51 .0

Zeichen von $\sin q$ in Verbindung mit der Bemerkung, dass q im 2ten, beziehungsweise 3ten Quadranten zu nehmen, wenn der Stern in dem oberen von den beiden Digressionspunkten begrenzten Theile seines Parallels beobachtet wurde, im 1ten oder 4ten jedoch, wenn im unteren Theile.

Der Stand der Uhr gegen Sternzeit war näherungsweise $+40^s$; der tägliche Gang $+1^s.72$. Die Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden III waren:

$$\mathrm{I} = 34^s.50, \quad \mathrm{II} = 18^s.74, \quad \mathrm{IV} = 16^s.14, \quad \mathrm{V} = 33^s.33.$$

Aus den um den angenommenen Uhrstand verbesserten Durchgangszeiten am Mittelfaden in Verbindung mit den Rectascensionen findet man die Stundenwinkel und mit diesen die Zenithdistanzen der Sterne, so wie die parallaktischen Winkel der beiden Zeitsterne zur Zeit der Beobachtung:

für *α Urs. min.* K. W. . .	$t = 245^0\ 1'.1$,	$z = 30^0\ 41'$	
„ *β Draconis*	$0\ 34.8$	$7\ 34$	$q = 2^0\ 12'.1$
„ *α Urs. min.* K. O. . .	$252\ 25.0$	$30\ 30$	
„ *γ Draconis*	$0\ 40.3$	$8\ 29$	$2\ 16.5$

und hiemit nach Formel (194) die Reductionen auf den Mittelfaden:

für *β Drac.* . $\mathrm{I} = +56^s.62$, $\mathrm{II} = +30^s.75$, $\mathrm{IV} = -26^s.49$, $\mathrm{V} = -54^s.70$
„ *γ Drac.* . $\mathrm{V} = +53.60$, $\mathrm{IV} = +25.96$, $\mathrm{II} = -30.14$, $\mathrm{I} = -55.48$.

Die auf den Mittelfaden reducirten Antrittszeiten sind daher:

	β Draconis	*γ Draconis*
	$17^h\ 28^m\ 34^s.62$	$17^h\ 55^m\ 1^s.70$
	34 .65	1 .76
	35 .00	1 .40
	34 .91	1 .46
	34 .60	1 .62
Mittel:	17 28 34 .76	17 55 1 .59

Reduciren wir die beobachteten Uhrzeiten mit dem stündlichen Gange $+\frac{1.72}{24} = +0^s.0717$ auf die Epoche 18^h, so erhalten dieselben, der Zeitfolge nach, folgende Correctionen: $-0^s.04$, $-0^s.04$, $-0^s.01$, $-0^s.01$.

Endlich ist an den Rectascensionen noch die tägliche Aberration anzubringen, welche, nach der Formel $+0^s.0207 \cos\varphi \sec\delta \cos t$ (§. 71) berechnet, für *β* und *γ Draconis* $+0^s.02$, für die 1te und 2te Beobachtung des Polaris beziehungsweise $-0^s.16$ und $-0^s.12$ beträgt.

Mit den so verbesserten Grössen steht nun die Rechnung nach den Formeln (192) folgendermassen, wobei zu beachten kommt, dass für beide Kreislagen $f = 0$, also auch $\eta = 0$ ist, weil der Polarstern am Mittelfaden beobachtet wurde.

Kreis West.

α Ursae min. . . . . $u' = 17^h\ 23^m\ 9^s.96$, $\alpha' = 1^h\ 3^m\ 45^s.54$, $\delta' = 88^0\ 28'\ 24''.2$
β Draconis . . . . $u = 17\ 28\ 34.72$, $\alpha = 17\ 26\ 55.75$, $\delta = 52\ 25\ 25.5$
$u' - \alpha' = 16^h\ 19^m\ 24^s.42$, $u - \alpha = 0^h\ 1^m\ 38^s.97$, $\tau = 16^h\ 17^m\ 45^s.45$
$= 244^0\ 26'\ 21''.7$

$\log \sec \delta = 0.21480$	$\log \operatorname{tg} \delta = 0.11382$	$\log i = 9.8096$
$\log \operatorname{cotg} \delta' = 8.42571$	$\log \operatorname{cotg} \delta' = 8.42571$	$\log \sec \varphi = 0.3009$
$\log \sin \tau = 9.95527\, n$	$\log \cos \tau = 9.63495\, n$	0.1105
$8.59578\, n$	$8.17448\, n$	$i \sec \varphi = +\, 1^s.29$
	$-\, 0.01494$	$z = 7^\circ\, 34'$
0.00644	1.01494	$z' = 30\ 41$
$\log \operatorname{tg} \xi = 8.58934\, n$		$z' + z = 38\ 15$
$\log \sin \delta = 9.89902$		$z' - z = 23\ 7$
$\log \operatorname{tg} y = 8.48836\, n$	$y = -\, 1^\circ\, 45'\, 48''.2$	$\log \cos \frac{1}{2}\,(z' - z) = 9.9911$
		$\log \cos \frac{1}{2}\,(z' + z) = 9.9753$
$\log \cos \delta = 9.78520$		0.0158
$\log \cos y = 9.99979$		$\log \sec \varphi = 0.3009$
$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.23841$		0.3167
$\log \sin m = 8.61274\, n$ . . .	$m = -\, 2^\circ\, 20'\, 58''.4$	Coeff. von $c = 2.073$
	$y - m = +\, 0\ 35\ 10\ .2$	
	$\alpha - u = -\, 1^m\, 38^s.97$	
	$\frac{1}{15}\,(y - m) = +\, 2\ 20\ .68$	
	$-\, i \sec \varphi = -\ 1\ .29$	
	$x = +\ 40.42 - 2.073\, c.$	

Kreis Ost.

α *Ursae min.* . . . $u' = 17^h\, 52^m\, 45^s.49,\quad \alpha' = 1^h\, 3^m\, 45^s.58,\quad \delta' = 88^\circ\, 28'\, 24''.2$

γ *Draconis* . . . $u = 17\ 55\ \ 1\ .58,\quad \alpha = 17\ 53\ \ 0\ .37,\quad \delta = 51\ 30\ 51\ .0$

$u' - \alpha' = 16^h\, 48^m\, 59^s.91,\quad u - \alpha = 0^h\, 2^m\, 1^s.21,\quad \tau = 16^h\, 46^m\, 58^s.70$
$= 251^\circ\, 44'\, 40''.5.$

$\log \sec \delta = 0.20599$	$\log \operatorname{tg} \delta = 0.09962$	$\log i = 9.1139$
$\log \operatorname{cotg} \delta' = 8.42571$	$\log \operatorname{cotg} \delta' = 8.42571$	$\log \sec \varphi = 0.3009$
$\log \sin \tau = 9.97757\, n$	$\log \cos \tau = 9.49590\, n$	9.4148
$8.60927\, n$	$8.02123\, n$	$i \sec \varphi = +\, 0^s.26$
	$-\, 0.01050$	
0.00454	1.01050	$z = 8^\circ\, 29'$
$\log \operatorname{tg} \xi = 8.60473\, n$		$z' = 30\ 30$
$\log \sin \delta = 9.89363$		$z' - z = 22\ 1$
$\log \operatorname{tg} y = 8.49836\, n$	$y = -\, 1^\circ\, 48'\, 15''.9$	$z' + z = 38\ 59$
		$\log \cos \frac{1}{2}\,(z' - z) = 9.9919$
$\log \cos y = 9.99978$		$\log \cos \frac{1}{2}\,(z' + z) = 9.9744$
$\log \cos \delta = 9.79401$		0.0175
$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.23841$		$\log \sec \varphi = 0.3009$
$\log \sin m = 8.63693\, n$	$m = -\, 2^\circ\, 29'\, 3''.2$	0.3184
	$y - m = +\, 0\ 40\ 47\ .3$	Coeff. von $c = 2.082$
	$\alpha - u = -\, 2^m\, 1^s.21$	
	$\frac{1}{15}\,(y - m) = +\, 2\ 43\ .15$	
	$-\, i \sec \varphi = -\ 0\ .26$	
	$x = +\ 41\ .68 + 2.082\, c.$	

Wir erhalten somit aus den Beobachtungen

$$\text{bei K. W.: } x = +\,40^s.42 - 2^s.073\, c,$$
$$\text{„ K. O.: } x = +\,41\,.68 + 2\,.082\, c,$$

und durch Subtraction beider Gleichungen: $0 = 1^s.26 + 4.155\, c$, woraus $c = -\,0^s.303$ folgt, welcher Werth, in obige Gleichungen substituirt, den Uhrstand:

$$x = +\,41^s.05 \text{ um } 18^h.0 \text{ Uhrzeit}$$

ergibt.

Sind die Declinationen, also auch die Zenithdistanzen beider Zeitsterne nahe gleich, wie im vorliegenden Beispiele, so erhalten auch die Coefficienten von c nahe denselben Werth, und es ist dann, wenn c klein, das einfache Mittel aus den für beide Kreislagen gefundenen Uhrständen der vom Collimationsfehler befreite Werth des Uhrstandes.

6. Zeitbestimmung mit dem Universal-Instrumente aus beobachteten Azimuthal-Differenzen zweier Sterne.

182. Beobachtet man die Uhrzeit, zu welcher sich ein Stern in einem bekannten Azimuthe befindet, so kann aus dem Dreiecke zwischen Zenith, Pol und Stern mit der Polhöhe, der Declination und dem Azimuthe des Sternes der Stundenwinkel desselben berechnet werden, welcher sodann mit Zuziehung der Rectascension des Sternes und der beobachteten Uhrzeit auf bekannte Weise den Uhrstand gibt.

Zur Berechnung des Stundenwinkels kann man sich der Gleichung (22):

$$\sin\varphi \cos t - \operatorname{cotg} A \sin t = \operatorname{tg}\delta \cos\varphi$$

bedienen, welche sich durch Einführung der mittelst der Gleichungen:

$$g \sin G = \sin\varphi, \quad g \cos G = \operatorname{cotg} A$$

bestimmten Hilfsgrössen g und G in folgende:

$$\sin(G - t) = \frac{\cos\varphi \operatorname{tg}\delta}{g}$$

verwandelt. Auch kann man statt diesen Gleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} G &= \sin\varphi \operatorname{tg} A, \\ \sin(G - t) &= \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} A \cos G = \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{tg}\delta \sin G \end{aligned} \qquad (197)$$

anwenden. Der Uhrstand x ergibt sich dann mittelst der Gleichung:

$$x = \alpha + t - u,$$

wo α die Rectascension des Sternes, u die beobachtete Uhrzeit bedeutet.

Durch Differenziation der Gl. (22) erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$dt = \frac{dA}{\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg} h \cos A} + \frac{\sin h \operatorname{tg} q}{\cos\varphi}\, d\varphi - \frac{\operatorname{tg} q}{\cos\delta}\, d\delta,$$

wo h die Höhe des Sternes, q den parallaktischen Winkel bedeutet. Man erkennt hieraus, dass ein Fehler dA im angenommenen Azimuth A einen um so kleineren Einfluss auf den berechneten Stundenwinkel hat, je kleiner das Azimuth und je grösser die Höhe des beobachteten Sternes ist; auch der Einfluss eines Fehlers in der Polhöhe und der Declination wird um so geringer, je näher am Meridiane der Stern beobachtet wird.

183. Am einfachsten würde sich das Azimuth A des beobachteten Sternes ergeben, wenn jenes eines irdischen Objectes genau bekannt wäre. Stellt man den verticalen Mittelfaden des Fernrohres des Universal-Instrumentes auf das Object ein, und bezeichnet mit M' die Ablesung des Horizontalkreises, mit A' das bekannte Azimuth des Objectes, von Süd über West gezählt, mit M_0 aber die Ablesung des Kreises, wenn die Absehenlinie des Fernrohres nach dem Südpuncte gerichtet ist (den sogenannten Meridianpunct oder Ort des Meridians am Kreise), so ist, in der Voraussetzung, dass die Lesung am Kreise zunimmt, wenn das Fernrohr in der Richtung von Süd gegen West gedreht wird:

$$M_0 = M' - A', \tag{198}$$

wo M' um 360^0 zu vermehren ist, wenn $M' < A'$.

Ist nun A das Azimuth des beobachteten Sternes im Augenblicke seines Durchganges durch den Mittelfaden, M die Ablesung des Kreises, so hat man wieder: $M_0 = M - A$, somit

$$A = M - M_0, \tag{199}$$

oder, durch Verbindung beider Gleichungen:

$$A = A' + (M - M').$$

In Ermangelung eines irdischen Objectes von genau bekanntem Azimuth beobachtet man statt dessen in gleicher Weise einen Polstern, am zweckmässigsten den Polarstern, und berechnet dessen Azimuth A', von Süd über West gezählt, aus der Formel:

$$\operatorname{tg} A' = \frac{\sin t'}{\sin \varphi \cos t' - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta'}, \tag{200}$$

wobei der Stundenwinkel t' aus der beobachteten Uhrzeit des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden mit Zuziehung der Rectascension desselben und eines angenommenen genäherten Uhrstandes x_0 abgeleitet wird. Da der Polarstern sein Azimuth nur sehr langsam ändert, so wird auch ein erheblicherer Fehler in dem angenommenen Uhrstande x_0 einen nur geringen Einfluss auf das berechnete Azimuth A' und die daraus abgeleiteten Grössen: M_0, A und x haben. Im Falle einer grösseren Abweichung des berechneten Uhrstandes x von dem angenommenen x_0 wird man entweder die Rechnung wiederholen, nunmehr von x, als genähertem Werthe ausgehend, oder man kann auch, wenn die Differenz $x - x_0$ nicht zu gross ist, die correspondirende Verbesserung von x auf folgende Weise finden. Durch die Aenderung $= x - x_0$ des angenommenen Uhrstandes wird der Stundenwinkel t' des Polsternes um den gleichen Betrag, somit das berechnete Azimuth A′ desselben um $dA' = \frac{dA'}{dt'}(x - x_0)$ geändert, wodurch auch das Azimuth A des Zeitsternes eine gleiche Aenderung $dA = dA'$ erfährt, welcher wieder die Aenderung $dt = \frac{dt}{dA} \cdot dA'$ des Stundenwinkels des Zeitsternes, und endlich dieser die Aenderung $dx = dt$ des Uhrstandes x entspricht. Hiernach wird:

$$dx = \frac{dt}{dA} \cdot \frac{dA'}{dt'}(x - x_0),$$

oder, mit Rücksicht auf Gl. (50):

$$dx = \frac{\sin z}{\sin z'} \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} \frac{\cos q'}{\cos q}(x - x_0), \tag{201}$$

und der verbesserte Uhrstand $= x + dx$. In diesem Ausdrucke beziehen sich die accentuirten Buchstaben auf den Polstern und bedeuten q, q' die parallaktischen Winkel, welche mittelst der Formel:

$$\sin q = \frac{\cos \varphi \sin A}{\cos \delta} = \frac{\cos \varphi \sin t}{\sin z}$$

leicht erhalten werden. Hiebei ist $\cos q$ stets positiv, das Zeichen von $\cos q'$ jedoch nach der in der Anmerkung, Seite 401, gegebenen Regel zu bestimmen. Für den nahe am Meridian beobachteten Zeitstern kann übrigens $\cos q = 1$ gesetzt werden.

Die Beobachtungen beider Sterne sind, mit jener des Zeitsternes beginnend, symmetrisch in beiden Kreislagen anzustellen und die Ablesungen M, M' des Horizontalkreises wegen der Neigung der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohrs zu verbessern. Nimmt man die Neigung $= i$ positiv, wenn das linke Axenende das höhere, so ist diese Verbesserung der Lesung $= + i \operatorname{cotg} z$ (§. 121), wenn bei einer Drehung des Fernrohrs von links nach rechts die Lesung am Kreise zunimmt. Von dem Einflusse des Collimationsfehlers wird das Mittel aus den für beide Kreislagen abgeleiteten Uhrständen frei sein, wenn dieser Fehler klein ist, die Beobachtungen des Polsternes rasch aufeinanderfolgen und jene des Zeitsternes in der Nähe des Meridians stattfinden, weil in diesem Falle die Aenderungen der Zenithdistanzen der Sterne so klein sein werden, dass das Product $c \operatorname{cosec} z$ [§. 121, a] in beiden Kreislagen denselben Zahlenwerth erhält.

184. Beispiel. Auf der astronomisch-trigonometrischen Station Wetrnik des Dreiecksnetzes in Böhmen wurden 1865, August 10, mit einem Universal-Instrumente mit zwölfzölligem Horizontalkreise folgende Beobachtungen gemacht:

Kreislage	Stern	Uhr	Mikroskop I	Mikroskop II	Libelle links	Libelle rechts
K. R.	*α Herculis*	$16^h\ 44^m\ 59^s.9$	$169^\circ\ 40'\ 59''.3$	$40'\ 56''.9$	20.6	20.9
	„	47 48 .2	170 51 58 .7	51 53 .9	19.9	21.8
	„	50 11 .7	171 52 31 .4	52 25 .9		
	Polaris	16 53 43 .0	1 44 51 .8	44 52 .3	21.7	20.3
	„	56 15 .0	1 45 40 .9	45 41 .2	22.0	20.1
K. L.	*Polaris*	17 0 1 .0	181 47 5 .7	47 0 .3	22.4	19.8
	„	2 26 .0	181 47 47 .4	47 42 .6	23.2	18.9
	α Herculis	17 6 55 .9	359 0 21 .7	0 21 .9		
	„	9 26 .6	0 4 42 .0	4 43 .0	21.4	20.8
	„	17 12 11 .9	1 15 27 .4	15 29 .0	21.1	21.0

Polhöhe $\varphi = 49^\circ\ 1'\ 16''.5$. Die scheinbaren Oerter der Sterne waren:

$$\begin{array}{llll} \alpha\ \textit{Herculis}: & \alpha = 17^h\ 8^m\ 32^s.41, & \delta = 14^\circ\ 33'\ 3''.59 \\ \textit{Polaris}: & \alpha' = 1\ \ 10\ \ 39\ .26, & \delta' = 88\ \ 35\ \ 18\ .05. \end{array}$$

Der Werth eines Niveautheiles $= 1''.89$; hiemit ergeben sich aus den vier Nivellements die folgenden Neigungen der Axe, welchen die Zenithdistanzen der Sterne, für das genäherte Mittel der Zeiten den zur Einstellung dienenden Ephemeriden entnommen, so wie die Correctionen $+\ i \operatorname{cotg} z$ der Lesungen des Horizontalkreises beigefügt sind:

		i	z	i cotg z
K. R.	*α Herculis*	$-\ 1''.04$	$34^\circ\ 45'$	$-\ 1''.50$
„	*Polaris*	$+\ 1\ .56$	41 46	$+\ 1\ .75$
K. L.	„	$+\ 3\ .26$		$+\ 3\ .65$
„	*α Herculis*	$+\ 0\ .33$	34 28	$+\ 0\ .48$

Mit dem angenommenen Uhrstande $x_0 = -\ 32^s.74$ berechnen wir zunächst die den vier Einstellungen entsprechenden Azimuthe des Polarsternes nach Gl. (200), und mittelst dieser und der Ablesungen des Kreises den Ort des Meridians am Kreise in beiden Kreislagen:

	K. R.		K. L.	
t'	$15^h\ 42^m\ 31^s.0$	$15^h\ 45^m\ 3^s.0$	$15^h\ 48^m\ 49^s.0$	$15^h\ 51^m\ 14^s.0$
	$235^\circ\ 37'\ 45''.0$	$236^\circ\ 15'\ 45''.0$	$237^\circ\ 12'\ 15''.0$	$237^\circ\ 48'\ 30''.0$
log cos t'	$9.751700\,n$	$9.744597\,n$	$9.733717\,n$	$9.726526\,n$
log sin φ cos t'	$9.629620\,n$	$9.622517\,n$	$9.611637\,n$	$9.604446\,n$
Num.	$-\ 0.426206$	$-\ 0.419292$	$-\ 0.408919$	$-\ 0.402204$
Nenner	$-\ 27.03739$	$-\ 27.03047$	$-\ 27.02010$	$-\ 27.01338$
log Nenner	$1.431966\,n$	$1.431854\,n$	$1.431687\,n$	$1.431579\,n$
log sin t'	$9.916665\,n$	$9.919910\,n$	$9.924592\,n$	$9.927509\,n$
log tg A'	8.484699	8.488056	8.492905	8.495930
A'	$181^\circ\ 44'\ 54''.91$	$181^\circ\ 45'\ 43''.72$	$181^\circ\ 46'\ 54''.90$	$181^\circ\ 47'\ 39''.72$
Kreis	1 44 52 .05	1 45 41 .05	181 47 3 .00	181 47 45 .00
i cotg z	$+\ 1.75$	$+\ 1.75$	$+\ 3.65$	$+\ 3.65$
M'	1 44 53 .80	1 45 42 .80	181 47 6 .65	181 47 48 .65
$M' - A' = M_0$	179 59 58 .89	179 59 59 .08	0 0 11 .75	0 0 8 .93
Mittel M_0	$179^\circ\ 59'\ 58''.98$		$0^\circ\ 0'\ 10''.34$	

Durch Verbindung der Ablesungen des Kreises bei den sechs Beobachtungen des Zeitsternes mit dem Meridianpuncte M_0 ergeben sich nun die correspondirenden Azimuthe dieses Sternes, aus welchen man mittelst der Glgn. (197) die Stundenwinkel findet, deren jeder einen Werth des Uhrstandes gibt:

	K. R.			K. L.		
Kreis	169° 40′ 58″.10	170° 51′ 56″.30	171° 52′ 28″.65	359° 0′ 21″.80	0° 4′ 42″.50	1° 15′ 28″.20
i cotg z	— 1.50	— 1.50	— 1.50	+ 0.48	+ 0.48	+ 0.48
M	169 40 56.60	170 51 54.80	171 52 27.15	359 0 22.28	0 4 42.98	1 15 28.68
$M - M_0 = A$	-10 19 2.38	—9 8 4.18	—8 7 31.83	—0 59 48.06	+0 4 32.64	+1 15 18.34
log tg A	9.260175 n	9.206264 n	9.154654 n	8.240478 n	7.121165	8.340624
log tg G	9.138095 n	9.084184 n	9.032574 n	8.118398 n	6.999085	8.218544
G	—7° 49′ 31″.35	—6° 55′ 16″.65	—6° 9′ 7″.53	—0° 45′ 8″.93	+0° 3′ 25″.83	+0° 56′ 51″.38
log cos G	9.995937	9.996824	9.997491	9.999963	0.000000	9.999941
log sin $(G - t)$	8.487119 n	8.434095 n	8.383152 n	7.471448 n	6.352172	7.571572
$G - t$	—1° 45′ 33″.04	—1° 33′ 24″.96	—1° 23′ 4″.47	—0° 10′ 10″.76	+0° 0′ 46″.41	+0° 12′ 49″.13
t	—6 3 58.31	—5 21 51.69	—4 46 3.06	—0 34 58.17	+0 2 39.42	+0 44 2.25
	—0ʰ 24ᵐ 15ˢ.89	—0ʰ 21ᵐ 27ˢ.45	—0ʰ 19ᵐ 4ˢ.20	—0ʰ 2ᵐ 19ˢ.88	+0ʰ 0ᵐ 10ˢ.63	+0ʰ 2ᵐ 56ˢ.15
$\alpha + t$	16 44 16.52	16 47 4.96	16 49 28.21	17 6 12,53	17 8 43.04	17 11 28.56
x	— 43.38	— 43.24	— 43.49	— 43.37	—43.56	— 43.34

Hiernach folgt der Uhrstand, im Mittel aus den drei Beobachtungen in jeder Kreislage:

bei K. R. $x = - 43^s.37$
„ K. L. $x = - 43\ .42$

Mittel: $x = - 43\ .40$.

Der Unterschied gegen den angenommenen Uhrstand ist: $x - x_0 = - 10^s.67$. Um die Correction dx zu finden, genügt es, den parallaktischen Winkel q' des Polarsternes mit dem Mittelwerthe $A' = 181^0\ 46'\ 20''$ zu berechnen und für den Zeitstern im Mittel $z = 34^0\ 36'$ und $q = 0$ anzunehmen. Man findet:

log sin A' = 8.4903	log sin z = 9.7542	log sin z' = 9.8235
log cos φ = 9.8167	log cos δ' = 8.3916	log cos δ = 9.9858
log sec δ' = 1.6084	log cos q' = 9.7544	9.8093
log sin q' = 9.9154	7.9002	
q' = 55° 23′	9.8093	
	8.0909	
	log $(x - x_0)$ = 1.0282	
	log dx = 9.1191	$dx = - 0^s.13$.

Es ist somit der verbesserte Uhrstand $= x + dx = - 43^s.53$, giltig für $16^h\ 58^m$ Uhrzeit. Eine Wiederholung der Rechnung, indem man von letzterem Werthe als genähertem Uhrstande ausgeht, würde wieder zu demselben Werthe führen.

Diese Methode der Zeitbestimmung wird bei geodätischen Operationen auf Dreieckspunkten, wo Polhöhe und Azimuth einer Richtung zu bestimmen sind, mit Vortheil angewendet, weil sie wenig Zeit erfordert, mit Ausnahme der Mittagsstunden zu gelegenen, durch andere Beobachtungen nicht in Anspruch genommenen Zeit ausgeführt werden kann und dabei eine völlig genügende Schärfe gewährt. Auch kann die Zeitbestimmung nach diesem Verfahren mit Vortheil mit der Messung des Azimuthes eines irdischen Objectes verbunden werden.

ACHTES CAPITEL.

BESTIMMUNG DER POLHÖHE.

1. Aus beobachteten Zenithdistanzen.

185. Beobachtet man die Zenithdistanz z eines Gestirnes, dessen Rectascension α und Declination δ bekannt sind, zur Uhrzeit u und kennt man den Stand Δu der Uhr gegen Sternzeit, so ist auch der Stundenwinkel $t = u + \Delta u - \alpha$ bekannt und man kann die Polhöhe des Beobachtungsortes aus der Gleichung:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \tag{a}$$

berechnen. Setzt man:

$$\sin\delta = m \sin M$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos M,$$

so wird $\cos z = m \cos(\varphi - M)$ und:

$$\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos t}, \quad \cos(\varphi - M) = \frac{\cos z \sin M}{\sin\delta}.$$

Da der dem $\cos(\varphi - M)$ entsprechende, 180^0 nicht überschreitende Winkel positiv oder negativ genommen werden kann, so erhält man aus letzter Gleichung zwei Werthe von φ, von welchen jener als der dem Beobachtungsorte entsprechende zu nehmen ist, welcher der stets näherungsweise bekannten Breite des Ortes zunächst liegt.

186. Um den Einfluss von Fehlern in den Rechnungselementen auf die berechnete Polhöhe kennen zu lernen, differenzire man die Gl. (a) nach allen darin vorkommenden Grössen; man erhält, behufs Reduction von den Glgn. (19) und (24) Gebrauch machend:

$$d\varphi = \sec A\, dz - \cos\varphi \operatorname{tg} A\, dt + \sec A \cos q\, d\delta, \tag{202}$$

wo A das Azimuth und q den parallaktischen Winkel bedeutet.

Die Coefficienten von dz und dt werden ein Minimum für $A = 0$ oder $= 180^0$, d. i., wenn der Stern im Meridiane beobachtet wird. In diesem Falle wird $\operatorname{tang} A = 0$, es hat ein Fehler im Stundenwinkel, d. i. in der Rectascension des Gestirnes oder dem angenommenen Uhrstande keinen Ein-