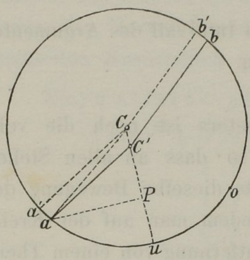
Der Excentricitätsfehler der Kreise.

114. Die auf die Ebene des Kreises senkrechte Umdrehungsaxe der Alhidade (oder des Kreises, wenn dieser mit dem Fernrohre sich dreht und die Alhidade fest steht) soll durch den Mittelpunct der Theilung gehen, weil nur unter dieser Bedingung der Winkel, um welchen das Fernrohr gedreht wird, dem Bogen gleich ist, welchen der Nullpunct des Nonius oder Mikroskopes am Kreise durchläuft. Diese Bedingung wird jedoch auch bei der sorgfältigsten Ausführung der Instrumente nie in aller Strenge erfüllt sein, wodurch ein Fehler in der Ablesung entsteht, welcher der Excentricitätsfehler der Alhidade oder des Kreises genannt wird.

Sei C (Fig. 50) der Mittelpunct der Kreistheilung, C' der Drehungsmittelpunct und $C'a$ die von letzterem, bei irgend einer Richtung des Fernrohres, zum Nullpuncte a des Nonius oder Mikroskopes gezogene Gerade. Wäre nun der Drehungsmittelpunct in C, so würde, bei derselben Richtung des Fernrohres, diese Gerade in die mit $C'a$ parallele Lage Ca' kommen, so dass statt a der Ort a' am Kreise abgelesen würde. Es ist daher der Bogen $aa' = \angle aCa' = a' - a$ (wenn wir die Lesungen mit a und a' bezeichnen) der durch die Excentricität CC' erzeugte Fehler der Ablesung. Es sei 0 der Nullpunct der Theilung, u der Punct derselben, in welchem sie von der verlängerten CC' getroffen wird, der Halbmesser des Kreises $aC = r$, die Excentricität $CC' = e$. Zieht man aP senkrecht auf Cu, so hat man, da $\angle aC'u = \angle a'Cu = a' - u$, aus dem Dreiecke $aC'P$:

Fig. 50.



$$aP = aC' \sin(a' - u), \quad PC' = aC' \cos(a' - u),$$

und aus dem Dreiecke aCu:

$$aP = r \sin(a - u), \quad PC' = r \cos(a - u) - e,$$

mithin:

$$aC' \sin(a' - u) = r \sin(a - u),$$
$$aC' \cos(a' - u) = r \cos(a - u) - e.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, einmal durch Subtraction, nachdem die 1te mit $\cos(a - u)$, die 2te mit $\sin(a - u)$ multiplicirt worden, dann durch Addition, nachdem die 1te mit $\sin(a - u)$, die 2te mit $\cos(a - u)$ multiplicirt worden:

$$aC' \sin(a' - a) = e \sin(a - u),$$
$$aC' \cos(a' - a) = r - e \cos(a - u),$$

und hieraus durch Division:

$$\operatorname{tg}(a'-a)=\frac{e\sin(a-u)}{r-e\cos(a-u)}=\frac{\frac{e}{r}\sin(a-u)}{1-\frac{e}{r}\cos(a-u)},$$

oder: *)

$$a'-a=\frac{e}{r}\sin(a-u)+\tfrac{1}{2}\frac{e^2}{r^2}\sin 2(a-u)+\dots$$

Da aber $\frac{e}{r}$ immer ein so kleiner Bruch ist, dass die Glieder mit den höheren Potenzen unmerklich werden, so hat man in Secunden:

$$a'=a+206265\frac{e}{r}\sin(a-u), \tag{132}$$

wo das zweite Glied die an der Lesung a anzubringende Correction darstellt. Sie erreicht ihren grössten Werth $=206265\frac{e}{r}$ für $a-u=90^0$, d. i. wenn die Richtung $C'a$ senkrecht auf CC' steht, und wegen des grossen Factors ist dieser Werth selbst bei sehr kleiner Excentricität e, welche auch bei der sorgfältigsten Centrirung des Kreises nicht ganz zu vermeiden ist, sehr beträchtlich.

Nehmen wir nun an, die Alhidade trage noch einen zweiten Nonius oder ein zweites Mikroskop bei b (Fig. 50) in einem vorläufig willkürlichen Abstande $=b-a$ von dem ersten, so sind, wenn wieder a und b die Lesungen an beiden Nonien bedeuten, die wegen des Excentricitätsfehlers corrigirten Lesungen:

$$a'=a+\frac{e}{r\sin 1''}\sin(a-u),\quad b'=b+\frac{e}{r\sin 1''}\sin(b-u),$$

deren arithmetisches Mittel:

$$\frac{a'+b'}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{e}{2r\sin 1''}[\sin(a-u)+\sin(b-u)],$$

oder:

$$\frac{a'+b'}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{e}{r\sin 1''}\sin\left(\frac{a+b}{2}-u\right)\cos\frac{b-a}{2}$$

ist. Lassen wir nun $b-a=180^0$ sein, so wird:

$$\tfrac{1}{2}(a'+b')=\tfrac{1}{2}(a+b),$$

d. h. das Mittel der Ablesungen zweier diametral gegenüberstehenden Mikroskope oder Nonien ist völlig frei vom Excentricitätsfehler. Es bedarf kaum

---

*) Ist nämlich $\operatorname{tg}y=\frac{z\sin\varphi}{1-z\cos\varphi}$, und der Zahlenwerth von z nicht grösser als 1, so hat man:

$$y=z\sin\varphi+\tfrac{1}{2}z^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}z^3\sin 3\varphi+\dots.$$

der Erwähnung, dass es genügt, bei der Ablesung die Grade nur an einem bestimmten Nonius oder Mikroskop zu lesen, und das Mittel aus den an beiden gelesenen Minuten und Secunden zu nehmen.

Man kann leicht zeigen, dass dieser Satz allgemein von dem Mittel aus den Lesungen einer beliebigen Anzahl von in gleichen Abständen auf die Peripherie des Kreises vertheilten Nonien gilt.

115. Die Grössen e und u, welche die Excentricität bestimmen, lassen sich aus den Differenzen der Lesungen zweier diametral gegenüberliegender Nonien leicht bestimmen. Bezeichnen wir die Lesungen mit I und II, so sind nach Gl. (132) die corrigirten Lesungen:

$$I + \frac{e}{r \sin 1''} \sin(I - u) \quad \text{und} \quad II + \frac{e}{r \sin 1''} \sin(II - u),$$

deren Differenz offenbar dem Abstande der Nullpuncte beider Nonien oder Mikroskope gleich sein muss. Dieser Abstand wird im Allgemeinen von 180^0 etwas verschieden sein; setzen wir denselben $= 180^0 + x$, so haben wir:

$$II + \frac{e}{r \sin 1''} \sin(II - u) - I - \frac{e}{r \sin 1''} \sin(I - u) = 180^0 + x,$$

oder, wenn die bekannte Grösse $II - I - 180^0 = \varDelta$ gesetzt wird:

$$\varDelta = x + \frac{e}{r \sin 1''} [\sin(I - u) - \sin(II - u)].$$

Man kann nun im zweiten Gliede ohne merklichen Fehler $II - u = I - u + 180^0$ setzen, und erhält dadurch:

$$\varDelta = x + \frac{2e}{r \sin 1''} \sin(I - u),$$

oder, wenn man den $\sin(I - u)$ auflöst, und

$$\frac{2e}{r \sin 1''} \cos u = y, \qquad \frac{2e}{r \sin 1''} \sin u = -z$$

setzt:

$$\varDelta = x + y \sin I + z \cos I.$$

Liest man also die beiden Nonien bei drei verschiedenen Stellungen der Alhidade ab, so erhält man drei solche Gleichungen, aus welchen sich die Unbekannten x, y, z ergeben, und man hat dann:

$$\operatorname{tg} u = -\frac{z}{y}, \quad \frac{e}{r \sin 1''} = \frac{y}{2 \cos u} = -\frac{z}{2 \sin u}.$$

Zur Erzielung einer grösseren Genauigkeit wird man eine grössere Anzahl von Lesungen bei verschiedenen Stellungen der Nonien machen und sodann die wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Normalgleichungen:

$$\Sigma \Delta = nx + y \Sigma \sin I + z \Sigma \cos I,$$
$$\Sigma \Delta \sin I = x \Sigma \sin I + y \Sigma \sin I^2 + z \Sigma \sin I \cos I,$$
$$\Sigma \Delta \cos I = x \Sigma \cos I + y \Sigma \sin I \cos I + z \Sigma \cos I^2$$

erhalten, wo n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet.

Die Rechnung wird sehr einfach, wenn man die Peripherie 2π in n gleiche Theile theilt und das Mikroskop I der Reihe nach auf die Theilstriche $0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, 3\frac{2\pi}{n}, \ldots (n-1)\frac{2\pi}{n}$ einstellt. Es wird dann nach bekannten Sätzen über die periodischen Functionen *):

$$\Sigma \sin I = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin \mu \frac{2\pi}{n} = 0, \qquad \Sigma \cos I = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \cos \mu \frac{2\pi}{n} = 0,$$

$$\Sigma \sin I \cos I = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \sin \mu \frac{2\pi}{n} \cos \mu \frac{2\pi}{n} = 0,$$

$$\Sigma \sin I^2 = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \left(\sin \mu \frac{2\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2}, \qquad \Sigma \cos I^2 = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \left(\cos \mu \frac{2\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2},$$

wodurch sich die vorhergehenden Gleichungen in folgende einfache verwandeln:

$$\Sigma \Delta = nx, \quad \Sigma \Delta \sin I = \tfrac{1}{2} ny, \quad \Sigma \Delta \cos I = \tfrac{1}{2} nz,$$

aus welchen sofort:

$$x = \frac{\Sigma \Delta}{n}, \quad y = \frac{2 \Sigma \Delta \sin I}{n}, \quad z = \frac{2 \Sigma \Delta \cos I}{n}$$

folgt. Wählt man $n = 12$, stellt also den Nonius I auf 0^0, 30^0, $60^0, \ldots 300^0$, so wird auch die Berechnung der Summen $\Sigma \Delta \sin I$, $\Sigma \Delta \cos I$ vereinfacht, weil dann nur Sinus und Cosinus vorkommen, deren Werthe: 0, ± 1, $\pm \frac{1}{2}$ und $\pm \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$ sind.

Beispiel. An dem Horizontalkreise eines Universal-Instrumentes von G. Starke wurden durch Ablesung der zwei gegenüberliegenden Mikroskope folgende Werthe von Δ erhalten:

I	Δ	$\Delta \sin I$	$\Delta \cos I$
0^0	$-$ 1″.1	0″.00	$-$ 1″.10
30	+ 2 .9	+ 1 .45	+ 2 .51
60	+ 5 .3	+ 4 .59	+ 2 .65
90	+ 3 .9	+ 3 .90	0 .00
120	+ 1 .8	+ 1 .56	$-$ 0 .90
150	$-$ 4 .6	$-$ 2 .30	+ 4 .78
180	$-$ 7 .1	0 .00	+ 7 .10
210	$-$ 11 .3	+ 5 .65	+ 9 .79
240	$-$ 14 .2	+ 12 .30	+ 7 .10
270	$-$ 13 .7	+ 13 .70	0 .00
300	$-$ 8 .5	+ 7 .36	$-$ 4 .25
330	$-$ 4 .1	+ 2 .05	$-$ 4 .35
Summen	$-$ 50″.7	+ 50″.26	+ 23″.33

*) Siehe z. B. des Verfassers „Lehrbuch der höheren Mathematik". 2 Aufl. I. Band, Seite 78.

Hieraus folgt:

$$x = -\frac{50''.7}{12} = -4''.22\,; \quad y = \frac{50''.26}{6} = +8''.38\,; \quad z = \frac{23''.33}{6} = +3''.89\,;$$

$$\frac{e}{r \sin 1''} = 4''.62\,, \quad u = -24^0\,54',$$

und es wäre daher, wenn nur das Mikroskop I abgelesen würde, die an jeder Lesung $= I$ desselben anzubringende Correction:

$$= 4''.62 \sin(I + 24^0\,54').$$

116. Hat ein Instrument nur einen Nonius, so muss, wenn auf die Excentricität Rücksicht genommen werden soll, jede Lesung nach Gl. (132) verbessert werden. Die hiezu erforderliche Kenntniss der Elemente e und u kann in diesem Falle nur durch Vergleichung mehrerer mit dem Instrumente gemessener Winkel mit den aus anderen Messungen bereits bekannten wahren Werthen derselben erlangt werden. Sind nämlich a, b die bei der Messung eines Winkels gemachten zwei Ablesungen des Nonius, also $b - a = \alpha$ der durch das Instrument gegebene Werth des Winkels, α' dessen wahrer Werth, und a', b' die vom Excentricitätsfehler befreiten Lesungen, so ist $\alpha' = b' - a'$ und man hat vermöge der Gl. (132):

$$b' - a' = b - a + \frac{e}{r \sin 1''}\,[\sin(b - u) - \sin(a - u)],$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{2e}{r \sin 1''} \sin\left(\frac{b-a}{2}\right) \cos\left(\frac{b+a}{2} - u\right) \\ &= \frac{2e}{r \sin 1''} \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos(\beta - u), \end{aligned} \tag{133}$$

wenn man der Kürze halber die bekannte Grösse $\frac{1}{2}(a + b) = \beta$ setzt, wo nun der Ausdruck rechter Hand die Correction des gemessenen Winkels α darstellt.

Um nun e und u zu bestimmen, bringt man diese Gleichung wieder durch Auflösung des $\cos(\beta - u)$ auf die Form:

$$\varDelta = y \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos\beta - z \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin\beta,$$

wo y und z dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen §. Solcher Gleichungen erhält man so viele, als Winkel, deren wahre Werthe man kennt, gemessen wurden; man findet daraus y und z, und aus diesen Grössen e und u.

Die Theilungsfehler der Kreise.

117. Die Theilungen der Kreise, so vollkommen dieselben sein mögen, sind immer mit kleinen Fehlern behaftet, welche man in zufällige und periodische unterscheidet. Die ersteren befolgen kein bestimmtes Gesetz, so dass die den aufeinanderfolgenden Theilstrichen anhaftenden zufälligen Fehler sowohl dem Betrage als dem Zeichen nach von einander völlig unabhängig sind. Die letzteren sind solche, welche nach bestimmten Intervallen